УДК 517.535 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2
MSC 30A10, 30C10, 30D15

Экстремальные проблемы типа Турана о расположении всех нулей одного класса рациональных функций*

М. Ю. Мир, С. Л. Вали, В. М. Шах

Центральный университет Кашмира,
Индия, Гандербал-191201

Для цитирования: *Мир М. Ю., Вали С. Л., Шах В. М.* Экстремальные проблемы типа Турана о расположении всех нулей одного класса рациональных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 324–331. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.206

В статье мы доказываем неравенство типа Турана для рациональных функций и тем самым расширяем его на более общий класс рациональных функций $r(s(z))$ степени mn с предписанными полюсами, где $s(z)$ — многочлен степени m. Эти результаты не только обобщают некоторые неравенства типа Турана для рациональных функций, но также улучшают и обобщают некоторые известные полиномиальные неравенства.

Ключевые слова: рациональная функция, полиномы, нули, полярная производная, неравенства.

1. Введение. Для каждого натурального n обозначим через $\mathcal{P}_n$ линейное пространство всех многочленов $P(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ степени не выше n над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть D_k^- — множество точек, лежащих внутри $T_k := \{z : |z| = k\}$, и D_k^+ — множество точек, лежащих вне T_k. Если $P \in \mathcal{P}_n$, то по оценке $|P'(z)|$ через $|P(z)|$ на T_1 для всех $z \in \mathbb{C}$, мы имеем следующее знаменитое неравенство Бернштейна [1].

Если $P \in \mathcal{P}_n$, то

$$\max_{z\in T_1} |P'(z)| \leq n \max_{z\in T_1} |P(z)|. \tag{1}$$

Поскольку равенство в (1) выполняется тогда и только тогда, когда все нули $P(z)$ лежат в начале координат, естественно задаться вопросом: что произойдет с неравенством (1), если мы наложим ограничения на расположение нулей P? В связи с этим Туран [2] доказал следующее.

Если все нули $P \in \mathcal{P}_n$ лежат в $T_1 \cup D_1^-$, то

$$\max_{z\in T_1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{z\in T_1} |P(z)|. \tag{2}$$

Неравенство (2) было обобщено Джайном [3] в следующем виде.

*М. Ю. Мир выражает огромную благодарность агентству DST-INSPIRE за финансовую поддержку.

Если $P \in \mathcal{P}_n$ имеет все нули в $T_1 \cup D_1^-$, то для каждой β при $|\beta| \le 1$,

$$\max_{z \in T_1} \left| zP'(z) + \frac{n\beta}{2} P(z) \right| \ge \frac{n}{2} \left\{ 1 + \mathrm{Re}(\beta) \right\} \max_{z \in T_1} |P(z)|. \tag{3}$$

Существует несколько улучшений и обобщений неравенства типа Турана. Ли и др. [4] дали новое измерение неравенствам типа Турана, расширив их до рациональных функций $r \in \mathcal{R}_n$, где

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \left\{ \frac{P(z)}{w(z)} : P \in \mathcal{P}_n \right\}$$

и

$$w(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, $\mathcal{R}_n$ — это множество всех рациональных функций с полюсами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и конечным пределом в точке ∞. В этой статье мы предполагаем, что все полюса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ лежат в D_1^+. Заметим, что для произведения Бляшке справедливо $\mathcal{B} \in \mathcal{R}_n$, где

$$\mathcal{B}(z) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \overline{\alpha_j} z}{z - \alpha_j} \right) = \frac{w^*(z)}{w(z)},$$

при $w^*(z) = z^n \overline{w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \prod_{j=1}^{n} (1 - \overline{\alpha_j} z)$ и $|\mathcal{B}(z)| = 1$ для $z \in T_1$.

Для этого класса рациональных функций Ли и др. [4] доказали следующее.

Если $r \in \mathcal{R}_n$ имеет все нули в $T_1 \cup D_1^-$, то для $z \in T_1$,

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2} |\mathcal{B}'(z)| |r(z)|. \tag{4}$$

Результат точен, и равенство справедливо для рациональной функции

$$r(z) = a\mathcal{B}(z) + b, \quad |a| = |b| = 1.$$

Недавно Мир [5] обобщил неравенство (4) и доказал следующее.

Теорема A. *Если $r \in \mathcal{R}_n$, и все n нули r лежат в $T_k \cup D_k^-, k \le 1$. Тогда для любой β при $|\beta| \le 1$ и $z \in T_1$*

$$\left| zr'(z) + \frac{n\beta}{1+k} r(z) \right| \ge \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{n}{1+k} \big(1 - k + 2Re(\beta) \big) \right\} |r(z)|. \tag{5}$$

В этой статье мы сначала докажем следующее.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Если $r \in \mathcal{R}_n$, и все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-, k \le 1$. Тогда для любой комплексной β при $|\beta| \le 1$ и $z \in T_1$*

$$\begin{aligned} \left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k} r(z) \right| \ge \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} Re(\beta) \right\} |r(z)| + \\ + \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \big(Re(\beta) - |\beta| \big) \right\} \inf_{z \in T_k} |r(z)|. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $t \le n$ обозначает количество нулей $r(z)$.

Результат, недавно доказанный (Mir [6], теорема 2), следует из теоремы 1, если положить $t = n$.

Замечание 1. Для $\beta = 0$ теорема 1 сводится к результату Арунрата и Накпрасита [7], а для $k = 1, \beta = 0$, $t = n$ теорема 1 сводится к результату Азиза и Шаха ([8], теорема 3).

Если в теореме 1 мы предположим, что $r(z)$ имеет полюс порядка n в точке $z = \alpha, |\alpha| > 1$, то $r(z) = \dfrac{P(z)}{(z-\alpha)^n}$, так что

$$r'(z) = \frac{-D_\alpha P(z)}{(z-\alpha)^{n+1}},$$

где

$$D_\alpha P(z) := nP(z) + (\alpha - z)P'(z)$$

обозначает полярную производную $P(z)$ по отношению к точке α. Она обобщает обычную производную в смысле

$$P'(z) = \lim_{|\alpha|\to\infty} \frac{D_\alpha P(z)}{\alpha - z}.$$

Также в этом случае мы имеем

$$\mathcal{B}(z) = \prod_1^n \left(\frac{1-\overline{\alpha}z}{z-\alpha}\right) = \left(\frac{1-\overline{\alpha}z}{z-\alpha}\right)^n.$$

Это дает

$$\mathcal{B}'(z) = \frac{n(1-\overline{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2-1)}{(z-\alpha)^{n+1}}.$$

Используя эти факты, мы сразу получаем из теоремы 1 для $z \in T_1$.

Следствие 1. Если многочлен $P(z)$ имеет все нули в $T_k \cup D_k^-, k \le 1$, то для каждой α при $|\alpha| \ge 1$ и β при $|\beta| \le 1$

$$\left|\frac{-zD_\alpha P(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} + \frac{t\beta}{1+k}\frac{P(z)}{(z-\alpha)^n}\right| \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\left[n\left|\frac{n(1-\overline{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2-1)}{(z-\alpha)^{n+1}}\right| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right]\max_{z\in T_1}\left|\frac{P(z)}{(z-\alpha)^n}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left|\frac{n(1-\overline{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2-1)}{(z-\alpha)^{n+1}}\right| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}(\mathrm{Re}(\beta) - |\beta|)\right]\min_{z\in T_k}\left|\frac{P(z)}{(z-\alpha)^n}\right|.$$

Это дает для $z \in T_1$

$$\left|\frac{zD_\alpha P(z)}{\alpha - z} + \frac{t\beta}{1+k}P(z)\right| \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\left[n\left|\frac{|\alpha|-1}{z-\alpha}\right| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right]|z-\alpha|^n \max_{z\in T_1}\frac{|P(z)|}{|z-\alpha|^n} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left|\frac{n(|\alpha|-1)}{z-\alpha}\right|+\frac{2t-n(1+k)}{1+k}+\frac{2t}{1+k}(\mathrm{Re}(\beta)-|\beta|)\right]|z-\alpha|^n\min_{z\in T_k}\frac{|P(z)|}{|z-\alpha|^n}.$$

Если в следствии 1 мы положим $|\alpha|\to\infty$, то получим следующее.

Следствие 2. Если многочлен $P(z)$ имеет все нули в $T_k\cup D_k^-, k\leq 1$, то для любой комплексной β при $|\beta|\leq 1$, имеем для $z\in T_1$

$$\left|zP'(z)+\frac{t\beta}{1+k}P(z)\right|\geq\frac{t}{1+k}\big(1+Re(\beta)\big)\max_{z\in T_1}|P(z)|+$$
$$+\frac{t}{1+k}\big(1+\mathrm{Re}(\beta)-|\beta|\big)\min_{z\in T_k}|P(z)|.$$

Полагая $k=1,\beta=0$ и $t=n$, следствие 2 сводится к результату Азиза и Дауда ([9], теорема 4).

Пусть $r\in\mathcal{R}_n$ и $s\in\mathcal{P}_m$, тогда их композиция $r\circ s\in\mathcal{R}_{mn}$ определяется как $(r\circ s)z=r(s(z))$.

Здесь

$$r(s(z))=\frac{P(s(z))}{w(s(z))},$$

где $P(s(z))$ обозначает композицию полиномов P и s, и

$$w(s(z))=\prod_{j=1}^{mn}(z-\alpha_j).$$

Произведение Бляшке в этом случае определяется как

$$B(z)=\frac{w^*(s(z))}{w(s(z))}=z^{mn}\frac{\overline{w(s(\frac{1}{\bar{z}}))}}{w(s(z))}=\prod_{j=1}^{mn}\frac{(1-\overline{\alpha_j}z)}{z-\alpha_j},\qquad \alpha_j\in D_1^+.$$

Далее докажем следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Если $r\circ s\in\mathcal{R}_{mn}$, где $s(z)$ — полином степени m и $(r\circ s)(z)\neq 0$ в $D_k^+, k\leq 1$, то для любой комплексной β при $|\beta|\leq 1$, имеем для $z\in T_1$*

$$\left|zs'(z)r'(s(z))+\frac{mt\beta}{(1+k)}r(s(z))\right|\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\left\{|B'(z)|+\frac{2mt-mn(1+k)}{1+k}+\frac{2tm}{1+k}Re(\beta)\right\}|r(s(z))|+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{B'(z)|+\frac{2mt-mn(1+k)}{1+k}+\frac{2tm}{1+k}(Re(\beta)-|\beta|)\right\}m^*,\tag{7}$$

где mt — количество нулей $(r\circ s)(z)$ со счетными кратностями; $m^*=\inf_{z\in T_k}|r(s(z))|$.

Замечание 2. При $\beta=0$, $t=n$, теорема 2 сводится к результату, полученному в (Mir [5], теорема 2), а для $s(z)=z$ теорема 2 сводится к теореме 1.

3. Леммы. Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие леммы.

Первая лемма принадлежит Азизу и Шаху [10].

Лемма 1. Предположим, $r \in \mathcal{R}_n$, и все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \le 1$, тогда для $z \in T_1$

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2}\left(|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k}\right)|r(z)|, \tag{8}$$

где $t \le n$ обозначает количество нулей $r(z)$.

Следующая лемма следует из результата Ахтара и др. [11].

Лемма 2. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, и если все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \le 1$, то для любой комплексной β при $|\beta| \le 1$ и $z \in T_1$

$$\left|zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z)\right| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}Re(\beta)\right\}|r(z)|.$$

4. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $r(z)$ имеет нуль на T_k, тогда $\min\limits_{z \in T_k} |r(z)| = m = 0$ и результат тривиально следует из теоремы A, если взять $t = n$. Предположим, что все нули $r(z)$ лежат в $D_k^-, k \le 1$, так что $m > 0$ и $|r(z)| \ge m$ при $z \in T_k$. Отсюда по теореме Руша следует, что для любой δ при $|\delta| < 1$ все нули

$$F(z) = r(z) + \delta m$$

лежат в $D_k^-, k \le 1$. Применяя лемму 2 к $F(z)$, имеющему t нулей и n полюсов, получаем для $z \in T_1$

$$\left|zF'(z) + \frac{t\beta}{1+k}F(z)\right| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|F()|.$$

Это дает для $z \in T_1$

$$\left|zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}(r(z) + \delta m)\right| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\ \right\}|r(z) + \delta m|.$$

Выбирая подходящим образом аргумент δ в правой части приведенного выше неравенства, и, используя неравенство треугольника в левой части, получим для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} &\left|zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z)\right| + |\delta|\left|\frac{tm\beta}{1+k}\right| \ge \\ &\ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(z)| + \\ &+ \frac{1}{2}|\delta|\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}m. \end{aligned} \tag{9}$$

Полагая $|\delta| \to 1$, получаем для $z \in T_1$

$$\left|zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z)\right| \geq$$
$$\geq \left\{\frac{-t|\beta|}{1+k}\right\}m + \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}(|r(z)|+m). \tag{10}$$

Отсюда следует, что для $z \in T_1$

$$\left|zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z)\right| \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(z)| +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k}(\mathrm{Re}(\beta) - |\beta|)\right\}\inf_{z\in T_k}|r(z)|. \tag{11}$$

$\square$

Доказательство теоремы 2. Так как $r \circ s \in \mathcal{R}_{mn}$ имеет все нули в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$. Пусть $m^* = \min_{z\in T_k}|r(s(z))|$, то $m^* \leq |r(s(z))|$ для $z \in T_k$. Если $r(s(z))$ имеет нуль на T_k, то $m^* = 0$, в этом случае теорема следует тривиально из теоремы A, если положить $s(z) = z$ и $t = n$. Итак, мы предполагаем, что $r(s(z))$ имеет все нули в D_k^-, тогда для каждой δ при $|\delta| < 1$ мы имеем

$$m^*|\delta| < |r(s(z))|, \quad \text{for} \quad z \in T_k.$$

Следовательно, по теореме Руша все нули рациональной функции $T(z) = r(s(z)) + \delta m^*$ лежат в D_k^-. Применяя лемму 2 к рациональной функции $T(z)$, имеющей mt нулей и nm полюсов получаем для $z \in T_1$

$$\left|zT'(z) + \frac{tm\beta}{1+k}T(z)\right| \geq \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2tm-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|T()|.$$

Аналогично, для $z \in T_1$

$$\left|z\big(r(s(z))\big)' + \frac{tm\beta}{1+k}(r(s(z)) + \delta m^*)\right| \geq$$
$$\geq \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(s(z)) + \delta m^*|. \tag{12}$$

Выбрав аргумент δ в правой части подходящим образом, как и в доказательстве теоремы 1, получим для $z \in T_1$

$$\left|z\big(r(s(z))\big)' + \frac{tm\beta}{1+k}r(s(z))\right| + |\delta|\left|\frac{tm\beta}{1+k}m^*\right| \geq$$
$$\geq \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(s(z))| +$$
$$+ |\delta|m^*\left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)}\mathrm{Re}(\beta)\right\}. \tag{13}$$

Пусть $|\delta| \to 1$, получаем для $z \in T_1$

$$\left|z\big(r(s(z))\big)' + \frac{tm\beta}{1+k} r(s(z))\right| \geq$$
$$\geq -\left|\frac{tm\beta}{1+k}\right| m^* + \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(s(z))| +$$
$$+ m^* \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}. \tag{14}$$

Откуда следует, что

$$\left|z\big(r(s(z))\big)' + \frac{tm\beta}{1+k} r(s(z))\right| \geq$$
$$\geq \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}(|r(s(z))| + m^*) - \left|\frac{tm\beta}{1+k}\right| m^*. \tag{15}$$

Теперь $\big(r(s(z))\big)' = r'(s(z))s'(z)$, поэтому из неравенства (15) получаем для $z \in T_1$

$$\left|zs'(z)r'(s(z)) + \frac{tm\beta}{1+k} r(s(z))\right| \geq$$
$$\geq \left\{\frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}(|r(s(z))| + m^*) - \left|\frac{tm\beta}{1+k}\right| m^*. \tag{16}$$

Аналогично, для $z \in T_1$ получаем

$$\left|zs'(z)r'(s(z)) + \frac{mt\beta}{(1+k)} r(s(z))\right| \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k}\mathrm{Re}(\beta)\right\}|r(s(z))| +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k}(\mathrm{Re}(\beta) - |\beta|)\right\}m^*, \tag{17}$$

$\square$

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные предложения.

Литература/References

1. Bernstein S. N. Sur la limitation des dérivées des polynomes. *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 338–340 (1930).

2. Turán P. Über die ableitung von polynomen. *Compos. Math.* **7**, 89–95 (1939).

3. Jain V. K. Generalizations of certain well known inequalities for polynomials. *Glas. Math.* **32**, 45–51 (1997).

4. Li X., Mohapatra R. N. Rodriguez R. S. Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles. *J. London Math. Soc.* **51**, 523–531 (1995).

5. Mir A. Certain estimates of the derivative of a meromorphic function on boundary of the unit disk, Indian. *J. Pure Appl. Math.* **50** (2), 315–331 (2019).

6. Mir A. *Comparison inequalities between rational functions with prescribed poles. RACSAM.* (2021). https://doi.org/10.1007/s13398-021-01023-5

7. Arunrat N., Nakprasit K. M. Bounds of the derivative of some classes of rational functions. *Mathematics and Mathematical Sciences* **52**, 1–7 (2020).

8. Aziz A., Shah W. M. Some refinements of Bernstein- type inequalities for rational functions. *Glas. Math.* **32**, 29–37 (1997).

9. Aziz A., Dawood Q. M. Inequalities for a polynomial and its derivative. *Journal of Approximation theory* **54**, 306–313 (1988).

10. Aziz A., Shah W. M. Some properties of rational functions with prescribed poles and restricted zeros. *Math. Balkanica* **18**, 33–40 (2004).

11. Akhtar T., Malik S. A., Zargar B. A. Turán-type inequalities for rational functions with prescribed poles. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **13**, 1003–1009 (2022).

12. Markov A. On a problem of D. I. Mendeleev. *Zapiski Imperatorskoi Akademii nauk* **62**, 1–24 (1889).

13. Mir M. Y., Wali S. L., Shah W. M. Inequalities for a class of rational functions. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **13** (2), 609–617 (2022).

Статья поступила в редакцию 7 июня 2023 г.;
доработана 18 сентября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Мир Мохаммад Юсуф — д-р, науч. сотр.; myousf@cukashmir.ac.in
Вали Шах Лубна — науч. сотр.; wali@cukashmir.ac.in
Шах Вали Мохаммад — д-р, проф.; shahlw@yahoo.co.in

Extremal problems of Turán-type involving the location of all zeros of a class of rational functions*

M. Y. Mir, S. L. Wali, W. M. Shah

Central University of Kashmir, Ganderbal-191201, India

For citation: Mir M. Y., Wali S. L., Shah W. M. Extremal problems of Turán-type involving the location of all zeros of a class of rational functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 324–331.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.206 (In Russian)

In this paper, we prove a Turán-type inequality for rational functions and thereby extend it to a more general class of rational functions $r(s(z))$ of degree mn with prescribed poles, where $s(z)$ is a polynomial of degree m. These results not only generalize some Turán-type inequalities for rational functions, but also improve as well as generalize some known polynomial inequalities.

Keywords: rational function, polynomials, zeros, polar derivative, inequalities.

Received: June 7, 2023
Revised: September 18, 2023
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Mohammad Yu. Mir — myousf@cukashmir.ac.in
Shah L. Wali — myousf@cukashmir.ac.in
Wali M. Shah — shahlw@yahoo.co.in

*M. Y. Mir expresses his deep gratitude to the DST-INSPIRE agency for financial support.