Санкт—Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Исследование операций и принятие решений в задачах оптимизации, управления и экономики

Петрова Анна Андреевна

Модель портфеля коллекционных монет РФ

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент В.В. Бухвалова

Рецензент:
Менеджер по работе с ключевыми клиентами
Северо-Западный банк ПАО Сбербанк
А.В. Ковальчук

Санкт-Петербург

2016

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Applied Mathematics and Computer Science

Operation Research and Decision Making in Optimisation, Control and Economics Problems

Petrova Anna Andreevna

Portfolio model of Russian collection coins

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:
Associate Professor V.V. Buhvalova

Reviewer:
Key Accounts Manager
North–West Bank «Sberbank of Russia»
A.V. Kovalchuk

Saint–Petersburg

2016

Содержание

1 Введение

Во все времена людей интересовали надежные способы инвестирования. Одним из первых способов инвестирования было коллекционирование монет. В настоящее время наблюдается рост интереса к подобному виду вложений. По информации, приведенной в [9], коллекционированием монет в России занимается не менее 20% трудоспособного населения.

Исходя из актуальности данного способа инвестирования, моим научным руководителем, В. В. Бухваловой, было предложено разработать методику, которая помогла бы использовать портфельную теорию Марковица для инвестирования в коллекционные монеты.

В работе предложены этапы формирования оптимального портфеля из ценных монет. Методика проверена на портфелях, состоящих от четырех до десяти монет. Проанализированы проблемы, возникающие при реализации портфелей.

Работа состоит из 5 глав и приложений. В главе 1 приведены определения основных характеристик ценных бумаг: доходность, ожидаемая доходность и риск. В главе 2 введено понятие портфеля ценных бумаг, описаны его основные характеристики и рассмотрены основные модели формирования портфеля. В главе 3 приведены методы обработки временных рядов, необходимые для работы с данными о монетах. В главе 4 предложены этапы построения эффективного портфеля из коллекционных монет, а также вычислен и проанализирован конкретный эффективный портфель. В главе 5 составлен реальный портфель, приближенный к ранее рассмотренному эффективному, посчитаны минимальные вложения для его реализации, а также вычислена доходность получившегося портфеля.

2 Основные характеристики ценных бумаг

В этой главе приведены определения основных характеристик ценных бумаг: доходность, ожидаемая доходность и риск. [4], [6]

2.1 Доходность

Для начала определим понятие *доходности актива* за определенный период Т:

$$R_i = \frac{S_i(T) - S_i(0)}{S_i(0)}, \tag{1}$$

где $S_i(0)$ и $S_i(T)$ — цены актива в момент времени 0 и T соответственно.

Ясно, что доходность не является совершенным показателем: доходность в 10% за год значительно меньше доходности в 10% за месяц.

Отметим, что в формуле (1) мы знаем наверняка лишь $S_i(0)$, число же $S_i(T)$ является случайным. Это показывает, что доходность является случайной величиной.

Введем следующее определение в предположении, что доходность активов имеет дискретное распределение.

Ожидаемая доходность актива основывается на статистических данных, после анализа которых можно выделить несколько возможных сценариев s и представить данные в виде таблицы доходностей R и соответствующих вероятностей Pr.

Для вычисления ожидаемой доходности используется формула математического ожидания:

$$E(R) = \sum_s Pr(s)R(s),$$

где s — один из возможных сценариев, $R(s)$ — доходность в случае сценария s, $Pr(s)$ — вероятность сценария s.

Проиллюстрируем введенное понятие на примере.

Пример. Имеется следующая вероятностная схема актива А с тремя сценариями:

Доходность	5%	10%	-7%
Вероятность	0.2	0.5	0.3

При таких данных ожидаемая доходность равна 3.9% :

$$E = 5\% \times 0.2 + 10\% \times 0.5 + (-7\%) \times 0.3 = 3.9\%.$$

■

Заметим, что в некоторых случаях естественно считать распределение вероятностей доходности непрерывным (хотя на самом деле цена ценной бумаги не принимает произвольные вещественные значения – есть минимальная цена изменения – «тик»). Тогда ожидаемая доходность вычисляется по формуле:

$$E(R) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины R.

Теория портфеля Марковица предполагает, что доходности ценных бумаг подчинены нормальному закону.

2.2 Риск

Под *риском* будет пониматься риск ошибиться в прогнозе о среднем. Математической мерой разброса вокруг среднего значения является дисперсия, называемая в теории финансов *вариацией*. Однако в качестве риска рассматривается стандартное отклонение от математического ожидания вероятностной схемы:

$$\sigma(R) = \sqrt{E[(R - E(R))^2]}.$$

В дискретном случае формула будет иметь вид:

$$\sigma(R) = \sqrt{\sum_s Pr(s)(R(s) - E(R))^2}.$$

Пример (продолжение). В приведенном выше примере риск равен 7.38% с точностью до двух знаков после запятой:

$$\sigma = \sqrt{(5\% - 3.9\%)^2 \times 0.2 + (10\% - 3.9\%)^2 \times 0.5 + ((-5\%) - 3.9\%)^2 \times 0.3} = 7.38\%.$$

■

Заметим, что стандартное отклонение одинаково показывает отклонения от среднего в меньшую и большую сторону. В случае нормального распределения, которое симметрично относительно среднего, мы как бы преувеличиваем ошибку вдвое. Однако, для минимизации величины риска безразлично, минимизировать данную величину или вдвое меньшую.

Для несимметричных распределений сказанное выше несправедливо. Для них принято рассматривать нижний риск, учитывающий только отклонения вниз от среднего, определяемый как корень из *полувариации*:

$$semi\text{-}\sigma(R)_- = E[\{(R(s) - E(R))_-\}^2],$$

где через символ «_» обозначена отрицательная часть числа.

Для уменьшения риска существует четыре основных приема управления риском [1]. Рассмотрим их.

- *Избежание риска* — это сознательное решение не подвергаться определенному виду риска. Пример: отказ от инвестирования в рискованные проекты.

- *Предотвращение ущерба* сводится к действиям, предпринимаемым для уменьшения вероятности потерь и для минимизации их последствий. Пример: изучение финансовой ситуации на рынке для определения направления инвестиционного проекта.

- *Принятие риска на себя* состоит в покрытии убытков за счет собственных ресурсов. Пример: хранение денег в нестабильной национальной валюте.

- *Перенос риска* состоит в перенесении риска на других лиц.

Заметим, что перенос риска зачастую невозможен. Рассмотрим простой пример: любой дом подвержен различным видам риска (пожар, стихийное бедствие, падение цен и т. д.), очевидно, что продажа дома (то есть освобождение от всех рисков) не всегда является желаемым выходом из ситуации. В таком случае можно управлять рисками другими способами. Например, владелец может застраховать свой дом, тем самым избежать риск пожара и стихийного бедствия и принять на себя только риск падения цен на недвижимость.

Различают три метода переноса риска, называемые тремя схемами переноса риска. Рассмотрим каждый из них.

2.2.1 Хеджирование

О хеджировании риска говорят в тех случаях, когда действие, предпринятое для снижения риска понести убытки, одновременно приводит и к невозможности получить доход.

Например, если вы подписались на журнал на несколько лет вперед, вы страхуетесь от возможного повышения цены на подписку. Тем самым избавляетесь от риска убытков, которые можете понести в случае повышения цены, но в то же время ничего не выиграете, если подписка подешевеет.

2.2.2 Страхование

Страхование предполагает выплату страхового взноса (цены, которую вы платите за страховку) с целью избежания убытков. Приобретая страховой полис, вы соглашаетесь пойти на гарантированные издержки взамен вероятности понести гораздо больший ущерб, связанный с отсутствием страховки.

Между хеджированием и страхованием существует фундаментальное различие. В случае хеджирования вы устраняете риск понести убытки, отказываясь от возможности получить доход. А в случае страхования вы платите страховой взнос, устраняя тем самым риск понести убытки, но сохраняя возможность получить доход.

2.2.3 Диверсификация

Диверсификация выражается во владении многими рискованными активами, вместо концентрации всех капиталовложений только в одном из них. В связи с этим диверсификация ограничивает вашу подверженность риску, связанному с одним единственным видом активов.

Портфельная теория, о которой пойдет речь ниже, основывается на методе диверсификации. Обоснование его эффективности будет рассмотрено после введения основных характеристик портфеля.

3 Портфель ценных бумаг

В этой главе введено понятие портфеля ценных бумаг, описаны его основные характеристики и рассмотрены основные модели формирования портфеля. Все понятия и модели иллюстрируются на примере.

3.1 Портфель и его основные характеристики

Под портфелем мы будем понимать объединение двух и более ценных бумаг (активов) [3].

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — перечень активов рынка. Зададим портфель и как вектор относительных весов каждого актива:

$$\pi = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Доля исходного капитала, инвестированного в актив a_i может бы вычислена по формуле:

$$x_i = \frac{k_i S_i(0)}{S_\pi(0)}, \tag{2}$$

где k_i — количество актива a_i, входящее в портфель π, $S_i(0)$ и $S_\pi(0)$ — цены актива a_i и портфеля π в момент времени 0.

В простейшем случае все относительные веса не отрицательны: $x_i \geq 0$. Однако, если возможны короткие (отложенные) продажи, то веса могут быть любого знака. Короткие продажи — продажи активов, которыми инвестор в настоящее время не обладает.

3.1.1 Доходность

Доходность портфеля R_π за период T вычисляется по формуле:

$$R_\pi = \frac{S_\pi(T) - S_\pi(0)}{S_\pi(0)}.$$

Доходность портфеля, как случайная величина, выражается через доходность его активов по соотношению:

$$R_\pi = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

3.1.2 Ожидаемая доходность

Ожидаемая доходность (эффективность) портфеля, как математическое ожидание, будет равна линейной комбинации ожидаемых доходностей активов:

$$m_\pi = E[R_\pi] = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i.$$

3.1.3 Риск

Дисперсия ожидаемой доходности портфеля вычисляется по формуле:

$$\sigma_\pi^2 = D[R_\pi] = E[(R_\pi - m_\pi)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j \text{ , где}$$

$\nu_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j) = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ — ковариация,
ρ_{ij} — коэффициент корреляции R_i и R_j,
σ_i — риск актива a_i.

Заметим, что для некоррелируемых ценных бумаг ($\nu_{i,j} = 0, i \neq j$) дисперсия составит величину:

$$\sigma_\pi^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2.$$

Риском портфеля назовем величину σ_π.

Пример.

Проиллюстрируем понятия, введенные в этой главе, на примере рынка с двумя некоррелируемыми активами, один из которых (А) мы уже рассматривали ранее:

Сценарий A	**1**	**2**	**3**
Доходность	5%	10%	-7%
Вероятность	0.2	0.5	0.3

Сценарий B	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Доходность	8%	5%	4%	2%	-1%	-5%
Вероятность	0.3	0.15	0.05	0.05	0.15	0.3

Рассмотрим конкретный портфель:

Актив	**A**	**B**
Стоимость	$50	$100
Количество	10	15

Вычислим вектор относительных весов активов в портфеле, используя формулу (2):

$$x_A = \frac{10 \times 50}{10 \times 50 + 15 \times 100} = 0.25,$$
$$x_B = \frac{15 \times 100}{10 \times 50 + 15 \times 100} = 0.75.$$

Следовательно, $\pi = \{0.25, 0.75\}$.

Для того, чтобы вычислить ожидаемую доходность и риск получившегося портфеля, необходимо вычислить ожидаемую доходность и риск каждого актива:

Актив	**A**	**B**
Ожидаемая доходность	3.9%	1.80%
Риск	7.38%	5.72%

Таким образом, ожидаемая доходность и риск портфеля равны:

$$m_\pi = 3.9\% \times 0.25 + 1.80\% \times 0.75 = 2.33\%,$$

$$\sigma_\pi = \sqrt{7.38\%^2 \times 0.25^2 + 5.72\%^2 \times 0.75^2} = 4.67\%.$$

Здесь уместно задать вопрос, а существует ли другой портфель на тех же активах с большей доходностью, но меньшим риском? Ответ на него будет дан в следующих параграфах.

3.2 Диверсификация портфеля

Утверждение. При росте числа *некоррелируемых* ценных бумаг в портфеле его риск стремится к нулю.

Доказательство.

Предположим, что инвестор вложил свои деньги равными долями в n активов, т. е. $x_i = \frac{1}{n}$.

Тогда ожидаемая доходность и риск такого портфеля:

$$m_\pi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i,$$

$$\sigma_\pi = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

Обозначим

$$\sigma_{max} = \max_{i=1,\ldots,n} \sigma_i.$$

Тогда

$$\sigma_\pi \le \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{max}^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma_{max}^2} = \frac{\sigma_{max}}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда видно, что при росте числа различных ценных бумаг, входящих в портфель ($n \to \infty$), риск портфеля ограничен и стремится к нулю.

■

3.3 Модели портфелей ценных бумаг

Первая модель формирования оптимального портфеля принадлежит Г. Марковицу. В 1952 г. он опубликовал статью [5], в которой впервые предложил математическую модель формирования оптимального портфеля и привёл методы построения портфелей при определённых ограничениях. За дальнейшую разработку этой теории Марковиц в 1990 г. получил Нобелевскую премию по экономике.

Перечислим основные постулаты классической портфельной теории, на которых основывался Марковиц:

- Рынок состоит из конечного числа активов, доходности которых для заданного периода считаются случайными величинами.

- Инвестор в состоянии, например, исходя из статистических данных, получить оценку ожидаемых значений доходностей, их попарных ковариаций и степеней возможности диверсификации риска.

- Инвестор может формировать любые допустимые (для данной модели) портфели. Доходности портфелей являются также случайными величинами.

- Сравнение выбираемых портфелей основывается только на двух критериях: ожидаемой доходности и риске.

- Инвестор не склонен к риску в том смысле, что из двух портфелей с одинаковой доходностью он обязательно предпочтет портфель с меньшим риском.

Для формирования оптимального инвестиционного портфеля необходимо решить оптимизационную задачу. Существует два вида задач: поиск долей акций в портфеле для достижения максимальной ожидаемой доходности при заданной верхней границе риска σ_{req} и минимизация риска при заданной нижней границе доходности портфеля R_{req}.

3.3.1 Модель Марковица

В данной модели допустимыми являются портфели, удовлетворяющие двум основным ограничениям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{3}$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Заметим, что при таких ограничениях доходность портфеля не превышает максимальной доходности активов, на которых он построен.

Оптимизационные задачи модели Марковица могут быть записаны в таком виде:

- Прямая задача:

$$\begin{cases} \sigma_\pi^2 \to \min, \\ m_\pi \geq R_{req}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{5}$$

- Обратная задача:

$$\begin{cases} m_\pi \to \max, \\ \sigma_\pi^2 \leq \sigma_{req}^2, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{6}$$

Задача (5) является задачей квадратичного программирования, то есть задачей вида

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}x^T\ D\ x + \mathrm{c}^T x \to \inf, \\ A[M,N]\ x[N] \geq b[M], \end{cases} \tag{7}$$

где $D = D[N,N]$ симметричная матрица. Планом называется вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (7). Множество планов обозначим за Ω. План x^* называется оптимальным, если $F(x^*) = inf_{x\in\Omega}F(x)$.

Приведем теорему из [2]:

Теорема. Предположим, что матрица D неотрицательно определена на $\mathbb{N}^n$, множество Ω непусто и целевая функция $F(x)$ ограничена снизу на Ω. Тогда у задачи (7) существует оптимальный план. Он может быть получен путём решения конечного числа систем линейных уравнений.

В задаче (5) матрица ковариаций Q всегда положительно определена, целевая функция ограничена, значит, если множество планов не пусто, решение задачи существует.

Прямая задача (5) находит портфель минимального риска при заданной нижней границе ожидаемой доходности. Такой портфель называется *эффективным*. А множество таких портфелей — *эффективной границей*.

3.3.2 Модель Блэка

Модель Блэка отличается от модели Марковица тем, что в ней допускаются короткие продажи. Другими словами вектор относительных весов в модели Блэка удовлетворяет только одному из двух основных ограничений (3):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

В отличии от модели Марковица, в модели Блэка наличие коротких позиций позволяет реализовать сколь угодно большую доходность за счет большого риска.

3.3.3 Модель Тобина–Шарпа–Линтера

В модели Тобина–Шарпа–Линтера (ТШЛ) предполагается существование безрискового актива a_0, доходность которого не зависит от состояния рынка и имеет постоянное значение R_0. На реальных рынках в роли таких активов выступают государственные облигации.

В модели ТШЛ портфель $\pi = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ при $x_0 \neq 0$ можно разложить в линейную комбинацию безрискового и рискового портфелей. Тогда доходность, ожидаемая доходность и риск портфеля будут равны соответственно:

$$R^* = x_0 R_0 + (1 - x_0) R_\pi,$$

$$m_\pi^* = x_0 R_0 + (1 - x_0) m_\pi = m_\pi + x_0 (R_0 - m_\pi),$$
$$\sigma_\pi^* = (1 - x_0)\sigma_\pi.$$

Исключая x_0 из двух последних выражений, получаем линейную зависимость σ_π^* и m_π^*:

$$m_\pi^* = \frac{m_\pi - R_0}{\sigma_\pi}\sigma_\pi^* + R_0.$$

На практике оптимизация портфеля ТШЛ обычно состоит из двух этапов:

1. выбор оптимальной комбинации рискованных активов,

2. объединение полученного оптимального набора рискованных активов с безрисковыми активами.

Проиллюстрируем этот процесс на примере портфеля из двух активов.

3.4 Оптимальный портфель из двух активов

Обобщим приведенный выше пример, рассмотрев два *некоррелируемых* актива с ожидаемыми доходностями и рисками $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ соответственно. Найдем зависимость основных характеристик портфеля, составленного из этих активов, по модели Марковица, а так же портфель с наименьшим риском.

Не умоляя общности $m_1 \leq m_2$.

Пусть портфель имеет вид $\pi = \{t, 1 - t\}$, где $t \geq 0$. Тогда $m_\pi \in [m_1; m_2]$ и верны следующие формулы:

$$m_\pi = m_1 t + m_2 (1 - t),$$

$$\sigma_\pi^2 = \sigma_1^2 t^2 + \sigma_2^2 (1 - t)^2.$$

Выразим из формулы ожидаемой доходности t:

$$t = \frac{m_\pi - m_2}{m_1 - m_2}.$$

Тогда, подставив t в формулу риска, получим его зависимость от ожидаемой доходности:

$$\sigma_\pi^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{(m_1 - m_2)^2} m_\pi^2 - \frac{2(\sigma_1^2 m_2 + \sigma_2^2 m_1)}{(m_1 - m_2)^2} m_\pi + \frac{\sigma_1^2 m_2^2 + \sigma_2^2 m_1^2}{(m_1 - m_2)^2}. \qquad (8)$$

Для нахождения эффективного портфеля необходимо решить уравнение

$$\frac{d\sigma_\pi^2(t)}{dt} = 0.$$

Решив его, получим формулы:

$$t^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \tag{9}$$

$$\pi^* = \{t^*, 1 - t^*\}, \tag{10}$$

$$m_\pi^* = \frac{\sigma_1^2 m_2 + \sigma_2^2 m_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \tag{11}$$

$$\sigma_\pi^{*2} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{12}$$

Используем полученные формулы для ответа на поставленный ранее вопрос из прошлого примера, существует ли портфель с большей доходностью и меньшим риском.

$$m_1 = 3.9\%, m_2 = 1.8\%, \sigma_1 = 7.38\%, \sigma_2 = 5.72\%$$

$$t^* = \frac{5.72\%^2}{7.38\%^2 + 5.72\%^2} = 0.38,$$
$$\pi^* = \{0.38, 0.62\},$$
$$m_\pi^* = \frac{7.38\%^2 \times 1.8\% + 5.72\%^2 \times 3.9\%}{7.38\%^2 + 5.72\%^2} = 2.59\%,$$
$$\sigma_\pi^* = \sqrt{\frac{7.38\%^2 \times 5.72\%^2}{7.38\%^2 + 5.72\%^2}} = 4.52\%.$$

На рис. 1 приведен график зависимости ожидаемой доходности от риска портфеля, построенного из активов A, B. Точка Q_1 соответствует портфелю, состоящему только из актива A, точка Q_2 – портфелю из актива B, Q^* – портфель с минимальным риском, Q_{ex} – портфель, описанный в предыдущем примере, с вектором относительных весов $\pi = \{0.25, 0.75\}$.

Заметим, что часть графика от точки Q^* до точки Q_1 является эффективной границей портфеля.

Теперь перейдем ко второму этапу формирования оптимального портфеля. Введем безрисковый актив с доходностью $R_0 = 1.5\%$. Рассмотрим его возможные комбинации с портфелем наименьшего риска Q^*.

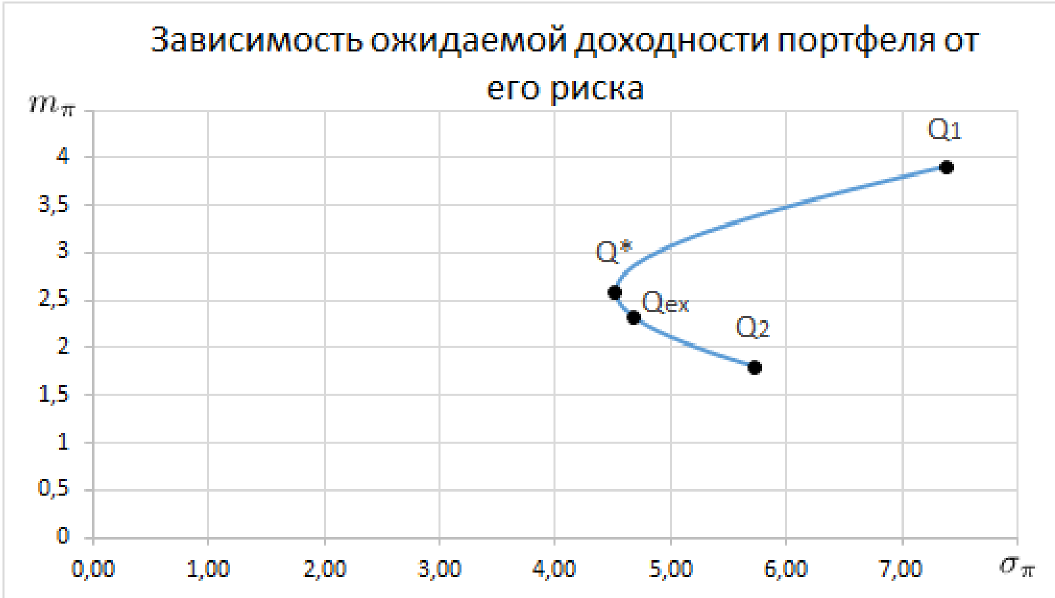

Рис. 1: Зависимость ожидаемой доходности портфеля от его риска

Как было описано в модели ТШЛ, зависимость ожидаемой доходности от риска в данном случае линейная. На рис. 2 приведен график этой зависимости, где Q_0 соответствует портфелю, состоящему только из безрискового актива, а множество точек отрезка Q_0Q^* – множеству всех возможных комбинаций Q^* с безрисковым активом.

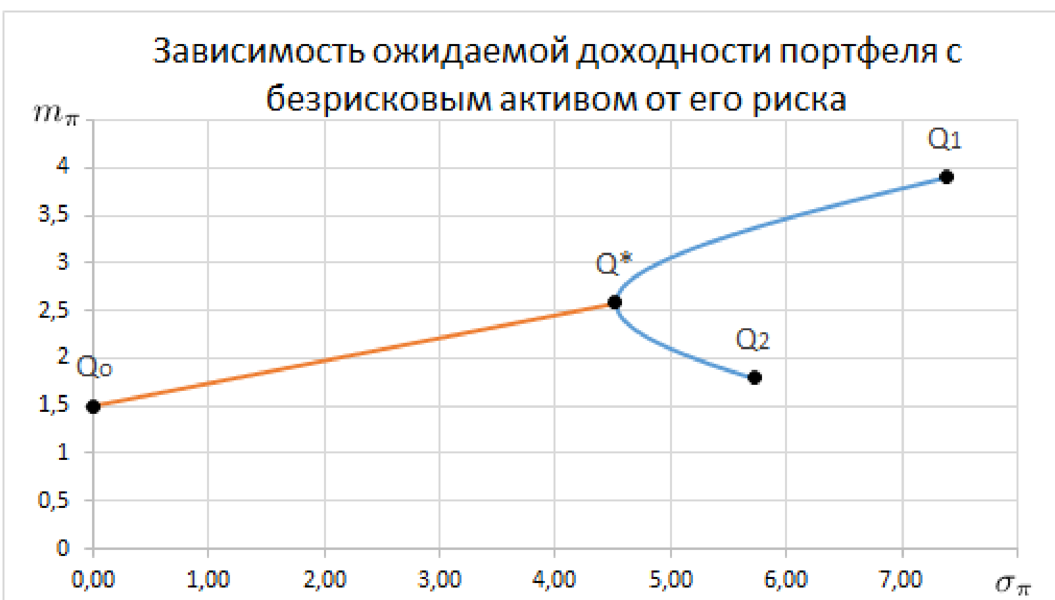

Рис. 2: Ожидаемая доходность портфеля с безрисковым активом и его риск

Так же из графика (2) видно, что портфели, сформированные из портфеля с наименьшим риском и безрискового актива дают меньший риск при заданной ожидаемой доходности, чем портфели не содержащие безрисковый актив.

Теперь построим эффективную границу портфеля, составленного из безрискового и рискованных активов. Для этого необходимо выбрать портфель Q^{**}, составленный из рискованных активов, комбинации безриского актива с которым будут составлены из эффективных портфелей. Очевидно, что этот портфель является точкой касания прямой, проведенной из точки $(0, R_0)$ к графику на рис. 1. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$m_\pi = k\sigma_\pi + R_0, \tag{13}$$

где k – искомый угол наклона прямой. Для его нахождения необходимо после подстановки (13) в (8) приравнять дискриминант к нулю и из двух получившихся корней выбрать положительный.

В рассматриваемом примере коэффициент k получился равным 0.33 с точностью до двух значащих цифр. На рис. 3 изображена эффективная граница портфеля с безрисковым активом, состоящая из отрезка Q_0Q^{**} и части эффективной границы портфеля из рискованных активов $Q^{**}Q_1$.

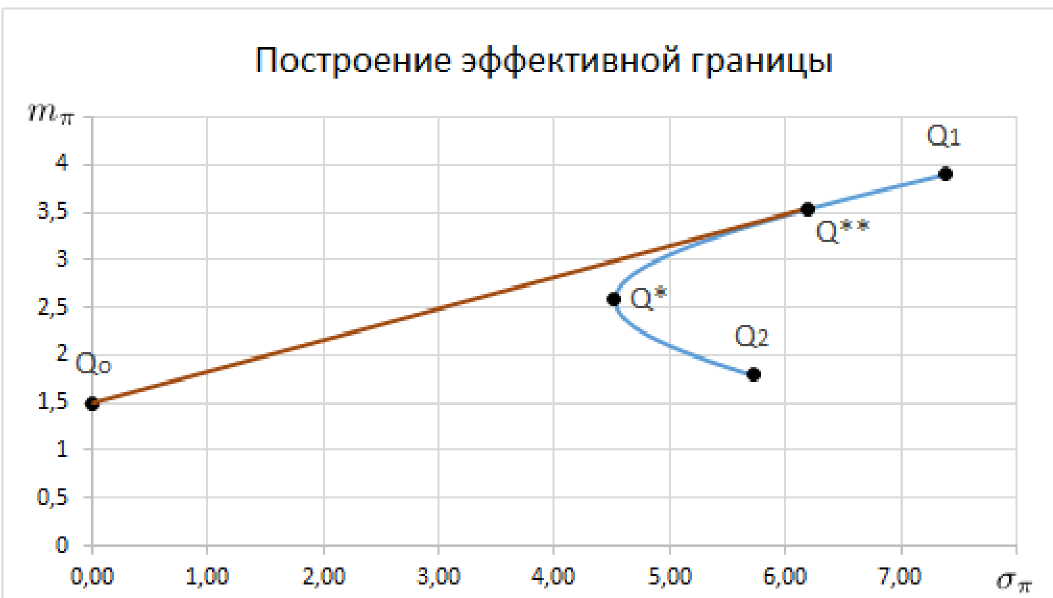

Рис. 3: Построение эффективной границы для портфеля с безрисковым активом

Заметим, что каждый инвестор имеет свое понимание оптимальности портфеля, поэтому в качестве оптимального портфеля разные инвесторы могут выбрать разные портфели на получившейся эффективной границе.

4 Методы обработки временных рядов

Для применения моделей портфельной теории необходимо получить используемые в них данные. Эти данные могут быть получены в результате обработки временных рядов для цен активов.

В этой главе мы будем рассматривать данные в виде временных рядов $t = \{t_j\}_{i=1}^n$ со значениями $\{z_j = z(t_j)\}_{i=1}^n$. Под однородным временным рядом будем подразумевать ряд, у которого $t_{j+1} - t_j = \triangle t, \forall i = 1, \ldots, n-1$, а под неоднородным – ряд с различными промежутками времени.

Корректное сравнение временных рядов между собой возможно только при совпадении множеств t. Таким образом, возникает задача привести несколько временных рядов к одинаковому множеству t. Учитывая то, что на практике мы чаще всего сталкиваемся с неоднородными временными рядами, проще всего это осуществить, научившись преобразовывать неоднородный временной ряд в ряд с однородными промежутками времени. Опишем постановку задачи.

Дан временной ряд $t = \{t_j\}$ со значениями $\{z_j = z(t_j)\}$. Требуется привести его к временному ряду $t' = \{t_0 + i\triangle t\}$. То есть найти значения, соответствующие однородному ряду t'. В [7] предлагается два способа решения этой задачи.

4.1 Линейная интерполяция

Найдем точки временного ряда, между которыми заключена точка $t_0 + i\triangle t$.

$$j' = \min\{j|\ t_j \leq t_0 + i\triangle t\},$$

$$t_{j'} \leq t_0 + i\triangle t \leq t_{j'+1}.$$

Значение в точке $t_0 + i\triangle t$ вычислим по формуле:

$$z(t_0 + i\triangle t) = z_{j'} + \frac{t_0 + i\triangle t - t'_j}{t_{j'+1} - t_{j'}}(z_{j'+1} - z_{j'}).$$

Заметим, что для подсчета значения в точке $t_0 + i\triangle t$ линейная интерполяция требует известного значения не только в точке $t_{j'}$, но и в точке $t_{j'+1}$, которая является точкой в будущем относительно $t_0 + i\triangle t$.

4.2 Ступенчатая интерполяция

Ступенчатая интерполяция отличается от линейной тем, что использует только данные в точке $t_{j'}$ и вычисляется по формуле

$$z(t_0 + i\triangle t) = z_{j'}.$$

Примеры линейной и ступенчатой интерполяций приведены на рис. 4, где большими кружочками обозначены точки, построенные линейной интерполяцией, маленькими – ступенчатой, а t_0, t_1, t_2 являются элементами искомого однородного временного ряда.

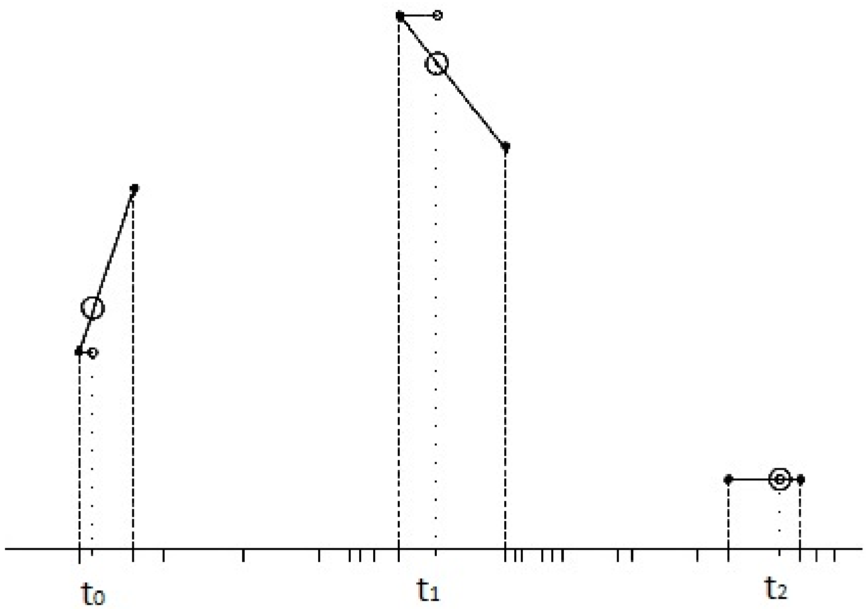

Рис. 4: Линейная и ступенчатая интерполяции

Замечание. При выборе метода интерполяции следует быть осторожными. Зачастую необработанные данные могут иметь большие промежутки пропущенной информации, а это значит, что использование линейной интерполяции может сильно «испортить» данные. В [7] в таком случае рекомендуется использовать ступенчатую интерполяцию.

5 Оптимальный портфель коллекционных монет

В качестве примера рассмотрим портфель из пяти коллекционных монет РФ:

1. 2 рубля. 300–летие со дня рождения Л. Эйлера
2. 3 рубля. Анна Павлова
3. 1 рубль. 200–летие со дня рождения Н. И. Лобачевского
4. 3 рубля. Смольный институт и монастырь в Санкт-Петербурге
5. 3 рубля. 50–летие разгрома немецко–фашистских войск под Ленинградом

Основные характеристики этих монет приведены в следующей таблице:

Название	**Дата выпуска**	**Тираж**	**Металл**
Эйлер	02.04.2007	10 000 шт.	серебро (проба 950/1000)
Павлова	13.12.1993	45 000 шт.	серебро (проба 900/1000)
Лобачевский	01.12.1992	400 000 шт.	медь, никель
Смольный	05.07.1994	30 000 шт.	серебро (проба 900/1000)
Разгром	20.01.1994	250 000 шт.	медь, никель

Полная информация о монетах приведена на сайце Цетрального банка [11].

5.1 Обработка данных

Подготовка данных состоит из пяти этапов:

1. Сбор данных.
2. Приведение данных к однородному временному ряду.
3. Вычисление недельной доходности монет.
4. Вычисление ожидаемой доходности и риска монет.
5. Вычисление матрицы ковариаций.

1. **Сбор данных.**
В связи с тем, что в основном монеты торгуются на аукционах, в качестве источника информации был взят сайт со сводкой результатов самых популярных аукционов России [10]. Данные были взяты за год: с конца февраля 2015 года по март 2016.

   Получившиеся временные ряды проиллюстрированы в приложении на рис. 13 – 22.

   Частота торгов каждой монеты приведена в следующей таблице:

Монета	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Среднее число продаж в неделю	0.58	1.92	3.63	1.23	3.65

2. **Приведение данных к однородному временному ряду.**
Из-за того, что аукционы проводятся крайне нерегулярно: некоторые из выбранных монет продаются крайне часто (283 продажи в год), а другие в разы меньше (30 продаж за год), полученные данные были приведены к однородному временному ряду с $t_0 = 01.03.2015\ 00:00,\ \triangle t = 7$ дней.

   Для приведения неоднородного ряда к однородному был выбран принцип ступенчатой интерполяции в связи с тем, что временные ряды монет содержали большие пробелы (максимальный — 65 дней). Данная операция была реализована с помощью статистического пакета SAS. Описание этого пакета можно найти на сайте компании SAS Institute [12] и в руководстве к пользованию [8]. Текст программы — в приложениях.

   Далее под ожидаемой доходностью будем понимать ожидаемую доходность за неделю. А под доходностью — недельную доходность.

3. **Вычисление недельной доходности монет.**
После приведения данных к однородному временному ряду были вычислены недельные доходности монет.

4. **Вычисление ожидаемой доходности и риска монет.**
Далее для вычисления ожидаемой доходности и риска монет были взяты вероятностные сценарии доходностей вида:

Сценарий	s_1	s_2	...	s_n
Вероятность	$1/n$	$1/n$	...	$1/n$

где $n = 52$ — количество недель в рассматриваемом году.

Вычисленные ожидаемые доходности и риски каждой монеты приведены в следующей таблице:

Название	**Ожидаемая доходность**	**Риск**
Эйлер	1.44%	16.96%
Павлова	2.41%	22.02%
Лобачевский	3.06%	23.99%
Смольный	3.06%	24.42%
Разгром	10.81%	51.00%

5. **Вычисление матрицы ковариаций.**

Ковариации	Эйлер	Павлова	Лобачевский	Смольный	Разгром
Эйлер	2.88%	-0.86%	-0.04%	0.09%	2.15%
Павлова	-0.86%	4.85%	-0.50%	-1.23%	0.26%
Лобачевский	-0.04%	-0.50%	5.75%	0.75%	0.82%
Смольный	0.09%	-1.23%	0.75%	5.96%	-1.78%
Разгром	2.15%	0.26%	0.82%	-1.78%	26.01%

5.2 Вычисление эффективного портфеля

Вычислив основные характеристики монет, перейдем к вычислению эффективного портфеля.

Сформулируем прямую оптимизационную задачу по модели Марковица при заданной нижней границе ожидаемой недельной доходности $R_{req} = 3\%$ на поиск портфеля минимального риска вида $\pi = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
2.88\%\ x_1^2 - 0.86\%\ x_1x_2 - 0.04\%\ x_1x_3 + 0.09\%\ x_1x_4 + 2.15\%\ x_1x_5 + & & \\
-0.86\%\ x_1x_2 + 4.85\%\ x_2^2 - 0.50\%\ x_2x_3 - 1.23\%\ x_2x_4 + 0.26\%\ x_2x_5 + & & \\
-0,04\%\ x_1x_3 - 0.50\%\ x_2x_3 + 5.75\%\ x_3^2 + 0.75\%\ x_3x_4 + 0.82\%\ x_3x_5 + & & \\
+0.09\%\ x_1x_4 - 1.23\%\ x_2x_4 + 0.75\%\ x_3x_4 + 5.96\%\ x_4^2 - 1.78\%\ x_4x_5 + & & \\
+2.15\%\ x_1x_5 + 0.26\%\ x_2x_5 + 0.82\%\ x_3x_5 - 1.78\%\ x_4x_5 + 26.01\%\ x_5^2 & \rightarrow & min, \\
1.44\%\ x_1 + 2.41\%\ x_2 3.06\%\ x_3 + 3.06\%\ x_4 + 10.81\%\ x_5 & \geq & 3\%, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 1, \\
\forall i \in \{1, \ldots, 5\}\ x_i & \geq & 0.
\end{array}
\right.
$$

Решение этой квадратичной задачи может быть найдено с помощью популярного программного обеспечения такого, как MS Excel, MatLab, R и других. Для сравнения решение было найдено с помощью двух различных пакетов на R и MatLab. Результаты работы программ совпали. Текст программ представлен в приложении, результат работы программ — в следующей таблице:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
26.54%	28.95%	15.47%	21.83%	7.21%

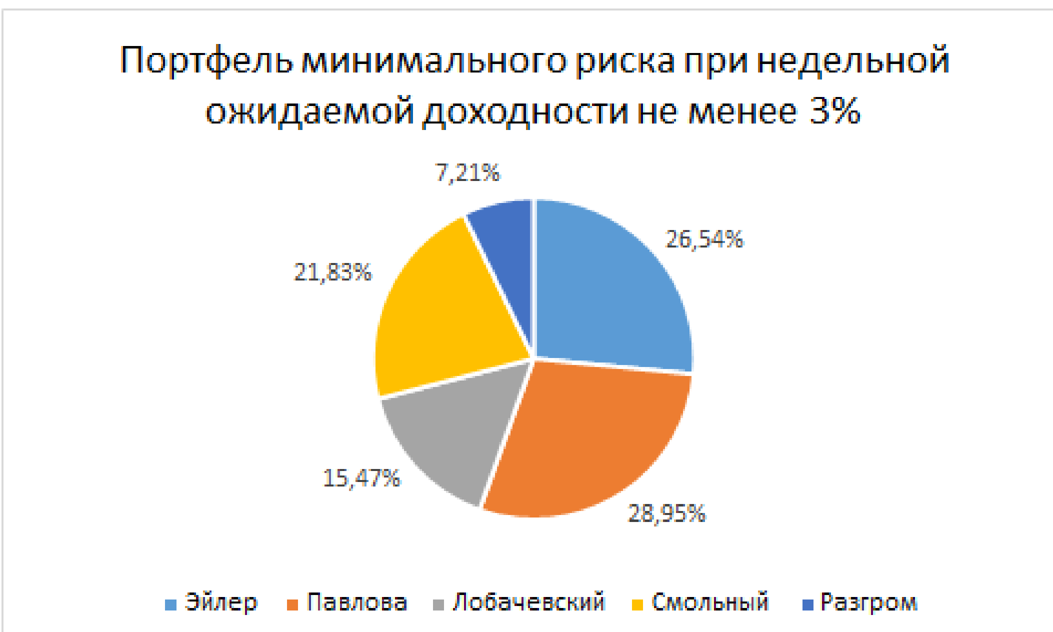

Рис. 5: Портфель минимального риска при ожидаемой доходности не менее 3%

Ожидаемая доходность	3%
Риск	9.73%

5.3 Построение эффективной границы

Имея программу для вычисления портфеля минимального риска при заданной нижней границе ожидаемой доходности, несложно вычислить эффективную границу. Результат работы программы по вычислению эффективной границы приведен на рис. 6.

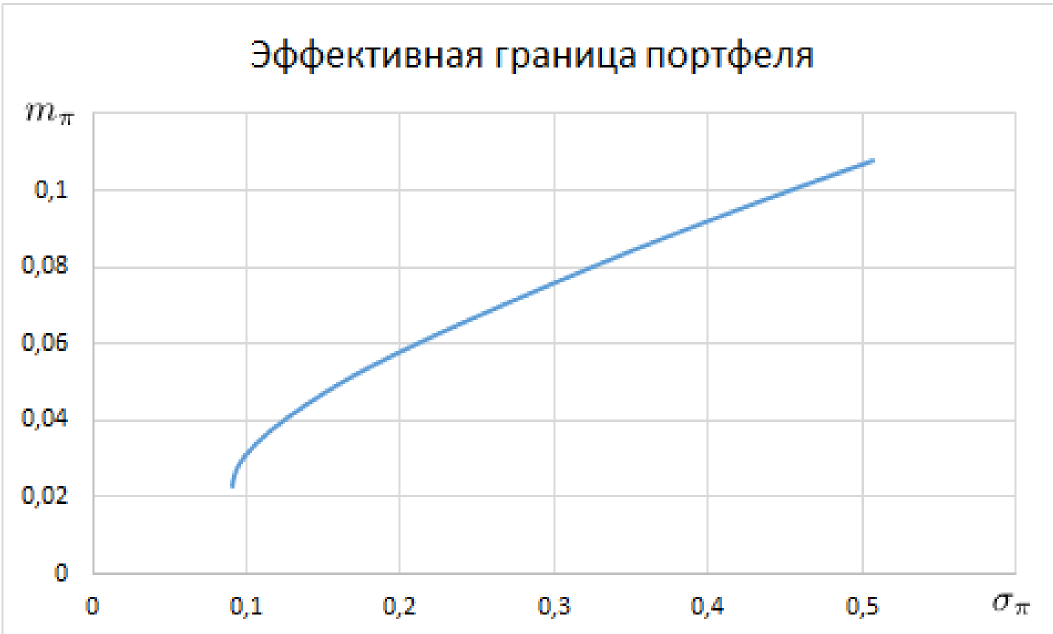

Рис. 6: Эффективная граница портфеля из пяти монет

5.4 Сравнение портфелей

Очевидно, что если исключить некоторую монету из портфеля, риск любого эффективного портфеля будет не меньше риска изначального эффективного портфеля при том же уровне доходности. Однако не всегда риск сокращенного эффективного портфеля строго больше риска изначального эффективного портфеля. Равенство рисков означает, что для формирования такого эффективного портфеля используются не все монеты. Исследуем каждый эффективный портфель на необходимость вхождения всех пяти монет.

Рассмотрим пять портфелей, полученных из уже изученного портфеля удалением одной из монет. Назовем их «Без Эйлера», «Без Павловой», «Без Лобачевского», «Без Смольного», «Без Разгрома».

Сравним портфели минимального риска при нижнем уровне ожидаемой доходности 3%.

Портфель	Ожидаемая доходность	Риск
5 монет	3%	9.73%
Без Эйлера	3.31%	11.89%
Без Павловой	3%	12.36%
Без Лобачевского	3%	10.53%
Без Смольного	3%	11.46%
Без Разгрома	3%	12.49%

При таком уровне доходности риск портфеля из пяти монет строго меньше риска любого другого портфеля. Таким образом, в этом случае целесообразно включение всех пяти монет. Построим эффективные границы портфелей, чтобы выяснить, как ведут себя эффективные портфели при других уровнях минимальной ожидаемой доходности.

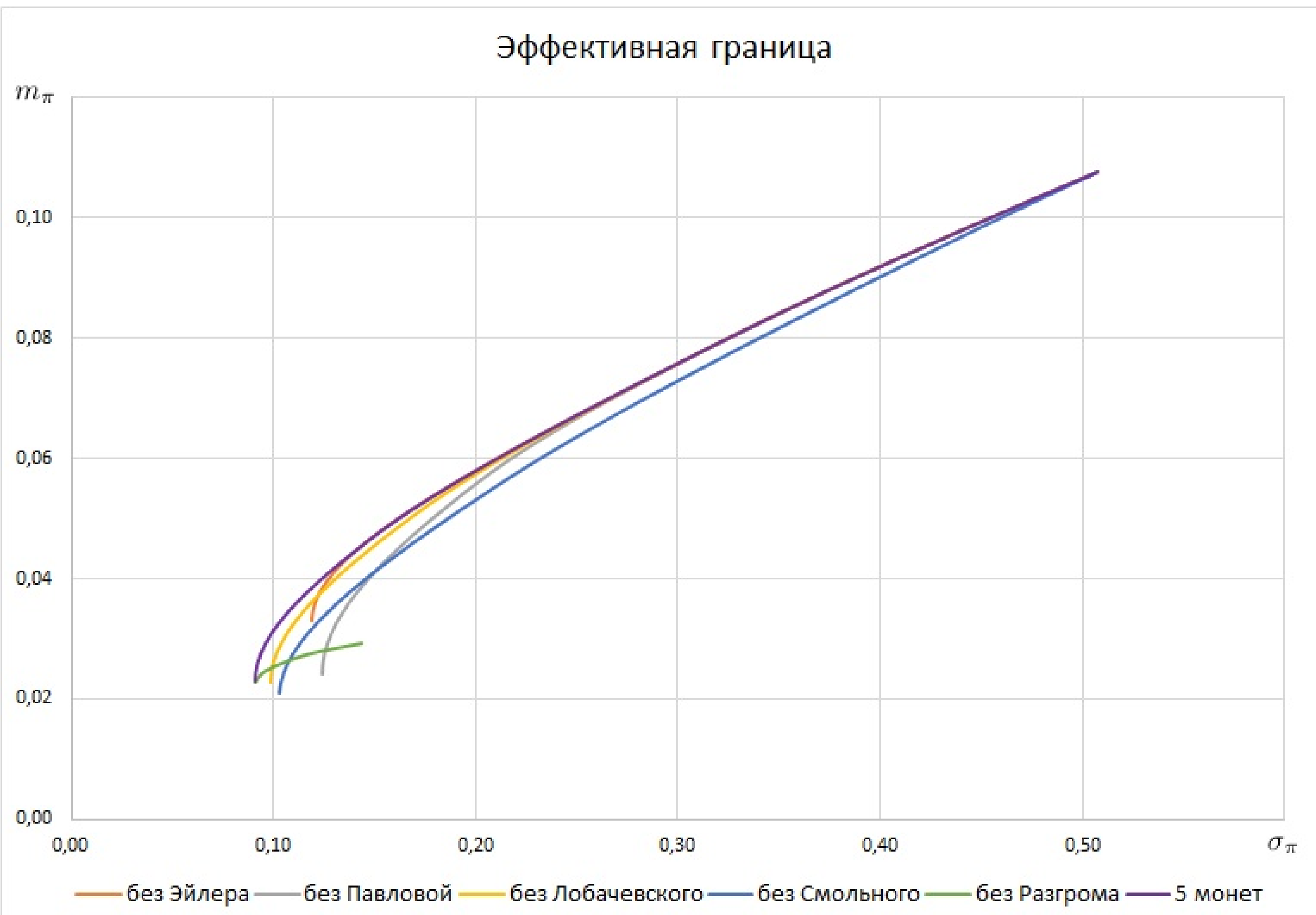

Рис. 7: Эффективная граница портфеля из пяти монет

Нетрудно видеть из графика на рис. 7, что начиная с некоторой ожидаемой доходности граница портфелей «Без Эйлера», «Без Павловой», «Без Лобачевского» очень близка в эффективной границе портфеля пяти монет.

Для выяснения точного значения ожидаемой доходности, начиная с которой в эффективный портфель не входит одна из трех монет, была использована программа по построению эффективного портфеля. Полученные результаты представлены в следующей таблице:

Название	**Ожидаемая доходность**
Эйлер	4.75%
Павлова	7.90%
Лобачевский	8.22%

Схема состава эффективного портфеля при разных уровнях ожидаемой доходности представлена в следующей таблице:

Ожидаемая доходность	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$2.31\% < m_\pi < 4.75\%$	+	+	+	+	+
$4.75\% \leq m_\pi < 7.90\%$	−	+	+	+	+
$7.90\% \leq m_\pi < 8.22\%$	−	−	+	+	+
$8.22\% \leq m_\pi < 10.81\%$	−	−	−	+	+
$m_\pi = 10.81\%$	−	−	−	−	+

Замечание. Значение 2.31% является минимальным значением ожидаемой доходности, для которой существует эффективный портфель.

5.5 Расширенный портфель

Расширим портфель, добавив пять следующих монет:

6. 2 рубля. 225-летие со дня рождения И. А. Крылова
7. 3 рубля. Международный год Космоса
8. 2 рубля. 185 - летие со дня рождения Н.В. Гоголя
9. 50 рублей. Гималайский медведь
10. 25 рублей. Эмблема Игр

Основные характеристики этих монет приведены в следующей таблице:

Название	**Дата выпуска**	**Тираж**	**Металл**
Крылов	02.02.1994	250 000 шт.	серебро (проба 500/1000)
Космос	09.04.1992	600 000 шт.	медь, никель
Гоголь	22.03.1994	250 000 шт.	серебро (проба 500/1000)
Медведь	29.09.1993	300 000 шт.	медь, никель
Сочи	15.04.2011	9 750 000 шт.	медь, никель

Полная информация о монетах приведена на сайце Цетрального банка [11].
Частота торгов каждой монеты приведена в следующей таблице:

Монета	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Среднее число продаж в неделю	0.58	1.92	3.63	1.23	3.65	3	4.62	3.48	2.17	2.60

Данные о монетах были обработаны по той же схеме.
Ожидаемая доходность и риск монет приведены в следующей таблице:

Название	**Ожидаемая доходность**	**Риск**
Крылов	9.26%	47.20%
Космос	5.82%	38.15%
Гоголь	6.68%	37.52%
Медведь	1.41%	14.84%
Сочи	26.54%	89.97%

Матрица ковариаций приведена в приложении в таблице 3.

Схема состава эффективного портфеля при разных уровнях ожидаемой доходности представлена в следующей таблице:

Ожидаемая доходность	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2.66\% < m_\pi < 2.81\%$	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
$2.81\% < m_\pi < 3.44\%$	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+
$3.44\% < m_\pi < 4.97\%$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$4.97\% < m_\pi < 8.68\%$	+	+	+	+	+	+	+	+	−	+
$8.68\% < m_\pi < 9.64\%$	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+
$9.64\% < m_\pi < 12.76\%$	−	+	+	+	+	+	+	−	−	+
$12.76\% < m_\pi < 13.86\%$	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+
$13.86\% < m_\pi < 14.51\%$	−	−	−	+	+	+	+	−	−	+
$14.51\% < m_\pi < 15.82\%$	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+
$15.82\% < m_\pi < 22.12\%$	−	−	−	−	+	+	−	−	−	+
$22.12\% < m_\pi < 26.54\%$	−	−	−	−	+	−	−	−	−	+
$m_\pi = 26.54\%$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+

Замечание. Значение 2.66% является минимальным значением ожидаемой доходности, для которой существует эффективный портфель.

Для сравнения расширенного портфеля с изначальным вычислим эффективный портфель при заданной нижней границе недельной ожидаемой доходности в 3%. Результат приведен на рис. 8:

Рис. 8: Портфель минимального риска из десяти монет при ожидаемой доходности $\geq 3\%$

Заметим, что относительный вес монеты Крылова равен нулю, что не противоречит приведенной выше схеме о составе портфеля.

Недельная ожидаемая доходность и риск получившегося портфеля приведены в следующей таблице:

Ожидаемая доходность	3%
Риск	8.16%

Риск эффективного портфеля из десяти монет меньше риска эффективного портфеля из пяти монет, который равнялся 9.73%.

Сравним эффективные границы портфелей, приведенные на рис. 9.

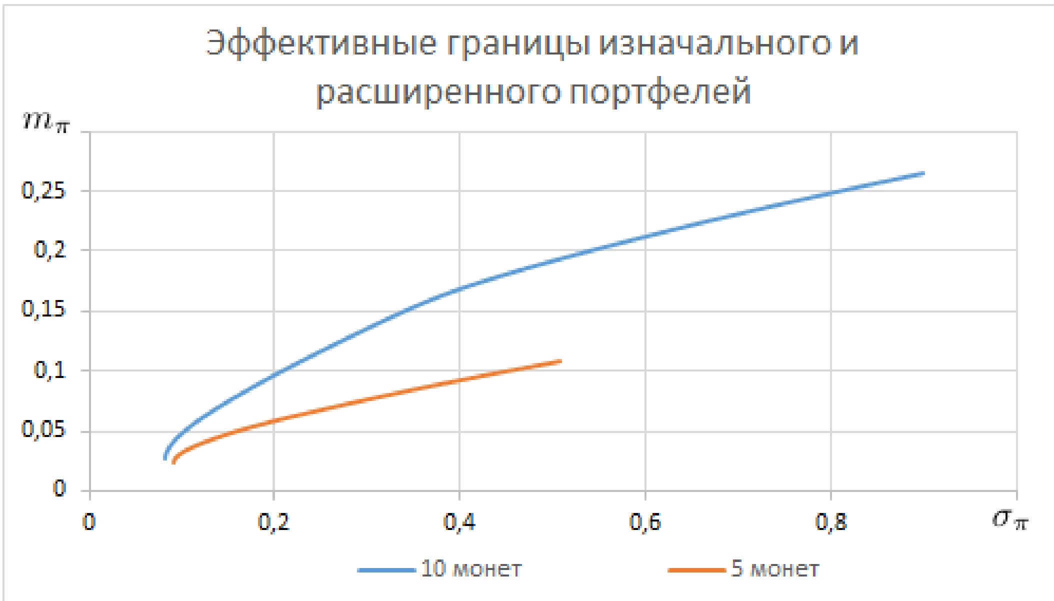

Рис. 9: Эффективные границы портфелей из пяти и десяти монет

Из графика видно, что при любом уровне ожидаемой доходности эффективный портфель из десяти монет характеризуется меньшим риском по отношению к эффективному портфелю из пяти монет.

6 Реализация оптимального портфеля

В этой главе будут построены целочисленные портфели, приближенные к ранее рассмотренным эффективным, посчитаны минимальные вложения для их реализации, а так же вычислены доходности получившихся портфелей.

Решим поставленную задачу в общем случае. Предположим, что инвестор хочет построить целочисленный портфель с минимальными вложениями $\widetilde{\pi}$ к портфелю π^* из монет $\{\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_m\}$. Предположим, что $\pi^* = \{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$, где $x_i^* > 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}$.

Формирование целочисленного портфеля состоит из шести этапов:

1. Сбор данных.
2. Вычисление вложений в π^*.
3. Вычисление вектора количеств монет π^*.
4. Вычисление вектора количеств монет $\widetilde{\pi}$.
5. Вычисление вложений в $\widetilde{\pi}$.
6. Вычисление относительных весов $\widetilde{\pi}$.

1. **Сбор данных.**
   Первым этапом является сбор данных о цене, по которой будут куплены монеты. Обозначим их за $\{S_1(0), \ldots, S_m(0)\}$.

2. **Вычисление вложений в π^*.**
   Для формирования портфеля близкого к заданному необходимо, что бы каждой монеты в портфеле было не менее одной. А для достижения минимальных расходов необходимо, чтобы монета с минимальным относительным весом была одна. Вложения в остальные монеты вычисляются через стоимости монет и вектор относительных весов. Таким образом, вложения в π^* вычисляются по формуле:

$$I^*(i) = S_i(0)\frac{x_i}{x_1}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

3. **Вычисление вектора количеств монет π^*.**
   Количество монет в π^* вычисляется по формуле:

$$k^*(i) = \frac{I^*(i)}{S_i(0)}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

4. **Вычисление вектора количеств монет $\widetilde{\pi}$.**
Количество монет в $\widetilde{\pi}$ получается из количества монет в π^* путем округления последних:
$$\widetilde{k}(i) = [k^*(i)], \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

5. **Вычисление вложений в $\widetilde{\pi}$.**
Вложения в $\widetilde{\pi}$ вычисляются по формуле:
$$\widetilde{I}(i) = \widetilde{k}(i) S_i(0), \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

6. **Вычисление относительных весов $\widetilde{\pi}$.**
Минимальные вложения вычисляются по формуле:
$$\widetilde{I} = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{I}(i).$$
Относительные веса $\widetilde{\pi}$ вычисляются по формуле:
$$\widetilde{x}_i = \frac{\widetilde{I}(i)}{\widetilde{I}}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Заметим, что данная схема работает для портфеля состоящего из любых ценных бумаг.

6.1 Портфель из пяти монет

Сформируем целочисленный портфель из пяти монет на момент 29 февраля 2016 г. ($\widetilde{\pi}_5$). В качестве эффективного портфеля возьмем портфель минимального риска при заданном нижнем уровне доходности 3% (π_5^*). Результаты каждого этапа описанной схемы приведены в таблице 1.

Таблица 1: Вычисление целочисленного портфеля из пяти монет

№	**Цена покупки**	π_5^*	**Вложения в π_5^***	**Кол-во монет в π_5^***	**Кол-во монет в $\widetilde{\pi}_5$**	**Вложения в $\widetilde{\pi}_5$**	$\widetilde{\pi}_5$
1	1 603 р.	26.54%	3 859,66 р.	2.41	2	3 206 р.	23.01%
2	2 519 р.	28.94%	4 209,32 р.	1.67	2	5 038 р.	36.16%
3	545 р.	15.47%	2 250,28 р.	4.13	4	2 180 р.	15.65%
4	2 460 р.	21,83%	3 175,16 р.	1.29	1	2 460 р.	17.66%
5	1 049 р.	7,21%	1 049 р.	1.00	1	1 049 р.	7.53%
					10	13 933 р.	

Минимальные вложения, необходимые для формирования целочисленного портфеля составляют 13 933 р. Сравнение относительных весов π_5^* и $\widetilde{\pi}_5$ приведены на рис. 10.

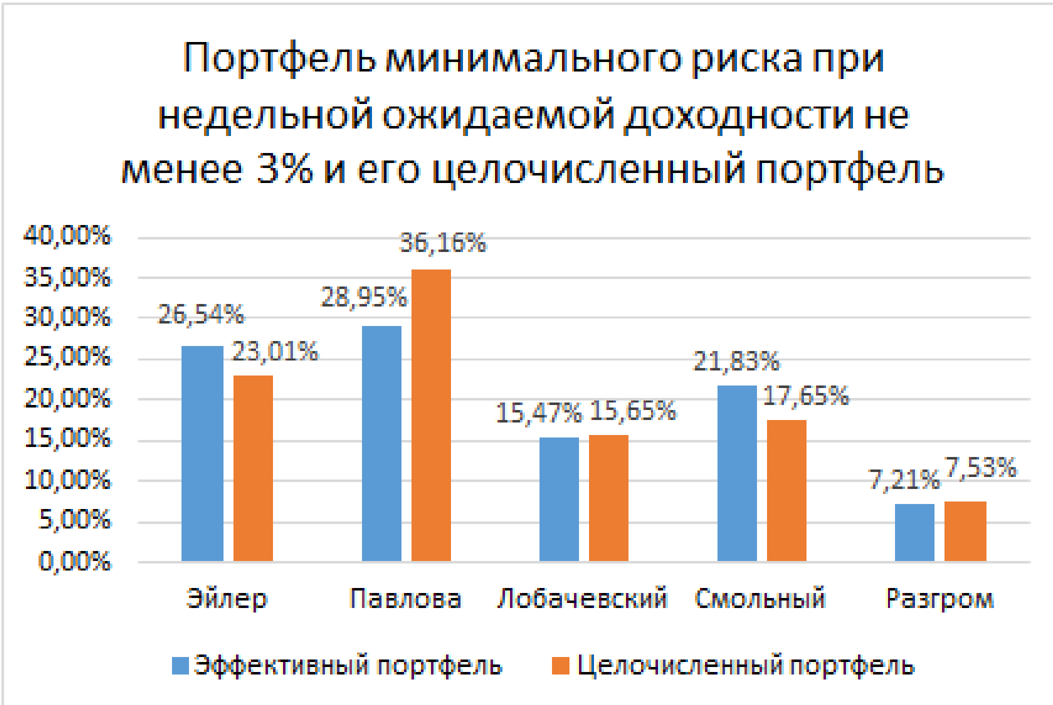

Рис. 10: Сравнение относительных весов π_5^* и $\widetilde{\pi}_5$

Основные характеристики π_5^* и $\widetilde{\pi}_5$ приведены в следующей таблице:

Портфель	**Эффективный**	**Целочисленный**
Ожидаемая доходность	3%	3.03%
Риск	9.62%	10.05%

Получившиеся ожидаемая доходность и риск целочисленного портфеля близки к ожидаемой доходности и риску эффективного портфеля.

Вычислим доходность получившегося портфеля в предположении, что монеты были реализованы через неделю после покупки (7 марта 2016 г.). Получившиеся результаты представлены в следующей таблице:

Название	Цена покупки 29.02.2016	Целочисленный портфель	Цена продажи 07.03.2016	Доходность
Эйлер	1 603 р.	30.09%	1 744 р.	8.08%
Павлова	2 519 р.	25.95%	2 127 р.	-18.43%
Лобачевский	545 р.	17.57%	619 р.	11.95%
Смольный	2 460 р.	19.48%	3 204 р.	23.22%
Разгром	1 049 р.	6.91%	921 р.	-13.90%

Доходность портфеля равна 3.31%, что близко к ожидаемой доходности портфеля.

Однако реализовать целочисленный портфель не так просто. Во-первых, на аукционах монеты продаются по одной, т.е. купить одновременно две монеты по одинаковой цене практически невозможно. Во-вторых, сложно сформировать портфель, в котором монеты куплены в один день. В-третьих, предложение может быть меньше, чем количество монет, требуемое в портфеле. Сформируем *реальный портфель*, задав его период реализации.

Заметим, что период реализации целочисленного портфеля не должен превышать 1-2 недель. Это обусловлено тем, что за больший период «картина» может значительно поменяться, а следовательно может измениться и эффективный портфель, на основе которого строиться реальный.

Установим период реализации целочисленного портфеля 2 недели (15.02.2016 — 29.02.2016). В связи с тем, что в период монета Эйлера торговалась один раз, реальный портфель будет содержать не две монеты Эйлера (как в целочисленном), а одну. Остальные монеты торговались достаточное число раз. В качестве цены покупки были взяты цены с последних продаж до 29 февраля 2016 г.. Сравнение относительных весов целочисленного и реального портфелей приведены на рис. 11.

Ожидаемая доходность реального портфеля равна 4.11%, риск равен 10.77%.

Вычислим доходность получившегося портфеля в предположении, что монеты были реализованы через неделю после окончания срока реализации (7 марта 2016 г.). Получившиеся результаты представлены в следующей таблице:

Название	Кол-во монет	Цена покупки 29.02.2016	Реальный портфель	Цена продажи 07.03.2016	Доходность
Эйлер	1	1 603 р.	13.13%	1 744 р.	8.08%
Павлова	2	4 568 р.	3.42%	4 254 р.	-7.38%
Лобачевский	4	2 527 р.	20.70%	2 665 р.	5.18%
Смольный	1	2 460 р.	20.15%	3 204 р.	23.22%
Разгром	1	1 049 р.	8.59%	921 р.	-13.90%
		12 207 р.		12 788 р.	

Минимальные вложения, необходимые для формирования реального портфеля составляют 12 207 р. Доходность реального портфеля равна 2.86%.

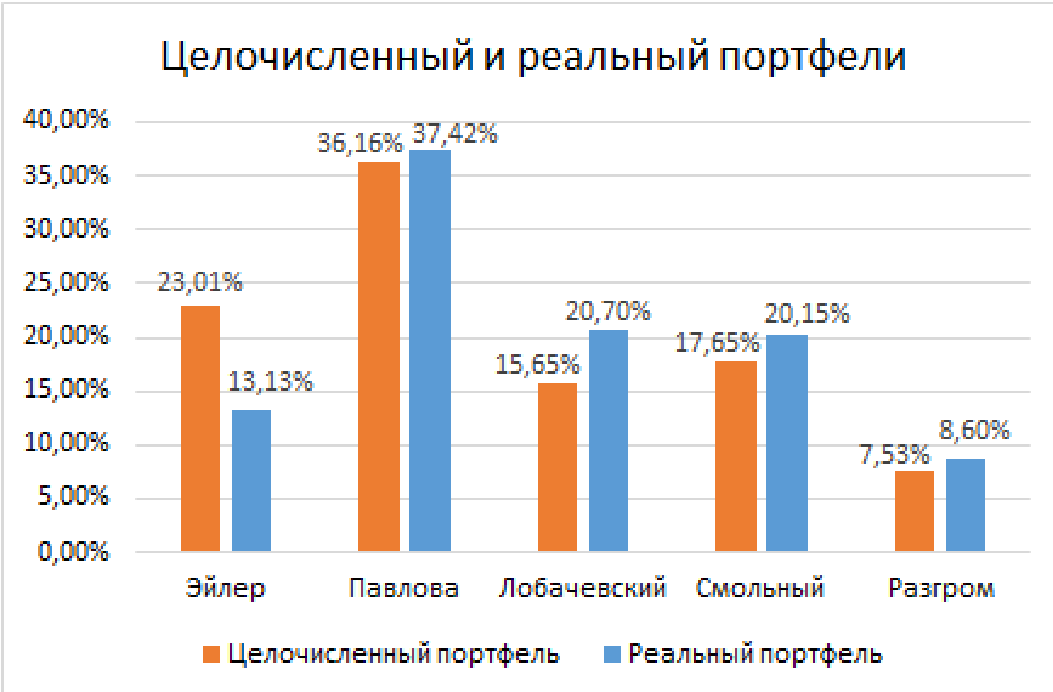

Рис. 11: Сравнение относительных весов целочисленного и реального портфелей

6.2 Портфель из десяти монет

Сформируем целочисленный портфель из десяти монет на момент 29 февраля 2016 г. ($\widetilde{\pi_{10}}$). В качестве эффективного портфеля возьмем портфель минимального риска при заданном нижнем уровне доходности 3% (π_{10}^*). Результаты каждого этапа описанной схемы приведены в таблице 2.

Минимальные вложения, необходимые для формирования целочисленного портфеля составляют 158 577 р. Отметим, что рост вложений в портфель при увеличении количества монет растет не пропорционально.

Сравнение относительных весов π_{10}^* и $\widetilde{\pi_{10}}$ приведено на рис. 12.

Основные характеристики π_5^* и $\widetilde{\pi_5}$ приведены в следующей таблице:

Портфель	**Эффективный**	**Целочисленный**
Ожидаемая доходность	3%	3.04%
Риск	8.16%	8.18%

Получившиеся ожидаемая доходность и риск целочисленного портфеля близки к ожидаемой доходности и риску эффективного портфеля.

Таблица 2: Вычисление целочисленного портфеля из десяти монет

№	**Цена покупки**	π_{10}^*	**Вложения в** π_{10}^*	**Кол-во монет в** π_{10}^*	**Кол-во монет в** $\widetilde{\pi_{10}}$	**Вложения в** $\widetilde{\pi_{10}}$	$\widetilde{\pi_{10}}$
1	1 603 р.	25.08%	39 557.90 р.	24.68	25	40 075 р.	25.27%
2	2 519 р.	27.25%	42 971.69 р.	17.06	17	42 823 р.	27.01%
3	545 р.	10.56%	16 647.94 р.	30.55	31	16 895 р.	10.65%
4	2 460 р.	11.10%	17 501.22 р.	7.11	7	17 220 р.	10.86%
5	1 049 р.	0.67%	1 049 р.	1.00	1	1 049 р.	0.66%
6	1 055 р.	0.00%	0.00 р.	0.00	0	0 р.	0.00%
7	367 р.	8.68%	13 696.00 р.	37.32	37	13 579 р.	8.56%
8	1 055 р.	3.24%	5 103.04 р.	4.84	5	5 275 р.	3.33%
9	1 133 р.	12.09%	19 066.35 р.	16.83	17	19 261 р.	12.15%
10	800 р.	1.34%	2 118.75 р.	2.65	3	2 400 р.	1.51%
					143	158 577 р.	

Вычислим доходность получившегося портфеля в предположении, что монеты были реализованы через неделю после покупки (7 марта 2016 г.).

Название	**Цена покупки 29.02.2016**	**Целочисленный портфель**	**Цена продажи 07.03.2016**	**Доходность**
Эйлер	1 603 р.	25.27%	1 744 р.	8.08%
Павлова	2 519 р.	27.00%	2 127 р.	-18.43%
Лобачевский	545 р.	10.65%	619 р.	11.95%
Смольный	2 460 р.	10.86%	3 204 р.	23.22%
Разгром	1 049 р.	0.66%	921 р.	-13.90%
Крылов	1 055 р.	0.00%	1 071 р.	1.49%
Космос	367 р.	8.56%	816 р.	55.02%
Гоголь	1 055 р.	3.33%	312 р.	-238.14%
Медведь	1 133 р.	12.15%	1 112 р.	-1.89%
Сочи	800 р.	1.51%	209 р.	-282.78%

Доходность портфеля отрицательна и равна -6.95%.

Замечание. Получившийся целочисленный портфель реализовать невозможно. Это связано с тем, что в период 01.02.2016 — 15.05.2016 монета Эйлера торговалась всего 6 раз, в то время как портфель требует 25 монет.

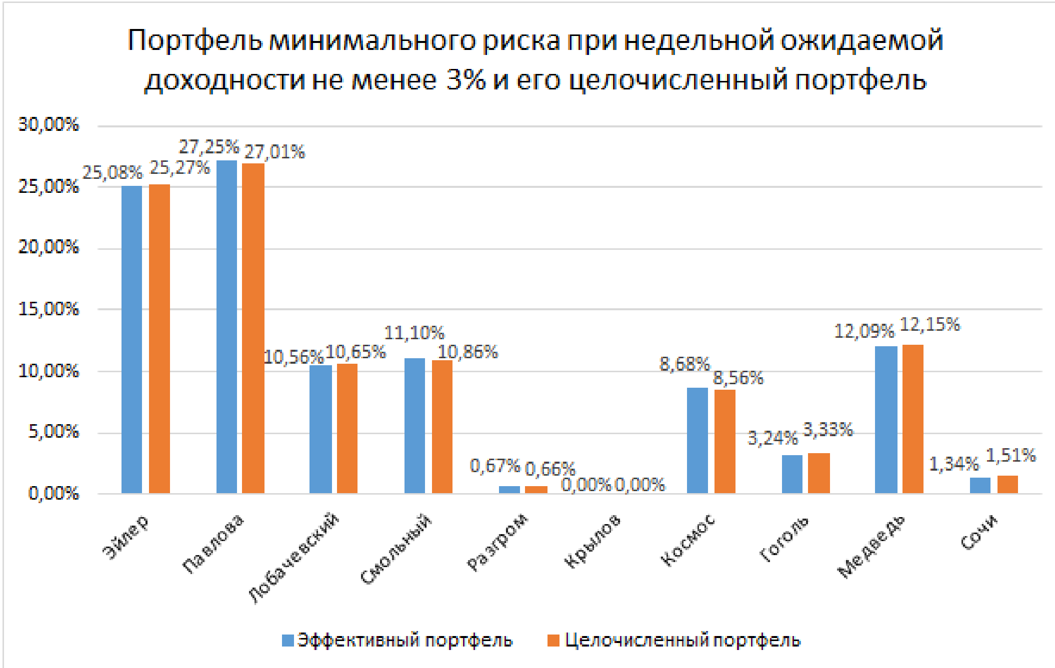

Рис. 12: Сравнение относительных весов π^*_{10} и $\widetilde{\pi_{10}}$

6.3 Вывод

В связи с тем, что коллекционные монеты обладают низкой ликвидностью, их торги нерегулярны, а срок реализации портфеля не должен превышать 1-2 недель, портфель должен состоять из небольшого числа часто торгующихся монет. То есть для эффективности предложенной методики формирования оптимального портфеля он должен состоять из порядка пяти монет со средним числом продаж в неделю не менее трех.

7 Заключение

Поставленная в начале работы цель достигнута, а именно:

- Выявлена и оценена методика формирования оптимального портфеля из коллекционных монет.
- Методика проверена на портфелях, состоящих от четырех до десяти монет.
- Реализован подход к построению эффективного портфеля и эффективной границы.
- Проведен анализ эффективной границы рассматриваемых портфелей, в результате которого построена схема вхождения монет в эффективный портфель.
- Построен пример целочисленного портфеля, вычислены минимальные затраты на его реализацию.
- Построен пример реального портфеля.
- Выявлены проблемы реализации портфелей.
- Составлены рекомендации по выбору монет при формировании портфеля.

Список литературы

[1] Боди З., Мертон З. Финансы. — Издательский дом «Вильямс», 2007.

[2] Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. Основы теории квадратичного программирования — Вестник ЛГУ. 1980. № 1. С. 9–16.

[3] Кочетыгов А.А. Финансовая математика. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2004.

[4] О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый ананлиз и торговля ценными бумагами. — М.: «Дело ЛТД», 1995.

[5] Markowits Harry M. Portfolio Selection — Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, 1952, pp. 71–91.

[6] Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus. Investments. — McGraw-Hill Education, 2010.

[7] Michel M. Dacorogna at al. An Introduction to High-Frequency Finance. — Academic Press, 2001.

[8] Andy Ravenna, Stacey Syphus. Querying and Reporting Using SAS Enterprise Guide. Course Notes. — Copyright, 2006 by SAS Institute Inc., Cary, NC 27513, USA

[9] Информационный портал. http://www.banki.ru/news/columnists/?id=7797341

[10] Поиск монет по аукционам. http://www.fcoins.ru/

[11] Сайт Центрального Банка РФ. http://www.cbr.ru/

[12] Официальный сайт продукции компании SAS. http://www.sas.com/

8 Приложения

В приложениях содержится:

- Таблица 3 с матрицей ковариаций десяти монет.
- Программа на R для вычисления эффективного портфеля и эффективной границы.
- Программа на Matlab для вычисления эффективного портфеля.
- Программа для приведения неоднородного временного ряда к однородному с интервалом 1 неделя (SAS).
- Исходные данные десяти монет на рис. 13-22.
- Иллюстрации десяти монет на рис. 23-32.

Таблица 3: Матрица ковариаций

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	2.88%	-0.86%	-0.04%	0.09%	2.15%	-1.05%	0.52%	-0.75%	0.72%	0.32%
2	-0.86%	4.85%	-0.50%	-1.23%	0.26%	4.04%	-3.46%	2/32%	-0.10%	-2.33%
3	-0.04%	-0.50%	5.75%	0.75%	0.82%	0.66%	0.16%	0/27%	0.84%	-0.28%
4	0.09%	-1.23%	0.75%	5.96%	-1.78%	-0.84%	1.61%	-0.82%	0.79%	3.19%
5	2.15%	0.26%	0.82%	-1.78%	26.01%	1.02%	-0.34%	4.45%	1.57%	-5.51%
6	-1.05%	4.04%	0.66%	-0.84%	1.02%	22.28%	-3.49%	9.49%	2.36%	-3.04%
7	0.52%	-3.46%	0.16%	1.61%	-0.34%	-3.49%	14.56%	-1.54%	0.26%	9.28%
8	-0.75%	2.32%	0.27%	-0.82%	4.45%	9.49%	-1.54%	14.08%	0.47%	-0.77%
9	0.72%	-0.10%	0.84%	0.79%	1.57%	2.36%	0.26%	0.47%	2.20%	-1.81%
10	0.32%	-2.33%	-0.28%	3.19%	-5.51%	-3.04%	9.28%	-0.77%	-1.81%	80.94%

Вычисление эффективного портфеля и эффективной границы (R)

```
library("quadprog")
library("rJava")
library("xlsx")
require(xlsx)

book <- loadWorkbook("E:\\Course\\Petrova_Anna_10_05.xlsx")
sheets <- getSheets(book)
file <- "E:\\Course\\Petrova_Anna_10_05.xlsx"
book <- loadWorkbook(file)
```

```
sheets <- getSheets(book)
sheet <- sheets[[8]]
rows <- getRows(sheet)
cells <- getCells(rows)
t <- lapply(cells, getCellValue)

# чтение данных из файла
Dmat1 <- C(t$'10.1',t$'11.1',t$'12.1',t$'13.1',t$'14.1')
Dmat2 <- c(t$'10.3',t$'11.3',t$'12.3',t$'13.3',t$'14.3')
Dmat3 <- c(t$'10.5',t$'11.5',t$'12.5',t$'13.5',t$'14.5')
Dmat4 <- c(t$'10.7',t$'11.7',t$'12.7',t$'13.7',t$'14.7')
Dmat5 <- c(t$'10.9',t$'11.9',t$'12.9',t$'13.9',t$'14.9')
Dmat <- cbind(Dmat1, Dmat2, Dmat3, Dmat4, Dmat5)
dvec <- c(0,0,0,0,0)
A <- matrix(1,1,5)
r <- c(t$'17.1',t$'17.3',t$'17.5',t$'17.7',t$'17.9')
A <- rbind(A, -A, r, diag(5))
Amat <- t(A)
bvec <- c(t$'16.12', -t$'16.12',t$'17.12',t$'18.12',
          t$'19.12',t$'20.12',t$'21.12',t$'22.12')
# решение
sol <- solve.QP(Dmat,dvec,Amat,bvec, meq=1)$solution
addDataFrame(sol,sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
             startRow=24,startColumn=3)
# риск
sol <- t(sol)
solt <- t(sol)
risk <- sol %*% Dmat %*% solt
addDataFrame(risk,sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
             startRow=32,startColumn=3)
# ожидаемая доходность
expret <- r %*% solt
addDataFrame(expret,sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
             startRow=31,startColumn=3)
#--------------------------------------------------------------------------------
# ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАНИЦА

m <- 10000 # ранг дробления
k <- 0 # количество точек
for (R in seq (min(r) , max(r), by = 1/m)){
  k <- k+1
  bvec <- c(t$'16.12',-t$'16.12',R,t$'18.12',t$'19.12',
          t$'20.12',t$'21.12',t$'22.12')
  # решение
  sol <- solve.QP(Dmat,dvec,Amat,bvec, meq=1)$solution
  for (i in 1:5){
    addDataFrame(sol[i],sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
                 startRow=40+k,startColumn=4+i)}
```

```
  # риск
  sol <- t(sol)
  solt <- t(sol)
  risk <- sol %*% Dmat %*% solt
  addDataFrame(risk,sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
               startRow=40+k,startColumn=3)
  # ожидаемая доходность
  expret <- r %*% solt
  addDataFrame(expret,sheets[[8]],col.names=FALSE,row.names=FALSE,
               startRow=40+k,startColumn=4)
}
saveWorkbook(book,"E:\\Course\\Petrova_Anna_10_05.xlsx")
```

Вычисление эффективного портфеля (MatLab)

```
clear all
close all
clc
H = xlsread('Petrova_Anna_10_05.xlsx','Решение 5','G2:K6');
G = xlsread('Petrova_Anna_10_05.xlsx','Решение 5','M2:Q2');
B = [0.03];
Aeq = [1 1 1 1 1];
beq = [1];
lb = zeros(5,1);
f = zeros(5,1);
A = -G;
b = -B;
[x,fval] = quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,[]);
```

Приведение неоднородного временного ряда к однородному с шагом 1 неделя (SAS)

```
/* --------------------------------------------------------------------
   Чтение данныех из временного файла, созданного
   мастером импорта данных. Значения  временного файла были получены
   из исходного файла Excel.
   -------------------------------------------------------------------- */

DATA WORK.raz;
    LENGTH
        'date'n   8
        'price'n  8 ;
    FORMAT
        'date'n       DATETIME18.
        'price'n      BEST12. ;
    INFORMAT
```

```
        'date'n       DATETIME18.
        'price'n      BEST12. ;
    INFILE '/u0/work/SAS_work35B500004828_ds-sasfront02p/#LN00245'
        LRECL=15
        ENCODING="WCYRILLIC"
        TERMSTR=CRLF
        DLM='7F'x
        MISSOVER
        DSD ;
    INPUT
        'date'n       : BEST32.
        'price'n      : BEST32. ;
RUN;
/* --------------------------------------------------------------------*/
data week;
array week{53} week1-week53;
run;


PROC SQL;
CREATE VIEW WORK.SORTTempTableSorted AS
SELECT T.week1, T.week2, T.week3, T.week4, T.week5, T.week6, T.week7,
       T.week8, T.week9, T.week10, T.week11, T.week12, T.week13, T.week14,
       T.week15, T.week16, T.week17, T.week18, T.week19, T.week20, T.week21,
       T.week22, T.week23, T.week24, T.week25, T.week26, T.week27, T.week28,
       T.week29, T.week30, T.week31, T.week32, T.week33, T.week34, T.week35,
       T.week36, T.week37, T.week38, T.week39, T.week40, T.week41, T.week42,
       T.week43, T.week44, T.week45, T.week46, T.week47, T.week48, T.week49,
       T.week50, T.week51, T.week52, T.week53
FROM WORK.WEEK as T
;
QUIT;
PROC TRANSPOSE DATA=WORK.SORTTempTableSorted
OUT=WORK.TRNSTransposed(LABEL="Транспонированный WORK.WEEK")
PREFIX='p'n
NAME='week'n
LABEL='Ярлык'n
;
VAR week1 week2 week3 week4 week5 week6 week7 week8 week9 week10 week11 week12
    week13 week14 week15 week16 week17 week18 week19 week20 week21 week22 week23
    week24 week25 week26 week27 week28 week29 week30 week31 week32 week33 week34
    week35 week36 week37 week38 week39 week40 week41 week42 week43 week44 week45
    week46 week47 week48 week49 week50 week51 week52 week53;
/* -------------------------------------------------------------------
   Решение задачи
   ------------------------------------------------------------------- */
RUN; QUIT;
%_eg_conditional_dropds(WORK.SORTTempTableSorted);
```

```
TITLE; FOOTNOTE;

DATA TRNSTransposed (drop=p1);
SET TRNSTransposed;
     RETAIN K 1740268800;
    K = K+604800;

RUN;

proc sql;
create table ann as
select week,K format=DATETIME18. as date
from TRNSTransposed;
quit;

proc sql;
create table raz as
select date as date_0,DHMS(floor((floor(date/86400)+4)/7)*7+3,00,00,00)
format=DATETIME18. as date,price
from raz;
quit;

proc sort data=raz;
by date_0 date;
run;

data raz;
set raz;
by date;
if last.date;
run;

proc sql;
create table result as
select a.*,b.price
from ann a left join raz b on (a.date=b.date)
;quit;
```

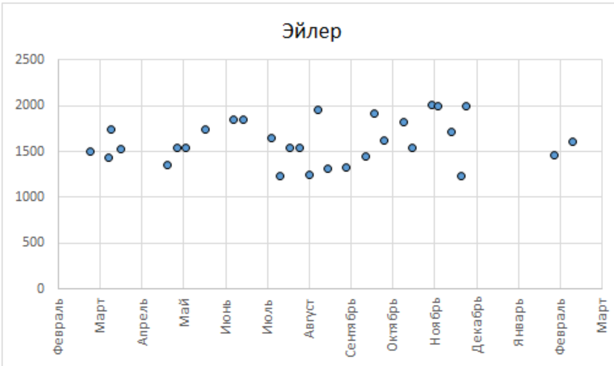

Рис. 13: Исходные данные монеты Эйлер

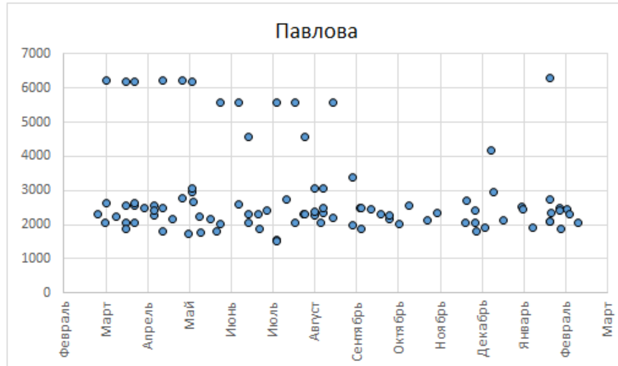

Рис. 14: Исходные данные монеты Павлова

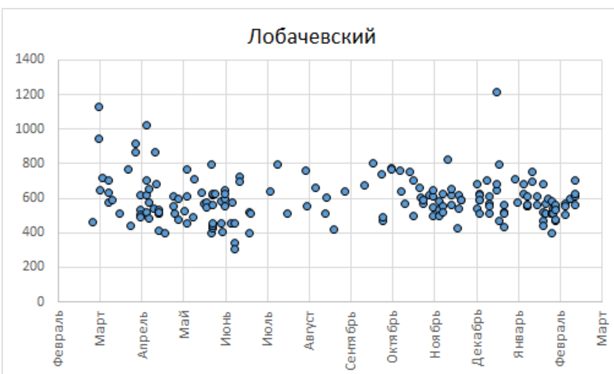

Рис. 15: Исходные данные монеты Лобачевский

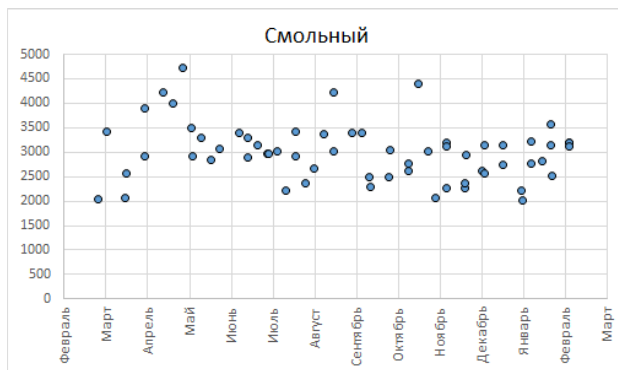

Рис. 16: Исходные данные монеты Смольный

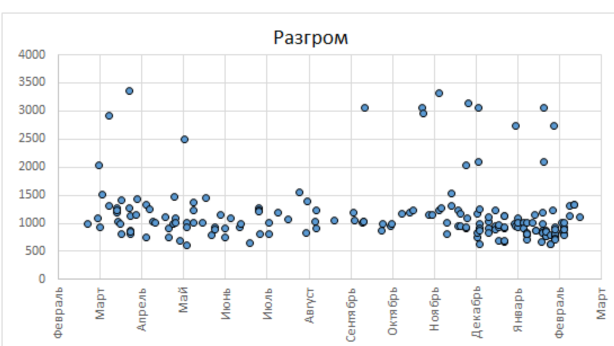

Рис. 17: Исходные данные монеты Разгром

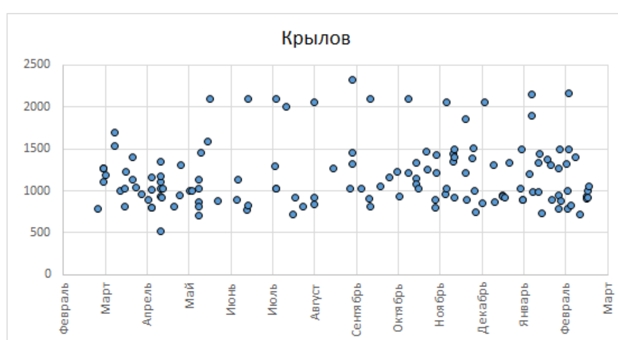

Рис. 18: Исходные данные монеты Крылов

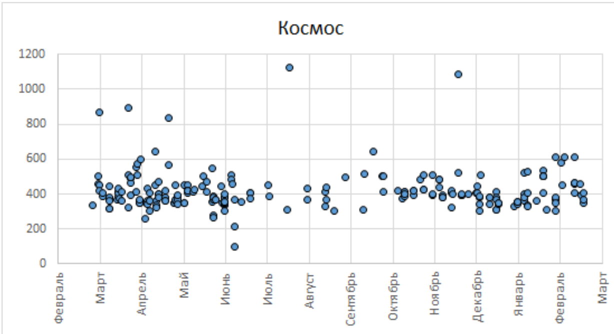

Рис. 19: Исходные данные монеты Космос

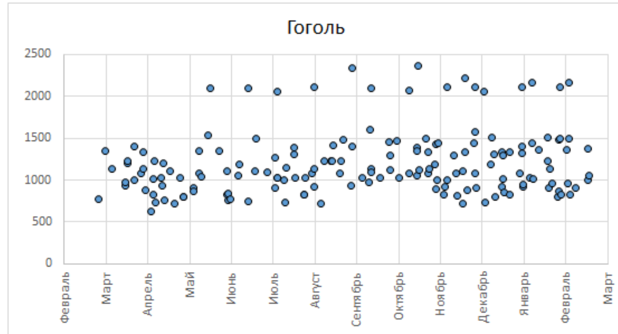

Рис. 20: Исходные данные монеты Гоголь

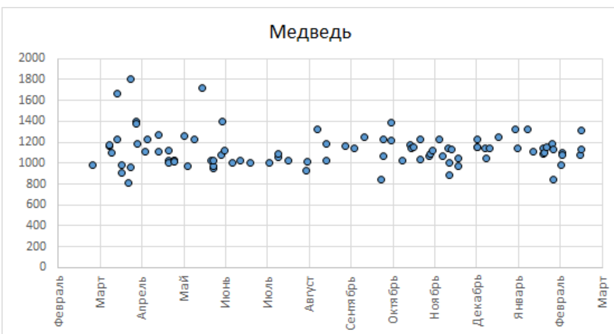

Рис. 21: Исходные данные монеты Медведь

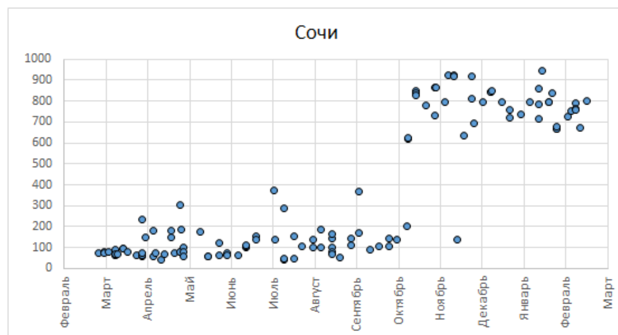

Рис. 22: Исходные данные монеты Сочи

Рис. 23: 2 рубля. 300 - летие со дня рождения Л. Эйлера

Рис. 24: 3 рубля. Анна Павлова

Рис. 25: 1 рубль. 200 - летие со дня рождения Н. И. Лобачевского

Рис. 26: 3 рубля. Смольный институт и монастырь в Санкт-Петербурге

Рис. 27: 3 рубля. 50-летие разгрома немецко-фашистских войск под Ленинградом

Рис. 28: 2 рубля. 225-летие со дня рождения И. А. Крылова

Рис. 29: 3 рубля. Международный год Космоса

Рис. 30: 2 рубля. 185 - летие со дня рождения Н.В. Гоголя

Рис. 31: 50 рублей. Гималайский медведь

Рис. 32: 25 рублей. Эмблема Игр