

Устойчивость плавания судов с сечениями в форме эллиптического и гиперболического сегментов

А. С. Смирнов^{1,2}, И. А. Кравчинский^{2,3}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

³ ООО «Центр технологического консалтинга»,
Российская Федерация, 194044, Санкт-Петербург, Большой Сампсониевский пр., 28/2

Для цитирования: Смирнов А. С., Кравчинский И. А. Устойчивость плавания судов с сечениями в форме эллиптического и гиперболического сегментов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 171–184. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.112>

В статье рассматриваются две задачи об устойчивости тривиального положения равновесия плавающих судов с сечениями в форме эллиптического и гиперболического сегментов. Дается обзор примеров на устойчивость плавания тел и излагаются ключевые принципы ее исследования методами аналитической статики. Для каждой из представленных задач путем достаточно серьезных математических построений получается точное выражение для потенциальной энергии в рамках принятой конфигурации и вычисляется его квадратичная аппроксимация вблизи исследуемого равновесного состояния. На ее основе устанавливаются условия устойчивости положения равновесия в терминах трех безразмерных параметров, а также анализируются предельные случаи. Осуществляется сопоставление промежуточных выражений и конечных результатов, полученных в процессе обсуждения каждой из задач, и выявляются их общие черты и отличительные особенности. Найденные решения иллюстрируются в виде семейств границ областей устойчивости на плоскости двух безразмерных параметров при различных значениях третьего параметра. Эти результаты представляют фундаментальное теоретическое значение и могут оказаться полезными для практических приложений.

Ключевые слова: плавающее судно, эллиптический и гиперболический сегменты, устойчивость, статический анализ, граница области устойчивости, плоскость безразмерных параметров.

1. Введение. Одним из ключевых вопросов в корабельном деле является исследование устойчивости плавающих тел в рамках одного из важнейших разделов механики — гидростатики, причем в морской науке для этого понятия используется специальный термин «остойчивость» [1, 2]. Как известно, основы статики корабля были заложены еще Архимедом, а существенный толчок в развитии учения об устойчивости плавающих тел произошел благодаря трудам Л. Эйлера и его многочисленных последователей. Подобные задачи имеют, помимо фундаментального теоретического значения, и широкое практическое применение, поскольку плаваю-

щие в жидкости тела могут моделировать самые разнообразные водные транспортные средства, имеющие различное назначение, — понтоны, баржи, суда, лодки и т. п. [3, 4].

Особую важность при этом приобретает исследование устойчивости плавающих тел в пространстве параметров задачи, которое позволяет выявить характер равновесных положений при плавном изменении этих параметров [5]. Это обстоятельство зачастую и приводит к неожиданной потере устойчивости водного объекта с последующим его опрокидыванием или переворотом на бок [6], что требует весьма тщательного анализа.

В то же время статический анализ тела, погруженного в жидкость, даже при весьма несложной геометрии его сечения далеко не всегда удается осуществить до конца аналитическими методами, особенно если необходимо провести глобальный анализ, который подразумевает определение всех возможных положений равновесия плавающего тела и исследование их устойчивости [6, 7]. Поэтому в современных руководствах и задачниках по механике твердых тел и теории устойчивости присутствует весьма небольшое количество задач гидростатической устойчивости [8, 9], что и побуждает лишний раз обратить серьезное внимание на эту область.

Наиболее известными задачами об устойчивости плавающих тел являются задача о плавании понтона с прямоугольным сечением, решенная А. П. Фан-дер-Флитом [10, 11], и задача о плавании лодки с треугольным сечением, связанная с именем А. Ю. Давидова [9, 12]. В качестве развития первой из них можно указать статью [5], где рассматривается плавание понтона со смещенным центром масс, а также работу [6], где осуществляется глобальный статический анализ плавающей прямоугольной баржи.

Еще больший практический интерес представляют задачи об устойчивости плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями, которые сочетают геометрические особенности как задачи о плавании прямоугольного понтона, так и задачи о плавании треугольной лодки [13]. Это связано с тем, что тела с упомянутыми сечениями представляют собой несколько более удачное приближение к реальным плавающим средствам.

Однако существенно важный шаг при моделировании плавающих тел в жидкости заключается в переходе от брусьев с кусочно-прямолинейными сечениями, о которых шла речь во всех указанных выше вариантах, к брусьям с сечениями, границы которых содержат криволинейные участки [2], и от общих теоретических сведений к рассмотрению конкретных задач [7]. Одним из таких примеров является задача об устойчивости плавания судна с сечением в форме параболического сегмента, решенная авторами в работе [14], где помимо исследования устойчивости тривиального положения равновесия определяются и наклонные равновесные состояния.

В настоящей работе предлагается продолжить рассмотрение плавающих тел с сечениями, представляющими собой сегменты кривых второго порядка, а именно исследовать устойчивость плавающих судов с сечениями в форме эллиптического и гиперболического сегментов.

2. Исследование устойчивости плавающих тел методами аналитической статики. Прежде чем переходить к постановке и решению указанных задач, целесообразно указать основные положения, которые обычно принимаются при исследовании устойчивости плавающих тел методами аналитической статики. В связи

с тем, что подробное изложение этих моментов приведено в [5, 7, 9, 13], ограничимся здесь лишь их достаточно краткой сводкой. Предположим, что плавающее средство моделируется при помощи длинного бруса постоянного поперечного сечения с плотностью ρ_b (поверхностная плотность сечения бруса, т. е. масса на единицу площади), погруженного в жидкость плотности ρ_l (также на единицу площади). В силу сказанного можно ограничиться рамками плоской задачи, при этом горизонтальная координата центра масс бруса в статической задаче отбрасывается как несущественная, а вертикальная координата исключается путем рассмотрения лишь равнообъемных наклонений бруса по углу поворота, что является стандартным приемом в статике плавающих тел [2, 15, 16]. В результате в рассмотрении остается лишь одна обобщенная координата — угол наклона бруса φ , а задача сводится к одностепенной. Для исследования устойчивости необходимо записать и проанализировать выражение для потенциальной энергии плавающего бруса, которая равна $\Pi = P(y_b - y_l)$, где $P = P_l = P_b$, причем P_b и P_l — веса бруса и вытесненной жидкости соответственно, равные друг другу, а y_b и y_l — вертикальные координаты центров масс бруса и вытесненного объема, которые отсчитываются от ватерлинии [17]. При этом следует отметить, что условие равнообъемности в рамках плоской задачи приводится к виду $S_l = \rho S_b = \text{const}$, где S_b — площадь сечения бруса; S_l — вытесненная площадь жидкости, а $\rho = \rho_b/\rho_l$ — безразмерная плотность, причем из условия плавания $\rho_b < \rho_l$, так что $0 < \rho < 1$.

3. Устойчивость плавания судна с сечением в форме эллиптического сегмента. В качестве первой задачи рассмотрим судно с сечением в форме эллиптического сегмента, погруженное в жидкость, и исследуем устойчивость его симметричного положения равновесия (рис. 1). Будем полагать, что полуоси эллипса равны a и b , а высота его сечения — H .

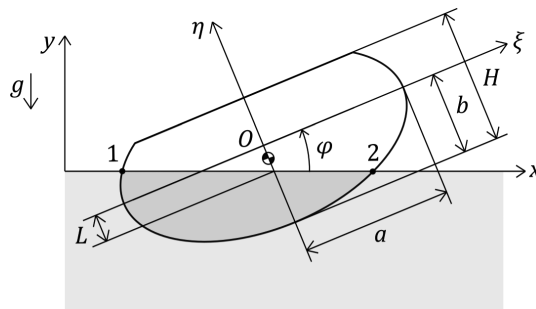


Рис. 1. Судно с сечением в форме эллиптического сегмента.

Отметим, что простейшие выражения для задачи о плавании судна с цельковым эллиптическим сечением приведены в [18], где упоминается, что такая форма сечения не встречается в практике судостроения, хотя и удобна для теоретических расчетов, представляющих определенный интерес. В то же время поставленная нами задача об устойчивости плавания судна с сечением в форме эллиптического сегмента имеет уже существенно большее практическое значение, хотя ее решение оказывается более трудоемким.

Приступая к его построению, запишем уравнение эллипса в осях $\xi\eta$, жестко связанных с эллипсом:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Будем использовать следующую параметризацию эллипса:

$$\xi = a \sin \psi, \quad \eta = -b \cos \psi, \quad (2)$$

которая удобна для дальнейших действий. Здесь ψ — параметр, причем нижней точке эллипса $\xi = 0, \eta = -b$ отвечает $\psi = 0$. Положим, что значение ψ_* соответствует точке эллипса, в которой эллиптическая граница сечения бруса переходит в прямолинейную, т. е. когда $\eta_* = H - b$. Тогда

$$H - b = -b \cos \psi_*, \quad \gamma = \frac{H}{b} = 1 - \cos \psi_* = 2 \sin^2 \frac{\psi_*}{2}, \quad (3)$$

где γ — безразмерный параметр задачи, $0 < \gamma \leq 2$, а $0 < \psi_* \leq \pi$, причем случай $\gamma = 2$ отвечает целиковому эллиптическому сечению ($\psi_* = \pi$). Нетрудно понять, что площадь эллиптического сегмента S_b дается формулой

$$S_b = 2 \int_{-b}^{\eta_*} \xi d\eta = 2ab \int_0^{\psi_*} \sin^2 \psi d\psi = \frac{ab}{2} (2\psi_* - \sin 2\psi_*), \quad (4)$$

тогда как положение его центра масс на оси η определяется выражением

$$\eta_b = \frac{2}{S_b} \int_{-b}^{\eta_*} \eta \xi d\eta = -\frac{2ab^2}{S_b} \int_0^{\psi_*} \sin^2 \psi \cos \psi d\psi = -\frac{4b \sin^3 \psi_*}{3(2\psi_* - \sin 2\psi_*)}. \quad (5)$$

Далее запишем уравнение ватерлинии в осях $\xi\eta$ в отклоненном положении бруса на угол φ :

$$\eta = -\operatorname{tg} \varphi \xi - L, \quad (6)$$

где $L = L(\varphi)$ — пока что не известная функция (рис. 1). Определим координаты точек пересечения ватерлинии (6) и эллипса (1). Объединяя эти уравнения, приходим к квадратному уравнению:

$$(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2) \xi^2 + 2a^2 L \operatorname{tg} \varphi \xi + (L^2 - b^2) a^2 = 0, \quad (7)$$

решение которого имеет вид:

$$\xi_{1,2} = \frac{a}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \left(-aL \operatorname{tg} \varphi \pm b \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2} \right), \quad (8)$$

где под ξ_1 будем подразумевать меньший корень (со знаком «-»), а под ξ_2 — больший (со знаком «+»), как это показано на рис. 1. Следовательно, из (6) будем иметь

$$\eta_{1,2} = -\frac{b}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \left(bL \pm a \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2} \right). \quad (9)$$

Тогда согласно (2) можно получить и соответствующие этим точкам значения $\psi_{1,2}$, которые будут определяться следующими формулами:

$$\begin{aligned}\cos \psi_{1,2} &= \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \left(bL \pm a \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2} \right), \\ \sin \psi_{1,2} &= \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \left(-aL \operatorname{tg} \varphi \pm b \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2} \right).\end{aligned}\tag{10}$$

Вычислим теперь вытесненную площадь жидкости S_l , используя параметрические уравнения (2) и формулы (10):

$$\begin{aligned}S_l &= \int_{\psi_1}^{\psi_2} [-\operatorname{tg} \varphi (a \sin \psi) - L + b \cos \psi] a \cos \psi d\psi = \\ &= \frac{ab}{2} \left(\psi_2 - \psi_1 - \frac{2L \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2}}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \right).\end{aligned}\tag{11}$$

Обозначая $\psi_2 - \psi_1 = 2\alpha$, вычислим $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ с помощью формул (10):

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin \psi_2 \cos \psi_1 - \sin \psi_1 \cos \psi_2 = \frac{2L \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2}}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}, \\ \cos 2\alpha &= \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 = \frac{2L^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} - 1.\end{aligned}\tag{12}$$

Учитывая теперь, что $S_l = \rho S_b$, приходим согласно (4), (11) и (12) к следующему соотношению:

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \rho (2\psi_* - \sin 2\psi_*).\tag{13}$$

Таким образом, что, хотя величины ψ_1 и ψ_2 , очевидно, зависят от угла φ , величина α от φ не зависит. Выражение (13) позволяет установить зависимость α от ψ_* при любом заданном значении ρ из допустимого диапазона $0 < \rho < 1$. При этом, очевидно, $0 < \alpha < \psi_*$. Что же касается зависимости $L(\varphi)$, то ее проще всего установить из второго выражения (12):

$$L^2 = \frac{1}{2}(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2) (1 + \cos 2\alpha) = (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2) \cos^2 \alpha.\tag{14}$$

Перейдем далее к вычислению координат центра масс вытесненной площади жидкости в осях $\xi\eta$ по формулам

$$\begin{aligned}\xi_l &= \frac{1}{S_l} \int_{S_l} \xi dS = \frac{1}{S_l} \int_{\psi_1}^{\psi_2} a \sin \psi [-\operatorname{tg} \varphi (a \sin \psi) - L + b \cos \psi] a \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{4a^2 \operatorname{tg} \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2)^{3/2}}{3(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)} = -\frac{4a^2 \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}}, \\ \eta_l &= \frac{1}{S_l} \int_{S_l} \eta dS = \frac{1}{2S_l} \int_{\psi_1}^{\psi_2} [(-\operatorname{tg} \varphi (a \sin \psi) - L)^2 - (-b \cos \psi)^2] a \cos \psi d\psi = \\ &= -\frac{4b^2 (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2 - L^2)^{3/2}}{3(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)} = -\frac{4b^2 \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}},\end{aligned}\quad (15)$$

где учтено выражение (14). Тогда вертикальная координата центра масс вытесненной площади относительно ватерлинии определится формулой

$$y_l = (L + \eta_l) \cos \varphi + \xi_C \sin \varphi = L \cos \varphi - \frac{4 \sin^3 \alpha \cos \varphi \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}, \quad (16)$$

а соответствующая координата центра масс бруса

$$y_b = (L + \eta_b) \cos \varphi = L \cos \varphi - \frac{4b \sin^3 \psi_* \cos \varphi}{3(2\psi_* - \sin 2\psi_*)}. \quad (17)$$

Следовательно, потенциальная энергия плавающего бруса

$$\Pi = P(y_b - y_l) = \frac{4}{3} P \cos \varphi \left(\frac{\sin^3 \alpha \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \frac{b \sin^3 \psi_*}{2\psi_* - \sin 2\psi_*} \right), \quad (18)$$

а ее квадратичная аппроксимация вблизи положения равновесия $\varphi = 0$ с точностью до несущественной аддитивной постоянной примет вид

$$\Pi = \frac{2}{3} P b \left[\frac{(\delta^2 - 1) \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} + \frac{\sin^3 \psi_*}{2\psi_* - \sin 2\psi_*} \right] \varphi^2, \quad (19)$$

где введен еще один безразмерный параметр $\delta = a/b$. Из (19) вытекает условие устойчивости равновесного положения $\varphi = 0$:

$$\delta^2 > 1 - \frac{\sin^3 \psi_* (2\alpha - \sin 2\alpha)}{\sin^3 \alpha (2\psi_* - \sin 2\psi_*)}. \quad (20)$$

Отметим, что зависимость α от ρ и ψ_* дается формулой (13), а связь безразмерного параметра γ с ψ_* определяется вторым выражением (3). Все сказанное позволяет заключить, что условие устойчивости (20) получено в терминах трех ключевых безразмерных параметров задачи ρ , δ и γ .

Рассмотрим теперь предельные случаи. Сначала обсудим вариант, когда брус практически не погружен в жидкость, т.е. величина ρ является исчезающе малой. Переходя в (20) к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и учитывая, что при этом $\alpha \rightarrow 0$ согласно

(13), а также принимая во внимание, что в таком случае $(2\alpha - \sin 2\alpha)/\sin^3 \alpha \rightarrow 4/3$, получим следующее условие:

$$\delta^2 > 1 - \frac{4 \sin^3 \psi_*}{3(2\psi_* - \sin 2\psi_*)}, \quad (21)$$

которое фактически является условием устойчивости равновесия бруса на горизонтальной плоскости. Кроме того, если рассматривается целиковый эллипс, т.е. $\psi_* = \pi$, то как условие (20) при $0 < \alpha < \pi$ (т.е. $0 < \rho < 1$), так и условие (21), полученное при $\rho \rightarrow 0$, приводятся к одному и тому же неравенству $\delta > 1$. Оно означает, что для устойчивости как плавающего тела с эллиптическим сечением, так и аналогичного бруса на горизонтальной плоскости должно быть $a > b$. Что же касается другого частного случая, когда брус почти полностью погружен в жидкость, то для него значение ρ оказывается близким к единице. Переходя к пределу при $\rho \rightarrow 1$ и учитывая, что при этом исходя из (13) будем иметь $\alpha \rightarrow \psi_*$, нетрудно получить, что неравенство (20) переходит в условие устойчивости $\delta^2 > 0$, которое выполняется при любых значениях параметра δ , отвечающих смыслу задачи.

Также необходимо отметить, что полученные в настоящей задаче формулы для координат центров масс бруса и вытесненной площади могут быть получены и несколько иным путем без вычисления интегралов, если принять во внимание то, что эллипс с полуосями a и b может быть найден из круга радиуса b растяжением (при $a > b$) вдоль оси ξ в a/b раз, а для кругового сегмента все интересующие геометрические параметры хорошо известны. Тем не менее в следующей задаче о плавании судна с сечением в форме гиперболического сегмента такую простую аналогию провести не удастся, тогда как ход решения по смыслу оказывается тем же самым. Именно поэтому в задаче о судне с сечением в форме эллиптического сегмента были представлены все выкладки, позволяющие далее осуществить более наглядное сопоставление двух задач.

4. Устойчивость плавания судна с сечением в форме гиперболического сегмента. Рассмотрим теперь задачу об устойчивости плавания судна с сечением в форме гиперболического сегмента высотой H (рис. 2).

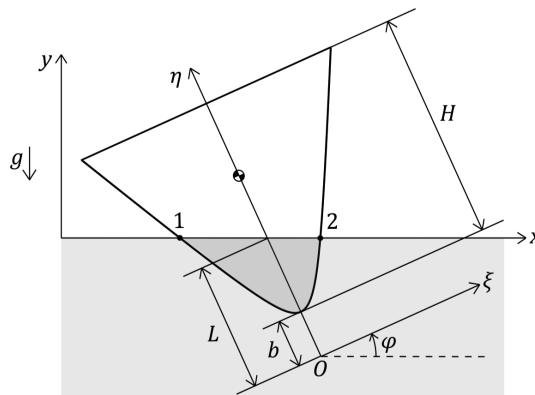


Рис. 2. Судно с сечением в форме гиперболического сегмента.

Описывая гиперболический контур сечения в связанных с ним осях $\xi\eta$ уравнением

$$\frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{a^2} = 1, \quad (22)$$

введем следующую параметризацию гиперболы:

$$\xi = a \operatorname{sh} \psi, \quad \eta = b \operatorname{ch} \psi, \quad (23)$$

где ψ — параметр, причем нижней точке гиперболы $\xi = 0$, $\eta = b$ отвечает значение $\psi = 0$. Будем считать, что значение $\psi_* > 0$ соответствует точке гиперболы, в которой гиперболическая граница сечения бруса переходит в прямолинейную, т. е. когда $\eta_* = H + b$. Тогда

$$H + b = b \operatorname{ch} \psi_*, \quad \gamma = \frac{H}{b} = \operatorname{ch} \psi_* - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\psi_*}{2}, \quad (24)$$

где γ — безразмерный параметр задачи. Тогда площадь гиперболического сегмента S_b определится формулой

$$S_b = 2 \int_b^{\eta_*} \xi d\eta = 2ab \int_0^{\psi_*} \operatorname{sh}^2 \psi d\psi = \frac{ab}{2} (\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*), \quad (25)$$

тогда как положение его центра масс на оси η дается выражением

$$\eta_b = \frac{2}{S_b} \int_b^{\eta_*} \eta \xi d\eta = \frac{2ab^2}{S_b} \int_0^{\psi_*} \operatorname{sh}^2 \psi \operatorname{ch} \psi d\psi = \frac{4b \operatorname{sh}^3 \psi_*}{3(\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*)}. \quad (26)$$

Уравнение ватерлинии в осях $\xi\eta$ в отклоненном положении бруса на угол φ в этой задаче записывается в виде

$$\eta = -\operatorname{tg} \varphi \xi + L, \quad (27)$$

где $L = L(\varphi)$ — функция, подлежащая определению (рис. 2). Объединяя уравнения ватерлинии (27) и гиперболы (22) в систему, приходим к квадратному уравнению:

$$(b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \xi^2 + 2a^2 L \operatorname{tg} \varphi \xi + a^2 (b^2 - L^2) = 0, \quad (28)$$

из которого определяются координаты $\xi_{1,2}$ точек их пересечения:

$$\xi_{1,2} = \frac{a}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left(-aL \operatorname{tg} \varphi \pm b \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2} \right). \quad (29)$$

Как и прежде, под ξ_1 будем подразумевать меньший корень (со знаком «−»), а под ξ_2 — больший (со знаком «+»), как это приведено на рис. 2. Пользуясь формулой (27), найдем отвечающие им координаты $\eta_{1,2}$:

$$\eta_{1,2} = \frac{b}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left(bL \mp a \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2} \right). \quad (30)$$

Соответствующие этим точкам значения $\psi_{1,2}$ согласно (23) подчиняются выражениям

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \psi_{1,2} &= \frac{1}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left(bL \mp a \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2} \right), \\ \operatorname{sh} \psi_{1,2} &= \frac{1}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left(-aL \operatorname{tg} \varphi \pm b \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Перейдем теперь к нахождению площади вытесненной жидкости S_l , используя параметрические уравнения (23) и формулы (31):

$$\begin{aligned} S_l &= \int_{\psi_1}^{\psi_2} [-\operatorname{tg} \varphi (a \operatorname{sh} \psi) + L - b \operatorname{ch} \psi] a \operatorname{ch} \psi d\psi = \\ &= \frac{ab}{2} \left[-(\psi_2 - \psi_1) + \frac{2L \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2}}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Обозначая $\psi_2 - \psi_1 = 2\alpha$, вычислим $\operatorname{sh} 2\alpha$ и $\operatorname{ch} 2\alpha$ с помощью формул (31):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2\alpha &= \operatorname{sh} \psi_2 \operatorname{ch} \psi_1 - \operatorname{sh} \psi_1 \operatorname{ch} \psi_2 = \frac{2L \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2}}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}, \\ \operatorname{ch} 2\alpha &= \operatorname{ch} \psi_1 \operatorname{ch} \psi_2 - \operatorname{sh} \psi_1 \operatorname{sh} \psi_2 = \frac{2L^2}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} - 1. \end{aligned} \quad (33)$$

А тогда из соотношения $S_l = \rho S_b$ с учетом (25), (32) и (33) будем иметь

$$\operatorname{sh} \alpha - \alpha = \rho (\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*). \quad (34)$$

Применительно к этому выражению можно сделать тот же вывод, что и по отношению к (13): хотя величины ψ_1 и ψ_2 зависят от угла φ , величина α от него не зависит, и она определяется при любом заданном значении ρ из диапазона от $0 < \rho < 1$ по значению параметра ψ_* , при этом $0 < \alpha < \psi_*$. Наконец, зависимость $L(\varphi)$ устанавливается из второго выражения (33):

$$L^2 = \frac{1}{2} (b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) (1 + \operatorname{ch} 2\alpha) = (b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{ch}^2 \alpha. \quad (35)$$

Вычислим далее координаты центра масс вытесненной площади жидкости в осях $\xi\eta$:

$$\begin{aligned} \xi_l &= \frac{1}{S_l} \int_{S_l} \xi dS = \frac{1}{S_l} \int_{\psi_1}^{\psi_2} a \operatorname{sh} \psi [-\operatorname{tg} \varphi (a \operatorname{sh} \psi) + L - b \operatorname{ch} \psi] a \operatorname{ch} \psi d\psi = \\ &= -\frac{4a^2 \operatorname{tg} \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2)^{3/2}}{3(b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)} = -\frac{4a^2 \operatorname{sh}^3 \alpha}{3(\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \\ \eta_l &= \frac{1}{S_l} \int_{S_l} \eta dS = \frac{1}{2S_l} \int_{\psi_1}^{\psi_2} [(-\operatorname{tg} \varphi (a \operatorname{sh} \psi) + L)^2 - (b \operatorname{ch} \psi)^2] a \operatorname{ch} \psi d\psi = \\ &= \frac{4b^2 (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + L^2 - b^2)^{3/2}}{3(b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)} = \frac{4b^2 \operatorname{sh}^3 \alpha}{3(\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)} \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \end{aligned} \quad (36)$$

где принята во внимание формула (35). Следовательно, вертикальная координата центра масс вытесненной площади относительно ватерлинии будет

$$y_l = (\eta_l - L) \cos \varphi + \xi_C \sin \varphi = -L \cos \varphi + \frac{4 \operatorname{sh}^3 \alpha \cos \varphi \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{3(\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)}, \quad (37)$$

тогда как соответствующая координата центра масс бруса есть

$$y_b = (\eta_b - L) \cos \varphi = -L \cos \varphi + \frac{4b \operatorname{sh}^3 \psi_* \cos \varphi}{3(\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*)}. \quad (38)$$

Таким образом, получаем выражение для потенциальной энергии плавающего бруса:

$$\Pi = P(y_b - y_l) = \frac{4}{3} P \cos \varphi \left(\frac{b \operatorname{sh}^3 \psi_*}{\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*} - \frac{\operatorname{sh}^3 \alpha \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha} \right), \quad (39)$$

а ее квадратичная аппроксимация вблизи положения равновесия $\varphi = 0$ с точностью до несущественной аддитивной постоянной есть

$$\Pi = \frac{2}{3} P b \left[\frac{(\delta^2 + 1) \operatorname{sh}^3 \alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha} - \frac{\operatorname{sh}^3 \psi_*}{\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*} \right] \varphi^2, \quad (40)$$

где также введен безразмерный параметр $\delta = a/b$. Из (40) устанавливаем условие устойчивости равновесного положения $\varphi = 0$:

$$\delta^2 > \frac{\operatorname{sh}^3 \psi_* (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)}{\operatorname{sh}^3 \alpha (\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*)} - 1. \quad (41)$$

Здесь зависимость α от ρ и ψ_* дается формулой (34), а связь γ с ψ_* — вторым выражением (24). Поэтому можно считать, что условие устойчивости (41) получено в терминах трех безразмерных параметров: ρ , δ и γ .

Совершенно ясно, что при рассмотрении предельного случая $\rho \rightarrow 0$ мы вновь фактически будем иметь задачу об устойчивости равновесия бруса с сечением в форме гиперболического сегмента на горизонтальной плоскости, причем из (34) устанавливаем, что при этом также $\alpha \rightarrow 0$. Принимая теперь во внимание, что в условии устойчивости (41) будет в указанном случае $(\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha)/\operatorname{sh}^3 \alpha \rightarrow 4/3$, приведем его к виду

$$\delta^2 > \frac{4 \operatorname{sh}^3 \psi_*}{3(\operatorname{sh} 2\psi_* - 2\psi_*)} - 1. \quad (42)$$

Наконец, остается осуществить предельный переход при $\rho \rightarrow 1$ с учетом того, что $\alpha \rightarrow \psi_*$ согласно (34). В результате получим, что условие устойчивости (41) приводится к виду $\delta^2 > 0$ и оно выполняется при любых положительных значениях параметра δ .

Таким образом, из сопоставления формул (1)–(21) предыдущего раздела и формул (22)–(42) настоящего раздела видно, что все различия между ними заключаются в некоторых знаках и используемых в решении функциях (тригонометрических и гиперболических соответственно). Кроме того, в первой задаче $0 < \gamma \leq 2$, $0 < \psi_* \leq \pi$, тогда как во второй задаче параметр γ может принимать любые положительные значения, как и величина ψ_* .

5. Графическая иллюстрация результатов. Перейдем теперь к графической интерпретации полученных решений. Обращаясь сначала к задаче об устойчивости плавания судна с сечением в форме эллиптического сегмента, зададимся различными значениями параметра γ и построим отвечающие им границы областей устойчивости согласно (20) и с учетом (3) и (13) на плоскости параметров $\rho\delta$ (рис. 3, *а*). Аналогичным образом поступим и применительно к задаче об устойчивости плавания судна с сечением в форме гиперболического сегмента, опираясь на условие устойчивости (41) и принимая во внимание формулы (24) и (34) (рис. 3, *б*). Отметим, что в обеих задачах области устойчивости будут лежать выше построенных границ. Видно, что с увеличением значения γ область устойчивости сужается, тогда как при фиксированном γ с увеличением параметра ρ диапазон значений δ , отвечающих устойчивому равновесию, расширяется. Наконец, построенные графические иллюстрации находятся в полном соответствии со всем сказанным ранее относительно частных случаев, когда величина ρ стремится либо к 0, либо к 1.

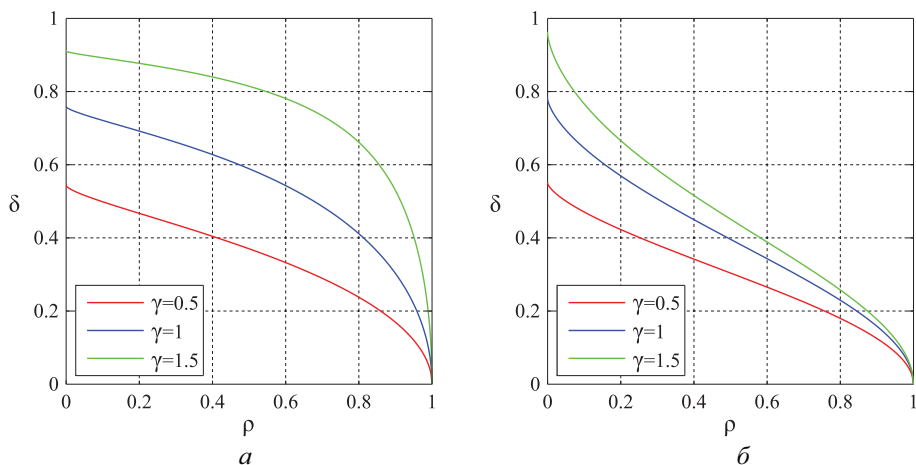


Рис. 3. Границы областей устойчивости плавания судна с сечением в форме: *а* — эллиптического сегмента, *б* — гиперболического сегмента.

6. Заключение. В настоящей статье были решены две задачи об устойчивости плавания судов с сечениями в форме эллиптического и гиперболического сегментов, которые являются достаточно хорошим приближением к реальным плавающим средствам. Для решения этих задач были использованы методы аналитической статики, сводящиеся к построению точного выражения для потенциальной энергии плавающего тела и его исследованию вблизи тривиального положения равновесия. Прделанные построения позволили получить условия устойчивости в каждой из задач в достаточно компактной форме с учетом введения безразмерных параметров. Была дана графическая иллюстрация этих условий путем построения отвечающих им областей устойчивости на плоскости двух параметров при различных значениях третьего параметра. Полученные результаты оказались интересными в теоретическом отношении, а также они имеют важное прикладное значение в корабельном деле. В заключение следует отметить, что полученные точные выражения для потенциальной энергии в рамках рассмотренных конфигураций (т. е. принятых вариантов погружения брусьев с расположением прямолинейных частей гра-

ниц их сечений выше ватерлинии) имеют существенно важное значение. В самом деле, они оказываются полезными в случае неустойчивости исследуемого симметричного положения равновесия, поскольку позволяют при необходимости получить посредством аналитического или численного анализа смежное с ним устойчивое равновесие, если оно отвечает той же конфигурации. Данное обстоятельство лишний раз свидетельствует о том, что избранный с самого начала статический подход к анализу устойчивости и конструирование точных формул для потенциальной энергии являются вполне оправданными, а сами эти формулы могут стать основой для последующих исследований.

Литература

1. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Москва, Наука (1952).
2. Борисов Р. В., Луговский В. В., Мирохин Б. В., Рождественский В. В. *Статика корабля*. Санкт-Петербург, Судостроение (2005).
3. Черданцев С. В. Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых* **1**, 61–69 (2013).
4. Черданцев Н. В., Черданцев С. В. Остойчивость понтонов в зумпфах угольных разрезов на больших углах крена. *Вестник Кузбасского государственного технического университета* **4** (98), 32–37 (2013).
5. Скалина М. К., Смирнов А. С. Равновесие и устойчивость прямоугольной баржи со смещенным центром тяжести в жидкости. *Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. ИПММ. Санкт-Петербург, 18–23 ноября 2019 г.*, 95–98 (2019).
6. Скалина М. К., Смирнов А. С. Устойчивость положений равновесия плавающей прямоугольной баржи в условиях плоской задачи. *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды»* (2020–2021), 41–55 (2021).
7. Меркин Д. Р., Смольников Б. А. *Прикладные задачи динамики твердого тела*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2003).
8. Гарбарук А. В. *Механика жидкости и газа. Задачи и решения. Ч. 1*. Санкт-Петербург, Аркуш (2003).
9. Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смольников Б. А., Смирнов А. Л. *Теория устойчивости в примерах и задачах*. Москва; Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика (2007).
10. Фан-дер-Флит А. П. Остойчивость прямоугольного понтона при наклонении от 0 до 90°. *Известия Санкт-Петербургского политехнического института* **10**, 281–307 (1908).
11. Фан-дер-Флит А. П. Начальная остойчивость прямоугольных параллелепипедов. *Известия Санкт-Петербургского политехнического института* **10**, 397–406 (1908).
12. Жуковский Н. Е. *Полное собрание сочинений. Т. 9. Математика. Астрономия. Речи. Доклады. Характеристика и биографии*. Москва, Ленинград, ОНТИ НКТП СССР (1937).
13. Смирнов А. С., Хашба Т. Н. Устойчивость плавания барж с трапециевидным и пятиугольным сечениями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), 740–752 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.415>
14. Кравчинский И. А., Смирнов А. С. Устойчивость плавания судна с сечением в форме параболического сегмента. *Неделя науки ФизМех. Сборник статей Всероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 4–9 апреля 2022 г.*, 202–205 (2022).
15. Войткунский Я. И. (ред.) *Справочник по теории корабля: в 3 т. Т. 2. Статика судов. Качка судов*. Ленинград, Судостроение (1985).
16. Валле Пуссен Ш.-Ж. *Лекции по теоретической механике. Т. 2*, пер. с фр., Москва, ИИЛ (1949).
17. Ржаницын А. Р. *Устойчивость равновесия упругих систем*. Москва, ГИТТЛ (1955).
18. Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения*, пер. с англ. Москва, Мир (1980).

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2023 г.;
доработана 1 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, мл. науч. сотр.; smirnov.alexey.1994@gmail.com

Кравчинский Игорь Андреевич — аспирант, инженер; igor.krav2000@gmail.com

Stability of floating vessels with cross sections in the form of elliptic and hyperbolic segments

A. S. Smirnov^{1,2}, I. A. Kravchinsky^{2,3}

¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29, ul. Polytechnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

² Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

³ “СМТ-Engineering”,
28/2, Bolshoy Sampsonievskiy pr., St. Petersburg, 194044, Russian Federation

For citation: Smirnov A. S., Kravchinsky I. A. Stability of floating vessels with cross sections in the form of elliptic and hyperbolic segments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 171–184.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.112> (In Russian)

The paper considers two problems on the stability of the trivial equilibrium position of floating vessels with cross sections in the form of elliptic and hyperbolic segments. A review of examples on the stability of floating bodies is given and the key principles of its study by methods of analytical statics are outlined. For each of the presented problems, by means of rather serious mathematical constructions, an exact expression for the potential energy is obtained within the framework of the accepted configuration, and its quadratic approximation is calculated near the equilibrium state under study. On its basis, stability conditions of the equilibrium position are established in terms of three dimensionless parameters, and limit cases are also analyzed. A comparison of intermediate expressions and final results obtained in the process of discussing each of the problems is carried out, and their common features and distinctive features are revealed. The found solutions are illustrated as families of boundaries of stability regions on the plane of two dimensionless parameters for different values of the third parameter. These results are of fundamental theoretical importance and may be useful for practical applications.

Keywords: floating vessel, elliptic and hyperbolic segments, stability, static analysis, boundary of the stability region, plane of dimensionless parameters.

References

1. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy*. Moscow, Nauka Publ. (1952). (In Russian) [Eng. transl.: Sedov L. I. In: 2 vols. Singapore, World Scientific Publishing Co. (1997)].

2. Borisov R. V., Lugovsky V. V., Mirokhin B. V., Rozhdestvensky V. V. *Ship statics*. St Petersburg, Sudostroenie Publ. (2005). (In Russian)

3. Cherdantsev S. V. Theoretical basis for calculation of pontoons used in open pit mines. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh* **1**, 61–69 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Mining Science* **49** (1), 52–59 (2013) <https://doi.10.1134/S1062739149010073>].

4. Cherdantsev N. V., Cherdantsev S. V. Stability of pontoon at coal pit under greater corners tumbling. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* **4** (98), 32–37 (2013). (In Russian)

5. Skalina M. K., Smirnov A. S. Equilibrium and stability of a rectangular barge with a displaced center of gravity in a liquid. *Week of Science of SPbPU. Materials of scientific conference with international participation. IAMM. St Petersburg*, November 18–23, 2019, 95–98 (2019). (In Russian)

6. Skalina M. K., Smirnov A. S. Stability of equilibrium positions of a floating rectangular barge under conditions of a flat problem. In: *Computer methods in continuum mechanics. 2020–2021*, 41–55 (2021). (In Russian)
7. Merkin D. R., Smolnikov B. A. *Applied problems of the dynamics of a rigid body*. St Petersburg, St Petersburg University Press (2003). (In Russian)
8. Garbaruk A. V. *Mechanics of liquid and gas. Tasks and solutions. P. 1*. St Petersburg, Arkush Publ. (2003). (In Russian)
9. Merkin D. R., Bauer S. M., Smirnov A. L., Smolnikov B. A. *The theory of stability in examples and problems*. Moscow, Izhevsk, R & C Dynamics (2007). (In Russian)
10. Fan-der-Flit A. P. Stability of a rectangular pontoon at an inclination from 0 to 90°. *Izvestia of the St Petersburg Polytechnic Institute* **10**, 281–307 (1908). (In Russian)
11. Fan-der-Flit A. P. Initial stability of rectangular parallelepipeds. *Izvestia of the St Petersburg Polytechnic Institute* **10**, 397–406 (1908). (In Russian)
12. Zhukovsky N. E. *Complete set of works. Vol. 9. Mathematics. Astronomy. Speeches. Reports. Characteristics and biographies*. Moscow, Leningrad, ONTI NKTP USSR Publ. (1937). (In Russian)
13. Smirnov A. S., Khashba T. N. Stability of floating barges with trapezoidal and pentagonal sections. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), 740–752 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.415> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 4, 504–512 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.415>].
14. Kravchinsky I. A., Smirnov A. S. Stability of floating vessel with a cross section in the form of a parabolic segment. *Week of Science PhysMech. Collection of articles of the All-Russian scientific conference. St. Petersburg*, April 4–9, 2022, 202–205 (2022). (In Russian)
15. Voytkunsky Ya. I. (ed). *Handbook of ship theory in three volumes. Vol. 2. Statics of courts. The pitching of ships*. Leningrad, Sudostroenie Publ. (1985). (In Russian)
16. Ch.-J. de la Vallée Poussin. *Leçons de mécanique analytique. T. II*. (1925) [Rus. ed.: Ch.-J. de la Vallée Poussin. *Lektsii po teoreticheskoi mekhanike. T. 2*. Moscow, IIL Publ. (1949)].
17. Rzhantsyn A. R. *Stability of equilibrium of elastic systems*. Moscow, GITTL Publ. (1955). (In Russian)
18. Poston T., Stewart I. *Catastrophe theory and its applications*. London, San Francisco, Melbourne, Pitman (1978) [Rus. ed.: Poston T., Stewart I. *Teoriia katastrof i ee prilozheniia*. Moscow, Mir Publ. (1980)].

Received: February 17, 2023

Revised: May 1, 2023

Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Aleksey S. Smirnov — smirnov.alexey.1994@gmail.com

Igor A. Kravchinsky — igor.krav2000@gmail.com