

Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра компьютерных технологий и систем

Капелин Игорь Владимирович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Синтез реалистичных изображений

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Коровкин М. В.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

Введение.....	3
Постановка задачи.....	4
Обзор литературы.....	5
Глава 1. Математическая модель.....	6
1.1. Радиометрические величины.....	6
1.2. Перенос светового излучения.....	9
1.3. Структура сцены.....	13
Глава 2. Подходы к решению.....	20
2.1. Операторная формулировка и формальное решение.....	20
2.2. Формулировка через интеграл по траекториям.....	24
2.3. Методы Монте-Карло.....	27
Глава 3. Глобальное освещение.....	30
3.1. Модели локального отражения.....	30
3.2. Модели рассеяния.....	32
3.3. Алгоритмы трассировки.....	35
3.4. Обзор алгоритма.....	37
Результаты.....	41
Заключение.....	42
Список литературы.....	43

Введение

Одной из центральных задач компьютерной графики является реализация глобального освещения. Если модели локального освещения позволяют рассчитать отраженное излучение только для поверхностей, находящихся в непосредственной «видимости» источника света, то глобальное освещение подразумевает более полную имитацию оптического излучения. Наиболее часто к глобальному освещению относят такие эффекты как тень, освещение отраженным светом, а также преломление и рассеяние в среде, в частности, дисперсию и подповерхностное рассеяние.

Постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели трехмерной сцены, обзор методов расчета светового излучения, а также построение алгоритма, решающего задачу глобального освещения для широкого спектра материалов. Математически задачу глобального освещения можно сформулировать как поиск решения уравнения переноса излучения на поверхности сенсора для граничных условий, определяемых геометрией и материалом объектов визуализируемой сцены. Более подробно постановка задачи будет дана в конце главы 1.

Обзор литературы

Первым шагом в решении задачи глобального освещения стало использование рекурсивных стохастических методов интегрирования, называемых алгоритмами трассировки лучей [13, 4].

В работе [5] было введено уравнение рендеринга, описывающее рассеяние света на поверхности объекта, а рекурсивная трассировка лучей была интерпретирована как случайное блуждание по поверхностям сцены. Новый метод получил название трассировки траекторий.

Позже в работах [6, 12, 8] был произведен ряд обобщений и улучшений классического алгоритма трассировки траекторий, в том числе были разработаны алгоритмы BPT (англ. *Bidirectional Path Tracing*) и MLT (англ. *Metropolis Light Transport*). Также в работе [12] была совершена переформулировка задачи глобального освещения в форме интеграла по траекториям, позволяющая в более явной форме применять классические методы Монте-Карло и методы Монте-Карло на основе цепей Маркова.

Глава 1. Математическая модель

Первые два раздела данной главы будут посвящены описанию основных радиометрических величин и законов распространения светового излучения. В последних двух разделах будет предложено математическое описание трехмерной сцены, а также более формально будет поставлена задача глобального освещения и синтеза изображений.

1.1. Радиометрические величины

Телесный угол

Будем представлять направление единичным вектором в \mathbb{R}^3 . Тогда множество всех возможных направлений $S^2 = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid \|\omega\| = 1\}$ — единичная сфера в \mathbb{R}^3 .

Пусть σ — стандартная мера поверхности сферы в \mathbb{R}^3 . Телесным углом, образованным множеством направлений $D \subset S^2$ будем называть меру этого множества $\sigma(D)$. Иначе говоря, телесный угол — площадь части поверхности единичной сферы, задаваемой множеством направлений D .

Эквивалентно направление в \mathbb{R}^3 можно задать с помощью углов сферической системы координат (θ, φ) . Тогда мера σ примет вид

$$d\sigma(\omega) = \sin(\theta) d\theta d\varphi.$$

Также полезно ввести проективный телесный угол. Пусть имеется поверхность с нормалью n_x в точке x . Тогда проективный телесный угол определяется выражением

$$\sigma_x^\perp(D) = \int_D |\omega \cdot n_x| d\sigma(\omega) = \int_D |\cos(\theta_x)| d\sigma(\omega).$$

Здесь θ_x — угол между нормалью к поверхности и направлением ω . Проективная мера имеет смысл площади ортогональной проекции подмножества D единичной сферы на касательную плоскость поверхности в заданной точке.

Поток излучения

Пусть $N = N(t, A_x, \sigma)$ — количество фотонов, движущихся через гипотетическую регулярную поверхность A_x , проходящую через точку x , в направлениях, задаваемых телесным углом σ , в момент времени t . Если все фотоны имеют частоту ν , то их энергия равна

$$Q(t, A_x, \sigma) = N(t, A_x, \sigma) \cdot h\nu,$$

где h — постоянная Планка. В общем случае энергия Q является функцией частоты ν или длины волны λ , что эквивалентно.

Рассмотрим изменение величины Q за бесконечно малый промежуток времени dt . Отношение этого изменения к величине промежутка времени

$$\Phi(t, A_x, \sigma) = \frac{dQ(t, A_x, \sigma)}{dt}$$

будем называть потоком излучения через поверхность A_x в телесном угле σ . Будем предполагать, что световое излучение находится в состоянии установившегося равновесия и не зависит от времени. В силу этого предположения, параметр t может быть опущен.

Энергетическая яркость

Нашей целью является получение характеристики светового излучения в точке x и малом телесном угле $d\sigma(\omega)$, построенном вокруг направления ω . Для этого рассмотрим малый элемент поверхности $dA_x(x)$ вокруг точки x и малый телесный угол $d\sigma(\omega)$ вокруг направления ω . Отношение

$$L(x, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi(A_x(x), \sigma(\omega))}{\partial A_x^\perp(x) \partial \sigma(\omega)}$$

будем называть энергетической яркостью светового излучения в точке x и направлении ω . Здесь

$$dA_x^\perp(x) = dA_x(x)(\omega \cdot n(x)) = dA_x(x) \cos \theta_x$$

— площадь ортогональной проекции элемента поверхности $dA_x(x)$ на плоскость, перпендикулярную направлению ω ; θ_x - угол между нормалью к поверхности A_x в точке x и направлением ω .

Ортогональное проецирование элемента поверхности на указанную плоскость позволяет избавиться от вариативности, вызванной произвольным выбором поверхности A_x , если речь идет о точке в пространстве, не принадлежащей никакой «реальной» поверхности какого-либо объекта.

Спектральные величины

Поскольку законы переноса светового излучения разнятся для различных областей спектра, необходимо ввести понятие спектральной энергетической яркости

$$L^\lambda(x, \omega) = \frac{\partial L(x, \omega, \lambda)}{\partial \lambda},$$

являющейся характеристикой части светового излучения, имеющей длину волны λ . Аналогичное представление можно получить для других энергетических величин.

Дальнейшее изложение будет касаться только спектральных величин, поэтому верхний индекс будет опускаться.

1.2. Перенос светового излучения

Фазовая функция

Фазовая функция p определяет количество световой энергии, рассеянной в направлении ω из направления ω' . Более строго эту функцию можно определить отношением

$$p(\omega \leftarrow \omega') = \frac{dL_o(\omega)}{L_i(\omega') d\sigma(\omega')},$$

где L_o — энергетическая яркость, рассеянная в направлении ω , а L_i — энергетическая яркость, приходящая из направления ω' . Эти величины можно представить предельными соотношениями

$$L_i(x, \omega') = \lim_{s \rightarrow 0+} L(x + s\omega', -\omega'),$$

$$L_o(x, \omega) = \lim_{s \rightarrow 0+} L(x + s\omega, \omega).$$

Фазовая функция должна удовлетворять следующим условиям:

1. $p(x, \omega \leftarrow \omega') \geq 0$ — неотрицательность;
2. $p(x, \omega \leftarrow \omega') = p(x, \omega \rightarrow \omega')$ — равенство Гельмгольца;
3. $\int_{s^2} p(x, \omega \leftarrow \omega') d\sigma(\omega') = 1$ — условие сохранения энергии.

Если рассеяние в среде незначительно, то фазовую функцию можно представить в виде

$$p(\omega \leftarrow \omega') = \delta_{-\omega}(\omega') = \frac{\delta(\omega - \omega') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin(\theta')},$$

а тогда $L_o(x, \omega) = L_i(x, -\omega) = L(x, \omega)$.

Если в среде рассеяние изотропно, то есть одинаково во всех направлениях, то фазовая функция будет иметь вид

$$p(\omega \leftarrow \omega') = \frac{1}{4\pi}.$$

Уравнение переноса излучения

Будем рассматривать энергетическую яркость как вещественную функцию, заданную на декартовом произведении трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 и единичной сферы направлений $S^2 = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid \|\omega\| = 1\}$:

$$L : \mathbb{R}^3 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} .$$

Основной математической модели для проблемы глобального освещения является *уравнение переноса излучения*. Оно моделирует основные процессы, сопутствующие распространению светового излучения — эмиссию, поглощение и рассеяние. В интегро-дифференциальной форме уравнение переноса излучения имеет вид

$$\begin{aligned} (\omega \cdot \nabla_x) L(x, \omega) = E(x, \omega) - \sigma_t(x) L(x, \omega) + \\ + \sigma_s(x) \int_{S^2} p(x, \omega \leftarrow \omega') L(x, \omega') d\omega' \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $L(x, \omega)$ — энергетическая яркость, $E(x, \omega)$ — эмиссия света, $\sigma_s(x)$ и $\sigma_a(x)$ — коэффициенты рассеяния и поглощения соответственно, $\sigma_t(x) = \sigma_a(x) + \sigma_s(x)$ — коэффициент затухания, а $p(x, \omega, \omega')$ — фазовая функция.

Наиболее полное описание моделей и методов теории переноса излучения можно найти в работе [2].

Граничные условия

Одним из наиболее распространенных граничных условий для уравнения переноса является *локальное уравнение рассеяния*, описывающее баланс падающей, поглощенной, рассеянной и излученной энергии:

$$L_o(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{S^2} f_s(x, \omega \leftarrow \omega') L_i(x, \omega') |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega') \quad (1.2)$$

Частным случаем такого граничного условия является *уравнение рендеринга* [5], не учитывающее свет, проходящий через поверхность объекта:

$$L_o(x, \omega) = L_e(x, \omega) + \int_{\mathcal{H}_+^2} f_r(x, \omega \leftarrow \omega') L_i(x, \omega) |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega'). \quad (1.3)$$

Данные граничные условия задаются на конечной совокупности регулярных поверхностей с нормалью $n = n(x)$ для значений ω , соответствующих единичной сфере направлений S^2 в первом случае, и положительной единичной полусфере направлений, определяемой как $\mathcal{H}_+^2(x) = \{\omega \in \mathbb{R}^3 | (\omega \cdot n(x)) \geq 0\}$, во втором.

Функции f_r и f_s , как и фазовая функция, определяют долю рассеянной в направлении ω из направления ω' энергии в заданной точке поверхности:

$$f(\omega \leftarrow \omega') = \frac{dL_o(\omega)}{L_i(\omega') d\sigma^\perp(\omega')} = \frac{dL_o(\omega)}{L_i(\omega') |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega')}.$$

Эти функции носят названия двунаправленной функции отражательной способности (англ. *BRDF* — *bidirectional reflectance distribution function*) и двунаправленной функции рассеивающей способности (англ. *BSDF* — *bidirectional scattering distribution function*) поверхности соответственно. Условия, налагаемые на эти функции, схожи со свойствами фазовой функции:

1. $f(x, \omega \leftarrow \omega') \geq 0$
2. $f(x, \omega \leftarrow \omega') = f(x, \omega \rightarrow \omega')$
3. $\int_{S^2} f_s(x, \omega \leftarrow \omega') d\sigma^\perp(\omega') \leq 1, \forall \omega \in S^2$
 $\int_{\mathcal{H}_+^2} f_r(x, \omega \leftarrow \omega') d\sigma^\perp(\omega') \leq 1, \forall \omega \in \mathcal{H}_+^2$

К сожалению, получить решение уравнения переноса излучения аналитически представляется возможным только для весьма небольшого класса граничных условий и параметров.

Уравнение измерений. Сопряженные уравнения

Для того, чтобы визуализация световой энергии, распространяющейся внутри трехмерной сцены, стала возможной, необходимо ввести понятие *сенсора*. Сенсором будем называть поверхность сцены, реагирующую на энергетическую яркость $L_i(x, \omega)$ света, падающего на эту поверхность. Отклик сенсора на свет, падающий с разных направлений и в разные точки поверхности сенсора, может быть различным. Мерой отклика является функция $W_e(x, \omega)$, называемая *чувствительностью* (ориг. *responsivity*).

Более строго чувствительность можно определить отношением величины отклика к потоку излучения через поверхность сенсора для заданного направления

$$W_e(x, \omega) = \frac{dS(x, \omega)}{d\Phi(x, \omega)}.$$

Под измерением будем понимать значение отклика светочувствительного элемента с поверхностью M_S , определяемое выражением

$$I = \int_{M_S \times S^2} dS(x, \omega) = \int_{M_S \times S^2} W_e(x, \omega) d\Phi(x, \omega).$$

Учитывая представление потока $d\Phi(x, \omega) = L_i(x, \omega) dA_x^\perp(x) d\sigma(\omega)$, можем переписать выражение для измерения I в виде

$$I = \int_{M_S \times S^2} W_e(x, \omega) L_i(x, \omega) dA(x) d\sigma_x^\perp(\omega). \quad (1.4)$$

Это выражение называется *уравнением измерений* (англ. *measurement equation*).

Многие алгоритмы компьютерной графики производят расчет освещения, исходя не из физического направления распространения света, а, наоборот, отслеживая путь «фотонов» от сенсора до источника света. Такой

подход позволяет воспринимать чувствительность сенсора как своего рода излучаемую величину. Эту величину называют *значимостью* (англ. *importance*).

Для значимости справедливы те же законы распространения, что и для энергетической яркости, с тем лишь отличием, что аргументы фазовой функции и BSDF, отвечающие за направление, поменяются местами:

$$(\omega \cdot \nabla) W(x, \omega) = E_w(x, \omega) - \sigma_t(x) W(x, \omega) + \sigma_s(x) \int_{S^2} p(x, \omega \rightarrow \omega') W(x, \omega') d\omega',$$

$$W(x, \omega) = W_e(x, \omega) + \int_{S^2} f_s(x, \omega \rightarrow \omega') W(x, \omega') |\omega' \cdot n| d\omega'.$$

1.3. Структура сцены

Подойдем более формально к определению трехмерной сцены. Пространством сцены будем называть открытое подмножество трехмерного евклидова пространства $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ с границей $\partial \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ такое, что замыкание $\overline{\mathcal{D}}$ связно. Будем предполагать, что граница $\partial \mathcal{D}$ представлена непрерывной кусочно-регулярной поверхностью, в общем случае не являющейся связной, с нормалью $n(x)$, $x \in \partial \mathcal{D}$. В тех точках, где регулярность нарушается, нормаль необходимо доопределить.

Если множество \mathcal{D} не является ограниченным в смысле стандартной метрики, то полезно ввести бесконечно удаленную точку x_∞ , считая её граничной для \mathcal{D} в расширенном пространстве $\mathbb{R}^3 \cup \{x_\infty\}$.

Примером ограниченной сцены может служить закрытое помещение, в которое не попадает свет извне. Открытые пространства, освещенные прямым или рассеянным в атмосфере солнечным светом, в свою очередь, будут хорошим примером неограниченных сцен.

Сущности, используемые для дальнейшего определения сцены, можно условно разделить на три класса (в общем случае пересекающихся): объекты визуализации, источники освещения и сенсоры. Математически эти сущности будут представлены параметрами и граничными условиями для уравнения переноса излучения и уравнения измерений.

Объекты визуализации

Совокупность объектов визуализации — это видимая часть сцены. Каждый отдельный объект обладает собственной геометрией и материалом. В терминах переноса излучения, объект характеризуется резким изменением свойств среды распространения.

Математически объекты будут заданы с помощью параметров и граничных условий для уравнения переноса излучения. По типу геометрии объекты можно разделить на поверхности и объемы, а по типу материала — на отражающие и рассеивающие. Геометрическая составляющая объекта будет определять форму границы, а само граничное условие будет определяться материалом объекта. Для отражающих материалов в качестве граничного условия будем использовать уравнение рендеринга, а для рассеивающих — локальное уравнение рассеяния. Рассмотрим все четыре типа объектов:

1. *Отражающие объемы* моделируют материалы, распространением света внутри которых в контексте задачи визуализации можно пренебречь. Геометрия объектов этого типа задается открытым связным подмножеством $\mathcal{V}_i^r \subseteq \mathbb{R}^3$ с непрерывной кусочно-регулярной границей $\partial \mathcal{V}_i^r$ с нормалью. Будем полагать распространение света внутри \mathcal{V}_i^r невозможным. Граничным условием, соответствующим такому объекту, будет уравнение рендеринга,

заданное на множестве $\partial \mathcal{V}_i^r \times \mathcal{H}_+^2$. Расширим это условие на $\partial \mathcal{V}_i^r \times \mathcal{S}^2$ так, что на отрицательной полусфере направлений оно всегда будет выполнено, и обозначим его

$$\Gamma \Big|_{\partial \mathcal{V}_i^r \times \mathcal{S}^2} = 0.$$

Замечание: поскольку предположений об ограниченности \mathcal{V}_i^r не сделано, то такой объект вполне может использоваться для ограничения пространства сцены.

2. *Двусторонние отражающие поверхности* являются моделью объектов пренебрежимо малой толщины, не пропускающих свет. Их геометрия задается непрерывной кусочно-регулярной поверхностью \mathcal{M}_j^r с нормалью, а граничное условие представляет собой уравнения рендеринга для положительной и отрицательной полусфер направлений

$$\Gamma \Big|_{\mathcal{M}_j^r \times \mathcal{S}^2} = 0.$$

3. *Рассеивающие объемы.* Эти объекты наиболее полно описывают распространение света в рассеивающей среде. Примерами таких сред могут служить воск, мрамор, нефрит, а также различные биологические ткани, кристаллы, жидкости и газы. Геометрия, как и в первом случае, будет задана открытым связным подмножеством $\mathcal{V}_k^s \subseteq \mathbb{R}^3$ с границей $\partial \mathcal{V}_k^s$. Будем предполагать, что коэффициенты уравнения переноса излучения изменяются на \mathcal{V}_k^s непрерывно по совокупности аргументов. Сами граничные условия будут представлять собой локальное уравнение рассеяния, описывающие отражение и преломление на границе раздела двух рассеивающих сред. Обозначим их

$$\Gamma \Big|_{\partial \mathcal{V}_k^s \times \mathcal{S}^2} = 0.$$

4. *Рассеивающие поверхности* описывают тонкие полупрозрачные объекты. Это могут быть различного рода плёнки, светофильтры и тонкие ткани. Будем задавать такие объекты с помощью поверхности \mathcal{M}_l^s и граничных условий в виде локального уравнения рассеяния

$$\Gamma \Big|_{\mathcal{M}_l^s \times S^2} = 0.$$

Источники освещения

Рассмотрим три типа источников света: точечные, поверхностные и объемные. Последние два типа будем моделировать с помощью объектов сцены, рассмотренных ранее, а для точечных источников используем другой подход.

За эмиссию света с поверхности объекта в точке x и направлении ω отвечает параметр $L_e(x, \omega)$ локального уравнения рассеяния. Эмиссия света внутри объема \mathcal{V}_k^s описывается параметром $E(x, \omega)$ уравнения переноса излучения. Примерами поверхностных источников света могут служить экран монитора или окно, моделируемое как часть границы сцены, а хорошим примером объемного источника света является пламя.

Хотя точечные источники света являются идеализацией, они представляют собой удобную математическую модель и широко используются в компьютерной графике. Их механическим аналогом являются точечные массы или материальные точки. Будем задавать их с помощью $E_{\mathcal{L}}(x, \omega)$ для конечного множества точек $\mathcal{L} = \{x_i^{\mathcal{L}}\} \subset \bigcup_k \mathcal{V}_k^s$.

Если сцена не ограничена отражающей поверхностью, то будем также формально рассматривать условие для бесконечно удаленной точки

$$L_o(x_\infty, \omega) = L_e^\infty(\omega), \omega \in S^2.$$

С помощью этого условия можно моделировать, например, направленный свет, исходящий от далекого небесного тела. Также распространен метод освещения с помощью кубических и сферических панорамных изображений, окружающих сцену (англ. *image based lighting*).

Для физически правильных источников света справедливо убывание энергии, пропорциональное обратному квадрату расстояния. Поскольку с учетом этого условия бесконечно удаленный источник с конечной интенсивностью не имеет смысла, будем считать, что для него данное условие не выполняется. Это можно объяснить тем, что, если моделируемый источник находится достаточно далеко, но на конечном расстоянии, то убывание энергии в масштабах сцены будет пренебрежимо малым.

Сенсоры

Зададим кусочно-регулярную поверхность \mathcal{M}_S , на которой будут располагаться все светочувствительные элементы. Будем считать, что таких элементов конечное множество, а чувствительность j -того элемента задана функцией $W_e^{(j)}(x, \omega)$, определенной на $\mathcal{M}_S \times S^2$. Без потери общности можем считать, что \mathcal{M}_S является подмножеством объединения поверхностей объектов сцены.

Пространство сцены

Соберем воедино все граничные условия. Общая граница будет составлена из поверхностей всех объектов сцены

$$\partial \mathcal{D} = \left\{ \bigcup_i \partial \mathcal{V}_i^r \right\} \cup \left\{ \bigcup_j \mathcal{M}_j^r \right\} \cup \left\{ \bigcup_k \partial \mathcal{V}_k^s \right\} \cup \left\{ \bigcup_l \mathcal{M}_l^s \right\},$$

а сами граничные условия будут заданы выражением

$$\Gamma \Big|_{\partial \mathcal{D} \times S^2} = 0.$$

Множество \mathcal{D} определим как объединение всех рассеивающих объемов с «вырезанными» из них границами объектов сцены $\mathcal{D} = \{\bigcup_i \mathcal{V}_k^s\} \setminus \partial \mathcal{D}$. Замыкание \mathcal{D} связно и представляет собой объем, занимаемый сценой.

Если пространство сцены не является ограниченным, то к границе $\partial \mathcal{D}$ формально добавим бесконечно удаленную точку x_∞ .

На [рис. 1] штриховыми линиями обозначены рассеивающие поверхности \mathcal{M}_l^s , замкнутыми штриховыми линиями — поверхности рассеивающих объемов \mathcal{V}_k^s , являющиеся границами раздела двух сред. Непрерывные линии обозначают отражающие поверхности \mathcal{M}_j^r . Заштрихованные области представляют собой объемы \mathcal{V}_i^r , в которых свет не распространяется.

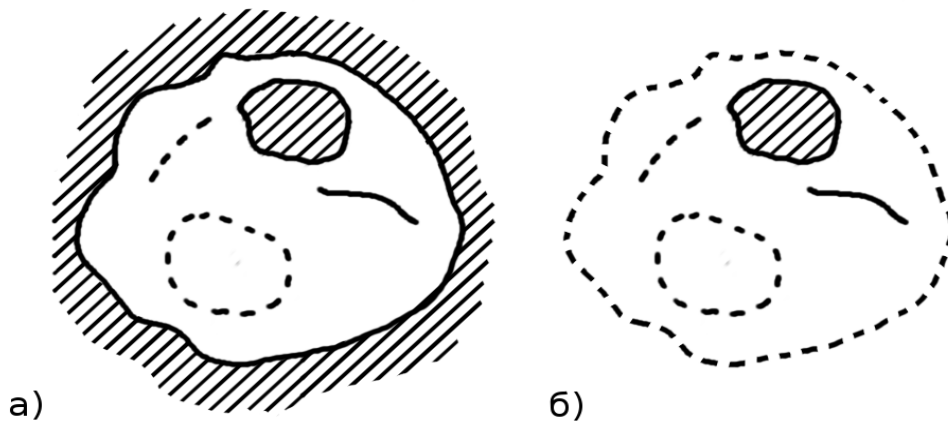


Рис. 1: ограниченная (а) и неограниченная (б) сцены;

1.4. Постановка задачи

Пусть задано пространство сцены \mathcal{D} с границей $\partial\mathcal{D}$. Будем рассматривать уравнение переноса излучения на $\mathcal{D} \times \mathcal{S}^2$, используя граничные условия

$$\Gamma \Big|_{\partial\mathcal{D} \times \mathcal{S}^2} = 0.$$

Также будем предполагать, что параметры уравнения переноса излучения изменяются непрерывно в любом открытом связном подмножестве пространства сцены \mathcal{D} .

Задачей синтеза изображения является нахождение набора измерений I_1, I_2, \dots, I_M , определяемых выражениями

$$I_j = \int_{\mathcal{M}_S \times \mathcal{S}^2} W_e^{(j)}(x, \omega) L_i(x, \omega) dA(x) d\sigma_x^\perp(\omega).$$

Глава 2. Подходы к решению

2.1. Операторная формулировка и формальное решение

В данном разделе будут получены формальные представления энергетической яркости для случая нерассеивающей среды распространения и для более общего случая, учитывающего рассеяние в среде и объемные источники света.

Нерассеивающая среда без объемных источников

Рассмотрим случай, когда рассеянием света в среде распространения можно пренебречь. В этом случае $\sigma_s(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathcal{D}$.

Символом $x_{\partial\mathcal{D}} = x_{\partial\mathcal{D}}(x, \omega)$ будем обозначать ближайшую точку пересечения луча $(x, -\omega)$ с границей $\partial\mathcal{D}$:

$$x_{\partial\mathcal{D}}(x, \omega) = \inf_{d>0} \{x - d\omega \in \partial\mathcal{D}\}.$$

В рассматриваемом случае уравнение переноса излучения примет вид

$$(\omega \cdot \nabla_x) L(x, \omega) = \frac{\partial_x L(x, \omega)}{\partial_x \omega} = E(x, \omega) - \sigma_t(x) L(x, \omega). \quad (2.1)$$

В данном контексте знак частной производной означает взятие производной по направлению ω . На прямой $x = x_{\partial\mathcal{D}} + s\omega$ уравнение (2.1) имеет вид

$$\frac{dL(s)}{ds} = E(s) - \sigma_t(s) L(s).$$

Решение в форме Коши этого уравнения записывается следующим образом:

$$L(s) = e^{-\int_{s_0}^s \sigma_t(t) dt} \left[L(s_0) + \int_{s_0}^s e^{\int_{s_0}^t \sigma_t(\tau) d\tau} E(s) dt \right] \text{ или}$$

$$L(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) \left[L(x_{\partial D}, \omega) + \int_{x_{\partial D}}^x \tau(x', x_{\partial D}) E(x', \omega) dx' \right], \quad (2.2)$$

где $\tau(x, y) = \exp\left(-\int_0^{\|x-y\|} \sigma_t\left(x - s \frac{x-y}{\|x-y\|}\right) ds\right)$ — оптическая толщина среды между точками x и y , характеризующая ослабление света за счет поглощения и, в общем случае, рассеяния.

Раскрыв скобки в (2.2) и поместив под знак интеграла множитель $\tau(x_{\partial D}, x)$, получим

$$L(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) L(x_{\partial D}, \omega) + \int_{x_{\partial D}}^x \tau(x', x) E(x', \omega) dx'. \quad (2.3)$$

Если эмиссия происходит только на границе области \mathcal{D} , то второе слагаемое правой части выражения (2.3) обращается в ноль.

Определим *оператор распространения* \mathbf{G} , описывающий перенос света по прямой линии из точки на границе области \mathcal{D} в точку x :

$$(\mathbf{G} \circ L)(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) L(x_{\partial D}, \omega).$$

Пользуясь граничными условиями определим также *локальный оператор рассеяния* \mathbf{K} , трансформирующий приходящее излучение в исходящее:

$$(\mathbf{K} \circ L)(x, \omega) = \int_{S^2} f_s(x, \omega \leftarrow \omega') L(x, \omega') |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega').$$

С помощью введенных операторов \mathbf{G} и \mathbf{K} можно переписать граничные условия в виде

$$L(x, \omega) = L_e(x, \omega) + (\mathbf{K} \mathbf{G} \circ L)(x, \omega).$$

Введя обозначение $\mathbf{T} = \mathbf{K} \mathbf{G}$ и перенеся второе слагаемое в другую часть равенства, получим

$$((\mathbf{I}-\mathbf{T}) \circ L)(x, \omega) = L_e(x, \omega).$$

Поскольку для физически правильных сцен операторная норма $\|\mathbf{T}^\alpha\| < 1$ для некоторого $\alpha \geq 1$ ([1], [12]), то оператор $\mathbf{I} - \mathbf{T}$ может быть представлен в виде сходящегося ряда

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k.$$

Таким образом энергетическая яркость на $\partial \mathcal{D}$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} L &= (\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} \circ L_e = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k \right) \circ L_e = \\ &= L_e + \mathbf{T} \circ L_e + \mathbf{T}^2 \circ L_e + \dots \end{aligned}$$

слагаемые которого соответствуют излученному свету на самой поверхности, а также рассеянному один, два и более раз свету, излученному другими поверхностями.

Рассеивающая среда и объемные источники света

Теперь рассмотрим более общий случай, когда внутри среды распространения имеют место рассеяние и эмиссия. Уравнение переноса излучения запишется в виде

$$(\omega \cdot \nabla_x) L(x, \omega) = L_{e,d}(x, \omega) - \sigma_t(x) L(x, \omega) + \sigma_s(x) \int_{S^2} p(x, \omega \leftarrow \omega') L(x, \omega') d\sigma(\omega'),$$

а граничные условия для $x \in \partial \mathcal{D}$

$$L(x, \omega) = L_{e,\partial \mathcal{D}}(x, \omega) + \int_{S^2} f_s(x, \omega \leftarrow \omega') L(x, \omega') |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega').$$

Символом $x_{\partial \mathcal{D}}$ будем, как и раньше, обозначать ближайшую точку пересечения луча $(x, -\omega)$ с границей $\partial \mathcal{D}$.

Рассмотрим интегральную форму уравнения переноса излучения

$$L(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) L(x_{\partial D}, \omega) + \int_{x_{\partial D}}^x \tau(x', x) [L_{e, D}(x', \omega) + \sigma_s(x') \int_{S^2} p(x', \omega \leftarrow \omega') L(x', \omega') d\sigma(\omega')] dx'.$$

Обозначим *перенесенную светимость поверхности* (англ. *incident surface emittance*)

$$L_{ie, \partial D}(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) L_{e, \partial D}(x_{\partial D}, \omega),$$

перенесенную светимость объема (англ. *incident volume emittance*)

$$L_{ie, D}(x, \omega) = \int_{x_{\partial V}}^x \tau(x', x) L_{e, D}(x', \omega) dx',$$

оператор переноса излучения поверхности

$$(\mathbf{T}_{\partial D} \circ L)(x, \omega) = \tau(x_{\partial D}, x) \int_{S^2} f_s(x_{\partial D}, \omega \leftarrow \omega') L(x_{\partial D}, \omega') d\sigma_{x_{\partial D}}^\perp(\omega'),$$

и оператор переноса излучения объема

$$(\mathbf{T}_D \circ L)(x, \omega) = \int_{x_{\partial D}}^x \tau(x', x) \sigma_s(x') \int_{S^2} p(x', \omega \leftarrow \omega') L(x', \omega') d\sigma(\omega') dx'.$$

Используя введенные обозначения и учитывая граничные условия для $L(x_{\partial D}, x)$, перепишем интегральное уравнение переноса излучения в виде

$$L = \underbrace{(L_{ie, \partial D} + L_{ie, D})}_{= L_{ie}} + \underbrace{(\mathbf{T}_{\partial D} + \mathbf{T}_D)}_{= \mathbf{T}} \circ L.$$

Для оператора \mathbf{T} ослабленное условие сходимости $\|\mathbf{T}^\alpha\| < 1$ для некоторого $\alpha \geq 1$ также выполняется, поэтому

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k.$$

Тогда энергетическую яркость можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{T}^k L_{ie} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{T}_{\partial D} + \mathbf{T}_D)^k (L_{ie, \partial D} + L_{ie, D}) = \\ &= L_{ie, \partial D} + L_{ie, D} + \mathbf{T}_{\partial D} L_{ie, \partial D} + \mathbf{T}_{\partial D} L_{ie, D} + \mathbf{T}_D L_{ie, \partial D} + \mathbf{T}_D L_{ie, D} + \dots \end{aligned}$$

Это представление можно интерпретировать следующим образом:
 $L_{ie, \partial D}$ — свет, приходящий напрямую с поверхности источника; $L_{ie, D}$ — свет из объемного источника; $\mathbf{T}_{\partial D} L_{ie, \partial D}$ — свет поверхностного источника, рассеянный на другой поверхности; $\mathbf{T}_{\partial D} L_{ie, D}$ — свет объемного источника, рассеянный на поверхности; $\mathbf{T}_D L_{ie, \partial D}$ — свет поверхностного источника, рассеянный в объеме; $\mathbf{T}_D L_{ie, D}$ — свет объемного источника, рассеянный в другом объеме и так далее.

Чтобы учесть точечные источники света, необходимо при интегрировании использовать меру Дирака

$$d\delta_L(x) = d\mu(x) + \sum_i d\delta(x - x_i^L),$$

где $\mu(x)$ — стандартная мера для \mathbb{R}^3 .

Аналогичные рассуждения можно провести относительно сопряженных уравнений.

2.2. Формулировка через интеграл по траекториям

Основной задачей данного раздела является представление уравнения измерений в виде

$$I = \int_{\Omega} f(\bar{x}) d\mu(\bar{x}),$$

где Ω — множество траекторий, составленных из конечного количества сегментов прямых, а $f(\bar{x})$ — функция, значение которой на заданной траектории \bar{x} может быть вычислено. Такая формулировка позволяет представить задачу глобального освещения как задачу интегрирования функции.

Пространство траекторий

Введем меру на замыкании пространства сцены $\overline{\mathcal{D}}$

$$d\mu_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} dV(x) + d\delta_L(x), & x \in \mathcal{D} \\ dA(x), & x \in \partial\mathcal{D} \end{cases}.$$

Траекторию (англ. *path*), состоящую из k сегментов прямых, будем обозначать $\bar{x} = x_0 x_1 \dots x_k$, где $x_{i-1} x_i$ — i -тый сегмент. Введем пространство траекторий длины k : $\Omega_k = \{\bar{x} = x_0 x_1 \dots x_k \mid x_i \in \overline{\mathcal{D}}\}$.

Для пространства Ω_k будем использовать меру [Halmos50], формально полученную произведением мер

$$d\mu_k(x_0 x_1 \dots x_k) = \prod_{i=0}^k d\mu_{\mathcal{D}}(x_i)$$

или, для $D \subseteq \Omega_k$,

$$\mu_k(D) = \int_D \prod_{i=0}^k d\mu_{\mathcal{D}}(x_i).$$

Пространство всех траекторий конечной длины определим как объединение

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$$

с мерой

$$\mu(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(D \cap \Omega_k).$$

Функция вклада в измерение

Введем функцию G , определяющую перенос энергии между точками x и y внутри замыкания пространства сцены $\overline{\mathcal{D}}$

$$G(x \leftrightarrow y) = V(x \leftrightarrow y) \frac{D_x(y) \cdot D_y(x)}{\|x - y\|^2} \tau(x \leftrightarrow y),$$

$$\text{где } D_x(y) = \begin{cases} |\omega_{x \rightarrow y} \cdot n_{\partial \mathcal{D}}(x)|, & x \in \partial \mathcal{D} \\ 1, & x \in \mathcal{D} \end{cases}, \quad V(x \leftrightarrow y) = \begin{cases} 1, & xy \subset \bar{\mathcal{D}} \\ 0, & xy \not\subset \bar{\mathcal{D}} \end{cases}.$$

Если одна из точек является бесконечно удаленной, то обратный квадрат расстояния в представлении функции G не учитывается:

$$G(x \leftrightarrow x_\infty) = V(x \leftrightarrow x_\infty) D_x(x_\infty) \tau(x \leftrightarrow x_\infty)$$

Используя пространство траекторий и введенную на нем меру, можно переписать уравнение измерений в виде

$$I = \int_{\bar{\mathcal{D}}^2} W_e(x' \rightarrow x) L(x' \rightarrow x) G(x' \leftrightarrow x) d\mu_{\mathcal{D}}(x) d\mu_{\mathcal{D}}(x').$$

$$\text{Здесь } L(x \rightarrow y) = L(x, \omega_{x \rightarrow y}), \quad W_e(x \rightarrow y) = W_e(y, \omega_{x \leftarrow y}).$$

Подставим в уравнение измерений операторное представление энергетической яркости

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{\mathcal{D}}^2} W_e(x' \rightarrow x) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{T}^k \circ L_e)(x' \rightarrow x) \right] G(x' \leftrightarrow x) d\mu_{\mathcal{D}}(x) d\mu_{\mathcal{D}}(x') = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\bar{\mathcal{D}}^2} W_e(x' \rightarrow x) (\mathbf{T}^k \circ L_e)(x' \rightarrow x) G(x' \leftrightarrow x) d\mu_{\mathcal{D}}(x) d\mu_{\mathcal{D}}(x') \right] = \\ &= \int_{\bar{\mathcal{D}}^2} W_e(x' \rightarrow x) L_e(x' \rightarrow x) G(x' \leftrightarrow x) d\mu_{\mathcal{D}}(x) d\mu_{\mathcal{D}}(x') + \\ &+ \int_{\bar{\mathcal{D}}^2} W_e(x' \rightarrow x) \left(\int_{\bar{\mathcal{D}}} \hat{f}(x'' \rightarrow x' \rightarrow x) L_e(x'' \rightarrow x') G(x'' \leftrightarrow x') d\mu_{\mathcal{D}}(x'') \right) G(x' \leftrightarrow x) d\mu_{\mathcal{D}}(x) d\mu_{\mathcal{D}}(x') + \dots \end{aligned}$$

Функция $\hat{f}(x'' \rightarrow x' \rightarrow x)$ может обозначать фазовую функцию или BSDF в зависимости от положения точки x' :

$$\hat{f}(x'' \rightarrow x' \rightarrow x) = \begin{cases} p(x', \omega_{x' \rightarrow x} \leftarrow \omega_{x' \rightarrow x''}), & x' \in \mathcal{D} \\ f_s(x', \omega_{x' \rightarrow x} \leftarrow \omega_{x' \rightarrow x''}), & x' \in \partial \mathcal{D} \end{cases}.$$

Чтобы перейти к проблеме интегрирования, необходимо определить подынтегральную функцию. Эта функция определяется отдельно для траекторий разной длины, путем выбора соответствующего данной длине слагаемого из ряда полученного ряда. Например, для траектории \bar{x} длины k подынтегральная функция будет иметь вид

$$f(\bar{x}) = L_e(x_0 \rightarrow x_1) G(x_0 \leftrightarrow x_1) \cdot \left[\prod_{i=1}^{k-1} \hat{f}(x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1}) G(x_i \leftrightarrow x_{i+1}) \right] \cdot W_e(x_{k-1} \rightarrow x_k).$$

Эта функция носит название *функции вклада в измерение* (англ. *measurement contribution function*). Введенная функция позволяет получить желаемое представление уравнения измерений

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} f(\bar{x}) d\mu_k(\bar{x}) = \int_{\Omega} f(\bar{x}) d\mu(\bar{x}).$$

2.3. Методы Монте-Карло

Многообразие и сложность граничных условий, порождаемых современными трехмерными сценами, сильно затрудняет анализ структуры пространства траекторий. Алгоритмы численного интегрирования, основанные на детерминированной дискретизации пространства траекторий, как правило, дают смещенную оценку значения искомого интеграла, что вызывает видимые «артефакты» на получаемом изображении.

Данный раздел будет посвящен стохастическим алгоритмам численного интегрирования, позволяющим получить состоятельную и несмещенную оценку искомого значения интеграла, а также способам уменьшения дисперсии этой оценки.

Выборка по значимости

Рассмотрим уравнение измерений в форме интеграла по траекториям

$$I = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x).$$

Обозначим $h = \frac{f}{p}$ и найдем математическое ожидание функции h случайной величины x с некоторой выбранной плотностью распределения p

$$E_p[h] = \int_{\Omega} h(x) p(x) d\mu(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(X_i).$$

Подставив представление функции h , получим несмещенную оценку интеграла

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}.$$

Скорость сходимости данного метода напрямую зависит от выбора распределения вероятностей на пространстве траекторий. Метод уменьшения дисперсии оценки, основанный на выборе этого распределения, называется *выборкой по значимости*.

Множественная выборка по значимости

Как правило, распределение вероятностей для выборки по значимости выбирается с целью минимизации дисперсии конкретной части подинтегральной функции. Такая стратегия будет давать хорошие результаты для тех данных, где выбранная часть подинтегральной функции вносит наибольший вклад в общую дисперсию оценки. В противном случае скорость сходимости метода будет небольшой. Следующая техника уменьшения дисперсии оценки основывается на комбинировании нескольких «удачных» стратегий семплирования.

Пусть имеется набор из n различных техник семплирования с функциями плотности p_1, \dots, p_n и пусть $\{X_{i,j} | j=1, \dots, n_i\}$ — элементы i -той выборки, где n_i — объем i -той выборки, $N = \sum_{i=1}^n n_i$ — общее количество элементов во всех n выборках.

Тогда оценка, полученная комбинированием данного набора стратегий, имеет вид

$$I \approx F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} w_i(X_{i,j}) \frac{f(X_{i,j})}{p_i(X_{i,j})}.$$

Рассмотрим различные варианты выбора весовых функций w_i , введя обозначения $q_i = n_i p_i$, $q_{max} = \max\{q_i\}$:

- *Эвристика баланса.* Данная весовая функция была предложена в работе [Lafortune96] в качестве базовой для алгоритма двунаправленной трассировки путей. Она имеет вид

$$w_i = \frac{q_i}{\sum_k q_k}.$$

- *Эвристика отсечки.* Отсеивает элементы выборки, имеющие вероятность, меньшую пороговой αq_{max}

$$w_i = \begin{cases} \frac{q_i}{\sum_k \{q_k | q_k \geq \alpha q_{max}\}}, & q_i \geq \alpha q_{max} \\ 0, & q_i < \alpha q_{max} \end{cases}$$

- *Эвристика степени.* Наиболее вероятные элементы будут иметь больший вес. При $\beta = 1$ совпадает с эвристикой баланса.

$$w_i = \frac{q_i^\beta}{\sum_k q_k^\beta}, \beta \geq 1$$

Последние эвристики позволяют снизить или исключить влияние статистических выбросов на оценку интеграла. Оценки дисперсии для этих весовых функций можно найти в [12].

Глава 3. Глобальное освещение

3.1. Модели локального отражения

Диффузное отражение

Простейшей моделью локального освещения является идеальное диффузное отражение. Эта модель характеризуется равномерным распределением отраженного света во всех направлениях относительно проективной меры телесного угла

$$f_r(x, \omega \leftarrow \omega') = \frac{k_d}{\pi}$$

и подходит для моделирования матовых поверхностей, освещение которых не зависит от положения наблюдателя. Здесь и далее $k_d \in [0; 1]$ — коэффициент диффузного отражения.

Зеркальное отражение

Другой простой моделью локального освещения является идеальное зеркальное отражение. Для этой модели BRDF будет иметь вид

$$f_r(x, \omega \leftarrow \omega') = k_s \frac{\delta(\omega_{ideal} - \omega')}{|\omega' \cdot n|}.$$

Ввиду своей простоты, модель идеального отражения может применяться для весьма узкого класса материалов.

Модель Фонга

Рассмотрим теперь эмпирическую модель Фонга. Данная модель была предложена в работе [9] и получила широкое распространение в компьютерной графике, несмотря на существование более точных моделей, таких как модель Кука-Торренса.

BRDF для модели Фонга выглядит следующим образом:

$$f_r(x, \omega \leftarrow \omega') = k_s \frac{n+1}{2\pi} |\omega_{ideal} \cdot \omega'|^n,$$

где n — параметр, отвечающий за резкость отражения, ω_{ideal} — направление идеального отражения и $k_s \in [0; 1]$ — коэффициент глянцевого отражения.

Иногда моделью Фонга называют составную модель, имеющую диффузную и глянцевую части, BRDF которой имеет вид

$$f_r(x, \omega \leftarrow \omega') = \frac{k_d}{\pi} + k_s \frac{n+1}{2\pi} |\omega_{ideal} \cdot \omega'|^n, \quad k_d + k_s = 1.$$

На рис. 2 представлен набор материалов, полученных заданием различных параметров диффузного и глянцевого отражения, а также показателя резкости.

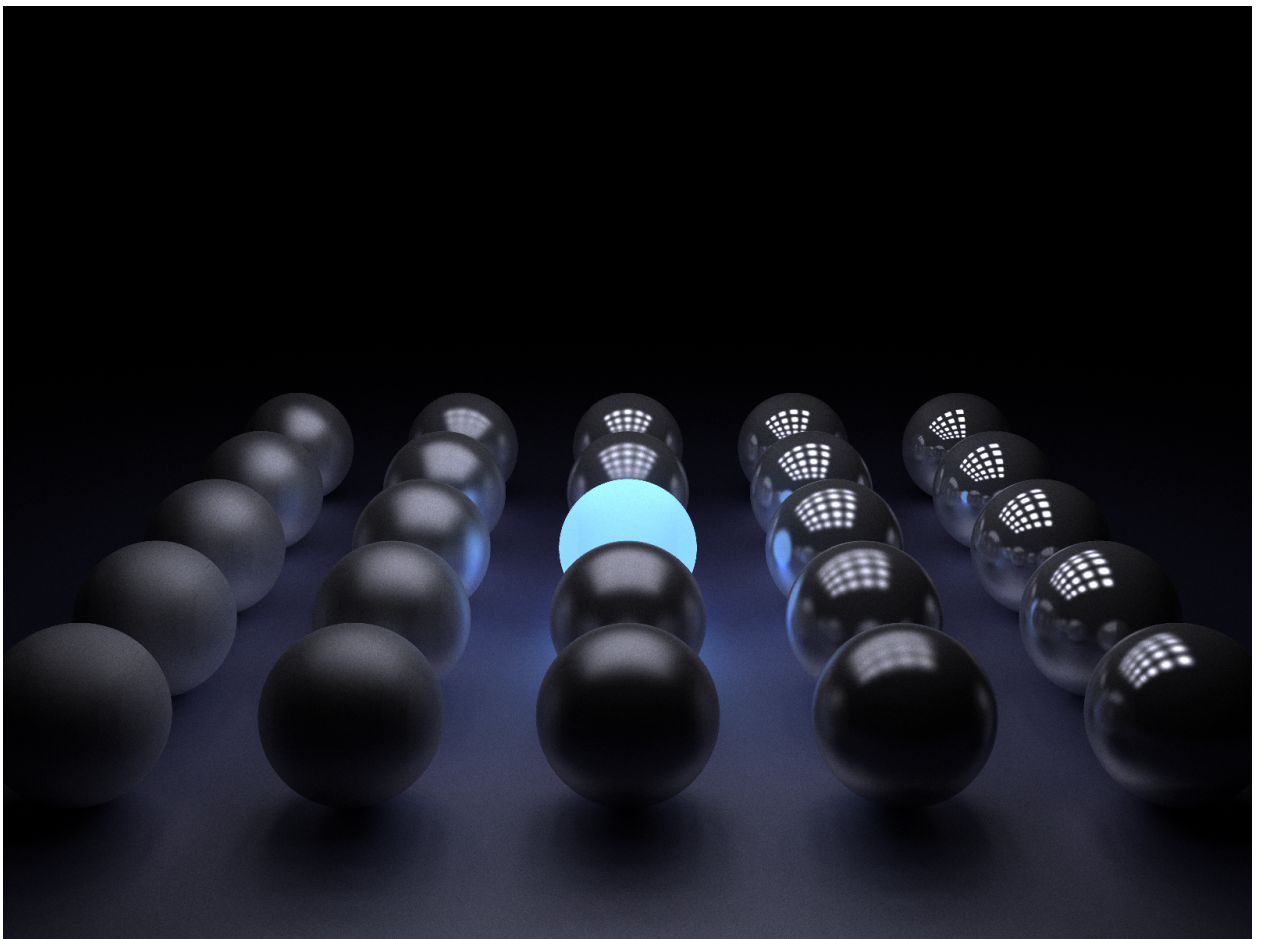


Рис. 2: Различные варианты комбинирования диффузного и глянцевого отражения

3.2. Модели рассеяния

Формулы Френеля

При падении света на границу раздела двух сред происходит его преломление и отражение. Долю преломленной и отраженной энергии определяют уравнения Френеля. Поскольку эти уравнения достаточно громоздки, их редко применяют напрямую. Широко распространена аппроксимация Шлика, определяющая долю отраженной энергии

$$R(\omega) = R_0 + (1 - R_0)(1 - |n \cdot \omega|)^5,$$

$$R_0 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

где n_1 и n_2 - показатели преломления смежных сред.

Например, идеальное преломление будет определяться BSDF вида

$$f_s(x, \omega \leftarrow \omega') = R \frac{\delta(\omega' - \omega_{ideal}^R)}{|\omega' \cdot n|} + (1 - R) \frac{\delta(\omega' - \omega_{ideal}^T)}{|\omega' \cdot n|},$$

где ω_{ideal}^R и ω_{ideal}^T — направления идеального отражения и преломления. На рис. 3-6 изображены результаты, полученные с помощью такой модели. Нужно отметить, что показатель преломления может различаться для разных длин волн. Этот эффект называется хроматической дисперсией. Для синтеза указанных изображений использовалась RGB-аппроксимация спектральных свойств.

Для более сложных отражений и преломлений можно использовать, например, модель Фонга или модель Кука-Торренса.

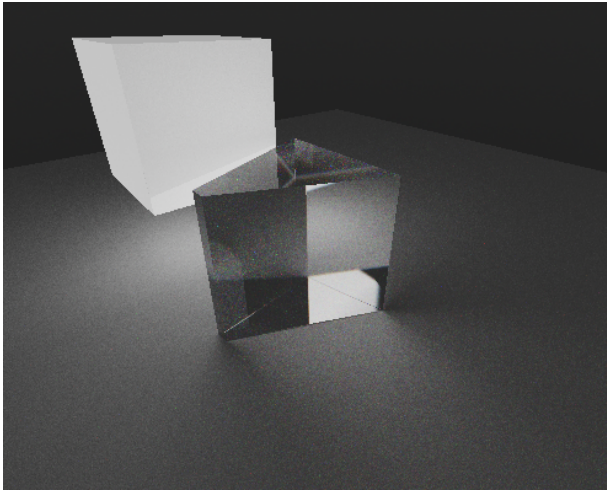


Рис. 3

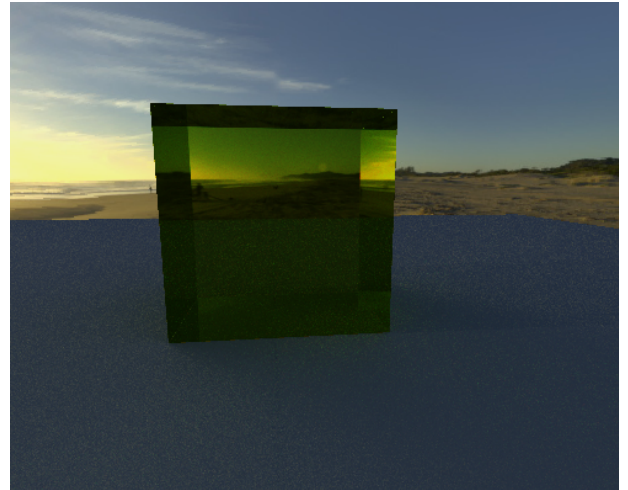


Рис. 4



Рис. 5

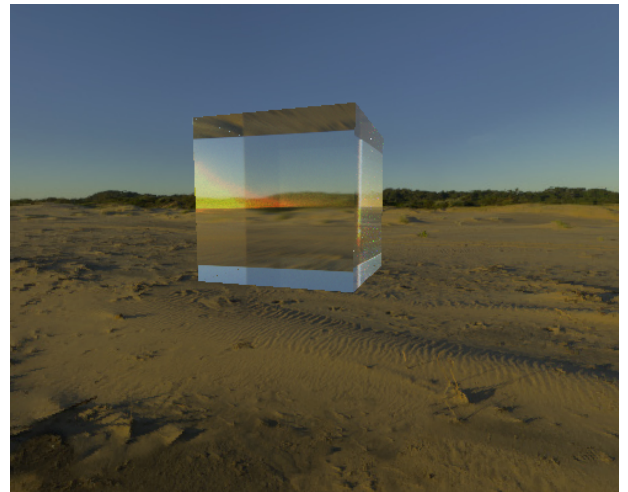


Рис. 6

Фазовая функция Хэни-Гринштейна

Наиболее распространенной в компьютерной графике является фазовая функция Хэни-Гринштейна. Она имеет вид

$$p(x, \omega \leftarrow \omega') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{[1 + g^2 - 2g(\omega \cdot \omega')]^{3/2}}.$$

Параметр g представляет собой средний косинус рассеяния и отвечает за анизотропные свойства среды. При $g = 0$ среда будет рассеивать свет одинаково во всех направлениях. При $g > 0$ будет преобладать рассеяние вперед, по направлению распространения, а при $g < 0$ — назад.

На рис. 8-10 демонстрируются эффекты подповерхностного рассеяния и разных типов преломления и отражения. Для сравнения на рис. 7 приведен диффузный отражающий материал. В реализации использовалась модель Фонга для отражения и преломления и фазовая функция Хэни-Гринштейна.



Рис. 7

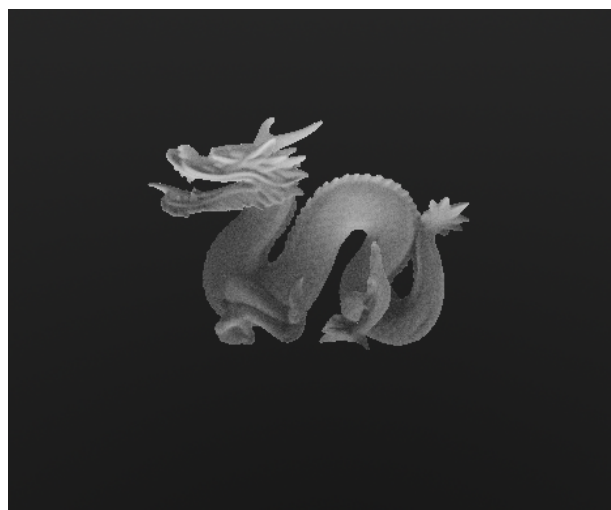


Рис. 8



Рис. 9

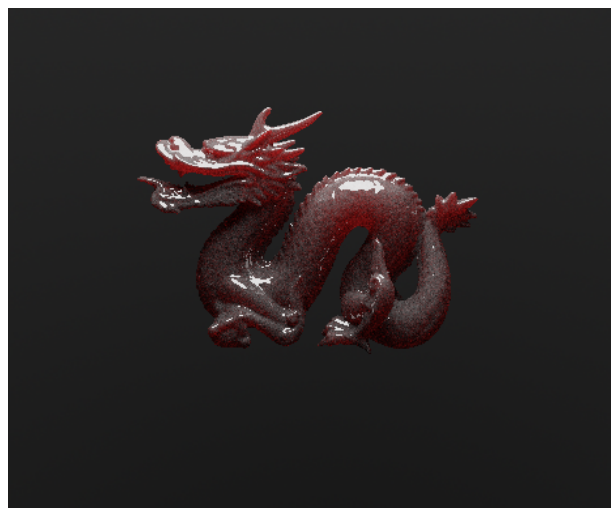


Рис. 10

3.3. Алгоритмы трассировки

Первые подходы к статистическому решению задачи глобального освещения в качестве отправной точки использовали идею, впоследствии сформулированную в виде операторного решения уравнения переноса излучения с граничными условиями в форме уравнения рендеринга

$$L = L_e + \mathbf{T} \circ L_e + \mathbf{T}^2 \circ L_e + \dots$$

Для расчета энергетической яркости из позиции наблюдателя выпускается луч. К искомой энергетической яркости прибавляется значение эмиссии в точке пересечения луча с объектом сцены, после чего из этой точки в случайных направлениях выпускается некоторое количество дополнительных лучей, для каждого из которых операция рекуррентно повторяется некоторое количество раз.

Этот метод носит название *распределенной трассировки лучей* (англ. *distributed ray tracing*) [13, 4]. Такой подход для сложных сцен требует исключительно большого количества памяти и вычислительных ресурсов. Кроме того, алгоритм не предполагает визуализации промежуточных результатов.

В работе [5] вместо распределенной древовидной структуры было предложено использовать набор траекторий, полученных случайным блужданием по поверхностям объектов сцены. Этот метод был назван *трассировкой траекторий* (англ. *path tracing*). Алгоритм требует меньше памяти и допускает визуализацию промежуточных результатов, к тому же обладает меньшей дисперсией, нежели алгоритм распределенной трассировки лучей, поскольку основным источником шума являются первые сегменты усредняющих структур: при равном количестве дополнительных лучей, в распределенной трассировке первые рассеяния будут сэмплироваться с меньшей интенсивностью.

Следующим шагом в развитии стохастических методов визуализации стал алгоритм *двунаправленной трассировки траекторий* (англ. *bidirectional path tracing*) [6, 7]. Основной идеей алгоритма, отличающей его от более ранних методов, является одновременная трассировка траекторий и с позиции наблюдателя, и с позиции источника света, с последующим соединением обеих траекторий и их префиксов. Для комбинирования траекторий, полученных соединением префиксов, с одинаковым количеством вершин использовалась эвристика баланса. Сами вершины траекторий генерировались с помощью выборки по значимости с распределением, пропорциональным BSDF в предыдущей вершине, оценивая значение интегральной части локального уравнения рассеяния

$$\int_{S^2} f_s(x, \omega \leftarrow \omega') L_i(x, \omega') |\omega' \cdot n| d\sigma(\omega') \approx \sum_k \frac{f_s(x, \omega \leftarrow \omega_k) |\omega_k \cdot n|}{p(\omega_k)} L_i(x, \omega_k).$$

Позже, в работе [12] была получена формулировка через интеграл по траекториям. Это позволило применять методы стохастического интегрирования не локально — для вершин траекторий, а для самих траекторий в целом. Одним из таких методов является Metropolis Light Transport (MLT) — разновидность алгоритма Метрополиса-Гастингса, учитывающая специфику задачи глобального освещения, полученная в этой же работе. Также был совершен пересмотр известных методов, в том числе и алгоритма двунаправленной трассировки. Например, было показано, что эвристика степени и эвристика отсечки являются лучшим выбором весовой функции, нежели эвристика баланса, в тех случаях, когда одна из комбинируемых стратегий обладает низкой дисперсией.

3.4. Обзор алгоритма

Двунаправленная трассировка траекторий

Для синтеза изображений, имеющихся в данной работе, был использован алгоритм, берущий за основу двунаправленную трассировку лучей (BPT). Хотя MLT дает лучшие результаты для сцен, включающих поверхностные и объемные каустики или обладающих сложной геометрией, сильно ограничивающей распространение света (например, приоткрытая дверь, отделяющая наблюдателя и источник освещения), BPT является более универсальным и простым алгоритмом, что положительно сказывается на производительности и возможности к расширению.

Первым этапом алгоритма является построение траекторий с позиции сенсора и с позиции источника света. Направления трассировки определяются на основе выборки по значимости для BSDF, если точка находится на границе $\partial \mathcal{D}$, или для фазовой функции, если точка принадлежит открытому множеству \mathcal{D} .

При построении траектории внутри однородной рассеивающей среды определяется расстояние $s_{\partial \mathcal{D}}$ до ближайшего объекта вдоль заданного луча и сравнивается с длиной свободного пробега

$$s = \frac{\ln(1-\xi)}{-\sigma_t},$$

где ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$.

Если $s_{\partial \mathcal{D}} \leq s$, то траектория дополняется точкой поверхности. В противном случае добавляется точка, соответствующая расстоянию s вдоль заданного луча. В случае неоднородной среды, для определения s можно использовать алгоритм Вудкока (англ. *Woodcock tracking*).

Второй этап заключается в соединении префиксов траекторий и построении оценки измерения по полученному набору траекторий.

Пусть $\bar{x} = x_0 x_1 \dots x_{n_L-1}$ — траектория с позиции источника света x_0 , $\bar{y} = y_0 y_1 \dots y_{n_E-1}$ — траектория с позиции наблюдателя y_0 , а n_L и n_E — количество вершин в \bar{x} и \bar{y} соответственно.

Определим префиксы этих траекторий как $\{\bar{x}_s = x_0 x_1 \dots x_{s-1} | s = \overline{0, n_L}\}$ и $\{\bar{y}_t = y_0 y_1 \dots y_{t-1} | t = \overline{0, n_E}\}$. Будем считать, что префиксы \bar{x}_s и \bar{y}_t можно соединить, если последние их вершины находятся в пределах одной и той же среды \mathcal{V}_k^s и к тому же $V(x_{s-1} \leftrightarrow y_{t-1}) = 1$. Траекторию, полученную соединением префиксов, будем обозначать $\overline{\bar{x}_s, \bar{y}_t} = x_0 \dots x_{s-1} y_{t-1} \dots y_0$.

Для оценки измерения используется множественная выборка по значимости. В качестве весовой функции используется эвристика степени с параметром $\beta = 2$. Оценка имеет вид

$$I_j \approx \sum_{s,t} w(\overline{\bar{x}_s, \bar{y}_t}) \frac{f_j(\overline{\bar{x}_s, \bar{y}_t})}{p(\overline{\bar{x}_s, \bar{y}_t})}.$$

Суммирование ведется по соединимым траекториям. Распределение вероятностей определяется как $p(\overline{\bar{x}_s, \bar{y}_t}) = p(\bar{x}_s) p(\bar{y}_t)$, где

$$p(\bar{x}_s) = \left[\prod_{i=1}^{s-1} P_{\sigma^\perp}(x_{i-1} \rightarrow x_i) G(x_{i-1} \leftrightarrow x_i) \right] P_A(x_0),$$

$P_A(x_0)$ — плотность вероятности на поверхности или внутри объема источника света, $P_{\sigma^\perp}(x_{i-1} \rightarrow x_i)$ — вероятность семплирования направления $\omega_{x_{i-1} \rightarrow x_i}$ в точке x_{i-1} , определяемая BSDF или фазовой функцией. Аналогично определяется $p(\bar{y}_t)$.

Детерминированное интегрирование

Для уменьшения дисперсии оценки и повышения производительности можно использовать аналитические представления подинтегральных функций для некоторых типов траекторий, производя интегрирование с помощью детерминированных численных методов.

К примеру, можно разделить освещение на прямое, то есть определяемое траекториями $x_0 y_1 y_0$, и не прямое, используя для последнего алгоритм трассировки путей, а для первого численное интегрирование $T \circ L_e$.

Таким методом можно визуализировать рассеивающую среду. Без непрямого освещения оценка измерения получится смещенной, однако в некоторых случаях это допустимая неточность. Например, если целью является визуализация эффекта «световых дорожек» в тумане или пыли.

Рассеяние света в среде на рисунках 11-14 реализовано с помощью метода трапеций для удаленного точечного источника света.

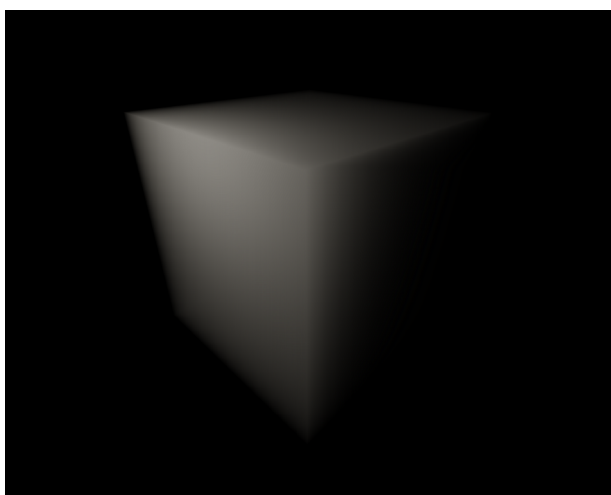


Рис. 11

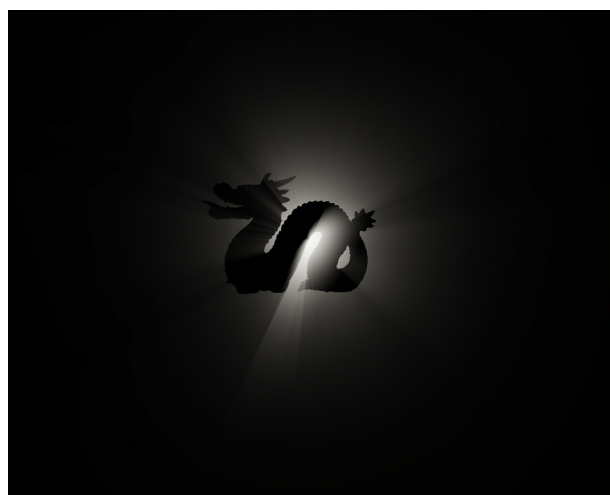


Рис. 12

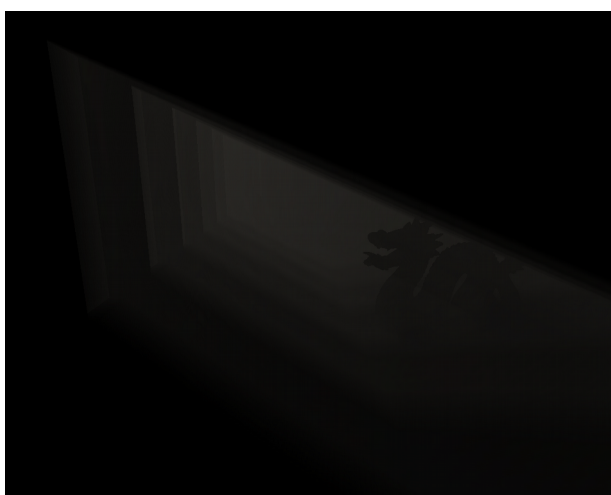


Рис. 13

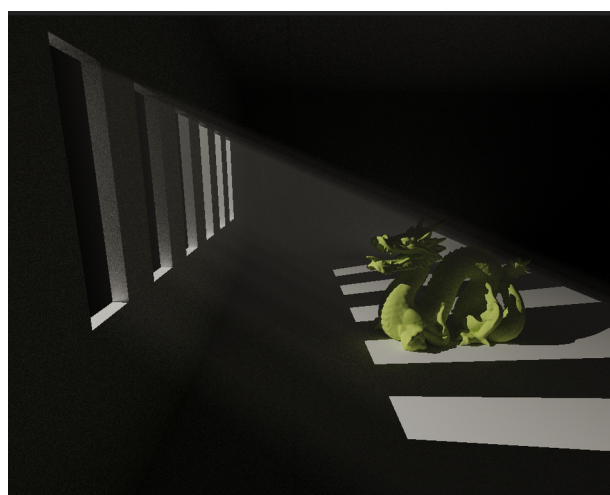


Рис. 14

Тональное отображение

Поскольку большинство форматов изображений использует для передачи цвета конечное число значений, локализованных в некотором промежутке числовой оси, а энергетическая яркость таким образом локализована быть не может, появляется необходимость во введении функции, отображающей энергетическую яркость или, в общем случае, отклик сенсора в промежуток числовой оси $TM: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$. Такие отображения называют *тональными* (англ. *tone mapping*).

Наиболее популярными глобальными, то есть одинаковыми для всех измерений, тональными отображениями являются

- $TM(x) = \frac{x}{x+1}$ — оператор Рейнхарда;
- $TM(x) = a(x+c)^{\gamma}$ — гамма-коррекция.

Выводы

В данной работе была построена математическая модель трехмерной сцены и сформулирована задача глобального освещения. Также были рассмотрены различные подходы к решению проблемы переноса светового излучения.

Основным результатом проделанной работы является алгоритм, решающий задачу глобального освещения. Этот алгоритм успешно справляется с визуализацией таких эффектов, как не прямое освещение, преломление, рассеяние света в среде и подповерхностное рассеяние, а также поддерживает различные типы материалов и источников света.

Заключение

Построенный алгоритм и изложенная математическая модель являются базой для дальнейших исследований. В последующих работах планируется уделить большее внимание эффекту подповерхностного рассеяния и его реализации в реальном времени, а также анализу пространства траекторий.

Список литературы

1. Arvo, J. [1995]. *Analytic Methods for Simulated Light Transport*, PhD thesis, Yale University.
2. Chandrasekhar, S. [1960]. *Radiative Transfer*, Dover Publications, New York.
3. Cohen, M. F. & Wallace, J. R. [1993]. *Radiosity and Realistic Image Synthesis*, Academic Press Professional, San Diego, CA.
4. Cook, R. L., Porter, T. & Carpenter, L. [1984]. Distributed ray tracing, *Computer Graphics (SIGGRAPH 84 Proceedings)* 18(3): 137–145.
5. Kajiya, J. T. [1986]. The rendering equation, *Computer Graphics (SIGGRAPH 86 Proceedings)*, Vol. 20, pp. 143–150.
6. Lafortune, E. P. & Willems, Y. D. [1993]. Bi-directional path tracing, *CompuGraphics Pro-ceedings*, Alvor, Portugal, pp. 145–153.
7. Lafortune, E. P. & Willems, Y. D. [1996]. Rendering Participating Media with Bi-directional Path Tracing, *7th Eurographics Workshop on Rendering*
8. Pauly, M., Kollig, T. & Keller, A. [2000]. Metropolis Light Transport for Participating Media, *Proceedings of the Eurographics Workshop on Rendering Techniques 2000*, pp. 11-22
9. Phong, B. T. [1975]. Illumination for computer generated pictures, *Communications of the ACM* 18(6): 311–317.

10. Veach, E. & Guibas, L. J. [1995]. Optimally combining sampling techniques for Monte Carlo rendering, *SIGGRAPH 95 Proceedings*, Addison-Wesley, pp. 419–428.
11. Veach, E. & Guibas, L. J. [1997]. Metropolis light transport, *SIGGRAPH 97 Proceedings*, Addison-Wesley, pp. 65–76.
12. Veach, E. [1997]. *Robust Monte-Carlo Methods for Ligth Transport Simulation*, PhD thesis, Stanford University.
13. Whitted, T. [1980]. An improved illumination model for shaded display, *Communications of the ACM* 32(6): 343–349.