Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2
УДК 517.926+531.384
MSC 70E18, 70F25, 34A30

Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка*

А. С. Кулешов, А. А. Шишков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Шишков А. А.* Об интегрируемости в квадратурах задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения второго порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 347–353. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.208

В данной работе рассматривается задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения. Обычно при рассмотрении этой задачи принято задавать в явном виде не поверхность, по которой катится шар, а поверхность, по которой при качении движется центр шара. Поверхность, по которой движется центр шара, является эквидистантной к поверхности, по которой катится шар. В этом случае решение задачи сводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Коэффициенты данного уравнения зависят от характеристик поверхности, по которой движется центр шара, ее главных кривизн и коэффициентов Ламе. В случае, когда удается в явном виде найти общее решение соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка, задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения может быть проинтегрирована в квадратурах. Однако найти в явном виде общее решение соответствующего уравнения для произвольной поверхности вращения невозможно. Поэтому представляет интерес вопрос, для каких поверхностей вращения общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка находится в явном виде. В работе предполагается, что поверхность, по которой движется центр шара, представляет собой невырожденную поверхность вращения второго порядка. В этом случае удается найти в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения. Тем самым доказано, что если при качении тяжелого шара по поверхности вращения его центр принадлежит невырожденной поверхности вращения второго порядка, то задача о качении шара может быть проинтегрирована в квадратурах.

Ключевые слова: качение без проскальзывания, однородный шар, поверхность вращения второго порядка, интегрируемость в квадратурах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о качении однородного шара по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр масс G шара, совпадающий с его геометрическим центром [1–3]. Для описания движения шара введем подвижную

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № RAI-RSF-2490).

систему координат $Gx_1x_2x_3$, ось Gx_3 которой направлена по нормали к опорной поверхности. Направления осей Gx_1 и Gx_2 определим позднее. Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные базисные векторы осей Gx_1, Gx_2 и Gx_3 соответственно. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \theta_1\boldsymbol{e}_1+\theta_2\boldsymbol{e}_2+\theta_3\boldsymbol{e}_3$ — угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\boldsymbol{v}_G = u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_3$ — вектор скорости точки G (очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$ — угловая скорость шара. Обозначим через $\boldsymbol{N} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + N\boldsymbol{e}_3$ силу реакции, действующую на шар со стороны опорной поверхности. Через $\boldsymbol{P} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2 + P\boldsymbol{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру масс шара. Пусть M — масса шара, R — его радиус, J — момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр масс. Уравнения движения шара запишем в векторном виде:

$$M\dot{\boldsymbol{v}}_G + \boldsymbol{\Omega}\times M\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}, \tag{1}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}\times J\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{GK}\times\boldsymbol{N}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\boldsymbol{GK} = -R\boldsymbol{e}_3$ — радиус-вектор из центра масс G шара в точку K контакта шара с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, следовательно,

$$\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{GK} = 0. \tag{3}$$

В скалярной форме уравнения (1)–(3) записываются следующим образом:

$$M\dot{u} - M\theta_3 v = X + F_1, \quad M\dot{v} + M\theta_3 u = Y + F_2, \quad M\theta_1 v - M\theta_2 u = P + N; \tag{4}$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F_2R,\ J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -F_1R,\ \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \tag{5}$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \tag{6}$$

Исключая F_1, F_2, ω_1, ω_2 из уравнений (4)–(6), получаем

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2X}{J+MR^2} + \frac{JR\theta_1\omega_3}{J+MR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2Y}{J+MR^2} + \frac{JR\theta_2\omega_3}{J+MR^2}. \tag{7}$$

Центр масс G шара движется по поверхности, полученной из данной опорной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу R шара. Направим оси Gx_1 и Gx_2 по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Получим теперь линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого приводится решение рассматриваемой задачи.

2. Вывод основного уравнения. Пусть поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, которая задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\boldsymbol{r} = \left(\rho\,(q_1)\cos q_2,\ \rho\,(q_1)\sin q_2,\ \zeta\,(q_1)\right). \tag{8}$$

В уравнении (8) через q_1, q_2 обозначены гауссовы координаты на поверхности. Поверхность вращения (8) получается, если кривую, заданную параметрически уравнениями $\rho = \rho\,(q_1)$, $\zeta = \zeta\,(q_1)$, повернуть вокруг некоторой вертикальной оси, при этом q_2 — угол поворота.

Тогда компоненты θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ системы координат $Gx_1x_2x_3$ будут равны (см. [1])

$$\theta_1 = h_2 k_2 \dot{q}_2, \quad \theta_2 = -h_1 k_1 \dot{q}_1, \quad \theta_3 = \frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}. \tag{9}$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены коэффициенты Ламе данной поверхности, а через k_1, k_2 — ее главные кривизны, которые вычисляются по формулам [1],

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \tag{10}$$

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d\zeta}{dq_1}\dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}\right)}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \tag{11}$$

Компоненты скорости u и v центра масс G шара связаны с координатами q_1, q_2 и их производными соотношениями (см. [1]):

$$u = h_1 \dot{q}_1, \quad v = h_2 \dot{q}_2, \tag{12}$$

с учетом которых можно переписать выражения для компонент θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ следующим образом:

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{v}{h_1 h_2}\frac{dh_2}{dq_1}. \tag{13}$$

Принимая во внимание формулы (9), (12), (13), а также уравнения неголономных связей (6), из третьего уравнения системы (5) получаем

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2\omega_1 - \theta_1\omega_2 = -\frac{\theta_2 v}{R} - \frac{u\theta_1}{R} = \frac{k_1 uv}{R} - \frac{k_2 uv}{R} = \frac{(k_1 - k_2)\, v h_1 \dot{q}_1}{R}.$$

Переходя в полученном уравнении к новой независимой переменной — координате q_1, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d\omega_3}{dq_1} = \frac{(k_1 - k_2)\, h_1}{R} v. \tag{14}$$

Поскольку движение шара происходит под действием силы тяжести, следовательно имеем $Y = 0$. С учетом этого факта и формул (9), (12), (13), из второго уравнения системы (7) находим, что

$$\dot{v} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1}\dot{q}_1 = -\frac{JRh_1k_1\dot{q}_1}{J + MR^2}\omega_3.$$

В полученном уравнении мы также перейдем к новой независимой переменной — координате q_1, в результате чего данное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dq_1} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{dq_1} = -\frac{JRh_1k_1}{J + MR^2}\omega_3. \tag{15}$$

Система уравнений (14), (15) представляет собой систему двух линейных уравнений первого порядка относительно неизвестных v и ω_3. Решение задачи о качении шара по поверхности такой, что центр масс шара принадлежит заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию системы уравнений (14), (15).

Немного преобразуем данную систему. Введем новые переменные V и Ω по формулам

$$V = h_2 v = \rho\,(q_1)\,v, \quad \Omega = R\omega_3,$$

а также обозначим

$$\frac{J}{J + MR^2} = n^2 < 1.$$

Тогда система уравнений (14), (15) перепишется в виде

$$\frac{d\Omega}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2}\,(k_1 - k_2)\,V, \quad \frac{dV}{dq_1} = -n^2 h_1 h_2 k_1 \Omega. \tag{16}$$

Систему уравнений (16) легко привести к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно V:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} - \frac{1}{h_1 h_2 k_1}\frac{d}{dq_1}\left[h_1 h_2 k_1\right]\frac{dV}{dq_1} + n^2\,(k_1 - k_2)\,h_1^2 k_1 V = 0. \tag{17}$$

Таким образом, задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр масс G шара движется по заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию уравнения (17). Коэффициенты данного уравнения определяются формой поверхности вращения, по которой движется центр шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (17) интегрируется в явном виде, т. е. соответствующая задача приводится к квадратурам. Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться алгоритмом Ковачича [4–6]. Ниже доказано, что если при качении шара его центр движется по невырожденной поверхности второго порядка, то уравнение (17) интегрируется явно.

3. Качение шара по поверхности второго порядка. Рассмотрим задачу о качении шара по поверхности такой, что при качении центр масс шара движется по заданной поверхности вращения второго порядка, причем будем считать, что для данной поверхности выполняется условие $k_1 \neq 0$, т. е. она не является цилиндром или конусом (тот факт, что задача о качении шара по цилиндру и по конусу интегрируется в квадратурах, был доказан еще Раусом [2]). В этом случае кривую, определяющую меридиан соответствующей поверхности вращения, можно задать ее полярным уравнением

$$r\,(q_1) = \frac{p}{1 - e\cos q_1},$$

и следовательно, для функций $\rho\,(q_1)$ и $\zeta\,(q_1)$, определяющих меридиан заданной поверхности вращения, мы будем иметь следующие выражения:

$$\rho\,(q_1) = r\,(q_1)\sin q_1 = \frac{p\sin q_1}{1 - e\cos q_1}, \quad \zeta\,(q_1) = r\,(q_1)\cos q_1 = \frac{p\cos q_1}{1 - e\cos q_1}.$$

Тогда коэффициенты Ламе h_1, h_2 и главные кривизны k_1, k_2 поверхности, вычисляемые по формулам (10), (11), будут равны

$$h_1 = \frac{p}{1 - e\cos q_1}\sqrt{1 + e^2 - 2e\cos q_1}, \quad h_2 = \frac{p\sin q_1}{1 - e\cos q_1},$$

$$k_1 = -\frac{\left(1 - e\cos q_1\right)^3}{p\left(1 + e^2 - 2e\cos q_1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{1 - e\cos q_1}{p\sqrt{1 + e^2 - 2e\cos q_1}}.$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (17) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} + \frac{2e - \left(1 + e^2\right)\cos q_1}{\left(1 + e^2 - 2e\cos q_1\right)\sin q_1}\frac{dV}{dq_1} - \frac{n^2e^2\sin^2 q_1}{\left(1 + e^2 - 2e\cos q_1\right)^2}V = 0. \tag{18}$$

В дифференциальном уравнении (18) сделаем замену независимой переменной по формуле $\cos q_1 = x$. Тогда уравнение (18) примет вид уравнения с рациональными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{2e}{\left(2ex - e^2 - 1\right)}\frac{dV}{dx} - \frac{n^2e^2}{\left(2ex - e^2 - 1\right)^2}V = 0. \tag{19}$$

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение (19) к более простому виду, сделаем замену:

$$y = V\sqrt{2ex - e^2 - 1}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (19) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(1 - n^2\right)e^2}{\left(2ex - e^2 - 1\right)^2}\,y. \tag{20}$$

Уравнение (20) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к данному уравнению алгоритм Ковачича [4–6]. Применение к уравнению (20) алгоритма Ковачича [4–6] показывает, что общее решение данного уравнения может быть представлено в виде

$$y = C_1\left(2ex - e^2 - 1\right)^{\frac{(1+n)}{2}} + C_2\left(2ex - e^2 - 1\right)^{\frac{(1-n)}{2}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для исходного линейного дифференциального уравнения (18) общее решение записывается следующим образом:

$$V = K_1\left(1 + e^2 - 2e\cos q_1\right)^{\frac{n}{2}} + K_2\left(1 + e^2 - 2e\cos q_1\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные интегрирования. Таким образом, нами установлено, что при любых значениях параметров n, p и e линейное дифференциальное уравнение второго порядка (18) интегрируется в явном виде. Следовательно, задача о качении шара по поверхности такой, что центр шара движется по заданной невырожденной поверхности вращения второго порядка, может быть проинтегрирована в квадратурах.

Литература

1. Кулешов А. С., Соломина Д. В. Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 4, 653–660 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.411

2. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge, Cambridge University Press (2013). https://doi.org/10.1017/CBO9781139237284

3. Noether F. *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* Leipzig, Teubner (1909).

4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.* **2** (1), 3–43 (1986). https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80010-4

5. Кулешов А. С., Черняков Г. А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 93–102 (2013).

6. Кулешов А. С., Ицкович М. О. Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 2, 291–299 (2017). https://doi.org/0.21638/11701/spbu01.2017.213

Статья поступила в редакцию 9 августа 2023 г.;
доработана 6 ноября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su
Шишков Александр Александрович — аспирант; shish-tula@yandex.ru

Integrability by quadratures of the problem of rolling motion of a heavy homogeneous ball on a surface of revolution of the second order*

A. S. Kuleshov, A. A. Shishkov

Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Shishkov A. A. Integrability by quadratures of the problem of rolling motion of a heavy homogeneous ball on a surface of revolution of the second order. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 347–353. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.208 (In Russian)

In this paper, we consider the problem of rolling of a heavy homogeneous ball on a perfectly rough surface of revolution. Usually, when considering this problem, it is convenient to specify explicitly the surface along which the center of the ball moves during rolling, instead of the surface along which the ball rolls. The surface on which the center of the ball moves is equidistant to the surface on which the ball is rolling. It is well known, that the considered problem is reduced to the integration the second order linear homogeneous differential equation. In this paper we assume, that the surface along which the center of the ball moves is a non — degenerate surface of revolution of the second order. Using the Kovacic algorithm we prove that the general solution of the corresponding linear differential equation can be found explicitly. This means, that in this case the problem of rolling of a ball on a surface of revolution can be integrated by quadratures.

Keywords: rolling without sliding, homogeneous ball, surface of revolution of the 2^{nd} order, integrability by quadratures.

*This work is supported by Russian Science Foundation (project no. RAI-RSF-2490).

References

1. Kuleshov A. S., Solomina D. V. Liouvillian Solutions in the Problem of Rolling of a Heavy Homogeneous Ball on a Surface of Revolution. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 4, 653–660 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.411 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **54**, iss. 4, 405–410 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121040105].

2. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge: Cambridge University Press (2013). https://doi.org/10.1017/CBO9781139237284

3. Noether F. *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* Leipzig, Teubner (1909).

4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.* **2** (1), 3–43 (1986). https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80010-4

5. Kuleshov A. S., Chernyakov G. A. Application of the Kovacic algorithm for investigation of the problem of motion of a heavy body of revolution on a perfectly rough plane. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* iss. 4, 93–102 (2013). (In Russian)

6. Kuleshov A. S., Itskovich M. O. Nonexistence of Liouvillian solutions in the problem of motion of a rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough plane. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 3, 291–299 (2017). https://doi.org/0.21638/11701/spbu01.2017.213 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **50**, iss. 2, 173–179 (2021). https://doi.org/10.3103/S106345411702008X].

Received: August 9, 2023
Revised: November 6, 2023
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Alexander A. Shishkov — shish-tula@yandex.ru