МАТЕМАТИКА

УДК 517.977
MSC 93A99

Решение локальной граничной задачи управления для нелинейной стационарной системы с учетом контроля вычислительных комплексов

А. Н. Квитко, Н. Н. Литвинов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Квитко А. Н., Литвинов Н. Н.* Решение локальной граничной задачи управления для нелинейной стационарной системы с учетом контроля вычислительных комплексов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 303–315. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.204

В работе предложен алгоритм построения управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса стационарных нелинейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат с учетом возможности контроля исправности функционирования вычислительных комплексов. Найдены конструктивные достаточные условия, гарантирующие существование решения поставленной задачи. Работоспособность алгоритма иллюстрируется при численном моделировании конкретной практической задачи.

Ключевые слова: управление, нелинейная стационарная система, граничные задачи, стабилизация, вычислительный комплекс.

1. Введение. Одна из важных и сложных областей математической теории управления посвящена исследованию проблемы перевода систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) из начального состояния в заданное конечное состояние для различных классов управляющих функций. Решение задач с указанным переводом сводится к решению граничных задач для управляемых систем ОДУ. Исследования граничных задач включают в себя вопросы, связанные с нахождением и оценкой множества конечных состояний, в которые возможен перевод из заданного начального состояния [1–4], и др., нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих указанный перевод [1, 4–7], и др., а также с разработкой конструктивных методов нахождения управляющих функций и соответствующих им решений управляемых систем [1, 3, 4] и др.

Методы решения граничных задач имеют самостоятельный научный интерес, а также могут быть использованы при нахождении оптимальных управлений и траекторий при решении задач управления [8].

Значительный интерес представляют вопросы решения граничных задач для управляемых систем, связанные с возможностью и эффективностью математического моделирования процессов управления. Использование процедуры численного моделирования на различных этапах проектирования систем управления техническими объектами значительно сокращает затраты на разработку и сроки создания. Качество и достоверность результатов численного моделирования зависят от исправности функционирования вычислительных комплексов. В связи с этим обстоятельством возникает проблема разработки алгоритмов построения управления таким образом, чтобы в процессе моделирования можно было контролировать исправность работы вычислительных комплексов. В данной работе задача нахождения искомой управляющей функции и соответствующих функций фазовых координат решается таким образом, что одна из функций фазовых координат считается известным полиномом от независимой переменной. Соответственно, метод контроля подразумевает подход, основанный на сравнении значений фазовой координаты, полученных в результате вычислений, с точными значениями, которые определяются заданным полиномом. Если модуль разности этих значений превышает некоторое пороговое число, то принимается решение на использование резервного компьютера. Аналогичным образом решается задача контроля вычислительных комплексов, расположенных на объекте управления, в процессе формирования управляющего сигнала. Предложенный метод контроля может дополнить, а иногда и заменить традиционные технические инженерные подходы.

Кроме того, предлагаемый алгоритм может быть использован при решении важной и сложной практической задачи выбора шага интегрирования в процессе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений математической модели объекта управления. Трудность решения этой задачи состоит в том, что при больших шагах интегрирования увеличивается методическая погрешность расчетной схемы, а при малых шагах — вычислительная погрешность. По информации о точном значении одной из фазовых координат можно найти сбалансированный шаг интегрирования для выбранной расчетной схемы.

В статье используется подход, предложенный в работах [4, 9, 10]. Главное отличие ее результатов от опубликованных в [4, 9] состоит в том, что решение исходной задачи сводится к решению граничной задачи для нестационарной системы. В статье [10] приведен алгоритм решения граничной задачи, аналогичной той, которая была рассмотрена в [9]. Однако воспользоваться ее результатами при решении поставленной в настоящей статье задачи не представляется возможным, поскольку в формулировке теоремы отсутствует условие $f(0, 0, t) = 0$, фигурирующее в публикации [10].

В настоящей работе одна из фазовых координат задается в виде некоторого полинома. Подобный подход, например, применяется при построении алгоритма управления траекторией беспилотного летательного аппарата на основе концепции обратных задач динамики, изложенной в [11].

Новизна результата состоит в разработке алгоритма решения поставленной задачи и нахождении конструктивного достаточного условия, гарантирующего существование указанного решения.

2. Постановка задачи и основная теорема. Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений системы вида

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x \in R^n$, $u = (u_1, \dots, u_r)^T$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $t \in [0, 1]$.

Здесь x — вектор фазовых координат; u — вектор управления.

Пусть выполнены условия

$$f \in C^{2n}(R^n \times R^r, R^n), f = (f_1, \dots, f_n)^T, \tag{2}$$

$$f(0, 0) = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0) \neq 0. \tag{4}$$

Задача 1. *Найти пару функций* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $x(t) \in C^1([0, 1]; R^n)$, $u(t) \in C^1([0, 1]; R^r)$, *удовлетворяющих системе* (1) *и условиям:*

$$x(0) = x_0, x(1) = 0, x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T, \tag{5}$$

где $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ *— заданный вектор,*

$$x_1(t) = x_1^0 \cdot (1 - t), x_1^0 \in R^1. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$A_0 = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0) - \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(0, 0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(0, 0) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0)\right)^{-1}$,

$B_0 = \{b_{ij}\}$, $\{b_{ij}\} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(0, 0) - \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(0, 0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial u_j}(0, 0) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0, 0)\right)^{-1}$, $i = 2, \dots, n$, $j = 2, \dots, r$.

Пусть $S_0 = (B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-2} B_0)$.

Будем предполагать, что матрица S_0 удовлетворяет условию

$$rank\ S_0 = n - 1. \tag{7}$$

Алгоритм решения поставленной задачи опирается на этапы доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* (2)–(4), (7)*. Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $\forall x_0 \in R^n : \|x_0\| < \varepsilon$ *существует решение задачи 1, которое может быть получено с помощью решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Доказательство теоремы можно разбить на несколько этапов.

3. Формулировки вспомогательных задач и построение вспомогательных систем. Из условий (2)–(4) и теоремы о неявной функции следует существование $\varepsilon_1 > 0$ такого, что для всех $x_1^0, x_i, i = 2, \dots, n, u_j, j = 2, \dots, r : |x_1^0| < \varepsilon_1, |x_i| <$

$\varepsilon_1, |u_j| < \varepsilon_1$ существует функция $u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r)$, удовлетворяющая уравнению

$$-x_1^0 = f_1(x_1^0 \cdot (1-t), x_2, \ldots, x_n, u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r), u_2, \ldots, u_r), \quad t \in [0,1], \tag{8}$$

и условию

$$u_1(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \ t \in [0,1]. \tag{9}$$

После подстановки функции $u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r)$ и $x_1(t)$ из формулы (6) в правую часть всех уравнений системы (1), кроме первого, получим систему

$$\dot{x}_i = f_i(x_1(t), x_2, \ldots, x_n, u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r), u_2, \ldots, u_r), \quad i = 2, \ldots, n, \ t \in [0,1]. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу.

Найти пару функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, *где* $\bar{x}(t) = (x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$, $\bar{u}(t) = (u_2(t), \ldots, u_r(t))^T$, *удовлетворяющих системе* (10) *и условиям*

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \bar{x}(1) = \bar{0}, \bar{x}_0 = (x_2^0, \ldots, x_n^0)^T, \bar{0} = (0, \ldots, 0)_{n-1\times 1}. \tag{11}$$

Пару функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, *удовлетворяющую системе* (10), *и условиям* (11) *будем называть решением задачи* (10), (11).

Замечание 1. *Если подставить решение задачи* (10), (11) *в функцию* $u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r)$, *то будем иметь набор функций* $x_1(t), \bar{x}(t)$ *и* $u_1(t), \bar{u}(t)$, *который является решением задачи 1.*

Введем обозначения:

$$\bar{f}_i(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r) = \\ = f_i(x_1(t), x_2, \ldots, x_n, u_1(t, x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u_2, \ldots, u_r), u_2, \ldots, u_r), \ i = 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Из условий (3), (9) следует

$$\bar{f}_i(t, 0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) = 0, \ \bar{\bar{0}} = (0, \ldots, 0)_{r-1\times 1}, \ i = 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Выполним в системе (10) замену независимой переменной t на τ по формуле

$$t(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}, \ \tau \in [0, \infty), \tag{14}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое вещественное число, подлежащее определению. Условие выбора α указано в [4]. В результате система (10) в векторной форме примет вид

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{f}(t(\tau), x_1^0, \bar{c}, \bar{d}), \bar{f} = (\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n)^T, \tag{15}$$

$$\bar{c}(\tau) = \bar{x}(t(\tau)), \ \ \bar{c} = (c_2, \ldots, c_n)^T, \bar{d}(\tau) = \bar{u}(t(\tau)), \ \ \bar{d} = (d_2, \ldots, d_r)^T. \tag{16}$$

Рассмотрим задачу.

Найти пару функций $\bar{c}(\tau) \in C^1([0,\infty))$, $\bar{d}(\tau) \in C^1([0,\infty))$, *удовлетворяющую системе* (15) *и условиям*

$$\bar{c}(0) = \bar{x}_0, \bar{c}(\tau) \to \bar{0} \quad \textit{при} \quad \tau \to \infty. \tag{17}$$

Указанную пару функций будем называть решением задачи (15), (17).

Замечание 2. *Легко видеть, что после перехода в решении задачи* (15), (17) *к исходной независимой переменной* t *по формулам* (14), (16) *и к пределу при* $t \to 1$, *получим решение задачи* (10), (11).

Для решения задачи (15), (17) введем вспомогательные обозначения:
$\tilde{\bar{c}} = \theta_i \bar{c}$, $\tilde{\bar{d}} = \theta_i \bar{d}$, $\tilde{t} = 1 - \theta_i e^{-\alpha\tau}$, $\theta_i \in [0,1]$, $i = 2, \ldots, n$;
$|k| = \sum_{j=2}^n k_j$; $|m| = \sum_{j=2}^r m_j$, $k! = k_2! \ldots k_n!$, $m! = m_2! \ldots m_r!$.

Представим правую часть системы (10) в виде формулы Тейлора в окрестности точки $(1, \bar{0}, \bar{\bar{0}})$. Тогда после замены (14), (16) она примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\Bigg(\bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) c_j + \sum_{j=2}^{r} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) d_j - \\
- e^{-\alpha\tau} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\Bigg) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\Bigg(\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) c_j c_k + \sum_{j=2}^{r}\sum_{k=2}^{r} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) d_j d_k + \\
+ 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{r} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) c_j d_k - 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) c_j - \\
- 2\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=2}^{r} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j \partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) d_j + e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial t^2}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\Bigg) + \ldots + \\
+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2,} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial {x_2}^{k_2} \ldots \partial {x_n}^{k_n} \partial {u_2}^{m_2} \ldots \partial {u_r}^{m_r} \partial t^l}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) \times \\
\times {c_2}^{k_2} \ldots {c_n}^{k_n} \bar{d}_2^{m_2} \ldots {d_r}^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau} + \\
+ \alpha e^{-\alpha\tau} \times \sum_{|k|+|m|+l=2n-1,} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_2^{m_2} \ldots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{t}(\tau), x_1^0, \tilde{\bar{c}}, \tilde{\bar{d}}) \times \\
\times {c_2}^{k_2} \ldots {c_n}^{k_n} {d_2}^{m_2} \ldots {d_r}^{m_r} (-1)^l e^{-l\alpha\tau},\ i = 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{18}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить при условии ограничений на функцию $\bar{c}(\tau)$:

$$\|\bar{c}(\tau)\| < \varepsilon_1,\ |x_1^0| < \varepsilon_1,\ \|\bar{d}\| < \varepsilon_1. \tag{19}$$

В соответствии с методом, описанным в работе [4], выполним $2n - 1$ преобразований сдвига функции $c_i \to c_i^{2n-1}$. Главная цель этих преобразований состоит в том, чтобы норма слагаемых правой части, которые не содержат компонент векторов $\bar{c}^{2n-1}$ и $\bar{d}$, удовлетворяла оценке $O(e^{-2n\alpha\tau}|x_1^0|),\ \tau \to \infty,\ x_1^0 \to 0$. На первом шаге выполним замену $c_i(\tau)$ на $c_i^1(\tau)$ по формуле

$$c_i = c_i^1(\tau) - e^{-\alpha\tau}\bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}),\ i = 2, \dots, n. \tag{20}$$

Пусть $D^{|k|+|m|+l}\bar{f}_i = \frac{\partial \bar{f}_i^{|k|+|m|+l}}{\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_n^{k_n}\partial u_2^{m_2}\dots\partial u_r^{m_r}\partial t^l}$.

Для компактности записи введем обозначение:

$$F_i(x_1^0) = \bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}),\ i = 2, \dots, n. \tag{21}$$

Из (13), (21) следует

$$F_i(0) = 0,\ i = 2, \dots, n. \tag{22}$$

После подстановки (20) в левую и правую части (18), с учетом введенных обозначений, получим систему:

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i^1}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})F_j(x_1^0)+ \\
+\alpha e^{-3\alpha\tau}\Big(\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})F_j(x_1^0)F_k(x_1^0) + \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})F_j(x_1^0)\Big)+ \\
+\alpha e^{-\alpha\tau}\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})c_j^1 + \sum_{j=2}^{r}\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial u_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})d_j - e^{-\alpha\tau}\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\right)- \\
-\frac{1}{2}\alpha e^{-2\alpha\tau}\left(\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})c_j^1F_k(x_1^0)+\right. \\
\left.+\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})F_j(x_1^0)c_k^1 + 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{r}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})F_j(x_1^0)d_k\right)+ \\
+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\left(\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial x_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})c_j^1c_k^1 + \sum_{j=2}^{r}\sum_{k=2}^{r}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j\partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})d_jd_k+\right. \\
+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{r}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial u_k}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})c_j^1d_k - 2\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})c_j^1- \\
\left.-2\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=2}^{r}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial u_j\partial t}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})d_j + e^{-2\alpha\tau}\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial t^2}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\right) + \dots + \\
+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n-2,}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}\bar{f}_i(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\times \\
\times\big(c_2^1 - e^{-\alpha\tau}F_2(x_1^0)\big)^{k_2}\dots\big(c_n^1 - e^{-\alpha\tau}F_n(x_1^0)\big)^{k_n}d_2{}^{m_2}\dots d_r{}^{m_r}(-1)^le^{-l\alpha\tau}+ \\
+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n-1,}\frac{1}{k!m!l!}D^{|k|+|m|+l}\bar{f}_i(\tilde{t}(\tau), x_1^0, \tilde{\bar{c}}, \tilde{\bar{\bar{d}}})\times \\
\times\big(c_2^1 - e^{-\alpha\tau}F_2(x_1^0)\big)^{k_2}\dots\big(c_n^1 - e^{-\alpha\tau}F_n(x_1^0)\big)^{k_n}d_2{}^{m_2}\dots d_r{}^{m_r}(-1)^le^{-l\alpha\tau}, \\
i = 2, \dots, n.
\end{gathered} \tag{23}$$

С учетом (17), (20)

$$c_i^1(0) = x_i^0 + F_i(x_1^0),\ i = 2, \ldots, n. \tag{24}$$

На следующем шаге выполним замену переменной по формуле

$$\begin{aligned} c_i^1 &= c_i^2(\tau) + e^{-2\alpha\tau}\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}})\right) F_i(x_1^0) = \\ &= c_i^2(\tau) + e^{-2\alpha\tau}\phi_i^2(x_1^0),\ i = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\phi_i^2(x_1^0) = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(1, x_1^0, \bar{0}, \bar{\bar{0}}) F_j(x_1^0)$.

Из (22), (24), (25) следует $c_i^2(0) = x_i^0 + F_i(x_1^0) - \phi_i^2(x_1^0),\ \phi_i^2(0) = 0,\ i = 2, \ldots, n$.

В результате получим систему в новой зависимой переменной $\bar{c}^2$, у которой слагаемые, не содержащие степеней компонент векторов $\bar{c}^2$ и $\bar{d}$, удовлетворяют оценке $O(e^{-2n\alpha\tau}|x_1^0|)$. Используя индуктивный переход и формулы (20), (23) и (25), на k-м шаге получим искомое преобразование сдвига:

$$c_i^{k-1} = c_i^k(\tau) + e^{-k\alpha\tau}\phi_i^k(x_1^0),\ \phi_i^k(0) = 0,\ i = 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Выполним преобразования (26) $2n-1$ раз (см. [4]). Далее если в правой части полученной системы объединить слагаемые, линейные по компонентам вектора $\bar{c}^{2n-1}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$ $i = 1, \ldots, n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора $\bar{d}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$ $i = 1, \ldots, n$, то получим систему

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{c}^{2n-1}}{d\tau} = P(x_1^0) \cdot \bar{c}^{2n-1} + Q(x_1^0) \cdot \bar{d} + \sum_{i=1}^{4} R_i(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d}), \\ R_i = (R_i^2, \ldots, R_i^n)^T,\ i = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{27}$$

Функции R_1^i содержат слагаемые правой части системы (27), линейно зависящие от компонент вектора $\bar{c}^{2n-1}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, где $i \geq n+1$. R_2^i включают слагаемые правой части системы (27), линейно зависящие от компонент $\bar{d}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geq n+1$. В R_3^i входят слагаемые правой части системы (27), нелинейно зависящие от компонент векторов $\bar{c}^{2n-1}$ и $\bar{d}$. R_4^i состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\bar{c}^{2n-1}$ и $\bar{d}$.

После объединения системы (27) с системой (25), (26) из [4], получим аналог системы (27) и начальных данных (28) из [4]:

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{c}^{2n-1} = \bar{P}(x_1^0) \cdot \tilde{c}^{2n-1} + \bar{Q}(x_1^0) \cdot \bar{v} + \sum_{i=1}^{4} \bar{R}_i(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d}), \tag{28}$$

$$\bar{P}(x_1^0) = \begin{pmatrix} P(x_1^0) & Q(x_1^0) \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r-2 \times n+r-2},\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r-2 \times r-1},$$

где $\tilde{c}^{2n-1} = (\bar{c}^{2n-1}, d)^T_{n+r-2\times 1}$; $\bar{R}_i = (R_i^2, \ldots, R_i^n, 0, \ldots, 0)^T_{n+r-2\times 1}, i = 1, \ldots, 4$; O_1, O_2, O_3 — матрицы соответствующих размерностей, состоящие из нулевых элементов; E — единичная матрица,

$$\tilde{c}^{2n-1}(0) = \tilde{c}_0^{2n-1}, \quad \tilde{c}_0^{2n-1} = (\bar{c}_0^{2n-1}, 0, \ldots, 0)^T_{n+r-2\times 1}. \tag{29}$$

Из условия (12) и дифференцирования $f_i, i = 2, \ldots, n$ по компонентам векторов $\bar{x}$, $\bar{u}$ и переменной t как сложных функций получим аналоги равенств (23) и начальных данных (24) из [4] (после замены F на x_1^0 и $4n$ на $2n-1$):

$$
\begin{aligned}
P(x_1^0) = \alpha e^{-\alpha\tau}(A(x_1^0) + \alpha e^{-\alpha\tau} P_2(x_1^0) + \ldots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau} P_n(x_1^0)),\\
Q(x_1^0) = \alpha e^{-\alpha\tau}(B(x_1^0) + \alpha e^{-\alpha\tau} Q_2(x_1^0) + \ldots + \alpha e^{-(n-1)\alpha\tau} Q_n(x_1^0)),
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
c_i^{2n-1}(0) = x_i^0 + F_i(x_1^0) - \phi_i^2(x_1^0) - \ldots - \phi_i^{2n-1}(x_1^0),\ i = 2, \ldots, n,\\
\phi_i^k(x_1^0) = (\phi_2^k(x_1^0), \ldots, \phi_n^{2n-1}(x_1^0)),\ k = 2, \ldots, 2n-1,\ \phi_i^k(0) = 0.
\end{aligned} \tag{31}
$$

По аналогии с (30) из [4] (с учетом замены F на x_1^0) имеем

$$
P_i(x_1^0) \to 0, Q_i(x_1^0) \to 0 \text{ при } x_1^0 \to 0,\ i = 2, \ldots, n.
$$

Кроме того,

$$
A(0) = A_0, B(0) = B_0. \tag{32}
$$

Из условий (20), (25), (26) следует, что существует константа $\varepsilon_2 > 0$: $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, такая, что для всех $\bar{c}^{2n-1}$ и x_1^0, принадлежащих области

$$
||\bar{c}^{2n-1}|| < \varepsilon_2,\ |x_1^0| < \varepsilon_2, \tag{33}
$$

соответствующая функция $\bar{c}(\tau)$ будет принадлежать области (19).

Из условий (2), (3) и построения функций $R_i, i = 1, \ldots, 4$, следует, что в области (19), (33) справедливы оценки:

$$
\|R_1(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d})\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 \|\bar{c}^{2n-1}\|, L_1 > 0, \tag{34}
$$

$$
\|R_2(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d})\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_2 \|\bar{d}\|, L_2 > 0, \tag{35}
$$

$$
\|R_3(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d})\| \leq e^{-\alpha\tau} L_3(\|\bar{c}^{2n-1}\|^2 + \|\bar{d}\|^2), L_3 > 0, \tag{36}
$$

$$
\|R_4(\tau, x_1^0, \bar{c}^{2n-1}, \bar{d})\| \leq e^{-2n\alpha\tau} L_4(x_1^0), L_4(x_1^0) \to 0 \text{ при } x_1^0 \to 0. \tag{37}
$$

Константы $L_i, i = 1 \ldots 4$, зависят от области (19), (33).

Дальнейшее доказательство теоремы будет опираться на лемму.

4. Формулировка вспомогательной леммы. Рассмотрим линейную часть системы (28):

$$
\frac{d}{d\tau}\tilde{c}^{2n-1} = \bar{P} \cdot \tilde{c}^{2n-1} + \bar{Q} \cdot \bar{v}. \tag{38}
$$

Лемма. *Пусть выполнены условия* (2), (7). *Тогда существует* ε_3: $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$ *такое, что для всех* x_1^0: $|x_1^0| < \varepsilon_3$ *существует вспомогательная управляющая функция* $\bar{v}(\tau)$ *вида*

$$
\bar{v}(\tau) = M(\tau)\tilde{c}^{2n-1}, \tag{39}
$$

$$
\|M(\tau)\| = O(e^{(n-1)\alpha\tau}) \text{ } \textit{при}\ \tau \to \infty,
$$

которая обеспечивает экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (38)*, замкнутой вспомогательной управляющей функцией* (39)*.*

Доказательство леммы совпадает с доказательством леммы, приведенным в работе [4], с учетом формул (7), (30), (32) и замены F на x_1^0.

5. Доказательство теоремы. Рассмотрим систему (28), замкнутую вспомогательной управляющей функцией (39):

$$\frac{d\tilde{c}^{2n-1}}{d\tau} = D(\tau)\tilde{c}^{2n-1} + \sum_{i=1}^{4} \bar{R}_i(\tau, x_1^0, \tilde{c}^{2n-1}). \tag{40}$$

Выполним в системе (40) замену переменных по формулам:

$$\tilde{c}^{2n-1} = z(\tau)e^{-(n-1)\alpha\tau},\ \tilde{c}^{2n-1}(0) = z(0). \tag{41}$$

В результате получим

$$\frac{dz}{d\tau} = C(\tau)z + e^{(n-1)\alpha\tau} \sum_{i=1}^{4} \bar{R}_i(\tau, x_1^0, ze^{-(n-1)\alpha\tau}),\ C(\tau) = D(\tau) + \alpha E. \tag{42}$$

Покажем, что все решения системы (42) с начальными условиями (41), которые начинаются в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают.

Принимая во внимание (34)–(37) и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве оценок (56)–(62) (из [4]) в области (19), (33), получим

$$\|z(\tau)\| \le K_5 e^{-\alpha\tau} \|\tilde{c}^{2n-1}(0)\|, \tag{43}$$

где $K_5 > 0$ — постоянная, которая зависит от области (19), (33).

Из (41), (43) следует, что для всех $\tilde{c}^{2n-1}(0)$, x_1^0, принадлежащих области

$$\|\tilde{c}^{2n-1}(0)\| < \frac{\varepsilon_3}{K_5},\ |x_1^0| < \varepsilon_3, \tag{44}$$

решение системы (42) не покидает области (19), (33) (после замены ε_2 на ε_3) и экспоненциально убывает.

Воспользовавшись условием (31), найдем $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x_0$, удовлетворяющих неравенству $\|x_0\| < \varepsilon$, было выполнено условие (44).

Из формулы (41) найдем известную функцию всех $\tilde{c}^{2n-1}(\tau) = (\bar{c}^{2n-1}(\tau), d(\tau))$. В свою очередь, после подстановки $\tilde{c}^{2n-1}(\tau)$ в формулу (39) получим известную функцию $\bar{v}(\tau)$. Далее, используя $\tilde{c}^{2n-1}(\tau)$, с помощью формул (20), (25), (26) будем иметь пару функций $\bar{c}(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$, которая является решением задачи (15), (17).

Если в функциях $\bar{c}(\tau)$, $\bar{d}(\tau)$ вернуться к исходной независимой переменной t по формулам (14), (16), подставить их в выражение $u_1(t, x_1^0, x_2(t), \ldots, x_n(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, перейти к пределу при $t \to 1$ и присоединить функцию $x_1(t)$ из формулы (6), то получим пару функций $x(t)$, $u(t)$, которая является решением исходной задачи 1.

Найденные функции $\bar{x}(t) = \bar{c}(\tau(t))$, $\bar{u}(t) = \bar{d}(\tau(t))$ и $\tilde{v}(t) = \bar{v}(\tau(t))$ удовлетворяют системе

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(x_1(t), \bar{x}, u_1(x_1(t), \bar{x}, \bar{u}), \bar{u}),\ \dot{\bar{u}} = \alpha^{-1}(1-t)^{-1}\tilde{v}(t) \tag{45}$$

и начальным условиям

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \bar{u}(0) = \bar{\bar{0}}. \tag{46}$$

$\square$

Замечание 4. *Из анализа рассуждений, приведенных выше, следует, что после незначительных изменений доказательства теоремы, ее утверждение будет верным, если вместо известной функции* $x_0(t)$*, заданной по формуле* (6)*, будет фигурировать функция* $x_1(t) = p_n(t)$*,* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*, где* $p_n(t)$ *— полином степени* $n \geq 1$*, удовлетворяющий граничному условию* (5)*.*

6. Описание алгоритма управления. Алгоритм решения исходной задачи состоит из следующих этапов:

1) нахождение функции u_1 из условия (8); в результате получаем функцию $u_1(x_1(t), x_2, \dots, x_n, u_2, \dots, u_r)$;

2) построенние системы (10);

3) построение вспомогательной системы (28);

4) решение задачи стабилизации системы (38); в результате получаем вспомогательную управляющую функцию вида (39) в символьном виде;

5) решение задачи Коши для системы (28) с начальными условиями (29), замкнутой вспомогательным управлением, полученным в разделе 4; в результате будем иметь известные функции $\bar{c}^{2n-1}(\tau), \bar{d}(\tau)$;

6) подстановка найденных функций $\bar{c}^{2n-1}(\tau), \bar{d}(\tau)$ в формулу (39) даст известную функцию $\bar{v}(\tau)$;

7) переход в функции $\bar{v}(\tau)$ к исходной независимой переменной t по формуле (14); в результате получим $\tilde{v}(t) = \bar{v}(\tau(t))$;

8) решение задачи Коши (45) с начальными данными (46); в итоге получаем известные функции $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$;

9) подстановка найденных решений $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ в функцию $u_1(x_1(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ и ее вычисление.

Реализация этапов с 1-го по 4-й, а также 6-, 7- и 9-го осуществляется аналитическими методами при помощи средств символьных вычислений, например[1]. 5-й и 8-й пункты выполняются одним из численных методов решения систем ОДУ.

Вычислительная сложность алгоритма составляет

$$O(n^4) + O\left(\tfrac{C_2(n) \cdot \tau_f}{h}\right) + O\left(\tfrac{C_2(n)}{h}\right),$$

где $O(n^4)$ — сложность символьных вычислений; $O\left(\frac{C_2(n) \cdot \tau_f}{h}\right)$ — вычислительная сложность 5-го этапа; $O\left(\frac{C_2(n)}{h}\right)$ — сложность вычисления 8-го этапа; $C_2(n)$ — 3-я функция, характеризующая количество операций, необходимых для вычисления компонент интегрируемой функции; τ_f — конечное значение отрезка времени; h — шаг интегрирования системы ОДУ методом Рунге—Кутты.

7. Решение задачи межорбитального перелета. Рассмотрим задачу перевода материальной точки, движущейся по круговой орбите с постоянной скоростью в центральном поле тяготения, в заданную точку, лежащую в плоскости этой орбиты, при помощи реактивной силы.

[1] SymPy. URL: https://www.sympy.org/en/index.html (дата обращения: 22.02.2023).

В соответствии с [7] система уравнений в отклонениях относительно движения по круговой орбите имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \nu_1(x_1, x_4) + u_1,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = \nu_2(x_1, x_2, x_4) + \nu_3(x_1)u_2\ , \qquad (47)$$

где $x_1 = r - r_0$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \psi - \alpha_0 t$, $x_4 = \dot{\psi} - \alpha_0$, $u_1 = a_\gamma \dot{m}/m$, $u_2 = a_\psi \dot{m}/m$; r_0 — радиус круговой орбиты, $\dot{r}$ — радиальная скорость, ψ — полярный угол, $\dot{\psi}$ — угловая скорость, a_γ, a_ψ — проекция вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление соответственно, $m, \dot{m}$ — масса и скорость изменения массы, α_0 — угловая скорость движения по заданной круговой орбите, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$, $\nu_1 = -\frac{\nu}{(x_1+r_0)^2} + (x_1 + r_0)(x_4+\alpha_0)^2$, $\nu_2 = -2\frac{x_2(x_4+\alpha_0)}{(x_1+r_0)}$, $\nu_3 = \frac{1}{x_1+r_0}$, где $\nu = G \cdot M$; $G = 6.6743 \times 10^{-11}$ м$^3 \cdot$кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная; $M = 5.972 \times 10^{24}$ кг — масса Земли; $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\nu}{r_0^3}}$, $r_0 = 7 \cdot 10^6$ м.

Задача. *Найти функции $x(t)$, $u(t)$, которые удовлетворяют системе* (47) *и условиям:*

$$x_1(0) = 100, x_2(0) = 0.2, x_3(0) = -\alpha_0 \cdot 10^{-6}, x_4(0) = 10^{-5}, x(1) = 0,$$

$$x_4(t) = (3x_4^0 + 2x_3^0) \cdot t^2 - (4x_4^0 + 6x_3^0) \cdot t + x_4^0.$$

Решение поставленной задачи выполнено при помощи алгоритма, описанного в п. 6 при $\alpha = 0.25$. Результаты вычислений представлены на рис. 1, 2.

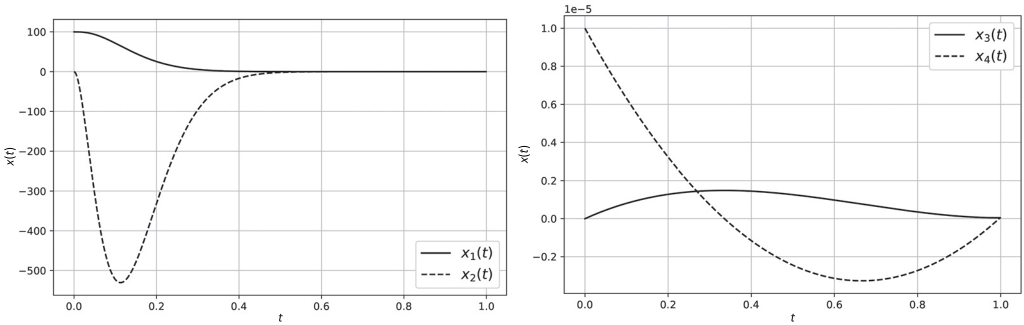

Рис. 1. Графики фазовых координат.

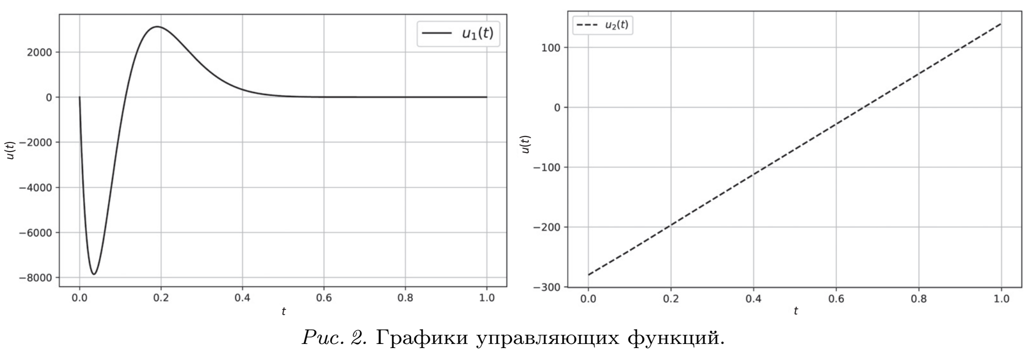

Рис. 2. Графики управляющих функций.

8. Заключение. Предложенный метод может быть использован при разработке алгоритмов проектирования интеллектуальных систем управления с учетом контроля исправности функционирования вычислительных комплексов.

Литература

1. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* Москва, Наука (1975).

2. Крищенко А. П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления. *Автоматика и техника* **6**, 30–36 (1984).

3. Coron, J.-M. Control and Nonlinearity. *Mathematical Surveys and Monographs* **136**. AMS, Providence (2007).

4. Kvitko A. N., Maksina A. M. Chistyakov S. V. On a method for solving a local boundary problem for a nonlinear stationary system with perturbations in the class of piecewise constant controls. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **29**, 4515–4536 (2019).

5. Aeyels D. Controllability for polynomial systems. *Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.* **63**, 542–545 (1984).

6. Qin H. On the controllability of nonlinear control system. *Comput. & Maths. with Appls.* **10** (6), 441–451 (1985).

7. Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* Москва, Наука (1968).

8. Кабанов С. А. Оптимизация параметров систем с коррекцией параметров структуры управления. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1** (59), вып. 2, 254–260 (2014).

9. Квитко А. Н., Фирюлина О. С., Еремин А. С. Алгоритм решения краевой задачи для нелинейной системы и его численное моделирование. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (4), 608–621 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409

10. Квитко А. Н., Литвинов Н. Н. Решение локальной граничной задачи в классе дискретных управлений для нелинейной нестационарной системы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **18**, вып. 1, 18–36 (2022).

11. *Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий.* Красильщикова М. Н., Себрякова Г. Г. (ред.). Москва, Физматлит (2003).

Статья поступила в редакцию 31 марта 2023 г.;
доработана 11 октября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Квитко Александр Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alkvit46@mail.ru
Литвинов Николай Николаевич — аспирант; skaldfire@yandex.ru

Solution of the local boundary problem for nonlinear stationary system with account of the computer systems verification

A. N. Kvitko, N. N. Litvinov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kvitko A. N., Litvinov N. N. Solution of the local boundary problem for nonlinear stationary system with account of the computer systems verification. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 303–315. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.204 (In Russian)

In the article an algorithm of construction of the control function that garantees the translation of nonlinear stationary system of the ordinary differential equations from initial state to origin of the coordinate system with account of the possibility of the on-board computer systems verification is suggested. A constructive sufficient conditions that garafntee an existence of the problem solution are found. An efficiency of the algorithm is shown by numerical modelling of the specific practical problem.

Keywords: control, nonlinear stationary systems, boundary problem, stabilization, computer systems.

References

1. Zubov V. I. *Lectures in control theory.* Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)

2. Krishchenko A. P. Controllability and Attainability Sets of Nonlinear Control Systems. *Avtomatika i tekhnika Автоматика и техника* **6**, 30–36 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *Autom. Remote Control.* **45** (6). Part 1, 707–713 (1984)].

3. Coron J.-M. Control and Nonlinearity. *Mathematical Surveys and Monographs* **136**. AMS, Providence (2007).

4. Kvitko A. N., Maksina A. M. Chistyakov S. V. On a method for solving a local boundary problem for a nonlinear stationary system with perturbations in the class of piecewise constant controls. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **29**, 4515–4536 (2019).

5. Aeyels D. Controllability for polynomial systems. *Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.* **63**, 542–545 (1984).

6. Qin H. On the controllability of nonlinear control system. *Comput. & Maths. with Appls.* **10** (6), 441–451 (1985).

7. Krasovskii N. N. *Theory of control of motion.* Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)

8. Kabanov S. A. Dynamic system optimization using correction of control structure parameters. *Vestnik of Saint-Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (59), iss. 2, 254–260 (2014). (In Russian)

9. Kvitko A. N., Firyulina O. S., Eremin A. S. An algorithm of solution of a boundary value problem for a nonlinear stationary control system it modelling. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (4), 608–621 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **4** (62), iss. 4, 608–621 (2017) https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409].

10. Kvitko A. N., Litvinov N. N. Solution of a local boundary problem for a non-linear non-stationary system in the class of discrete controls. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes* **18**, iss. 1, 18–36 (2022). (In Russian)

11. *Control and guidance of unmanned maneuverable aircraft based on modern information technologies.* Krasilshchikov M. N., Sebryakov G. G. (eds). Moscow, Fizmatlit Publ. (2003). (In Russian)

Received: March 31, 2023
Revised: October 11, 2023
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Aleksandr N. Kvitko — alkvit46@mail.ru
Nikolay N. Litvinov — skaldfire@yandex.ru