

## АСТРОНОМИЯ

УДК 521.135  
MSC 70F07

### Орбитальная прецессия в ограниченной задаче трех тел: точные представления\*

*А. А. Березина*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9  
Институт прикладной астрономии РАН,  
Российская Федерация, 197110, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 8

**Для цитирования:** *Березина А. А.* Орбитальная прецессия в ограниченной задаче трех тел: точные представления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 185–197.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.113>

Рассмотрены аналитические представления для скорости апсидальной прецессии в эллиптической плоской ограниченной задаче трех тел в случае, когда орбита возмущающего тела — внешняя по отношению к орбите тестовой частицы. Аналитические выражения сопоставлены с численными данными, полученными в ходе массовых расчетов скорости прецессии. Получено аналитическое выражение для скорости апсидальной прецессии в виде степенного ряда по параметру, равному отношению больших полуосей орбит тестовой частицы и возмущающей планеты. Показано, что аналитические выражения для скорости апсидальной прецессии частицы надежны лишь на удалении от зоны нестабильности в окрестности орбиты возмущающей планеты. Вблизи же люка Виздома линейная вековая теория перестает работать. Предложена поправочная эмпирическая формула для вычисления скорости апсидальной прецессии при относительно высоких (но менее 0.5) эксцентриситетах частицы и возмущающей планеты. Предложенные формулы применены к описанию прецессии орбит в реальных экзопланетных системах.

*Ключевые слова:* ограниченная задача трех тел, прецессия линии апсид, люк Виздома, экзопланеты, планетные системы.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-22-00046).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

**1. Введение.** В данной работе рассмотрены аналитические представления скорости изменения долготы перицентра  $\varpi$  тестовой пассивно гравитирующей частицы на внутренней орбите в эллиптической плоской ограниченной задаче трех тел.

Хеппенхаймер [1], Уитмайр и др. [2], Тибо и др. [3] исследовали движение тестовой частицы в двойной звездной системе в плоском случае, когда частица обращается вокруг одного из компонентов двойной системы. Предполагалось, что эксцентриситет частицы  $e_1 \ll 1$ , отношение больших полуосей орбит частицы и двойной  $\alpha = a_1/a_2 \ll 1$ . Также учитывалось, что эксцентриситеты двойных, как правило, не малы, а лежат в широком диапазоне: от 0 до 1 со средним значением 0.55 [1, 4, 5]. Пусть массы измеряются в массах Солнца, расстояния — в астрономических единицах, время — в годах. Таким образом, гравитационная постоянная  $G = 4\pi^2$ . Далее будем использовать эти единицы измерения.

Если взять в начальный момент времени  $e_1 = 0$ , тогда из уравнений движения можно получить [1–3]

$$\tan \varpi_1 = -\frac{\sin ut}{1 - \cos ut}, \quad u = \frac{3\pi}{2} \frac{m_2}{m_0^{1/2}} \frac{a_1^{3/2}}{a_2^3} (1 - e_2^2)^{-3/2}, \quad (1)$$

где  $m_0$  — масса главного компонента двойной системы;  $m_2$  — масса меньшего компонента двойной системы;  $\varpi_1$  — долгота перицентра тестовой частицы. Вводя переменную  $y = ut/2$ , можно записать (см. формулу (13.6) в [6], а также [7]):

$$\varpi_1 = y + \text{const}, \quad (2)$$

где  $\text{const}$  — константа, зависящая от того, к какой четверти принадлежит угол  $y$ . Таким образом, в некотором смысле величину  $u$  можно рассматривать как скорость прецессии линии апсид частицы.

Мюррей и Дермотт [8] рассмотрели случай плоской круговой ограниченной задачи трех тел, в которой внешнее тело возмущает внутреннее тело пренебрежимой массы. В отсутствие резонансов формула для скорости изменения долготы перицентра имеет вид

$$\dot{\varpi}_1 = \frac{1}{4} \frac{m_2}{m_0} n_1 \alpha^2 W_1, \quad W_1 = -3\alpha b_{3/2}^{(0)} + 2b_{3/2}^{(1)} + \alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha}, \quad (3)$$

где  $n_1$  — среднее движение тестовой частицы;  $\alpha = a_1/a_2$ ,  $b_{i+1/2}^{(j)}$  — коэффициент Лапласа, которые определяются как

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi \, d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s}, \quad (4)$$

где  $s$  — полуцелое число [8].

Заметим, что при подстановке  $n_1 = 2\pi\sqrt{m_0}/a_1^{3/2}$  коэффициент перед скобками в формуле (1) отличается от соответствующего в формуле (3) на множитель  $3\alpha$ . В дальнейшем можно видеть (см., например, раздел 4), что формула (1) без учета эксцентриситета  $e_2$  является первым членом разложения по  $\alpha$  формулы (3).

Применяя метод усреднения Гаусса, Мюррей и Дермотт [8] также получили представление апсидальной скорости прецессии в эллиптической плоской ограниченной задаче трех тел. Эксцентриситет частицы предполагался малым. Усредненное

влияние внешнего тела на внутреннее определялось путем распределения массы внешнего тела вдоль его орбиты. После вычисления текущей скорости прецессии она усреднялась по истинной аномалии внутреннего тела. Результат данного подхода тождественен расчету усредненной скорости прецессии через уравнения Лагранжа с возмущающей функцией, в которой отбрасываются все члены, не зависящие от средних долгот. Усредненная скорость прецессии в этом случае (с точностью до членов второго порядка в разложении возмущающей функции по эксцентриситетам)

$$\langle \dot{\varpi}_1 \rangle = \frac{1}{4} \frac{m_2}{m_0} n_1 \alpha^2 \left[ W_1 + \frac{e_2}{e_1} \frac{\alpha}{2} W_2 \cos(\varpi_2 - \varpi_1) \right], \quad (5)$$

$$W_2 = -3 \frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} + 2b_{3/2}^{(1)} + 2\alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{db_{3/2}^{(2)}}{d\alpha},$$

где  $\varpi_2$  — долгота перицентра возмущающего тела.

Расчеты скоростей прецессии важны для выявления вековых резонансов в планетных системах. Наличие и взаимодействие вековых резонансов влияет на долговременную устойчивость системы и даже способно приводить к дезинтеграции системы (см., например, [9]).

Нашей целью является вывод компактных и удобных для приложений представлений для скорости прецессии в зависимости от параметров задачи.

**2. Численное моделирование.** Мы провели массовые расчеты с целью численного определения скоростей апсидальной прецессии. Вычисления проводились в Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН. Использовался несимплектический интегратор с адаптивным временным шагом 15-го порядка [10] в программном пакете REBOUND [11]. Центральное тело (звезда) имело единичную массу, возмущающее тело (планета) находилось на единичном расстоянии от звезды, долгота перицентра планеты задавалась нулевой. Время моделирования составляло 1000 оборотов планеты вокруг звезды. Варьировались масса возмущающей планеты  $m_2$  от  $10^{-7}$  до  $10^{-3}$ , большая полуось орбиты тестовой частицы  $a_1$  от  $0.01 \cdot \frac{1-e_2}{1+e_1}$  до  $0.95 \cdot \frac{1-e_2}{1+e_1}$ , эксцентриситет орбиты планеты  $e_2$  от 0.01 до 0.1, а также начальный эксцентриситет частицы  $e_1$  от 0.01 до 0.1 и начальная долгота перицентра орбиты частицы  $\varpi_1$  от 0 до  $2\pi$ .

Заметим, что входящие в формулы (3) и (5) эксцентриситет частицы  $e_1$  и долгота перицентра  $\varpi_1$  меняются с течением времени. Рассмотрим, как это влияет на скорость прецессии  $\dot{\varpi}_1$ . На рис. 1 показаны численные и теоретические данные изменения  $e_1$ ,  $\varpi_1$  и  $\dot{\varpi}_1$  со временем  $t$ , а также зависимость эксцентриситета от долготы перицентра на типичном примере при длительном моделировании (50 тыс. оборотов возмущающей планеты вокруг звезды). Время измеряется в периодах обращения внешней планеты  $T_2$ . Теоретические кривые соответствуют уравнениям движения в линейной вековой теории [8]:

$$\dot{\varpi}_1 = \frac{1}{4} m_2 n_1 \alpha^2 \left[ 2 \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^2} + \frac{e_2}{\alpha e_1} \left( 2b_{1/2}^{(1)} - 2\alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} \right) \cos \varpi_1 \right], \quad (6)$$

$$e_1 = \frac{1}{4} m_2 n_1 \alpha e_2 \left( 2b_{1/2}^{(1)} - 2\alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} \right) \sin \varpi_1. \quad (7)$$

$$m_2 = 10^{-5}, e_2 = 0.04, e_1 = 0.02, a_1 = 0.845 \frac{1-e_2}{1+e_1}, \varpi_1 = \pi$$

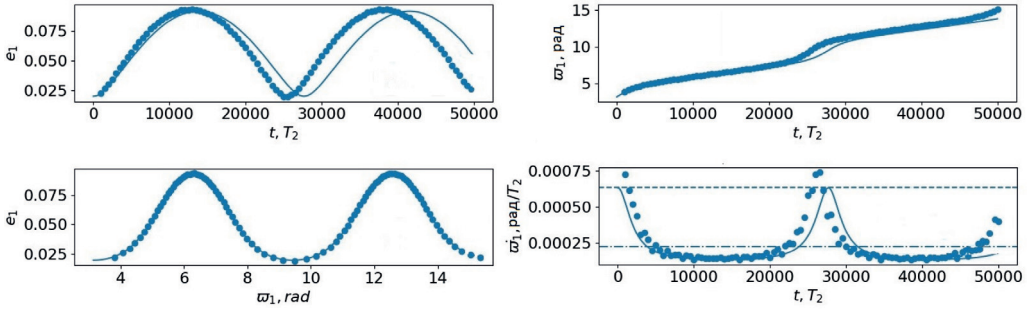


Рис. 1. На верхних графиках показаны численные и теоретические данные зависимости эксцентриситета  $e_1$  и долготы перигея  $\varpi_1$  от времени  $t$  для типичной системы выборки.  $T_2$  — период обращения внешней планеты. На нижнем левом графике — зависимость эксцентриситет — долгота перигея; на нижнем правом — зависимость скорости прецессии орбиты тестовой частицы  $\dot{\varpi}_1$  от времени. Кривыми показаны теоретические данные согласно линейной вековой модели, точками — модельные данные, пунктиром — скорость прецессии согласно формуле (5), штрихпунктиром — скорость прецессии согласно формуле (3).

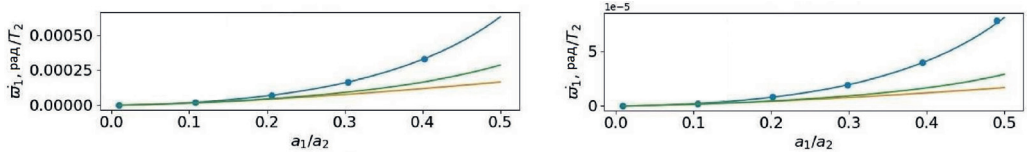


Рис. 2. Численные данные и аналитические значения скорости апсидальной прецессии тестовой частицы  $\dot{\varpi}_1$  в зависимости от отношения больших полуосей орбит частицы и возмущающей планеты  $a_1/a_2$  при эксцентриситете орбиты тестовой частицы  $e_1 = 0.02$  и начальной долготе перигея орбиты частицы  $\varpi_1 = \pi$ . На левом графике эксцентриситет возмущающей планеты  $e_2 = 0.04$ , масса планеты  $m_2 = 10^{-4}$  (в единицах массы центральной звезды); на правом:  $e_2 = 0.06$ ,  $m_2 = 10^{-5}$ . Точки обозначают данные численных экспериментов, синяя кривая соответствует формуле (5), зеленая — формуле (3), оранжевая — формуле (1).

Видим хорошее соответствие теории и результатов численного моделирования, но с течением времени их расхождение возрастает. Что касается скорости апсидальной прецессии, формула (5) соответствует данным в начальный момент времени, а формула (3) отражает среднее значение на всем промежутке времени. Действительно, усреднение  $\cos(\varpi_2 - \varpi_1)$  по времени в формуле (5) дает ноль, и формула (5) приводится к виду (3).

На рис. 2 представлены типичные графики скорости прецессии, согласно результатам численного моделирования и аналитическим представлениям (2), (4), (6), в зависимости от отношения  $\alpha = a_1/a_2$  при различных параметрах системы. Видно, что наилучшее соответствие имеет аппроксимация (5).

**3. Люки Виздома.** Согласно Виздому [12] и Дункану и др. [13], в ограниченной круговой задаче трех тел при  $e_1 \sim 0$  вблизи орбиты планеты существует хаотическая область вследствие перекрытия резонансов средних движений вида  $\frac{p+1}{p}$ , где  $p \gg 1$ . Радиальный размер люка Виздома (см. формулу (11.53) в книге [6]) определяется по формуле

$$\varepsilon_{\text{cr}} \simeq 1.62 \mu^{2/7}, \quad (8)$$

где  $\mu = \frac{m_2}{m_0 + m_2}$ .

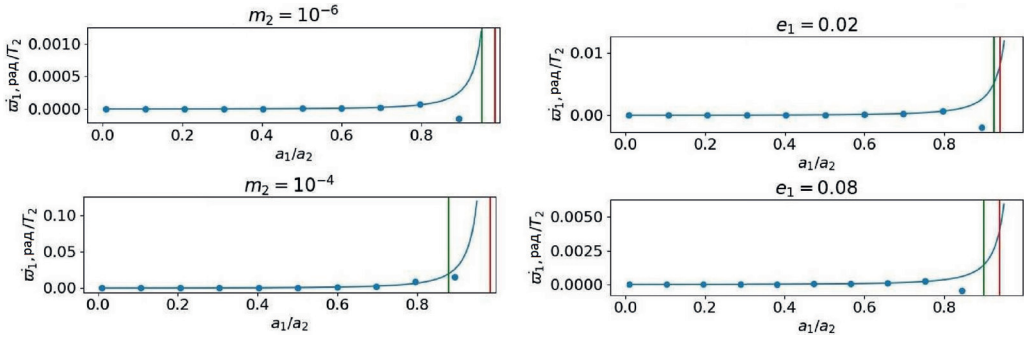


Рис. 3. Зависимость скорости апсидальной прецессии тестовой частицы  $\dot{\omega}_1$  от отношения  $a_1/a_2$ . Если иное не указано на графике, параметры системы составляют:  $e_1 = 0.02$ ,  $\varpi_1 = \pi$ ,  $e_2 = 0.04$ ,  $m_2 = 10^{-5}$ . Точки — данные численного моделирования, синяя кривая соответствует формуле (5), зеленая вертикальная линия отмечает границу люка Виздома согласно формуле (9), красная линия — согласно формуле (8).

Полуширину области неустойчивости можно также получить используя двумерное столкновительное отображение [6]; в итоге она определяется формулой

$$\varepsilon_{cr} \simeq 1.67(\mu e_1)^{1/5}, \quad (9)$$

где  $e_1$  — начальный эксцентриситет тестовой частицы (см. формулу (11.50) в [6]).

На рис. 3 представлены типичные графики зависимости скорости прецессии от  $\alpha$  при различных параметрах системы, указано положение люков Виздома согласно формулам (8) и (9). Мы нашли, что во всех рассматриваемых нами случаях численного моделирования формула (9) задает зону неустойчивости шире, чем формула (8). Рис. 3 иллюстрирует важный факт: отклонения теории от результатов численного моделирования резко возрастают вблизи и внутри хаотической области (люка Виздома).

Таким образом, рассмотренные нами аналитические выражения для скорости апсидальной прецессии частицы надежны лишь на удалении от зоны неустойчивости в окрестности орбиты возмущающей планеты.

**4. Новые представления.** Формула (5) хорошо аппроксимирует результаты численного моделирования при параметрах системы, указанных в разделе 2, за исключением больших значений  $\alpha$ , но не всегда удобна для приложений. Представим ее в более удобном и компактном виде как ряд по степеням  $\alpha$ . Заметим, что формулы (3) и (5) получены из разложений по эксцентриситету, который предполагается малым; коэффициенты этих разложений представляют собой точные (через коэффициенты Лапласа) зависимости от  $\alpha$ .

Коэффициенты Лапласа представим в виде ряда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) &= \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots j} \alpha^j \cdot \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right] \end{aligned} \quad (10)$$

(см., например, [8]). При этом их производные по  $\alpha$ :

$$Db_s^{(j)} = s \left( b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)} \right). \quad (11)$$

Рассмотрим сумму, обозначенную нами ранее через  $W_1$ , и подставим в нее значения производных коэффициентов Лапласа:

$$\begin{aligned} W_1 &= -3\alpha b_{3/2}^{(0)} + 2b_{3/2}^{(1)} + \alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} = \\ &= -3\alpha b_{3/2}^{(0)} + 2b_{3/2}^{(1)} + 3\alpha \left( \frac{1}{2} + \alpha^2 \right) b_{5/2}^{(0)} - 6\alpha^2 b_{5/2}^{(1)} + \frac{3}{2}\alpha b_{5/2}^{(2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из разложений коэффициентов Лапласа в ряды можно видеть, что в ряде для  $W_1$  у нас будут только нечетные степени  $\alpha$ ; при этом при первой степени будет коэффициент 3, при третьей —  $\frac{45}{8}$ . Обозначим через  $A_s^{(j)}(a)$  отношение вида

$$A_s^{(j)}(a) = \frac{s(s+1) \dots (s + \frac{a}{2} - 1) \cdot (s+j)(s+j+1) \dots (s+j + \frac{a}{2} - 1)}{1 \cdot 2 \dots \frac{a}{2} \cdot (j+1)(j+2) \dots (j + \frac{a}{2})}. \quad (13)$$

Тогда в разложении (12) для  $W_1$  при  $i$ -й степени  $\alpha$  коэффициент будет равен

$$-6A_{3/2}^{(0)}(i-1) + 6A_{3/2}^{(1)}(i-1) + 3A_{5/2}^{(0)}(i-1) + 6A_{5/2}^{(0)}(i-3) - 30A_{5/2}^{(1)}(i-3) + \frac{105}{8}A_{5/2}^{(2)}(i-3). \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} s^2 A_{s+1}^{(0)}(a) &= \left( s + \frac{a}{2} \right)^2 A_s^{(0)}(a), & A_s^{(1)}(a) &= \frac{s + \frac{a}{2}}{s(1 + \frac{a}{2})} A_s^{(0)}(a), \\ A_s^{(2)}(a) &= \frac{2(s+1 + \frac{a}{2})}{(s+1)(2 + \frac{a}{2})} A_s^{(1)}(a), & A_s^{(0)}(i-1) &= \frac{(s + \frac{i-1}{2} - 1)^2}{((i-1)/2)^2} A_s^{(0)}(i-3). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом этих соотношений получаем коэффициент при  $i$ -й степени  $\alpha$ , равный

$$\left( 2 + \frac{2}{i+1} \right) A_{3/2}^{(0)}(i-1) = \left( 2 + \frac{2}{i+1} \right) \cdot \frac{(i!)^2}{2^{i-1}((\frac{i-1}{2})!)^2}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим  $W_2$ , и аналогично исключим производные:

$$\begin{aligned} W_2 &= -3\frac{db_{3/2}^{(0)}}{d\alpha} + 2b_{3/2}^{(1)} + 2\alpha \frac{db_{3/2}^{(1)}}{d\alpha} + \frac{db_{3/2}^{(2)}}{d\alpha} = \\ &= 2b_{3/2}^{(1)} + 12\alpha b_{5/2}^{(0)} - 3 \left( \frac{5}{2} + 2\alpha^2 \right) b_{5/2}^{(1)} + \frac{3}{2}b_{5/2}^{(3)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь также получаются только нечетные степени  $\alpha$ . При первой степени коэффициент будет равен  $-\frac{15}{2}$ , при третьей  $-\frac{105}{8}$ , при  $i$ -й степени:

$$6A_{3/2}^{(0)}(i-1) + 24A_{5/2}^{(0)}(i-1) - \frac{75}{2}A_{5/2}^{(1)}(i-1) - 30A_{5/2}^{(1)}(i-3) + \frac{315}{16}A_{5/2}^{(3)}(i-3). \quad (18)$$

При этом

$$A_s^{(3)}(a) = \frac{6(s+1+\frac{a}{2})(s+2+\frac{a}{2})}{(2+\frac{a}{2})(3+\frac{a}{2})(s+1)(s+2)} A_s^{(1)}(a). \quad (19)$$

Тогда коэффициент при  $i$ -й степени  $\alpha$  приводится к виду

$$-4 \left( 1 + \frac{2i+5}{i^2+4i+3} \right) A_{3/2}^{(0)}(i-1) = -4 \left( 1 + \frac{2i+5}{i^2+4i+3} \right) \frac{(i!!)^2}{2^{i-1}((\frac{i-1}{2})!)^2}. \quad (20)$$

Тогда разложение  $W_1$  будет давать в общей сумме нечетные степени  $\alpha$ , а разложение  $W_2$  — четные, на единицу большие (с учетом  $\alpha$  перед  $W_2$  в формуле (5)).

Выищем в явном виде разложение для скорости прецессии до 21-го порядка по  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\omega} \rangle = & \frac{1}{4} \frac{m_2}{m_0} n \alpha^3 \left[ 3 + \frac{45}{8} \alpha^2 + \frac{525}{64} \alpha^4 + \frac{11025}{1024} \alpha^6 + \frac{218295}{16384} \alpha^8 + \frac{2081079}{131072} \alpha^{10} + \right. \\ & + \frac{19324305}{1048576} \alpha^{12} + \frac{703956825}{33554432} \alpha^{14} + \frac{25264228275}{1073741824} \alpha^{16} + \frac{224009490705}{8589934592} \alpha^{18} + \\ & + \frac{1967210618373}{68719476736} \alpha^{20} - \frac{e_2}{2e_1} \left( \frac{15}{2} \alpha + \frac{105}{8} \alpha^3 + \frac{4725}{256} \alpha^5 + \frac{24255}{1024} \alpha^7 + \right. \\ & + \frac{945945}{32768} \alpha^9 + \frac{4459455}{131072} \alpha^{11} + \frac{328513185}{8388608} \alpha^{13} + \frac{1486131075}{33554432} \alpha^{15} + \\ & \left. + \frac{106109758755}{2147483648} \alpha^{17} + \frac{468383480565}{8589934592} \alpha^{19} + \frac{16393421819775}{274877906944} \alpha^{21} \right) \cos(\varpi_2 - \varpi_1) \Big] \approx \\ \approx & \frac{1}{4} \frac{m_2}{m_0} n \alpha^3 \left[ 3 + 5.6250 \alpha^2 + 8.2031 \alpha^4 + 10.7666 \alpha^6 + 13.3237 \alpha^8 + 15.8774 \alpha^{10} + \right. \\ & + 18.4291 \alpha^{12} + 20.8795 \alpha^{14} + 23.5291 \alpha^{16} + 26.0781 \alpha^{18} + 28.6267 \alpha^{20} - \frac{e_2}{2e_1} (7.5000 \alpha + \\ & + 13.1250 \alpha^3 + 18.4570 \alpha^5 + 23.6865 \alpha^7 + 28.8680 \alpha^9 + 34.0229 \alpha^{11} + 39.1618 \alpha^{13} + \\ & \left. + 44.2902 \alpha^{15} + 49.4112 \alpha^{17} + 54.5270 \alpha^{19} + 59.6389 \alpha^{21}) \cos(\varpi_2 - \varpi_1) \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

Выясним, насколько точно полученное разложение представляет численные данные. Построим графики относительной разности скорости прецессии согласно формуле (5) (обозначим ее как  $\dot{\omega}_{\text{exact}}$ ) и согласно разложению (21) до 21-й степени  $\alpha$  с рациональными коэффициентами (обозначим как  $\dot{\omega}_{\text{expansion}}$ ). На рис. 4 показаны типичные графики относительной разности  $\delta = \left| \frac{\dot{\omega}_{\text{exact}} - \dot{\omega}_{\text{expansion}}}{\dot{\omega}_{\text{exact}}} \right|$  при различных параметрах системы. Мы видим, что при больших  $\alpha$  точность разложения существенно

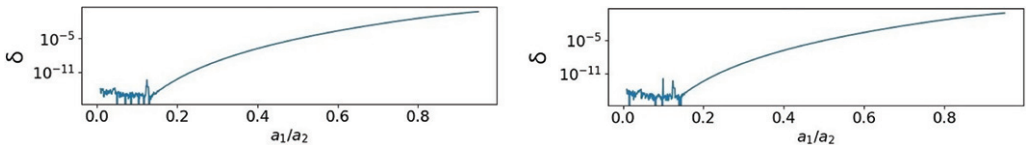


Рис. 4. Зависимость относительной разности скоростей апсидальной прецессии  $\delta$  согласно формуле (5) и разложению (21) от отношения больших полуосей орбит тестовой частицы и возмущающей планеты  $a_1/a_2$  при эксцентриситете орбиты тестовой частицы  $e_1 = 0.02$  и начальной долготе перицентра орбиты частицы  $\varpi_1 = \pi$ . На левом графике эксцентриситет возмущающей планеты  $e_2 = 0.06$ , масса планеты  $m_2 = 10^{-5}$ ; на правом:  $e_2 = 0.04$ ,  $m_2 = 10^{-4}$ .

падает. При  $\alpha < 0.75$  относительная разность находится в пределах примерно 0.01, при  $\alpha < 0.5$  — в пределах  $10^{-5}$ .

**5. Случай сильно вытянутых орбит.** Формула (5) для скорости апсидальной прецессии выведена в предположении малых эксцентриситетов орбит возмущающего тела  $e_2$  и тестовой частицы  $e_1$ . Рассмотрим случай умеренных эксцентриситетов:  $e_1 \leq 0.5$ ,  $e_2 \leq 0.5$ . При  $e_1, e_2 \sim 0.5$  формула (5) гораздо хуже описывает значение скоростей прецессии даже при небольших  $\alpha$ . При разложении возмущающей функции до четвертого порядка по эксцентриситетам (см. Приложение Б в книге [8]) можно уточнить разложение (5), но при этом оно станет громоздким. На левых графиках рис. 5 показаны скорости апсидальной прецессии в зависимости от начального эксцентриситета орбиты частицы  $e_1$  при разных эксцентриситетах орбиты возмущающего тела  $e_2$ . Видим, что формула (5) хорошо описывает данные лишь при  $e_2 \leq 0.1$ , а разложение до четвертого порядка хорошо работает вплоть до  $e_2 = 0.3$ . Но при больших  $e_2$  оба представления существенно отклоняются от численных данных.

Дальнейшее разложение возмущающей функции будет чрезвычайно громоздким. Рассмотрим зависимость скорости прецессии от эксцентриситета орбиты планеты  $e_2$  при разных начальных эксцентриситетах частицы  $e_1$ , приведенную на правых графиках рис. 5. В данном случае с изменением  $e_1$  и  $e_2$  характер функции меняется. Рассмотрим разность модельных данных формулы (5) и обозначим ее как  $\Delta\dot{\omega}$ . На рис. 6 показаны типичные графики зависимости  $\Delta\dot{\omega}$  от параметров планетной

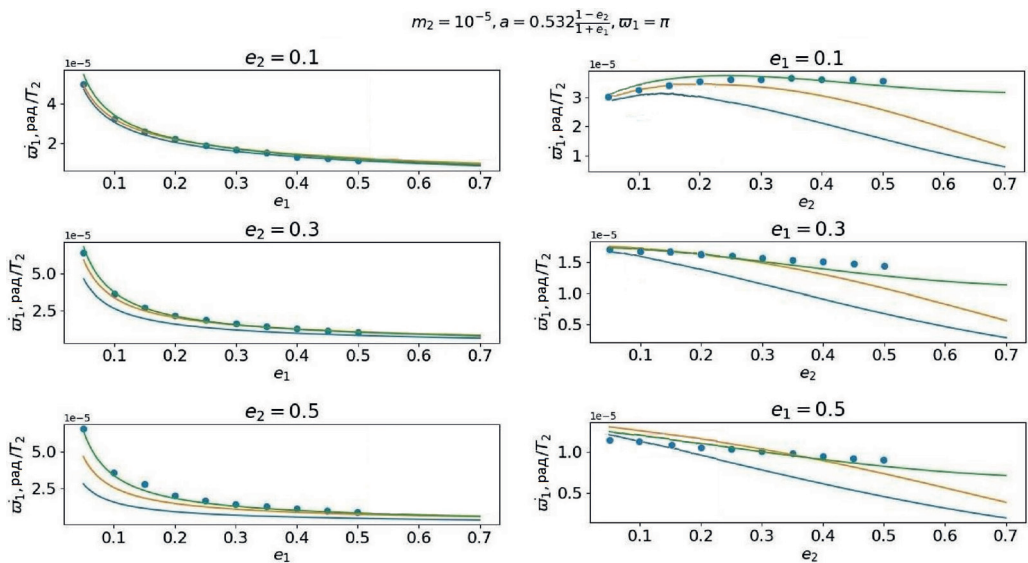


Рис. 5. Зависимость скорости апсидальной прецессии тестовой частицы  $\dot{\omega}_1$  от начального эксцентриситета частицы  $e_1$  при различных значениях эксцентриситета возмущающей планеты  $e_2$  (слева) и от эксцентриситета планеты  $e_2$  при различных начальных эксцентриситетах частицы  $e_1$  (справа). Масса возмущающей планеты  $m_2 = 10^{-5}$ , начальная долгота перигея орбиты частицы  $\varpi_1 = \pi$  и  $\alpha = 0.532 \frac{1-e_2}{1+e_1}$ . Точки — данные численного моделирования, синяя кривая соответствует формуле (5), оранжевая — разложению возмущающей функции до четвертого порядка по эксцентриситетам частицы и возмущающей планеты (см. Приложение Б в книге [8]), зеленая — формуле (5) с поправкой (22).



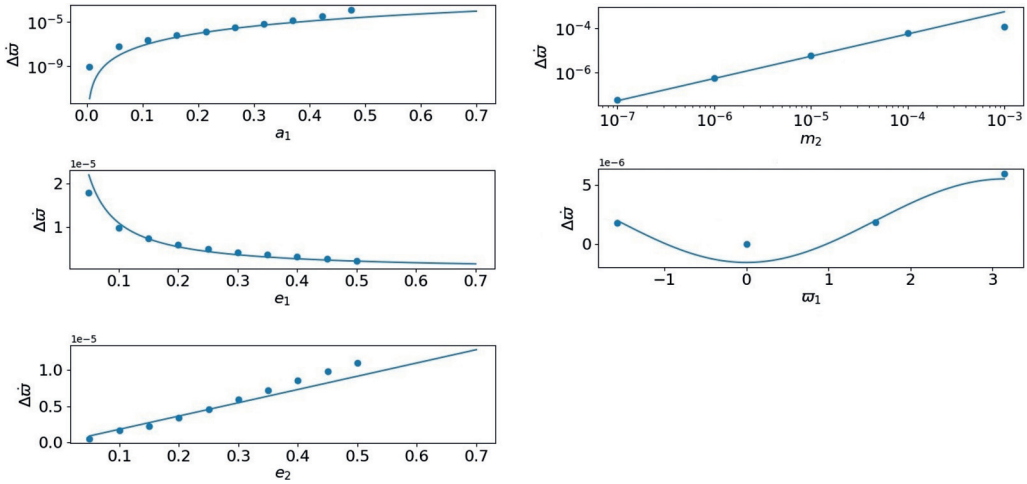


Рис. 6. Зависимость погрешности формулы (5) от параметров системы. Точками обозначены результаты расчетов, кривыми представлена аппроксимация (22). При варьировании одного из параметров, остальные были равны  $\alpha = 0.532 \frac{1-e_2}{1+e_1}$ ,  $m_2 = 10^{-5}$ ,  $\varpi_1 = \pi$ ,  $e_1 = 0.2$ ,  $e_2 = 0.3$ .

системы. Разности обозначены точками. Видим, что зависимость от  $\alpha$  в логарифмическом масштабе имеет степенной вид, от  $e_2$  — линейный, от  $e_1$  — гиперболический, от  $m_2$  — линейный, от  $\varpi_1$  — вид косинуса. Кривыми на рисунке обозначена эмпирическая формула следующего вида:

$$\Delta\dot{\omega} = m_2 \left( \alpha \frac{1+e_1}{1-e_2} \right)^A \left( B \frac{e_2}{e_1} + C \frac{e_2}{e_1} \cos(\varpi_2 - \varpi_1) \right), \quad (22)$$

где  $A = 3.67 \pm 0.03$ ;  $B = 1.34 \pm 0.02$ ;  $C = -2.38 \pm 0.04$  — коэффициенты, полученные с использованием нелинейного метода наименьших квадратов по данным в области:  $0.05 \leq e_1 \leq 0.5$ ,  $0.05 \leq e_2 \leq 0.5$ ,  $10^{-7} \leq m_2 \leq 10^{-4}$ ,  $0 \leq \varpi_1 < 2\pi$ ,  $\alpha < 0.3$ . Под  $e_1$  и  $\varpi_1$  подразумеваются начальные эксцентриситет и долгота перигея орбиты частицы. Значение  $\alpha$  ограничено до 0.3 с целью исключить выбросы, не лежащие на общую закономерность, которые появляются вблизи люка Виздома. В качестве ошибок определения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  указаны значения одного стандартного отклонения.

На рис. 5 зеленая кривая соответствует формуле (5) с поправкой (22). Такой подход с гораздо лучшей точностью описывает значение скорости прецессии при умеренных  $e_1$ ,  $e_2$ .

**6. Применение к реальным системам.** Отберем реальные экзопланетные системы, к которым можно применить рассмотренные формулы. Воспользуемся базой данных exoplanet.eu. Выберем системы с двумя планетами, у которых известны массы и большие полуоси, с отношением масс  $\leq 0.1$ , где менее массивная планета расположена на внутренней орбите. Среди этих систем отбирались такие, у которых небольшая или неизвестная разность наклонов орбит. Таких систем было найдено девять (см. таблицу). В таблице указаны массы звезд, известные параметры орбит планет и вычисленная скорость прецессии для внутренней планеты. В системах звезд 55 Спс и Kepler-167 есть и другие планеты, но с неизвестными

Список планетных систем, к которым применимы формулы для скорости прецессии  
в рамках плоской ограниченной задачи трех тел

Система	Масса звезды, $M_{Sun}$	Планета	Масса планеты, $M_{Jup}$	$a$ , а. е.	$e$	$i$ , град.	$\varpi$ , град.	$T_{peri}$ , юлианские дни	$\dot{\varpi}$ , рад/ $T_2$
Kepler-167	0.77	Kepler-167 d	0.006	0.1405	0.12	89.352	—	—	$4.77 \times 10^{-4}$
		Kepler-167 e	4	1.89	0.062	89.976	201	—	—
Kepler-93	1.09	Kepler-93 b	0.0143	0.053	0	89.18	—	—	$4.47 \times 10^{-5}$
		Kepler-93 c	8.5	4.5	—	—	—	—	—
55 Cnc	1.015	55 Cnc e	0.02703	0.015439	0.028	90.36	170	2450000	$3.81 \times 10^{-4}$
		55 Cnc b	0.84	0.11339	0.0023	89.73	110	2453035	—
HD 38529	1.48	HD 38529 b	0.93	0.131	0.248	57	95.9	50020.19	$9.00 \times 10^{-4}$
		HD 38529 c	23.7	3.695	0.36	48.3	22.52	48002	—
K2-290	1.19	K2-290 b	0.0343	0.0923	0	88.14	90	—	$5.82 \times 10^{-4}$
		K2-290 c	0.774	0.305	0	89.37	90	—	—
KOI-12	1.5	KOI-12 b	1.1	0.154	0.34	88.95	—	—	$4.63 \times 10^{-4}$
		KOI-12 c	22	4.2	0.65	—	-89	2455911	—
Kepler-117	1.13	Kepler-117 b	0.094	0.1445	0.0493	88.74	254.3	—	$5.74 \times 10^{-3}$
		Kepler-117 c	1.84	0.2804	0.0323	89.64	305	—	—
TOI-1670	1.21	TOI-1670 b	0.0434	0.103	0.59	86.87	163.6	—	$1.63 \times 10^{-3}$
		TOI-1670 c	0.63	0.249	0.09	88.84	105.5	—	—
KOI-984	0.928	KOI-984 b	0.0544	0.0504	0.12	—	285	—	$-5.52 \times 10^{-4}$
		KOI-984 c	0.6601	0.1467	0.38	45	84	—	—

Примечание. Массы звезд указаны в массах Солнца, массы планет — в массах Юпитера.  $T_2$  обозначает период обращения внешней планеты;  $i$  — наклон орбиты планеты (угол между плоскостью орбиты планеты и картинной плоскостью).

массами. Если известны эксцентриситеты и долготы перицентров и если эксцентриситет внутренней планеты не нулевой, скорость прецессии рассчитывается по формуле (5) с поправкой (22); в противном случае — по формуле (3). Для внутренних планет HD 38529 b, K2-290 b, Kepler-117 b, TOI-1670 b и KOI-984 b известна долгота перицентра, при этом эпоха прохождения перицентра известна для 55 Спс e и HD 38529 b. Эти данные были получены посредством использования доплеровской спектроскопии (см., например, [14]). Зная скорости прецессии, мы можем прогнозировать изменение долготы перицентра и эпохи его прохождения. При несоответствии прогноза и наблюдения можно предполагать существование других планет в системе, возмущающих движение маломассивной, и оценивать массы и параметры орбит этих планет.

**7. Заключение.** Знание скоростей апсидальной прецессии и умение их предсказывать важны для исследований динамики планетных систем. Нами рассмотрены и проанализированы известные аналитические представления для скорости апсидальной прецессии в эллиптической плоской ограниченной задаче трех тел. При этом аналитические представления сопоставлены с данными, полученными в ходе массовых расчетов скоростей апсидальной прецессии. Даже лучшая из представленных формул не позволяет предсказать скорость прецессии вблизи и внутри области неустойчивости (люка Виздома).

Представлено аналитическое выражение для скорости апсидальной прецессии в виде ряда по  $\alpha$ . Полученное выражение при разложении до 21-го порядка показывает хорошую точность, за исключением областей  $\alpha \sim 1$ . Количественно определены пределы по  $\alpha$  для точного представления скорости прецессии с помощью найденного разложения.

Предложена эмпирическая поправка к формуле (5) для определения скорости апсидальной прецессии при умеренных эксцентриситетах частицы и возмущающей планеты (менее 0.5).

Рассчитаны скорости апсидальной прецессии для ряда реальных экзопланетных систем.

Автор благодарит И. И. Шевченко за ценные советы и рекомендации при написании данной статьи, а также искренне признателен рецензентам за подробные полезные замечания.

## Литература

1. Heppenheimer T. A. On the formation of planets in binary star systems. *Astronomy and Astrophysics* **65**, 421–426 (1978).
2. Whitmire D., Matese J., Criswell L., Mikkola S. Habitable planet formation in binary star systems. *Icarus* **132**, 196–203 (1998).
3. Thebault P., Marzari F., Scholl H. Relative velocities among accreting planetesimals in binary systems: The circumprimary case. *Icarus* **183**, 193–206 (2006). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.01.022>
4. Mayor M., Duquenois A., Halbwachs J.-L., Mermilliod J.-C. CORAVEL Surveys to Study Binaries of Different Masses and Ages. *Complementary Approaches to Double and Multiple Star Research, ASP Conference Series* **32** IAU Colloquium 135, 73–81 (1992).
5. Larson R. B. Implications of Binary Properties for Theories of Star Formation. *The Formation of Binary Stars, Proceedings of IAU Symp. 200*, 93–106 (2001). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0006288>
6. Shevchenko I. I. *Dynamical Chaos in Planetary Systems*. Springer Nature (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-52144-8>
7. Demidova T. V., Shevchenko I. I. Spiral patterns in planetesimal circumbinary disks. *Astrophysical Journal* **805** (38), 8 (2015). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/805/1/38>

8. Мюррей К., Дермотт С. *Динамика солнечной системы*, пер. с англ. под ред. И. И. Шевченко. Москва, Физматлит (2009).
9. Lithwick Y., Wu Y. Theory of Secular Chaos and Mercury's Orbit. *Astrophysical Journal* **739** (1), 17 (2011). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/739/1/31>
10. Rein H., Spiegel D.S. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **446** (2), 1424–1437 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stu2164>
11. Rein H., Liu S.-F. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy & Astrophysics* **537** (A128), 10 (2012). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085>
12. Wisdom J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *Astronomical Journal* **85**, 1122–1133 (1980). <https://doi.org/10.1086/112778>
13. Duncan M., Quinn T., Tremaine S. The long-term evolution of orbits in the solar system. A mapping approach. *Icarus* **82** (2), 402–418 (1989). [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(89\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90047-X)
14. Маров М. Я., Шевченко И. И. Экзопланеты: природа и модели. *Успехи физических наук* **190**, 897–932 (2020). <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.10.038673>

Статья поступила в редакцию 20 мая 2023 г.;  
доработана 30 августа 2023 г.;  
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Березина Алена Александровна — лаборант-исследователь; st055707@student.spbu.ru

## Orbital precession in the restricted three-body problem: Exact representations\*

A. A. Berezina

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation  
Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences,  
8, ul. Zhdanovskaya, St. Petersburg, 197110, Russian Federation

**For citation:** Berezina A. A. Orbital precession in the restricted three-body problem: Exact representations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 185–197. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.113> (In Russian)

Analytical representations for the rate of apsidal precession in the planar elliptical restricted three-body problem are considered in the case when the orbit of the disturbing body is external to the orbit of the test particle. Analytical expressions are compared with numerical data obtained during numerous calculations of the precession rate. An analytical expression is obtained for the apsidal precession velocity in the form of a power series with a parameter equal to the ratio of the semi-major axes of the orbits of the test particle and the disturbing planet. It is shown that the analytical expressions for the velocity of the apsidal precession of the particle are reliable only at distances not close to the instability zone near the orbit of the disturbing planet. Near the Wisdom gap, the linear secular theory stops working. A correction empirical formula is proposed for calculating the apsidal precession rate at relatively high (less than 0.5) eccentricities of the particle and the disturbing planet. The proposed formulas are applied to the description of the precession of orbits in real exoplanetary systems.

*Keywords:* restricted three-body problem, apsidal precession, Wisdom gap, exoplanets, planetary systems.

---

\*The work is supported by Russian Science Foundation (grant no. 22-22-00046).

## References

1. Heppenheimer T. A. On the formation of planets in binary star systems. *Astronomy and Astrophysics* **65**, 421–426 (1978).
2. Whitmire D., Matese J., Criswell L., Mikkola S. Habitable planet formation in binary star systems. *Icarus* **132**, 196–203 (1998).
3. Thebault P., Marzari F., Scholl H. Relative velocities among accreting planetesimals in binary systems: The circumprimary case. *Icarus* **183**, 193–206 (2006). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.01.022>
4. Mayor M., Duquennoy A., Halbwachs J.-L., Mermilliod J.-C. CORAVEL Surveys to Study Binaries of Different Masses and Ages. *Complementary Approaches to Double and Multiple Star Research, ASP Conference Series* **32** IAU Colloquium 135, 73–81 (1992).
5. Larson R. B. Implications of Binary Properties for Theories of Star Formation. *The Formation of Binary Stars, Proceedings of IAU Symp. 200*, 93–106 (2001). <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0006288>
6. Shevchenko I. I. *Dynamical Chaos in Planetary Systems*. Springer Nature (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-52144-8>
7. Demidova T. V., Shevchenko I. I. Spiral patterns in planetesimal circumbinary disks. *Astrophysical Journal* **805** (38), 8 (2015). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/805/1/38>
8. Murray C. D., Dermott S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press (1999). [Rus. ed.: Murray C. D., Dermott S. F. *Динамика солнечнои системы*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2009)].
9. Lithwick Y., Wu Y. Theory of Secular Chaos and Mercury’s Orbit. *Astrophysical Journal* **739** (1), 17 (2011). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/739/1/31>
10. Rein H., Spiegel D. S. IAS15: a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **446** (2), 1424–1437 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stu2164>
11. Rein H., Liu S.-F. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *Astronomy & Astrophysics* **537** (A128), 10 (2012). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118085>
12. Wisdom J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *Astronomical Journal* **85**, 1122–1133 (1980). <https://doi.org/10.1086/112778>
13. Duncan M., Quinn T., Tremaine S. The long-term evolution of orbits in the solar system. A mapping approach. *Icarus* **82** (2), 402–418 (1989). [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(89\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90047-X)
14. Marov M. Ya., Shevchenko I. I. Exoplanets: Nature and models. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **190**, 897–932 (2020). <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.10.038673> (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Uspekhi* **63**, 837–871 (2020). <https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.10.038673>].

Received: May 20, 2023  
Revised: August 30, 2023  
Accepted: August 31, 2023

Author’s information:

Alena A. Berezina — [st055707@student.spbu.ru](mailto:st055707@student.spbu.ru)