

## Замечания и обобщение теоремы Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке

Ю. Туаль<sup>1</sup>, Д. Аль-Мутавакиль<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Университет Сиди Моаме Бен Абдаллах,  
Марокко, 30050, Фес

<sup>2</sup> Университет Шуайба Дуккали,  
Марокко, Эль-Джадида

**Для цитирования:** Туаль Ю., Аль-Мутавакиль Д. Замечания и обобщение теоремы Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 152–160.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.110>

Получено новое обобщение так называемой теоремы Хегедюша — Силагьи (Hegedüs — Szilágyi) о неподвижной точке путем введения нового сжимающего условия в рамках полных метрических пространств. В качестве приложения доказана новая теорема о неподвижной точке, обобщающая и улучшающая многие известные в литературе результаты.

*Ключевые слова:* теорема Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке, полные метрические пространства, новый вид сжимающих условий, сжатие Меира — Килера, орбита.

**1. Введение.** Знаменитый принцип сжатия Банаха (ВСП:  $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ ,  $k \in [0, 1)$ ) является одним из наиболее полезных результатов нелинейного анализа. На протяжении многих лет многие авторы успешно пытались обобщить эту великую теорему. Как обобщение ВСП, в 1962 г. Эдельштейн [1] доказал существование фиксированной точки для сжимающих отображений ( $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ , где  $x \neq y$ ) в предположении компактности пространства. В том же направлении и с использованием некоторых вспомогательных функций в 1980 г. Хегедюш и Силагьи [2] доказали следующий результат о неподвижной точке.

**Теорема 1.** Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство, и пусть  $T$  — такое отображение на  $X$ , что  $D_T(x) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \dots\}\} < \infty$  для всех  $x \in X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (i)  $\varphi(t) < t$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$ ;
- (ii)  $\varphi$  полунепрерывна сверху;
- (iii) для любых  $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y),$$

где  $D_T(x, y) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \dots, y, Ty, T^2y, \dots\}\}$ .

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

Из-за важности сжимающих отображений и их приложений во многих работах рассматривались такого рода отображения. В этом направлении авторы в [3]

доказали существование некоторой теоремы о неподвижной точке для класса сжимающих отображений без использования компактности метрического пространства. Этот принцип распространен на случай многозначных отображений с помощью хаусдорфова расстояния  $H$ , порожденного расстоянием  $d$  (см. [4]). Другое обобщение сделано для случая обобщенных ортогональных множеств. Идея здесь заключалась в том, чтобы предположить сжатие только для класса элементов, называемых общими ортогональными элементами (более подробно см. [5–7]). В статье [8] рассматривается обобщение результатов, обсуждаемых в [3], с использованием известной теоремы Райха о неподвижной точке в контексте общих топологических пространств с  $\tau$ -расстоянием  $p$ , упомянутым в [9]. Помимо этих работ, авторы в [10, 11] распространили эту идею на пару отображений и доказали существование общей неподвижной точки. Этот подход использовался для обеспечения существования решения системы дифференциальных уравнений. Можно добавить, что в [12] авторы доказали, что упомянутые результаты можно обобщить на случай нерасширяющих отображений (см. [13, 14]). Отметим, что доказанные теоремы в [12] сделаны без использования компактности пространства и равномерной выпуклости (см. [15]).

Совсем недавно Судзуки [16] обобщил теорему 1 для нового типа сжатия следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство, и пусть  $T$  — такое отображение на  $X$ , что  $D_T(x) < \infty$  для всех  $x \in X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$  такая, что:

- (i)  $\varphi(t) < t$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$ ;
- (ii) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon;$$

- (iii)  $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$  выполняется для всех  $x, y \in X$ .

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

Вышеприведенное сжатие называется сжатием нового типа (НТ). В [16] показано, что сжатия НТ и Меира — Килера (М — К) [17] независимы.

С другой стороны, несмотря на то что  $\max\{D_T(x), D_T(y)\} \leq D_T(x, y)$  для всех  $x, y \in X$ , условие  $\max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(y))\} \leq \varphi(D_T(x, y))$ , вообще говоря, не выполняется, так как монотонность функции  $\varphi$  произвольна.

Мотивируясь этим фактом, мы вводим новое следующее сжатие:

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(x, y)), \varphi(D_T(y))\}, \quad (1)$$

для всех  $x, y \in X$ . Это сжатие более общее, чем с условиями (iii) теоремы 2. Ниже мы доказываем новую теорему о неподвижной точке.

**2. Основные результаты.** В этом разделе мы начнем со следующих примеров, подтверждающих мотивацию этой статьи.

*Пример.* Пусть  $X = [0, 2]$  снабжен метрикой, определяемой следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases} \quad (2)$$

Определим  $T$  как отображение на  $X$  с помощью

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & \text{если } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $\varphi$  — функция из  $[0, \infty)$ , определяемая равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t}, & \text{если } t \in [1, 2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что  $\varphi$  удовлетворяет условию (i) теоремы 2. Теперь для выполнения условия (ii) пусть  $\varepsilon > 0$ , так что имеем два следующих случая.

**Случай 1.** Если  $0 < \varepsilon < 1$ , то существует  $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

**Случай 2.** Если  $\varepsilon \geq 1$ , то существует  $\delta = \varepsilon$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = \frac{1}{2t} < \frac{1}{2\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Более того,  $T$  удовлетворяет (1). Действительно, пусть  $x, y \in X$ , тогда мы имеем

$$d(Tx, Ty) \leq \max \left\{ \frac{1}{2x}, \frac{1}{2y} \right\} = \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y) \}.$$

С другой стороны, заметим, что 0 является единственной неподвижной точкой  $T$  на  $X$ , но  $T$  не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть  $x, y \in X$ , и без ограничения общности считаем, что  $x < y$ . Если  $x, y \in [1, 2]$ , то получаем

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{2x} > \frac{1}{2y} = \varphi \circ D_T(x, y).$$

*Пример.* Пусть  $X = [0, 2]$ . Определим расстояние  $d$  от  $X \times X$  до  $[0, \infty)$  с помощью (2). Определим отображение  $T$  на  $X$  следующим образом:

$$Tx = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $\varphi$  — функция из  $[0, \infty)$ , определяется равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{если } t \in [1, 2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что  $\varphi$  удовлетворяет условию (i) теоремы 2. Теперь для выполнения условия (ii) пусть  $\varepsilon > 0$ , так что имеются два следующих случая.

**Случай 3.** Если  $0 < \varepsilon < 1$ , то существует  $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

**Случай 4.** Если  $\varepsilon \geq 1$ , то существует  $\delta = \varepsilon$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = e^{-t} < e^{-\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Более того,  $T$  удовлетворяет (1). Действительно, пусть  $x, y \in X$ , тогда мы имеем

$$d(Tx, Ty) \leq \max \left\{ e^{-x}, e^{-y} \right\} = \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y) \},$$

и 0 — единственная неподвижная точка  $T$  на  $X$ , но  $T$  не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть  $x, y \in X$ . Без ограничения общности считаем, что  $x < y$ . Если  $x, y \in [1, 2]$ , то

$$d(Tx, Ty) = e^{-x} > e^{-y} = \varphi \circ D_T(x, y).$$

**Замечание 1.** Из приведенных выше примеров видно, что  $T$  имеет единственную неподвижную точку, но условие (iii) теоремы 2 не выполняется. С другой стороны, мы видим, что  $T$  удовлетворяет (1), что обобщает и улучшает теорему 2.

Теперь сформулируем наш основной результат.

**Теорема 3.** Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство и пусть  $T$  — такое отображение на  $X$ , что  $D_T(x) < \infty$  для всех  $x \in X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- (i)  $\varphi(t) < t$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$ ;
- (ii) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon;$$

(iii)  $d(Tx, Ty) \leq \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y) \}$  выполняется для всех  $x, y \in X$ .

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство разделено на три основных этапа.

**Шаг 1.** Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x) = 0$  для всех  $x \in X$ . Пусть  $x \in X$ , так как  $\{T^n x, T^{n+1} x, \dots\} \supset \{T^{n+1} x, T^{n+2} x, \dots\}$ , для всех  $n \in \mathbb{N}$ , тогда  $\{D_T(T^n x)\}$  убывает. Следовательно,  $\{D_T(T^n x)\}$  сходится к некоторому  $\varepsilon \geq 0$ . Предположим, что  $\varepsilon > 0$ . Имеются следующие два случая:

- $\varepsilon < D_T(T^n x)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $\varepsilon = D_T(T^n x)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .

В первом случае мы выбираем  $\delta \in (0, \infty)$  так, чтобы

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

Мы выбираем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы

$$D_T(T^{n_0} x) < \varepsilon + \delta.$$

Пусть  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$ , поэтому

$$\varepsilon < D_T(T^{\max\{m, n\}} x) \leq D_T(T^m x, T^n x) \leq D_T(T^{\min\{m, n\}} x) \leq D_T(T^{n_0} x) < \varepsilon + \delta$$

и

$$d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) \leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \leq \varepsilon,$$

откуда следует  $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x) \leq \varepsilon$ , что приводит к противоречию.

Во втором случае мы выбираем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}x).$$

Пусть  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$ , поэтому

$$\varepsilon \leq D_T(T^{\max\{m,n\}}x) \leq D_T(T^m x, T^n x) \leq D_T(T^{\min\{m,n\}}x) \leq D_T(T^{n_0}x) = \varepsilon$$

и

$$d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) \leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \leq \varphi(\varepsilon) < \varepsilon,$$

откуда следует  $\varepsilon \leq D_T(T^{n_0+1}x) < \varepsilon$ , что является противоречием. Следовательно, справедливо  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x) = 0$ .

**Шаг 2.** Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$  для всех  $x, y \in X$ .

Пусть  $x, y \in X$ , так как

$$\{T^n x, T^{n+1}x, \dots, T^n y, T^{n+1}y, \dots\} \supset \{T^{n+1}, T^{n+2}x, \dots, T^{n+1}y, T^{n+2}y, \dots\}$$

для  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\{D_T(T^n x)\}$  убывает. Следовательно,  $\{D_T(T^n x)\}$  сходится к некоторому  $\varepsilon \geq 0$ . Предположим, что  $\varepsilon > 0$ . У нас есть следующие два случая:

- $\varepsilon < D_T(T^n x, T^n y)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $\varepsilon = D_T(T^n x, T^n y)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ .

В первом случае мы выбираем  $\delta \in (0, \infty)$  так, чтобы

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon.$$

Мы выбираем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы

$$D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta.$$

Без ограничения общности, согласно шагу 1, можно считать

$$D_T(T^{n_0}x) \leq \varepsilon \text{ и } D_T(T^{n_0}y) \leq \varepsilon.$$

Пусть  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon &< D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \leq D_T(T^m x, T^n y) \leq \\ &\leq D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \leq D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \leq \\ &\leq \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) \leq \varepsilon$ , это приводит к противоречию.

Во втором случае мы выбираем  $n_0 \in \mathbb{N}$  так, чтобы

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y).$$

Пусть  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \leq D_T(T^m x, T^n y) \leq \\ &\leq D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \leq D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Без ограничения общности, согласно шагу 1, можно считать

$$D_T(T^{n_0}x) \leq \varphi(\varepsilon) \text{ и } D_T(T^{n_0}y) \leq \varphi(\varepsilon).$$

Далее,

$$\begin{aligned} d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \leq \\ &\leq \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \leq \varphi(\varepsilon) < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\varepsilon \leq D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) < \varepsilon$ , это приводит к противоречию. Следовательно, имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$ .

**Шаг 3.** На этом шаге мы доказываем существование и единственность неподвижной точки.

Пусть  $x \in X$ . Из шага 1 получаем, что  $\{D_T(T^n x)\}$  сходится к 0. Значит,  $\{T^n x\}$  — последовательность Коши в  $X$ . Поскольку  $X$  полно, существует  $z \in X$  такое, что  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$ . Опять из шага 2 имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$ . Тогда  $\{T^n z\}$  сходится к  $z$ .

Теперь мы хотим показать, что  $D_T(z) = 0$ . Рассуждая от противного, считаем  $\varepsilon := D_T(z) > 0$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x) = 0$ , то существует  $n_0 \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\varepsilon = D_T(z) = \dots D_T(T^{n_0-1}z) = D_T(T^{n_0}z) > D_T(T^{n_0+1}z),$$

следовательно,

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}z) = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\}.$$

При  $n > n_0$  получаем

$$d(T^{n_0}z, T^n z) \leq \max\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z, T^{n-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n-1}z)\}.$$

Мы рассматриваем следующие два случая:

- если  $n - 1 = n_0$ , то имеем

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) = \varphi \circ D_T(T^{n_0}z) = \varphi(\varepsilon);$$

- если  $n - 1 > n_0$ , то имеем

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) \leq D_T(T^{n-1}z) \leq D_T(T^{n_0+1}z) < \varepsilon.$$

Далее,

$$\begin{aligned} d(T^{n_0}z, T^n z) &\leq \max\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}\} \leq \\ &\leq \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $n$  произвольно, получаем

$$\varepsilon = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\} \leq \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\} < \varepsilon.$$

Это приводит к противоречию. Следовательно,  $D_T(z) = 0$ , тогда  $z$  — неподвижная точка  $T$  в  $X$ . Единственность неподвижной точки сразу следует из того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$ .  $\square$

**Следствие 1** (теорема 1.2 в [18]). Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство, а  $T$  — отображение на  $X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i)  $\varphi$  не убывает;

(ii)  $\lim_n \varphi^n(t) = 0$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$  таких, что  $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \dots \circ \varphi$   $n$  раз;

(iii)  $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ d(x, y)$  выполняется для всех  $x, y \in X$ .

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

**Следствие 2** (теорема 5 в [16]). Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство и пусть  $T$  — отображение в себя на  $X$  такое, что  $D_T(x) < \infty$  для всех  $x \in X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

(i)  $\varphi(t) < t$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$ ;

(ii) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon;$$

(iii)  $d(Tx, Ty) \leq \varphi \circ D_T(x, y)$  выполняется для всех  $x, y \in X$ .

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

Следующий пример показывает, что теорема 3 улучшает теорему 2.

*Пример.* Пусть  $X = [0, \pi]$  имеет метрику, определенную следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases} \quad (3)$$

Определим отображение  $T$  на  $X$  с помощью

$$Tx = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть  $\varphi$  — функция из  $[0, \infty)$ , определяемая равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{если } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что  $\varphi$  удовлетворяет условию (i) теоремы 3. Теперь для выполнения условия (ii) пусть  $\varepsilon > 0$  и существуют два случая.

**Случай 5.** Если  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ , то существует  $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = 0 \leq \varepsilon.$$

**Случай 6.** Если  $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$ , то существует  $\delta = \varepsilon$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

- если  $t \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , то  $\varphi(t) = 0 \leq \varepsilon$ ;
- если  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , то

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = \sin(t) < \sin(\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Кроме того,  $T$  удовлетворяет условиям (iii) теоремы 3 и следствию 3. Действительно, пусть  $x, y \in X$ , тогда мы имеем

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \max \left\{ \sin x, \sin y \right\} = \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y) \} = \\ &= \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y) \}, \end{aligned}$$

0 — единственная неподвижная точка  $T$  на  $X$ , но  $T$  не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть  $x, y \in X$ . Без ограничения общности считаем, что  $x < y$ . Если  $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , то получаем

$$d(Tx, Ty) = \sin x > \sin y = \varphi \circ D_T(x, y).$$

Как следствие нашего основного результата, имеем следующий новый результат с новым сжатием.

**Следствие 3.** Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство и пусть  $T$  — отображение на  $X$  такое, что  $D_T(x) < \infty$  для всех  $x \in X$ . Предположим, что существует функция  $\varphi$  из  $[0, \infty)$  такая, что:

- (i)  $\varphi(t) < t$  выполняется для всех  $t \in (0, \infty)$ ;
- (ii) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leq \varepsilon;$$

- (iii) для любых  $x, y \in X$  справедливо

$$d(Tx, Ty) \leq \max \{ \varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y) \}.$$

Тогда  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $z$ . Более того,  $\{T^n x\}$  сходится к  $z$  для любого  $x \in X$ .

## Литература/References

1. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. London Math. Soc.* **37**, 74–79 (1962).
2. Hegedüs M., Szilágyi T., Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings. *Math. Jpn.* **25**, 147–157 (1980).
3. Touail Y., El Moutawakil D. Bannani S. Fixed Point theorems for contractive selfmappings of a bounded metric space. *Journal of Function Spaces* **2019**, Article ID 4175807, 3 (2019).
4. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application. *Ricerche mat* (2020).
5. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application. *Int. J. Nonl. Anal. Appl.* 1801–1809 (2021).



6. Touail Y., El Moutawakil D.  $\perp_{\psi F}$ -contractions and some fixed point results on generalized orthogonal sets. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 70* 1459–1472 (2021).
7. Touail Y. On multivalued  $\perp_{\psi F}$ -contractions on generalized orthogonal sets with an application in integral inclusions. *Probl. Anal. Issues Anal.* **11**, 29 (3), 109–124 (2022).
8. Touail Y., Moutawakil D. El. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, 206–212 (2021).
9. Aamri M., El Moutawakil D.  $\tau$ -distance in general topological spaces with application to fixed point theory. *Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics* **2**, December, 1–5 (2003).
10. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* 903–911 (2021).
11. Touail Y., El Moutawakil D., Some new common fixed point theorems for contractive self-mappings with applications. *Asian. Eur. J. Math.* **15** (4) 2250080 (2022).
12. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. *New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application.* *Ricerche mat* (2021).
13. Browder F. E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **54** (1965).
14. Göhde D. Zum prinzip der kontraktiven Abbildung. *Math. Nachr* **30**, 251–258 (1965).
15. Clarkson J. A. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 396–414 (1936).
16. Suzuki T. A generalization of Hedudüs—Szilágyi's fixed point theorem in complete metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.* **2018**, 1 (2018).
17. Meir A., Keeler E. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* **28**, 326–329 (1969).
18. Matkowski J. Integrable Solutions of Functional Equations. *Diss. Math.* **127**. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw (1975).

Статья поступила в редакцию 26 января 2023 г.;  
доработана 15 августа 2023 г.;  
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

*Туаль Юсеф* — аспирант; youssef9touail@gmail.com

*Аль-Мутавакиль Дрисс* — проф.; d.elmoutawakil@gmail.com

## Remarks and a generalization of Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem

*Y. Touail*<sup>1</sup>, *D. El Moutawakil*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz,  
University Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fez, 30050, Morocco

<sup>2</sup> Université Chouaib Doukkali, Morocco, El Jadida

**For citation:** Touail Y., El Moutawakil D. Remarks and a generalization of Hedudüs—Szilágyi's fixed point theorem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 152–160. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.110> (In Russian)

A new generalization of the so-called Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem by introducing a new contractive condition in the framework of complete metric spaces. As application, we get a new fixed point theorem which generalizes and improves many known results in literature.

*Keywords:* Hedudüs—Szilágyi's fixed point theorem, complete metric spaces, new type contractive condition, Meir — Keeler contraction, orbit.

Received: January 26, 2023

Revised: August 15, 2023

Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

*Youssef Touail* — youssef9touail@gmail.com

*Driss El Moutawakil* — d.elmoutawakil@gmail.com