К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 517.925.5
MSC 37C75, 34C28, 34D20, 37C29, 37D10, 37D40

Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. I. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками, системы со слабогиперболическими инвариантными множествами

Н. А. Бегун, Е. В. Васильева, Т. Е. Звягинцева, Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А.* Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. I. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками, системы со слабогиперболическими инвариантными множествами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 211–227. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201

Данная статья является первой из цикла обзорных публикаций, посвященных результатам научных исследований, которые проводились на кафедре дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского университета в последние 30 лет. Современные научные интересы сотрудников кафедры могут быть условно разделены на следующие направления и темы: исследование устойчивых периодических точек диффеоморфизмов с гомоклиническими точками, исследования систем со слабогиперболическими инвариантными множествами, локальная качественная теория существенно нелинейных систем, классификация фазовых портретов семейства кубических систем, условия устойчивости систем с гистерезисными нелинейностями и систем с нелинейностями, подчиненными обобщенным условиям Рауса — Гурвица (проблема Айзермана). В данной работе представлены недавние результаты исследований по первым двум из обозначенных выше тем. Изучение устойчивых периодических точек диффеоморфизмов с гомоклиническими точками проводилось в предположении, что устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболической точки (точек) касаются друг друга в гомоклинической (гетероклинической) точке, причем гомоклиническая (гетероклиническая) точка не является точкой с конечным порядком касания. Исследования систем со слабогиперболическими инвариантными множествами проводилось для случая, когда нейтральное, устойчивое и неустойчивое линейные пространства не удовлетворяют условию Липшица.

Ключевые слова: качественная теория дифференциальных уравнений, нетрансверсальная гомоклиническая точка и траектория, гетероклинический контур, устойчивость, гиперболичность, аттрактор, слабо гиперболическое инвариантное множество.

1. Введение. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений в Петербургском университете преподавалась и развивалась как самостоятельная научная дисциплина со времени основания университета. Развитие этой теории связано с именами Л. П. Эйлера, П. Л. Чебышёва, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Н. М. Гюнтера, В. И. Смирнова, Н. П. Еругина, В. А. Плисса, А. Ф. Андреева и их учеников. Научные традиции этих выдающихся ученых продолжаются на кафедре дифференциальных уравнений до настоящего времени.

С 1904 до 1941 г. кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Петербургского (Ленинградского) университета заведовал Николай Максимович Гюнтер (1871–1941). Его учениками были С. Л. Соболев, Н. М. Матвеев и Н. П. Еругин.

В 1943 г. заведующим кафедрой дифференциальных уравнений стал Николай Павлович Еругин (1907–1990). В этом же году он организовал работу Городского семинара по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Под руководством Н. П. Еругина защитили кандидатские диссертации 15 его учеников, пятеро из которых впоследствии стали докторами наук, а двое — членами-корреспондентами АН СССР. Работы Н. П. Еругина и его учеников заложили основы ленинградской школы обыкновенных дифференциальных уравнений. Отправной точкой большинства исследований этой школы служили знаменитые работы А. М. Ляпунова по устойчивости движения и работы А. Пуанкаре по качественной теории дифференциальных уравнений.

Главные результаты, полученные учеными Петербургского (Ленинградского) университета в области теории дифференциальных уравнений до 1941 г., изложены в первом параграфе статьи [1], написанном В. И. Смирновым. Во втором параграфе той же статьи, написанном В. А. Плиссом, рассказано о результатах Н. П. Еругина и его школы. Обзор научных результатов Н. М. Гюнтера представлен в книге [2].

С 1956 по 1960 г. кафедрами математического анализа и дифференциальных уравнений Ленинградского университета заведовал С. М. Лозинский, затем кафедру дифференциальных уравнений и работу городского семинара возглавил Виктор Александрович Плисс (1932–2019).

Профессор В. А. Плисс руководил кафедрой дифференциальных уравнений в течение 60 лет (до 2019 г.), он был известным во всем мире специалистом в области теории нелинейных колебаний, теории устойчивости движения и теории автоматического управления. Среди его учеников — 10 докторов и более 50 кандидатов наук, научные исследования которых известны во всем мире: Ю. Н. Бибиков, Н. Н. Петров, С. Ю. Пилюгин, Л. Я. Адрианова, В. Е. Чернышев, Ю. В. Чурин, А. В. Осипов и многие другие. В 1990 г. В. А. Плисс был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Виктор Александрович — почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета с 2004 г., является автором трех монографий и более 100 статей, в которых изучен целый ряд важных и актуальных до настоящего времени задач теории дифференциальных уравнений и динамических систем. Результаты его научных трудов во многом определили направления научной работы сотрудников кафедры в последние несколько десятилетий. В обзорных статьях [3] и [4] достаточно полно описаны исследования по глобальной и локальной качественной теории дифференциальных уравнений, выполненные на кафедре в прошлом столетии с конца 1960-х годов.

Вместе с В. А. Плиссом с 60-х годов прошлого столетия на кафедре дифференциальных уравнений работал выдающийся специалист в области локальной качественной теории Алексей Федорович Андреев (1923–2017), почетный профессор СПбГУ с 2008 г., автор более 80 статей и двух монографий. Его научным результатам, полученным в последние два десятилетия, будет посвящена отдельная статья.

Много лет на кафедре работает Юрий Николаевич Бибиков, почетный профессор Санкт-Петербургского государственного университета с 2022 г., автор более 70 статей, нескольких монографий по теории многочастотных колебаний и учебника «Курс обыкновенных дифференциальных уравнений». Недавно Ю. Н. Бибиков вместе с учениками фактически завершил исследования проблемы устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения, описывающего поведение возмущенного осциллятора [5].

Данная статья открывает цикл работ, посвященных обзору результатов научных исследований, которые проводились на кафедре дифференциальных уравнений в последние три десятилетия и продолжают вестись в настоящее время. Эти исследования мы условно разделили по шести следующим направлениям и темам: устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками, системы дифференциальных уравнений со слабогиперболическими инвариантными множествами, свойства существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений, классификация фазовых портретов одного семейства кубических систем, системы с гистерезисными нелинейностями с непрерывным и дискретным временем и системы с нелинейностями, подчиненными обобщенным условиям Рауса — Гурвица (проблема Айзермана).

В статье представлены научные результаты, полученные по первым двум из перечисленных выше тем. Каждому из остальных направлений будет посвящен отдельный раздел в следующих статьях этого цикла.

Исследования систем дифференциальных уравнений с гомоклиническими траекториями и гетероклиническими контурами ведутся на кафедре уже в течение полувека. В первом параграфе данной работы представлен обзор результатов по этой теме, полученных уже в нынешнем столетии.

Во втором параграфе статьи дан обзор современных результатов исследований систем дифференциальных уравнений со слабогиперболическими инвариантными множествами. Эти исследования проводились на кафедре с 1991 г. В. А. Плиссом совместно с профессором университета Миннесоты (США) Дж. Р. Селлом (1937–2015), которому в 1989 г. было присвоено звание почетного доктора Ленинградского государственного университета.

2. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками. В 1972 г. В. А. Плисс доказал гипотезу С. Смейла о конечности множества устойчивых периодических решений в структурно устойчивой системе дифференциальных уравнений [6], затем в 1974 г. в работе [7] привел пример структурно неустойчивой системы с бесконечным множеством устойчивых периодических решений, траектории которых лежат в ограниченной части фазового пространства, а именно: устойчивые периодические траектории лежат в окрестности нетрансверсального гетероклинического контура, и их характеристические показатели отделены от нуля. Эти и многие другие результаты, полученные В. А. Плиссом, позднее вошли в монографию [8].

В 1979 г. аспирант кафедры дифференциальных уравнений Б. Ф. Иванов получил достаточные условия существования в окрестности гомоклинической траектории счетного числа двухобходных устойчивых периодических траекторий в случае квадратичного касания устойчивого и неустойчивого многообразий в точках гомоклинической траектории [9].

С 1970 по 1999 г. В. Е. Чернышев [10–16] исследовал окрестность сингулярного гетероклинического контура системы дифференциальных уравнений. Сингулярным гетероклиническим контуром называется связное компактное инвариантное множество автономной системы дифференциальных уравнений, состоящее из конечного числа траекторий и их предельных множеств, являющихся гиперболическими точками покоя или замкнутыми траекториями. В. Е. Чернышев разработал метод, позволяющий строить инвариантные сильно устойчивые слоения над окрестностью гетероклинического цикла и построил символическую динамику для сужения потока на инвариантное множество. Подробный обзор работ В. А. Плисса и В. Е. Чернышева по данной тематике до конца XX в. представлен в [3].

В настоящее время продолжаются исследования систем дифференциальных уравнений с гомоклиническими и гетероклиническими траекториями. В работах Е. В. Васильевой получены достаточные условия наличия в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки диффеоморфизма счетного множества устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Рассмотрим периодическую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \tag{2.1}$$

где x, X — двумерные векторы. Функция X непрерывна по всем аргументам, непрерывно дифференцируема по x, ω — периодична по t: $X(t+\omega,x) = X(t,x)$, $\omega > 0$. Пусть $x(t,x_0)$ решение системы (2.1) с начальными данными $t=0$, $x=x_0$.

Предположим, что $\varphi(t) = x(t,0)$ — такое ω-периодическое гиперболическое решение, что один из его характеристических показателей отрицателен, а другой положителен.

Пусть

$$W^s(\varphi(0)) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t\to+\infty} \|x(t,x_0) - \varphi(t)\| = 0 \right\},$$

$$W^u(\varphi(0)) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t\to-\infty} \|x(t,x_0) - \varphi(t)\| = 0 \right\},$$

тогда *устойчивое и неустойчивое многообразия* решения $\varphi(t)$ определим как

$$W^s(\varphi(t)) = \{(t,x) : x = x(t,x_0), x_0 \in W^s(0)\},$$

$$W^u(\varphi(t)) = \{(t,x) : x = x(t,x_0), x_0 \in W^u(0)\}.$$

Предполагается, что $W^s(\varphi(0)) \bigcap W^u(\varphi(0))$ не сводится к точке 0, пусть $w \in W^s(\varphi(0)) \bigcap W^u(\varphi(0))$, $w \neq 0$, тогда решение системы (2.1) $\psi(t) = x(t,w)$ называется решением, *гомоклиническим* к периодическому решению $\varphi(t)$.

Если $W^s(\varphi(0))$ и $W^u(\varphi(0))$ в точке w пересекаются трансверсально, то решение $\psi(t)$ называется *трансверсальным* гомоклиническим решением. Системы с трансверсальными гомоклиническими траекториями изучал еще А. Пуанкаре. Известно, что окрестность трансверсальной гомоклинической траектории содержит бесконечное множество периодических гиперболических траекторий. Решение называется *нетрансверсальным* гомоклиническим, если оно не является трансверсальным.

Периодические решения, траектории которых не покидают окрестность гомоклинической траектории, делятся на счетное число классов. Решения, принадлежащие одному классу, называются *r-обходными* ($r \in \mathbb{N}$), если их траектории r раз за период проходят вдоль глобального куска гомоклинической траектории.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, $m > 1$ — различные гиперболические ω-периодические решения системы (2.1). Предположим, что один из характеристических показателей у каждого решения отрицателен, а другой — положителен. Ясно, что $\varphi_i(0) \neq \varphi_j(0)$ при $i \neq j$. Предположим, что устойчивое многообразие решения $\varphi_j(t)$ пересекается с неустойчивым многообразием решения $\varphi_{j+1}(t)$ в точках решения $\psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, а решение $\psi_m(t)$ лежит в пересечении устойчивого многообразия решения $\varphi_m(t)$ и неустойчивого многообразия решения $\varphi_1(t)$, тогда $\psi_1(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \psi_m(t)$ называются *гетероклиническими решениями*. Множество, состоящее из траекторий решений $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, $\psi_m(t)$, называется *гетероклиническим контуром* системы (2.1). Ясно, что такой контур лежит в ограниченном множестве фазового пространства. Гетероклинический контур называется *грубым (трансверсальным)*, если устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических решений пересекаются трансверсально во всех точках решений $\psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, в противном случае контур называется *негрубым (нетрансверсальным)*.

Определим для периодической системы дифференциальных уравнений вида (2.1) преобразование Пуанкаре

$$T(x_0) = x(\omega, x_0).$$

Известно, что отображение $T(x_0)$ представляет собой диффеоморфизм фазового пространства системы (2.1). Предположим, что f такой диффеоморфизм плоскости в себя, что он является преобразованием Пуанкаре для периодической системы дифференциальных уравнений. Дальнейшее изложение результатов этого раздела ведется на языке диффеоморфизмов.

Пусть f диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат. Пусть $W^s(0)$, $W^u(0)$ — *устойчивое и неустойчивое многообразия* точки нуль, точнее

$$W^s(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^k(z) \| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^{-k}(z) \| = 0 \right\},$$

где f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f и f^{-1}.

Пусть

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $0 < \lambda < 1 < \mu$.

Предположим, что

$$\lambda\mu < 1. \tag{2.3}$$

Считаем, что f линеен в некоторой ограниченной окрестности V_0 начала координат.

Предполагается наличие *нетрансверсальной гомоклинической точки*, а именно: предполагается, что в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий лежит отличная от нуля точка w, причем эта точка является точкой касания этих многообразий.

Из определения гомоклинической точки следуют следующие равенства:

$$\lim_{k\to+\infty} \| f^k(w) \| = \lim_{k\to+\infty} \| f^{-k}(w) \| = 0.$$

Пусть w_1 и w_2 — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что $w_1 \in V_0$, $w_2 \in V_0$, их координаты имеют вид $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$. Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число τ такое, что $f^\tau(w_1) = w_2$.

Предположим, что при некоторых $\bar\lambda$, $\bar\mu$ таких, что $\lambda < \bar\lambda < 1$, $1 < \bar\mu < \mu$, справедливо включение

$$V = \left\{(x, y) :\ |x| < \bar\lambda^{-1}|x^0|,\ |y| < \bar\mu|y^0|\right\} \subset V_0. \tag{2.4}$$

Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0. \tag{2.5}$$

Пусть

$$U = \left\{(x, y) : |x| < \beta, |y - y^0| < \beta\right\}, \ \beta > 0,$$

такая окрестность точки w_1, что $U \subset V$, $f^\tau(U) \subset V$, и множества V, $f(U), \ldots, f^{\tau-1}(U)$ попарно не пересекаются. Объединение $V \bigcup f(U) \bigcup \ldots \bigcup f^{\tau-1}(U)$ называется *расширенной окрестностью* гомоклинической траектории. Периодическая точка исходного диффеоморфизма $u \in U$ называется r*-обходной* периодической точкой, если ее траектория лежит в расширенной окрестности и пересечение ее траектории с U состоит из r различных точек.

Обозначим через L сужение $f^\tau\,|_U$. Ясно, что L — отображение класса C^1, а матрица $DL(0)$ невырожденная.

Запишем отображение L в координатах

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + F_1(x, y - y^0) \\ F_2(x, y - y^0) \end{pmatrix},$$

где $F_1(x, y - y^0)$, $F_2(x, y - y^0)$ — C^1-функции, определенные в U. Ясно, что $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$. Устойчивое и неустойчивое многообразия касаются друг друга в точке w_2, поэтому

$$\frac{\partial F_2(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Гомоклиническая точка w_2 называется гомоклинической точкой с *касанием порядка* q, где $q > 1$, если

$$\frac{\partial F_2(0, 0)}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial^{q-1} F_2(0, 0)}{\partial y^{q-1}} = 0, \quad \frac{\partial^q F_2(0, 0)}{\partial y^q} \neq 0.$$

Окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки с конечным порядком касания рассматривалась в работах [9, 17–20]. В этом случае в расширенной окрестности нет устойчивых однообходных периодических точек, но в ней могут лежать счетные множества устойчивых двухобходных и трехобходных периодических точек, при этом хотя бы один из характеристических показателей у двухобходных устойчивых периодических точек стремится к нулю с ростом периода. Существование счетного множества устойчивых траекторий зависит от значения величины $(-\ln\lambda)(\ln\mu)^{-1}$. Например, если эта величина рациональна, то в расширенной окрестности гомоклинической точки отсутствуют устойчивые двухобходные и трехобходные периодические точки.

В исследованиях Е. В. Васильевой [21–31] изучается окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки в случае, когда эта точка не является точкой с конечным порядком касания.

Предположим, что координатные функции отображения L имеют вид

$$F_1(x, y-y^0) = ax + b(y-y^0) + \varphi_1(x, y-y^0),$$

$$F_2(x, y-y^0) = cx + g(y-y^0) + \varphi_2(x), \tag{2.6}$$

где a, b, c — действительные числа такие, что

$$b < 0, c > 0, \tag{2.7}$$

а g, φ_1, φ_2 — непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, определенные в окрестности начала координат, равные нулю вместе со своими производными первого порядка в начале координат.

Характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке w_2 определяется свойствами функции g. Опишем свойства этой функции с помощью последовательностей. Пусть σ_k, ε_k такие положительные, стремящиеся к нулю последовательности, что

$$\sigma_{k-1} - \varepsilon_{k-1} > \sigma_k + \varepsilon_k \tag{2.8}$$

для любого k.

Пусть i_k такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что

$$(\lambda\mu)^{i_k} < \varepsilon_k. \tag{2.9}$$

Пусть Δ_k — стремящаяся к нулю последовательность.

Предположим, что функция g такова, что при любом k

$$g(\sigma_k) = \left(y^0 + \Delta_k\right)\mu^{-i_k}, \tag{2.10}$$

и существует такая действительная положительная $\alpha > 1$, что при любом k

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < \mu^{-\alpha i_k}, \tag{2.11}$$

при $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k,\, \sigma_k + \varepsilon_k)$.

Из условий (2.10), (2.11) следует, что точка w_2 не является точкой с конечным порядком касания.

Теорема 1. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть выполнены условия (2.2)–(2.11). Предположим, что при любом k и при фиксированном положительном $d < 1$*

$$\left|\Delta_k + (\lambda\mu)^{i_k} c \left(x^0 + b\sigma_k\right) \left(1 - a\lambda^{i_k}\right)^{-1} - \sigma_k\right| < d\varepsilon_k,$$

тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_2 лежит счетное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Доказательство теоремы 1 приведено в [21, 22].

В работах [23, 24] показано, что аналогичная теорема верна для диффеоморфизма плоскости любого класса гладкости, включая C^∞.

В работах [25, 26] даны условия, при которых в окрестности гомоклинической точки диффеоморфизма многомерного пространства в себя лежит бесконечное множество устойчивых однообходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Следует отметить, что достаточные условия существования бесконечного множества устойчивых периодических точек для многомерного случая существенно отличаются от соответствующих условий для двумерного диффеоморфизма.

Помимо диффеоморфизмов с гомоклиническими точками, изучались и диффеоморфизмы с нетрансверсальными гетероклиническими контурами, рассматривался случай, когда касание устойчивых и неустойчивых многообразий не является касанием конечного порядка [27], получены достаточные условия наличия в окрестности такого гетероклинического контура двух счетных множества периодических точек. Одно из этих множеств состоит из устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля, второе — из вполне неустойчивых периодических точек, характеристические показатели которых также отделены от нуля.

В работе [28] показано, что при любом фиксированном натуральном r окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки диффеоморфизма плоскости может содержать бесконечное множество устойчивых r-обходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

В [29] построено непрерывное однопараметрическое множество диффеморфизмов плоскости, каждый элемент которого имеет в ограниченной части фазового пространства бесконечное множество устойчивых периодических точек, причем характеристические показатели этих точек отделены от нуля.

В [30, 31] рассматриваются двумерные периодические системы дифференциальных уравнений вида (2.1). В [30] выделено множество таких систем, что преобразование Пуанкаре любой системы удовлетворяет условиям теоремы. В [31] представлено множество таких систем, что у любой системы в окрестности нетрансверсального гетероклинического контура лежит счетное множество устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями.

3. Об истории исследования систем со слабогиперболическими инвариантными множествами. В серии более чем из десяти статей, опубликованных в течение тридцатилетнего периода (1991–2020 гг.) В. А. Плиссом, Н. А. Бегуном и Дж. Р. Селлом (профессором университета Миннесоты, США), было доказано, что слабогиперболическое инвариантное множество является устойчивым в случае, когда нейтральное, устойчивое и неустойчивое линейные пространства удовлетворяют условию Липшица. Кроме того, при некотором дополнительном предположении устойчивость была доказана даже при отсутствии условия Липшица. По-прежнему остается открытым вопрос о единственности листов слабогиперболического инвариантного множества возмущенной системы в нелипшицевом случае. Пока единственность удалось доказать только для нескольких частных случаев. Также удалось установить связь этой проблемы с гипотезой экспансивности по площадкам (plaque expansivity conjecture), более чем полвека остающейся открытой в теории динамических систем.

Отправной точкой описываемых исследований является работа [32]. Статья была опубликована В. А. Плиссом и Дж. Р. Селлом в 1991 г. Спустя несколько лет результаты были обобщены в [33] и [34].

В работах исследовались системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x) \tag{3.1}$$

и

$$\dot{y} = X(y) + Y(y), \tag{3.2}$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а X, Y — это C^1-функции, действующие из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Систему (3.1) в дальнейшем будем называть невозмущенной системой, систему (3.2) — возмущенной.

Для каждых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $x(t, x_0)$ максимально продолженное решение системы (3.1). Аналогично обозначим через $y(t, y_0)$ максимально продолженное решение системы (3.2).

Множество $W \subset \mathbb{R}^n$ называется *инвариантным множеством* системы (3.1), если из $x_0 \in W$ следует, что $x(t, x_0) \in W$, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\Phi(t, x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{x} = \frac{\partial X(x(t, x_0))}{\partial x}\, x, \tag{3.3}$$

удовлетворяющую условию $\Phi(0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^n$.

Положим, что система (3.3) является *слабогиперболической* с константами a, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4, если $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0 > \lambda_4$, $\lambda_0 \geq 0$, $a \geq 1$, и существуют дополняющие друг друга линейные пространства $U^n(x_0)$, $U^u(x_0)$ и $U^s(x_0)$ такие, что $\dim U^n(x_0) = k$, $\dim U^u(x_0) = m$, $\dim U^s(x_0) = n - m - k$,

$$\Phi(t, x_0) U^i(x_0) = U^i(x(t, x_0)),\ i = n, s, u, \tag{3.4}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ и выполнены следующие условия:

(1) если $\bar{x} \in U^s(x_0)$, то

$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_1 t},\ t \geq 0; \tag{3.5}$$

(2) если $\bar{x} \in U^n(x_0)$, то

$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_2 t},\ t \leq 0, \tag{3.6}$$

и

$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_3 t},\ t \geq 0; \tag{3.7}$$

(3) если $\bar{x} \in U^u(x_0)$, то

$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_4 t}, \ t \leq 0; \tag{3.8}$$

(4) если $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\Phi(t, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{\lambda_0 |t|}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Линейное пространство $U^s(x_0)$ называется *устойчивым линейным пространством*, линейное пространство $U^u(x_0)$ — *неустойчивым линейным пространством*, а линейное пространство $U^n(x_0)$ — *нейтральным линейным пространством*.

Из свойств (3.5)–(3.9) можно сделать следующий вывод о поведении решений системы (3.3). По устойчивому линейному пространству происходит экспоненциальное сжатие в положительном направлении. По неустойчивому линейному пространству — экспоненциальное сжатие в отрицательном направлении. По нейтральному линейному пространству может наблюдаться экспоненциальное сжатие как в положительном, так и в отрицательном направлениях, однако не быстрее, чем соответственно по устойчивому и неустойчивому линейным пространствам.

Дадим определение основного объекта исследования. Предположим, что существует $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное инвариантное множество системы (3.1). Будем называть K *слабогиперболическим инвариантным множеством*, если выполнены следующие условия:

(1) система (3.3) слабогиперболична для любого $x_0 \in K$ с фиксированными константами a, λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4;

(2) существует $r > 0$, такое что для любого $x_0 \in K$ существует k-мерный локально инвариантный диск $D(x_0) \subset K$ такой, что его радиус равен r и

(a) x_0 является центральной точкой $D(x_0)$;

(b) если $x \in D(x_0)$, то линейное пространство $U^n(x)$ касается диска $D(x_0)$ в точке x.

Обратим внимание на то, что из приведенного выше определения слабогиперболического инвариантного множества не следует единственность дисков $D(x_0)$. Более того, достаточно легко обосновать существование контрпримера. В связи с этим в работах [32–34] В. А. Плисс и Дж. Р. Селл (как и многие другие авторы) предполагали, что слабогиперболическое инвариантное множество обладает дополнительным *свойством Липшица*:

(c) отображение $x_0 \to U^n(x_0)$ является липшицевым отображением из K в $Gr(k, \mathbb{R}^n)$, где Gr — это грассманово многообразие.

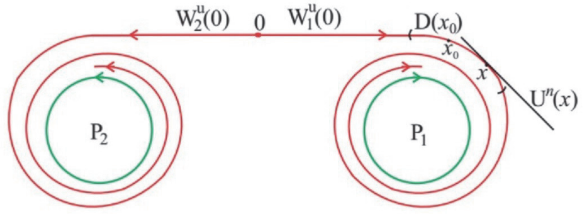
В работе [32] доказано, что из свойства (c) следует единственность дисков $D(x_0)$.

Определим множества $\Upsilon_1(x_0), \Upsilon_2(x_0), \Upsilon_3(x_0), \ldots, \Upsilon(x_0)$, $x_0 \in K$, следующим образом:

$$\Upsilon_1(x_0) = \bigcup_{x \in D(x_0)} D(x), \quad \Upsilon_{i+1}(x_0) = \bigcup_{x \in \Upsilon_i(x_0)} D(x), \ i \geq 1,$$

$$\Upsilon(x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(x_0).$$

Очевидно, что $\Upsilon(x_0) \subset K$ — инвариантное множество. Заметим также, что из единственности $D(x_0)$ следует единственность $\Upsilon(x_0)$. Множество $\Upsilon(x_0)$ будем называть *листом* слабогиперболического инвариантного множества K, проходящим через точку x_0. В том случае, когда нам не важна точка x_0, будем обозначать лист просто Υ.



Пример слабогиперболического инвариантного множества $K = 0 \cup W_1^u(0) \cup W_2^u(0) \cup P_1 \cup P_2$, где 0 — гиперболическая точка покоя; $W_1^u(0)$ и $W_2^u(0)$ — ветви неустойчивого многообразия; P_1 и P_2 — предельные циклы. Множество состоит из трех листов: $\Upsilon^1 = P_1$, $\Upsilon^2 = P_2$ и $\Upsilon^3 = 0 \cup W_1^u(0) \cup W_2^u(0)$.

В статье [34] Плисс и Селл доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть K — компактное слабогиперболическое инвариантное множество системы (3.1), удовлетворяющее свойству (c). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|Y\|_{C^1} \le \delta$, то существует гомеоморфное отображение $h : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(1) $|h(x) - x| \le \varepsilon$;

(2) $K^Y = h(K)$ *является слабогиперболическим инвариантным множеством системы (2.2);*

(3) *для любого листа $\Upsilon \subset K$ множество $\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ является листом K^Y.*

Работа [34] явилась обобщением изданной ранее статьи [32], в которой аналогичный результат был доказан для случая нулевой размерности неустойчивого линейного пространства.

Известно, что ограничение (c) является крайне существенным. Множество систем, не обладающих этим свойством, являются множеством второй категории по Бэру. Однако причина, побуждавшая авторов предполагать липшицевость, легко объяснима: почти все классические приемы изучения слабогиперболического инвариантного множества предполагают введение локальных координат в его трубчатой окрестности. Введение координат в отсутствие условия Липшица представляется чрезвычайно затруднительным: использовать технику трубчатой окрестности уже не получается, так как нормали, построенные в разных точках $D(x_0)$, могут иметь пересечение в сколь угодно малой окрестности диска.

Таким образом, возникла необходимость создания принципиально новых техник для работы со слабогиперболическими инвариантными множествами, не обладающими условием Липшица.

В серии работ [35–40] совместными усилиями В. А. Плисса, Н. А. Бегуна и Дж. Р. Селла соответствующий инструментарий был разработан, и с помощью него были обобщены результаты для нелипшицева случая. Заметим, что за основу в том числе были взяты идеи, изложенные В. Н. Монаковым (также являвшимся сотрудником кафедры в 1970-х годах) в работе [41]. Для построения локальных координат в окрестности слабогиперболического инвариантного множества вместо нормалей использовались перроновы диски $D^p(x_0)$.

Взамен наложения условия (c) в работах [35–40] делалось следующее предположение:

(c') если $D_1(x_0)$ и $D_2(x_0)$ — два диска в точке x_0 со свойствами (a) и (b), то $D_1(x_0) = D_2(x_0)$.

Важно отметить, что предположение (c') накладывается не на систему (3.1), а на конструкцию множества K. Мы не предполагаем единственность диска, удовлетворяющего определенному набору условий. Мы считаем, что множество K выбрано так, что в каждой точке диск $D(x_0)$ единственен (как элемент K).

В статье [40], являющейся итоговой для серии работ [35–40], был доказан аналог теоремы 2 для случая, когда вместо свойства (c) слабогиперболическое инвариантное множество удовлетворяет свойству (c'). Было показано, что при достаточно малых C^1-возмущениях в окрестности слабогиперболического инвариантного множества невозмущенной системы существует слабогиперболическое инвариантное множество возмущенной системы. Более того, было доказано существование непрерывного отображения h такого, что $h(K) = K^Y$, где K, K^Y — слабогиперболические инвариантные множества невозмущенной и возмущенной систем соответственно. Открытым, однако, остался вопрос о гомеоморфности h. Важность данного вопроса, кроме всего прочего, обуславливается тем, что одна лишь непрерывность h не гарантирует единственность листов слабогиперболического инвариантного множества возмущенной системы.

В статье [42], посвященной памяти В. А. Плисса, Н. А. Бегун описал возможные методы решения этой проблемы и показал ее связь со сформулированной в 1977 г. М. Хиршем, Ч. Пью и М. Шубом в [43] гипотезой экспансивности по площадкам (plaque expansivity conjecture). Также в статье [42] был разобран частный случай, для которого удалось доказать гомеоморфность.

Заметим, что гипотеза экспансивности по площадкам до сих пор остается недоказанной, это дает основание полагать, что вопрос о гомеоморфности h также является весьма затруднительным.

Литература

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. В: *Математика в Петербургском — Ленинградском университете*, 134–172. Смирнов В. И. (ред.). Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1970).

2. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Биографический очерк. В: *Н. М. Гюнтер. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.* Москва, ГИТТЛ (1953).

3. Пилюгин С. Ю. Исследования по глобальной качественной теории дифференциальных уравнений на кафедре дифференциальных уравнений Петербургского университета. В: *Нелинейные динамические системы* **2**, 5–35, Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).

4. Андреев А. Ф., Бибиков Ю. Н. Исследования по локальной качественной теории дифференциальных уравнений на кафедре дифференциальных уравнений Петербургского университета. В: *Нелинейные динамические системы* **2**, 36–70. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).

5. Бибиков Ю. Н., Васильева Е. В. Периодические возмущения осцилляторов на плоскости. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 1 (2024).

6. Плисс В. А. Об одной гипотезе Смейла. *Дифференц. уравнения* **8** (2), 268–282 (1972).

7. Плисс В. А. Система дифференциальных уравнений, имеющая бесконечное число периодических решений. *Дифференц. уравнения* **10** (12), 2179–2183 (1974).

8. Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1977).

9. Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой *Дифференц. уравнения* **15** (8), 1411–1419 (1979).

10. Чернышев В. Е. Структура инвариантного множества диффеоморфизма при наличии гомоклинической точки. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 70–76 (1972).

11. Чернышев В. Е. Структура окрестности гомоклинического контура с седловой точкой покоя. *Дифференц. уравнения* **21** (9), 1531–1536 (1985).

12. Чернышев В. Е. Бифуркации инвариантных множеств в окрестности контура с седловой точкой покоя. *Дифференц. уравнения* **22** (3), 439–445 (1986).

13. Чернышев В. Е. Сильно устойчивые расслоения над гомоклиническими контурами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 44–52 (1994).

14. Чернышев В. Е. Сильно устойчивые слоения над контурами лоренцева типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 46–53 (1996).

15. Чернышев В. Е. Возмущение гетероклинических циклов лоренцева типа. В: *Нелинейные динамические системы* **1**, 285–297. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1997).

16. Чернышев В. Е. Возмущение гетероклинических циклов, содержащих седло-фокусы. *Дифференц. уравнения* **33** (5), 712–713 (1997).

17. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).

18. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми. *Доклады АН СССР* **286** (5), 1049–1053 (1986).

19. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. *Доклады Академии наук* **330** (2), 144–147 (1993).

20. Стенькин О. В., Шильников Л. П. О бифуркациях периодических движений вблизи негрубой гомоклинической кривой. *Дифференц. уравнения* **33** (3), 377–384 (1997).

21. Васильева Е. В. Устойчивые периодические точки двумерных диффеоморфизмов класса C^1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 20–26 (2007).

22. Васильева Е. В. Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками. *Дифференц. уравнения* **48** (3), 307–315 (2012).

23. Васильева Е. В. Гладкие диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками, лежащими в окрестности гомоклинической точки. *Дифференц. уравнения* **48** (10), 1355–1360 (2012).

24. Васильева Е. В. Устойчивые периодические точки бесконечно гладких диффеоморфизмов. *Доклады Академии наук* **448** (1), 9–10 (2013). https://doi.org/10.7868/S086956521301009X

25. Васильева Е. В. Диффеоморфизмы многомерного пространства с бесконечным множеством устойчивых периодических точек. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 3–13 (2012).

26. Васильева Е. В. Многомерные диффеоморфизмы с устойчивыми периодическими точками. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 4, 608–618 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.406

27. Васильева Е. В. Устойчивые и вполне неустойчивые периодические точки диффеоморфизма плоскости с гетероклиническим контуром. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 3, 392–403 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.303

28. Васильева Е. В. Многообходные устойчивые периодические точки диффеоморфизма плоскости с гомоклинической орбитой. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 3, 406–416 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.303

29. Vasil'eva E. V. One-Parameter Set of Diffeormorphisms of the Plane with Stable Periodic Points. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42**, iss. 14, 3543–3549 (2021). https://doi.org/10.1134/S1995080222020172

30. Васильева Е. В. Устойчивые периодические решения периодических систем дифференциальных уравнений. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 1, 14–21 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.102

31. Васильева Е. В. Устойчивость периодических решений периодических систем дифференциальных уравнений с гетероклиническим контуром. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 297–308 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.212

32. Pliss V. A., Sell G. R. Perturbations of attractors of differential equations. *J. Differential Equations* **92**, 100–124 (1991). https://doi.org/10.1016/0022-0396(91)90066-I

33. Pliss V. A., Sell G. R. Approximations of the long-time dynamics of the Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations and Geometric Dynamics: Control Science and Dynamical Systems. Lecture Notes* **152**, 247–277 (1993).

34. Pliss V. A., Sell G. R. Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets. *J. Differential Equations* **149**, 1–51 (1997). https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3400

35. Бегун Н. А. Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 3–12 (2012).

36. Бегун Н. А. О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **1**, 80–88 (2013).

37. Бегун Н. А. Об устойчивости листовых инвариантных множеств трехмерных периодических систем. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1** (59), вып. 3, 360–367 (2014).

38. Бегун Н. А. Возмущения слабо гиперболических инвариантных множеств двумерных периодических систем. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 1, 23–33 (2015).

39. Бегун Н. А., Плисс В. А., Селл Дж. Р. Об устойчивости гиперболических аттракторов систем дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения* **52** (2), 139–148 (2016). https://doi.org/10.1134/S0012266116020014

40. Begun N. A., Pliss V. A., Sell G. R. On the stability of weakly hyperbolic invariant sets. *Journal of Differential Equations* **262** (4), 3194–3213 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.11.023

41. Монаков В. Н. Расположение интегральных поверхностей у слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Вестник Ленинградского университета* **1**, 68–74 (1973).

42. Бегун Н. А. О проблемах теории устойчивости слабо гиперболических инвариантных множеств. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 289–296 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.211

43. Hirsch M. W., Pugh C. C., M. Shub M. *Invariant Manifolds.* In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 583. New York, Springer-Verlag (1977).

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.;
доработана 27 октября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Бегун Никита Андреевич — канд. физ.-мат. наук; nikitabegun88@gmail.com
Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.v.vasilieva@spbu.ru
Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; t.zvyagintceva@spbu.ru
Ильин Юрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.a.iliin@spbu.ru

Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. I. Stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points, systems with weakly hyperbolic invariant sets

N. A. Begun, E. V. Vasil'eva, T. E. Zvyagintseva, Yu. A. Iljin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Begun N. A., Vasil'eva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of the research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. I. Stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points, systems with weakly hyperbolic invariant sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 211–227. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201 (In Russian)

This paper is the first in a series of review publications devoted to the results of scientific research work that has been carried out at the Department of Differential Equations of St. Petersburg University over the past 30 years. Current scientific interests of the department staff can be divided into the following directions and topics: study of stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points, study of systems with weakly hyperbolic invariant sets, local qualitative theory of essentially nonlinear systems, classification of phase portraits of a family of cubic systems, stability conditions for systems with hysteretic nonlinearities and systems with nonlinearities under the generalized Routh-Hurwitz conditions (Aizerman problem). This paper presents recent results on the first two topics outlined above. The study of stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points was carried out under the assumption that the stable and unstable manifolds of the hyperbolic points are tangent at a homoclinic (heteroclinic) point, and the homoclinic (heteroclinic) point is not a point with a finite order of tangency. The research of systems with weakly hyperbolic invariant sets was conducted for the case when neutral, stable, and unstable linear spaces do not satisfy the Lipschitz condition.

Keywords: qualitative theory of differential equations, non-transversal homoclinic point and trajectory, heteroclinic contour, stability, hyperbolicity, attractor, weakly hyperbolic invariant set.

References

1. Ordinary differential equations. In: Smirnov V. I. (ed.). *Mathematics at St. Petersburg-Leningrad University*, 134–172 (1970). (In Russian)

2. Smirnov V. I., Sobolev S. L. Biographical essay. In: Gunter N. M. *Potential theory and its application to the main problems of mathematical physics.* Moscow, GITTL Publ. (1953). (In Russian)

3. Pilyugin S. Yu. Investigations in the global qualitative theory of differential equations at the chair of differential equations of Petersburg university. In: *Nonlinear dynamic systems* **2**, 59–92. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)

4. Andreev A. F., Bibikov Y. N. Investigations in the local qualitative theory of differential equations at the chair of differential equations of Petersburg university. In: *Nonlinear dynamic systems* **2**, 36–70. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)

5. Bibikov Y. N., Vasil'eva E. V. Periodic perturbations of oscillators on the plane. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 1 (2024).

6. Pliss V. A. On a conjecture of Smale. *Differential Equations* **8** (2), 268–282 (1972). (In Russian)

7. Pliss V. A. A system of differential equations that has an infinite number of stable periodic solutions. *Differential Equations* **10** (12), 2179–2183 (1974). (In Russian)

8. Pliss V. A. *Integral sets of periodic systems of differential equations.* Moscow: Nauka Publ. (1977)

9. Ivanov B. F. Stability of trajectories that do not leave a neighborhood of a homoclinic curve. *Differential Equations* **15** (8), 1411–1419 (1979). (In Russian)

10. Chernyshev V. E. Structure of an invariant set of diffeomorphism in the presence of a homoclinic point. *Vestnik Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 70–76 (1972). (In Russian)

11. Chernyshev V. E. Structure of the neighborhood of a homoclinic contour with a saddle point of rest. *Differential Equations* **21** (9), 1531–1536 (1985). (In Russian)

12. Chernyshev V. E. Bifurcations of invariant sets in a neighborhood of a contour of trajectories with a rest point which is a saddle. *Differential Equations* **22** (3), 439–445 (1986). (In Russian)

13. Chernyshev V. E. Strong stable bundles for homoclinic cycles. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (22), iss. 4, 44–52 (1994). (In Russian)

14. Tchernyshev V. E. Strong stable foliations fo rcycles Lorentz type. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (15), iss. 3, 46–53 (1996). (In Russian)

15. Chernyshev V. E. Perturbations of heteroclinic cycles of Lorentz type. In: *Nonlinear dynamic systems* **1**, vol. 1, 285–287. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1997). (In Russian)

16. Chernyshev V. E. Perturbation of heteroclinic cycles that contain saddle-foci. *Differential Equations* **33** (5), 712–713 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **33** (5), 717–719 (1997)].

17. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).

18. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. Dynamical systems with structurally unstable homoclinic curves. *Doklady AN SSSR* 286 (5), 1049–1053 (1986). (In Russian)

19. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shilnikov L. P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincare curve *Doklady Akademii nauk* **330** (2), 144–147 (1993). (In Russian) [Eng. transl.: *Dokl. Math.* **47** (3), 410–415 (1993)].

20. Sten'kin O. V., Shilnikov L. P. On bifurcations of periodic motions near a structurally unstable homoclinic curve. *Differential Equations* **33** (3), 377–384 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **33** (3), 375–383 (1997)].

21. Vasil'eva E. V. Stable periodic points of two-dimensional C^1-diffeomorphisms. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 20–26 (2007). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* **40**, iss. 2, 107–113 (2007). https://doi.org/10.3103/S1063454107020045].

22. Vasil'eva E. V. Diffeomorphisms of the plane with stable periodic points. *Differential Equations* **48** (3), 307–315 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **48** (3), 309–317 (2012). https://doi.org/10.1134/S0012266112030019].

23. Vasil'eva E. V. Smooth diffeomorphisms of the plane with stable periodic points in a neighborhood of a homoclinic point. *Differential Equations* **48** (10), 1355–1360 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **48** (10), 1335–1340 (2012). https://doi.org/10.1134/S0012266112100023].

24. Vasil'eva E. V. Stable Periodic points of infinitely smooth diffeomorphisms. *Doklady Akademii nauk* **448** (1), 9–10 (2013). https://doi.org/10.7868/S086956521301009X (In Russian) [Eng. transl.: *Dokl. Math.* **87** (1), 3–4 (2013) https://doi.org/10.1134/S1064562413010079].

25. Vasil'eva E. V. Diffeomorphisms of multidimensional space with infinite set of stable periodic points. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 3–13 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **45** (3), 115–124 (2012). https://doi.org/10.3103/S1063454112030077].

26. Vasil'eva E. V. Multidimensional diffeomorphisms with stable periodic points. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 4, 608–618 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.406 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **52**, iss. 4, 380–387 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040125].

27. Vasil'eva E. V. Stable and completely unstable periodic points of diffeomorphism of a plane with a heteroclinic contour. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* 7 (65), iss. 3, 392–403 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.303 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* 53, iss. 3, 261–269 (2020) https://doi.org/10.1134/S1063454120030152].

28. Vasil'eva E. V. Multi-pass stable periodic points of diffeomorphism of a plane with a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 3, 406–416 (2021). https://doi.org/ 10.21638/spbu01.2021.303 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 3, 227–235 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121030092].

29. Vasil'eva E. V. One-Parameter set of diffeormorphisms of the plane with stable periodic points. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **42**, iss. 14, 3543–3549 (2021). https://doi.org/10.1134 /S1995080222020172

30. Vasil'eva E. V. Stable periodic solutions of periodic systems of differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 1, 14–21 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.102 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 1, 9–14 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118010119].

31. Vasil'eva E. V. The stability of periodic solutions of periodic systems of differential equations with a heteroclinic contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 297–308 (2020). https://doi.org/ 10.21638/11701/spbu01.2020.212 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 2, 197–205 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120020156].

32. Pliss V. A., Sell G. R. Perturbations of attractors of differential equations. *J. Differential Equations* **92**, 100–124 (1991). https://doi.org/10.1016/0022-0396(91)90066-I

33. Pliss V. A., Sell G. R. Approximations of the long-time dynamics of the Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations and Geometric Dynamics: Control Science and Dynamical Systems. Lecture Notes* **152**, 247–277 (1993).

34. Pliss V. A., Sell G. R. Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets. *J. Differential Equations* **149**, 1–51 (1997). https://doi.org/10.1006/jdeq.1997.3400

35. Begun N. A. On the stability of sheet invariant sets of two-dimensional periodic systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* iss. 4, 3–12 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **45**, iss. 4, 145–152 (2012). https://doi.org/10.3103/S1063454112040024].

36. Begun N. A. On closure of a leaf invariant set of a perturbed system. *Differentsial'nye uravneniia i protsessy upravleniia* **1**, 80–88 (2013). (In Russian)

37. Begun N. A. On the stability of invariant sets of leaves of three-dimensional periodic systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (59), iss. 3, 360–367

(2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **47**, iss. 3, 95–101(2014). https://doi.org/10.3103/S1063454114030030].

38. Begun N. A. Perturbations of weakly hyperbolic invariant sets of two-dimension periodic systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (60), iss. 1, 23–33 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48**, iss. 1, 12–19 (2015). https://doi.org/10.3103/S1063454115010033].

39. Begun N. A., Pliss V. A., Sell J. R. On the stability of hyperbolic attractors of systems of differential equations. *Differential Equations* **52** (2), 139–148 (2016). https://doi.org/10.1134/S0012266116020014 (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **52** (2), 139–148 (2016)].

40. Begun N. A., Pliss V. A., Sell G. R. On the stability of weakly hyperbolic invariant sets. *Journal of Differential Equations* **262** (4), 3194–3213 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.11.023

41. Monakov V. N. Location of integral surfaces for weakly nonlinear systems of differential equations. *Vestnik of Leningrad University* **1**, 68–74 (1973). (In Russian)

42. Begun N. A. On Problems of Stability Theory for Weakly Hyperbolic Invariant Sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 289–296 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.211 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 2, 191–196 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120020065].

43. Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant Manifolds. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 583. New York, Springer-Verlag (1977).

Received: September 15, 2023
Revised: October 27, 2023
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Nikita A. Begun — nikitabegun88@gmail.com
Ekaterina V. Vasil'eva — e.v.vasilieva@spbu.ru
Tatiana E. Zvyagintseva — t.zvyagintceva@spbu.ru
Yurii A. Iljin — y.a.iliin@spbu.ru