УДК 517.958 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
MSC 35C05

Обратная задача для неоднородного интегродифференциального уравнения гиперболического типа

Ж. Ш. Сафаров

Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4б
Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада аль-Хоразмий,
Узбекистан, 100084, Ташкент, ул. Амира Тимура, 108

Для цитирования: *Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача для неоднородного интегродифференциального уравнения гиперболического типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 141–151.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.109

Рассматривается обратная задача нахождения решения и одномерного ядра интегрального члена неоднородного интегродифференциального уравнения гиперболического типа из условий, составляющих прямую задачу, и некоторого дополнительного условия. Сначала исследуется прямая задача, при этом ядро интегрального члена предполагается известным. Далее, используя дополнительную информацию о решении прямой задачи, получаем интегральное уравнение относительно ядра интеграла $h(t)$, интегрального члена. Таким образом, задача сводится к решению системы интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода. Полученная система записывается в виде операторного уравнения. Для доказательства глобальной однозначной разрешимости этой задачи применяется метод сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами. Доказана теорема условной устойчивости решения обратной задачи, при этом используется метод оценок интегралов и неравенство Гроноулла.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, интегродифференциальное уравнение, ядро, обратная задача, метод сжатых отображений.

1. Введение и постановка задачи. Одной из актуальных задач современной математической физики является исследование вопросов существования и единственности решений обратных задач для нелинейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах. Обратные задачи для интегродифференциальных уравнений — это относительно новое и бурно развивающееся направление теории обратных задач. В работах [1–3] изучены одномерные обратные задачи для интегродифференциальных уравнений гиперболического типа. Обратным коэффициентным задачам посвящены работы [4–7]. В работах [8–13] и [14–16] исследованы обратные задачи об определении одномерного и многомерного ядра уравнения вязкоупругости.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости обратной задачи по определению ядра интегрального члена интегродифференциального уравнения колебания бесконечной струны. Отличительной чертой данной работы от других подобных работ является неоднородность рассматриваемого уравнения и начальных условий.

В области $\Omega = \{(x,t)|x \in R, t > 0\}$ рассмотрим задачу Коши с распределенным источником для нахождения решения $u(x,t)$ интегродифференциального уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t h(\alpha)u(x,t-\alpha)d\alpha = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u\mid_{t=0} = a(x), \qquad u_t\mid_{t=0} = b(x), \qquad x \in R, \tag{2}$$

где $a(x), b(x)$ и $f(x,t)$ — заданные функции.

Обратную задачу ставим следующим образом: требуется найти функцию $h(t) \in C(t > 0)$, если относительно решения прямой задачи известна информация:

$$u(0,t) = g_1(t), \qquad u_x(0,t) = g_2(t), \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

К исследованию интегродифференциальных уравнений приводят многочисленные задачи, возникающие в приложениях. Одной из областей науки, где возникают интегродифференциальные уравнения при изучении свойств среды с помощью сейсмических волн, является геофизика. Фактически, согласно предположениям о гладкости, система уравнений для неупругой модели Больцмана [17] (одной из наиболее общих для линейной неупругой среды) имеет вид

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \sigma^{-1}(x)\sigma'(x)u_x(x,t) +$$

$$+\omega(x)\int_0^t h(t-\alpha)\left(u_{xx}(x,\alpha) + \sigma^{-1}(x)\sigma'(x)u_x(x,\alpha)\right)d\alpha.$$

Функции σ и ω в этом уравнении связаны с параметрами Ламе и плотностью рассматриваемой среды. Полагая их постоянными ($\omega = 1$), это уравнение можно привести к виду

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \int_0^t h(t-\alpha)u_{xx}(x,\alpha)d\alpha, \qquad (x,t) \in \Omega.$$

Уравнения такого вида после определенных преобразований (см. работы [12–14]) сводятся к уравнению (1). Исследование обратных задач определения ядра интегральных операторов в этих уравнениях по некоторой информации о волновом поле играет важную роль при изучении строения и свойства среды.

2. Исследование прямой задачи. Сначала исследуем прямую задачу (1)–(2). При этом предполагается функция $h(t)$ известной.

Теорема 1. *Пусть $h(t) \in C(t \geq 0)$, $a(x) \in C^2(R)$, $b(x) \in C^1(R)$ и $f(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\Omega)$. Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), существует единственно и принадлежит классу $C^2(\Omega)$.*

Доказательство. Обозначим через $\Delta(x,t)$ треугольник на плоскости (ξ,τ), ограниченной осью ξ и характеристиками уравнения (1), проведенными через точку (x,t):

$$\Delta(x,t)=\{(\xi,\tau)|\ x-t\le\xi\le x+t,\ \ 0\le\tau\le t-|x-\xi|\}.$$

Из формулы Даламбера находим, что решение задачи (1), (2) является непрерывным решением интегрального уравнения

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)}\int\limits_0^{\tau}h(\alpha)u(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\tau d\xi,\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{4}$$

где

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}\left(a(x-t)+a(x+t)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}b(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)}f(\xi,\tau)d\tau d\xi. \tag{5}$$

Уравнение (4) является интегральным уравнением вольтерровского типа второго рода. Представим функцию $u(x,t)$ в виде функционального ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t). \tag{6}$$

где $u_n(x,t), n\ge 1$, находятся по формулам:

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\int\limits_0^{\tau}h(\alpha)u_{n-1}(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\tau d\xi,$$

Методом последовательных приближений, как в работе [18], можно показать равномерную сходимость ряда (6). Поэтому этот ряд определяет в области Ω непрерывную функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (4).

Единственность этого решения устанавливается стандартным образом. Пусть функции $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ — два решения уравнения (4), отвечающие одним и тем же начальным данным. Обозначим разность этих двух функций через $v(x,t)=u^{(1)}(x,t)-u^{(2)}(x,t)$. Относительно функции $v(x,t)$ получим однородное уравнение Вольтерра второго рода. Из теории интегральных уравнений следует, что оно имеет только нулевое решение. Следовательно, $u^{(1)}(x,t)\equiv u^{(2)}(x,t)$. $\square$

Вычислим частные производные $u_t,\ u_x,\ u_{tt},\ u_{xt}$, которые мы будем использовать в дальнейшем:

$$u_t(x,t)=u_{0t}(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}h(\alpha)u(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)d\alpha\, d\xi,\ (x,t)\in\Omega, \tag{7}$$

$$u_x(x,t)=u_{0x}(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}h(\alpha)u(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)sign(\xi-x)\,d\alpha\, d\xi,\ \ (x,t)\in\Omega,$$

$$u_{tt}(x,t)=u_{0tt}(x,t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}h(t-|x-\xi|)a(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}h(\alpha)u_t(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)d\alpha\, d\xi,\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{8}$$

$$u_{xt}(x,t) = u_{0xt}(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(t-|x-\xi|)a(\xi)sign(\xi-x)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_{0}^{t-|x-\xi|} h(\alpha)u_t(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)sign(\xi-x)\,d\alpha\,d\xi,\ \ (x,t)\in\Omega. \qquad (9)$$

Заметим, что для функционального ряда (6) имеет место оценка

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|u_n(x,t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}\left(\frac{h_0U_0T^3}{2}\right)^n =: \mu_{01}, \qquad (10)$$

где

$$h_0 := \|h(t)\|_{C(t>0)}, \quad U_0 := \|u_0(x,t)\|_{C(\Omega)}.$$

Эту оценку мы будем использовать в последнем разделе.

3. Решение обратной задачи. Теорема 2. *Пусть* $a(x) \in C^3(R)$, $b(x) \in C^2(R)$, $f(x,t) \in C^{0,2}_{x,t}(\Omega)$, *а функции* $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$ *таковы, что* $g_1(t) \in C^3[0,T]$, $g_2(t) \in C^2[0,T]$, *кроме того, выполнены условия*

$$a(0) = g_1(0) > 0,\ \ b(0) = g_1'(0),\ \ a'(0) = g_2(0),\ \ b'(0) = g_2'(0),\ \ a''(0) = g_1''(0). \qquad (11)$$

Тогда решение обратной задачи (1)–(4) *для любого* $T > 0$ *существует единственно и принадлежит классу* $C[0,T]$, *где* $T > 0$ *— некоторое число.*

Доказательство. Положим в формулах (8) и (9) $x = 0$ и воспользуемся данными (3). При этом получим два равенства:

$$g_1''(t) = u_{0tt}(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t} h(t-|\xi|)a(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\int\limits_{0}^{t-|\xi|} h(\alpha)u_t(\xi,t-|\xi|-\alpha)d\alpha\,d\xi, \qquad (12)$$

$$g_2'(t) = u_{0tx}(x,t) + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t} h(t-|\xi|)a(\xi)sign\xi d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\int\limits_{0}^{t-|\xi|} h(\alpha)u_t(\xi,t-|\xi|-\alpha)sign\xi\,d\alpha. \qquad (13)$$

Складывая эти два равенства (при этом воспользуемся разложениями $u_{0tt}(x,t)$ и $u_{0xt}(x,t)$), получим

$$g_1''(t) + g_2'(t) =$$

$$= a''(t)+b'(t)+f(t,0)+\int\limits_0^t f_t(\xi,t-\xi)d\xi+\int\limits_0^t h(t-\xi)a(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi} h(\alpha)u_t(\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\,d\xi.$$

Сделаем замену переменных по формуле $\eta = t - \xi$ во втором интеграле. После этого, продифференцировав полученное равенство по t и разрешая относительно $h(t)$, получим

$$h(t) = h_0(t) - \frac{1}{a(0)}\int\limits_0^t h(t-\xi)b(\xi)\,d\xi - \frac{1}{a(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi} h(\alpha)u_{tt}(\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\,d\xi, \qquad (14)$$

где введено обозначение:

$$h_0(t) = \frac{1}{a(0)}\left(g_1'''(t) + g_2''(t) - a'''(t) - b''(t) - 2f_t(t,0)\right) - \frac{1}{a(0)}\int\limits_0^t f_{tt}(\xi, t-\xi)d\xi.$$

Уравнения (4), (7), (8) и (14) образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа второго рода относительно неизвестных функций. При выполнении условий теоремы 2, с помощью обратных преобразований, нетрудно вывести соотношения (1)–(3) из этих интегральных уравнений. Таким образом, обратная задача (1)–(3) и система интегральных уравнений (4), (7), (8), (14) эквивалентны, т. е. из разрешимости системы интегральных уравнений следует разрешимость обратной задачи. Представим эту систему в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \tag{15}$$

в котором $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) := (u, u_t, u_{tt}, h)$, а оператор A определен из множества функций $C(\Omega)$ в соответствии с равенствами (4), (7), (8) и (14) и имеет вид

$$A_1\varphi = \varphi_{01} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\int\limits_0^{\tau}\varphi_4(\alpha)\varphi_1(\xi, \tau-\alpha)d\alpha d\tau d\xi,$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\varphi_4(\alpha)\varphi_1(\xi, t-|x-\xi|-\alpha)d\alpha d\xi,$$

$$A_3\varphi = \varphi_{03} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\varphi_4(t-|x-\xi|)a(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\varphi_4(\alpha)\varphi_2(\xi, t-|x-\xi|-\alpha)d\alpha d\xi,$$

$$A_4\varphi = \varphi_{04} - \frac{1}{a(0)}\int\limits_0^t\varphi_4(t-\xi)b(\xi)\,d\xi - \frac{1}{a(0)}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\varphi_4(\alpha)\varphi_3(\xi, t-\xi-\alpha)\,d\alpha\,d\xi.$$

Обозначим через C_ρ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||\varphi||_\rho = \max\{\sup_{(x,t)\in\Delta(0,T)}|\varphi_i(x,t)e^{-\rho t}|, i=\overline{1,3}, \sup_{t\in[0,T]}|\varphi_4(t)e^{-\rho t}|\}, \quad \rho \geq 0.$$

Очевидно, что при $\rho = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее как $||\varphi||$. В силу неравенства

$$e^{-\rho t}||\varphi|| \leq ||\varphi||_\rho \leq ||\varphi||$$

нормы $||\varphi||_\rho$ и $||\varphi||$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число ρ будем выбирать позже. Пусть $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ — шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства $C_\rho(\rho \geq 0)$, в котором

$$\varphi_0(x,t) = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}),$$

где
$$\varphi_{01}=u_0(x,t),\ \ \varphi_{02}=u_{0t}(x,t),\ \ \varphi_{03}=u_{0tt}(x,t),\ \ \varphi_{04}=h_0(t).$$
Нетрудно заметить, что для $\varphi\in Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ имеет место оценка
$$||\varphi||_\rho\le||\varphi_0||_\rho+\|\varphi_0\|\le2||\varphi_0||.$$

Пусть $\varphi(x,t)\in Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\rho>0$ оператор A переводит шар в шар, т. е. $A\varphi\in Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. На самом деле, составляя норму разностей, имеем
$$||A_1\varphi-\varphi_{01}||_\rho=\sup_{(x,t)\in\Omega}|(A_1\varphi-\varphi_{01})e^{-\rho t}|=$$
$$=\sup_{(x,t)\in\Omega}\frac{1}{2}\left|\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\int\limits_0^{\tau}d\xi\varphi_4(\alpha)e^{-\rho\alpha}\varphi_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\rho(\tau-\alpha)}e^{-\rho(t-\tau)}d\alpha d\tau d\xi\right|\le$$
$$\le\sup_{(x,t)\in\Omega}\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\int\limits_0^{\tau}\left|\varphi_4(\alpha)e^{-\rho\alpha}\varphi_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\rho(\tau-\alpha)}e^{-\rho(t-\tau)}\right|d\alpha d\tau d\xi\le$$
$$\le2T^2\|\varphi_0\|\frac{\|\varphi_0\|}{\rho}=:\alpha_1\frac{\|\varphi_0\|}{\rho},$$
$$||A_2\varphi-\varphi_{02}||_\rho=\sup_{(x,t)\in\Omega}|(A_2\varphi-\varphi_{02})e^{-\rho t}|\le2T\|\varphi_0\|\frac{\|\varphi_0\|}{\rho}=:\alpha_2\frac{\|\varphi_0\|}{\rho},$$
$$||A_3\varphi-\varphi_{03}||_\rho=\sup_{(x,t)\in\Omega}|(A_3\varphi-\varphi_{03})e^{-\rho t}|\le2(a_0+2T\|\varphi_0\|)\frac{\|\varphi_0\|}{\rho}=:\alpha_3\frac{\|\varphi_0\|}{\rho},$$
$$||A_4\varphi-\varphi_{04}||_\rho=\sup_{t\in[0,T]}|(A_4\varphi-\varphi_{04})e^{-\rho t}|\le\frac{1}{a(0)}(b_0+2\|\varphi_0\|T)\frac{\|\varphi_0\|}{\rho}=:\alpha_4\frac{\|\varphi_0\|}{\rho},$$
где $\|a\|_{C(R)}=a_0,\ \|b\|_{C(R)}=b_0$. Выбирая $\rho\ge\alpha_0:=max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,)$ получим, что A переводит шар $Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1,φ^2 — любые два элемента из $Q_\rho(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида
$$|\varphi_i^1\varphi_j^1-\varphi_i^2\varphi_j^2|e^{-\rho t}\le|\varphi_i^1||\varphi_j^1-\varphi_j^2|e^{-\rho t}+|\varphi_j^2||\varphi_i^1-\varphi_i^2|e^{-\rho t}\le4\|\varphi_0\|\|\varphi^1-\varphi^2\|_\rho,$$
для $(x,t)\in\Omega$ получим
$$||(A\varphi^1-A\varphi^2)_1||_\rho=\sup_{(x,t)\in\Omega}|(A\varphi^1-A\varphi^2)_1e^{-\rho t}|\le$$
$$\le\sup_{(x,t)\in\Omega}\left|\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_0^{t-|x-\xi|}\int\limits_0^{\tau}\varphi_4(\alpha)\varphi_1(\xi,\tau-\alpha)d\alpha d\tau d\xi\left[\varphi_4^1(\alpha)e^{-\rho\alpha}(\varphi_1^1-\varphi_1^2)(\xi,\tau-\alpha)e^{-\rho(\tau-\alpha)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\varphi_1^2(\xi,\tau-\alpha)e^{-\rho(\tau-\alpha)}(\varphi_4^1-\varphi_4^2)(\alpha)e^{-\rho\alpha}\right]e^{-(t-\tau)}d\alpha d\tau d\xi\right|\le$$
$$\le2T^2\|\varphi_0\|\|\varphi^1-\varphi^2\|_\rho\frac{1}{\rho}=:\beta_1\frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\rho}{\rho},$$

$$||(A\varphi^1 - A\varphi^2)_2||_\rho = \sup_{(x,t)\in\Omega} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_2 e^{-\rho t}| \le$$

$$\le 2T\|\varphi_0\|\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho \frac{1}{\rho} =: \beta_2 \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho}{\rho} = ||(A\varphi^1 - A\varphi^2)_3||_\rho =$$

$$= \sup_{(x,t)\in\Omega} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_3 e^{-\rho t}| \le (a_0 + 4T\|\varphi_0\|)\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho \frac{1}{\rho} =: \beta_3 \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho}{\rho} =$$

$$= ||(A\varphi^1 - A\varphi^2)_4||_\rho = \sup_{t\in[0,T]} |(A\varphi^1 - A\varphi^2)_4 e^{-\rho t}| \le$$

$$\le \frac{1}{a(0)} \left(\frac{b_0}{2} + 2\|\varphi_0\|T\right) \|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho \frac{1}{\rho} =: \beta_4 \frac{\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho}{\rho}.$$

Пусть $\beta_0 := \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Как следует из проделанных оценок, если число ρ выбрано из условия $\rho > \max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор A является сжимающим на $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Таким образом, согласно принципу Банаха [19, с. 84], уравнение (15) имеет и притом единственное решение при любом фиксированном $T > 0$. Следовательно, решая систему уравнений (4), (7), (8) и (14), например методом последовательных приближений (из теоремы Банаха следует сходимость его к решению), мы однозначно построим в области $\Delta(x,t)$ для $t \in (0,T)$ функции u, u_t, u_{tt}, h [18, с. 17]. Таким образом определяется решение обратной задачи, т. е. функции $h(t)$ на отрезке [0,T]. $\square$

4. Оценка устойчивости. Пусть $H(h_0)$ — множество функций $h(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ условию

$$\|h\|_{C[0,T]} \leqslant h_0$$

с постоянной $h_0 > 0$.

Теорема 3. *Пусть $h^1(t) \in H(h_0), h^2(t) \in H(h_0)$− два решения обратной задачи (1)–(3) с данными $\{a^1, b^1, f^1, g_1^1, g_2^1\}$ и $\{a^2, b^2, f^2, g_1^2, g_2^2\}$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(h_0, T)$, что имеет место следующая оценка устойчивости:*

$$||h^1(t) - h^2(t)||_{C[0,T]} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|\widetilde{g}_1\|_{C^1[0,T]} + \|\widetilde{g}_2\|_{C^2[0,T]} + \|\widetilde{a}\|_{C^3[-T,T]} + \|\widetilde{b}\|_{C^2[-T,T]} + \|\widetilde{f}\|_{C^2[\Delta(0,T)]}\right). \quad (16)$$

Доказательство. Предположим u^1, u^2 — два решения задачи (1)–(3), отвечающие функциям h^1, h^2. В дальнейшем будем обозначать разность двух функций, наименование которых отличается только цифрой сверху, той же самой буквой со знаком $\sim$, как в работе [18, с. 19, теорема 1.2.2]. Например, $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{h} = h^1 - h^2$ и т. д. Тогда из уравнений (4), (7), (8) и (14) нетрудно получить следующую систему:

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{a}(x-t) + \widetilde{a}(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{b}(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\int_0^{t-|x-\xi|} \widetilde{f}(\xi,\tau)d\tau d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\int_0^{t-|x-\xi|}\int_0^{\tau} \left[h^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,\tau-\alpha) + \widetilde{h}(\alpha)u^2(\xi,\tau-\alpha)\right] d\alpha d\xi d\tau, \quad (17)$$

$$\widetilde{u}_t(x,t)=\frac{1}{2}\left(\widetilde{a}'(x+t)-\widetilde{a}'(x-t)\right)+\frac{1}{2}\left(\widetilde{b}(x-t)+\widetilde{b}(x+t)\right)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{f}(\xi,t-|x-\xi|)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_{0}^{t-|x-\xi|}\left[h^1(\alpha)\widetilde{u}(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)+\widetilde{h}(\alpha)u^2(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)\right]d\alpha d\xi, \qquad (18)$$

$$\widetilde{u}_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\widetilde{a}''(x+t)+\widetilde{a}''(x-t)\right)+\frac{1}{2}\left(\widetilde{b}'(x+t)-\widetilde{b}'(x-t)\right)+\frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(x+t,0)+\widetilde{f}(x-t,0)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\widetilde{f}_t(\xi,t-|x-\xi|)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left[h^1(t-|x-\xi|)\widetilde{a}(\xi)+\widetilde{h}(t-|x-\xi|)a^2(\xi)\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_{0}^{t-|x-\xi|}\left[h^1(\alpha)\widetilde{u}_t(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)+\widetilde{h}(\alpha)u_t^2(\xi,t-|x-\xi|-\alpha)\right]d\alpha d\xi, \qquad (19)$$

$$\widetilde{h}(t)=\frac{1}{a(0)}\Bigg[\left(\widetilde{g}_1'''(t)+\widetilde{g}_2''(t)-\widetilde{a}'''(t)-\widetilde{b}''(t)-2\widetilde{f}_t(t,0)\right)-\int\limits_0^t\widetilde{f}_{tt}(\xi,t-\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t\left[h^1(t-\xi)\widetilde{b}(\xi)+\widetilde{h}(t-\xi)b^2(\xi)\right]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\xi}\left[h^1(\alpha)\widetilde{u}_{tt}(\xi,t-\xi-\alpha)+\widetilde{h}(\alpha)u_{tt}^2(\xi,t-\xi-\alpha)\right]d\alpha d\xi\Bigg]. \qquad (20)$$

Рассмотрим эту систему относительно функций $\widetilde{u}(x,t)$, $\widetilde{u}_t(x,t)$, $\widetilde{u}_{tt}(x,t)$, $\widetilde{h}(t)$. Заметим, что входящие в эту систему функции могут быть оценены на основе априорной информации о данных задачи. Ранее мы получили оценку для $|u(x,t)|$ [см. формулу (10)]. Аналогичным образом можно получить оценки $|u_t(x,t)|\le\mu_{02}$, $|u_{tt}(x,t)|\le\mu_{03}$. Обозначим $\mu_0:=\max(\mu_{01},\mu_{02},\mu_{03})$.

Пусть

$$\eta(t)=\max[\max_{-T\leqslant x\leqslant T}|\widetilde{u}(x,t)|,\max_{-T\leqslant x\leqslant T}|\widetilde{u}_t(x,t)|,\max_{-T\leqslant x\leqslant T}|\widetilde{u}_{tt}(x,t)|,|\widetilde{h}(t)|],\ t\in[0,T].$$

Из уравнений (17)–(20) следует, что $\eta(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$|\eta(t)|\leqslant\gamma+\mu_1\int_0^t\eta(\alpha)\,d\alpha, \qquad (21)$$

в котором $\mu_1:=\max\{(\mu_0+h_0)T^2,(\mu_0+h_0)T,\frac{1}{2}a_0+(\mu_0+h_0)T,\frac{1}{a(0)}\left(b_0+(h_0+\mu_0)T\right)\}$,

$$\gamma=\max\Bigg\{\|\widetilde{a}\|_{C[-T,T]}+T\|\widetilde{b}\|_{C[-T,T]}+T^2\|\widetilde{f}\|_{C[\Delta(x,t)]},$$

$$\|\widetilde{a}\|_{C^1[-T,T]}+\|\widetilde{b}\|_{C[-T,T]}+T\|\widetilde{f}\|_{C[\Delta(0,T)]},$$

$$\|\widetilde{a}\|_{C^2[-T,T]}+\|\widetilde{b}\|_{C^1[-T,T]}+\|\widetilde{f}_t\|_{C[\Delta(0,T)]}+h_0T\|\widetilde{a}\|_{C[-T,T]}, \frac{1}{a(0)}\big(\|\widetilde{g}_1\|_{C^1[0,T]}+\|\widetilde{g}_2\|_{C^2[0,T]}+$$

$$+\|\widetilde{a}\|_{C^3[-T,T]} + \|\widetilde{b}\|_{C^2[-T,T]} + 2\|\widetilde{f}_t\|_{C[\Delta(0,T)]} + T\|\widetilde{f_{tt}}\|_{C[\Delta(0,T)]} + h_0T\|\widetilde{b}\|_{C[-T,T]}\big)\Big\},$$

$$a_0 = \|a\|_{C[-T,T]}, \quad b_0 = \|b\|_{C[-T,T]}.$$

Используя неравенство Гронуолла [20, с. 37], из (21) получаем оценку:

$$|\eta(t)| \leqslant \gamma \exp(\mu_1 t) \qquad t \in (0,T).$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству (16), если $C = \exp(\mu_1 T)$. □

Автор благодарит рецензента, замечания, предложения и советы которого послужили к улучшению статьи.

Литература

1. Дурдиев Д. К. Задача определения нестационарного потенциала в одном уравнении гиперболического типа. *ТМФ* **156** (2), 220–225 (2008). https://doi.org/10.4213/tmf6242

2. Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегродифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области. *Узбекский математический журнал* **2**, 117–124 (2012).

3. Сафаров Ж. Ш. Вопросы локальной разрешимости одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения колебания бесконечной струны. *Узбекский математический журнал* **2**, 100–106 (2013).

4. Дурдиев Д. К. Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении. *Сиб. журн. индустр. матем.* **3** (12), 28–40 (2009).

5. Романов В. Г. Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля. *Сибирский матем. журн.* **4** (58), 916–924 (2017). https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.417

6. Романов В. Г. Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости. *Сиб. матем. журн.* **3** (55), 617–626 (2014).

7. Зарипов С. К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегродифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре. *Вестник Самарского техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки* **2** (21), 236–248 (2017). https://doi.org/10.14498/vsgtu1515

8. Романов В. Г. Задача об определении ядра в уравнении вязкоупругости. *Доклады АН* **1** (446), 18–20 (2012). https://doi.org/10.1134/S1064562412050067

9. Тотиева Ж. Д. Задача об определении коэффициента теплового расширения уравнения термовязкоупругости. *Сиб. электрон. матем. изв.* **14**, 1108–1119 (2017). https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.094

10. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости. *Сиб. матем. журн.* **3** (58), 553–572 (2017). https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307

11. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости. *Сиб. журн. индустр. матем.* **2** (16), 72–82 (2013).

12. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области. *Матем. заметки* **6** (97), 855–867 (2015). https://doi.org/10.4213/mzm10659

13. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегродифференциального уравнения гиперболического типа в прямоугольной области. *Матем. заметки* **2** (114), 244–258 (2023). https://doi.org/10.4213/mzm13686

14. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **6** (42), 1264–1273 (2021). https://doi.org/10.1134/S199508022106007X

15. Romanov V. G. A two-dimension inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **1** (280), 151–157 (2013).

16. Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д. Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости. *Владикавк. матем. журн.* **4** (17), 18–43 (2015).

17.Алексеев А. С., Добринский В. И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач в сейсмике, математические задачи в геофизике, 7–53. Новосибирск, СО АН СССР (1975)

18. Романов В. Г. *Устойчивость в обратных задачах.* Москва, Научный мир (2005).

19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, Наука (1976).

20. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Москва, Мир (1970).

Статья поступила в редакцию 9 сентября 2022 г.;
доработана 22 июля 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Сафаров Журабек Шакарович — д-р физ.-мат. наук; j.safarov65@mail.ru

Inverse problem for non-homogeneous integro-differential equation of hyperbolic type

J. Sh. Safarov

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
4B, ul. Universitetskaya, Tashkent, 100174, Uzbekistan
Tashkent University of Information Technologies named after Mukhammad al Khorazmi,
108, ul. Amira Timura, Tashkent, 100084, Uzbekistan

For citation: Safarov J. Sh. Inverse problem for non-homogeneous integro-differential equation of hyperbolic type. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 141–151. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.109 (In Russian)

An inverse problem is considered, which consists in finding a solution and a one-dimensional kernel of the integral term of an inhomogeneous integro-differential equation of hyperbolic type from the conditions that make up the direct problem and some additional condition. First, the direct problem is investigated, while the kernel of the integral term is assumed to be known. By integrating over the characteristics, the given intego-differential equation is reduced to a Volterra integral equation of the second kind and is solved by the method of successive approximations. Further, using additional information about the solution of the direct problem, we obtain an integral equation with respect to the kernel of the integral $k(t)$, of the integral term. Thus, the problem is reduced to solving a system of integral equations of the Volterra type of the second kind. The resulting system is written as an operator equation. To prove the global, unique solvability of this problem, the method of contraction mappings in the space of continuous functions with weighted norms is used. And also the theorem of conditional stability of the solution of the inverse problem is proved, while the method of estimating integrals and Gronoullo's inequality is used.

Keywords: hyperbolic type equation, integro differential equation, the core, the inverse problem, compressed mapping method.

References

1. Durdiev D. K. Problem of determining the nonstationary potential in a hyperbolic-type equation. *Teoreticheskaia i matematicheskaia fizika* 156 (2), 220–225 (2008). https://doi.org/10.4213/tmf6242 (In Russian) [Eng. transl.: *Theoretical and Mathematical Physics* 156 (2), 1154–1158 (2008). https://doi.org/10.1007/s11232-008-0085-9].

2. Safarov J. Sh. Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type in a bounded domain. *Uzb. math. journal* **2**, 117–124 (2012). (In Russian)

3. Safarov J. Sh. Issues of local solvability of one inverse problem for the integro-differential equation of oscillation endless string. *Uzb.math. journal* **2**, 100–106 (2013). (In Russian)

4. Durdiev D. K. The inverse problem of determining two coefficients in one integro-differential wave equation. *Siberian Journal of Industrial Mathematics* **3** (12), 28–40 (2009).

5. Romanov V. G. A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* **4** (58), 916–924 (2017). https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.417 (In Russian) [Eng. transl.: *Siberian Math. J.* **6** (53), 1128–1138 (2017). https://doi.org/10.1134/S0037446612060171].

6. Romanov V. G. On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* **3** (55), 617–626 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Siberian Math. J.* **3** (55), 503–510 (2014)].

7. Zaripov S. K. A construction of analog of Fredgolm theorems for one class of first order model integro-diferential equation with logarithmic singularity in the kernel. *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.* **2** (21), 236–248 (2017). (In Russian)

8. Romanov V. G. Problem of kernel recovering for the viscoelasticity equation. *Doklady AN* **1** (446), 18–20 (2012). https://doi.org/10.1134/S1064562412050067. (In Russian) [Eng. transl.: *Doklady Mathematics* **2** (86), 608–610 (2012)].

9. Totieva Zh. D. The problem of determining the coefficient of thermal expansion of the equation of thermoviscoelasticity. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **14** 1108–1119 (2017). https://doi.org/10.4213/mzm10752. (In Russian)

10. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation. *Sib. math. J.* **3** (58), 553–572 (2017). https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307

11. Durdiev D. K., Totieva Zh. D. The problem of determining the one-dimensional core of the equation of viscoelasticity. *Siberian Journal of Industrial Mathematics* **2** (16), 72–82 (2013).

12. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. The inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded region. *Math. notes* **6** (97), 855–867 (2015). https://doi.org/10.4213/mzm10659

13. Durdiev D. K., Safarov J. Sh. Inverse Problem for an Integrodifferential Equation of the Hyperbolic Type in a Rectangular Domain. *Matematicheskie zametki* **2** (114), 244–258 (2023). https://doi.org/10.4213/mzm13686 (In Russian) [Eng. transl.: *Math. notes* **2** (114), 199–211 (2023). https://doi.org/10.1134/S0001434623070210].

14. Durdiev D., Shishkina E., Sitnik S. The Explicit Formula for Solution of Anomalous Diffusion Equation in the Multi-Dimensional Space. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **6** (42), 1264–1273 (2021). https://doi.org/10.1134/S199508022106007X

15. Romanov V. G. A two-dimension inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **1** (280), 151–157 (2013).

16. Durdiev D. K., Totieva Zh. Ḋ. The problem of determining the multidimensional core of the equation of viscoelasticity. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* **4** (17), 18–43 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *Vladikavkaz Mathematical Journal* **4** (25), 18–43 (2015)].

17. Alekseev A. S., Dobrinsky V. I. Some questions of practical use of inverse dynamic problems in seismic, mathematical problems in geophysics, 7–53. Novosibirsk, SO AN SSSR Publ. (1975). (In Russian)

18. Romanov V. G. *Stability in inverse problems.* Moscow, Nauchnyi mir Publ. (2005). (In Russian)

19. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Moscow, Nauka Publ. (1976) .(In Russian)

20. Hartman Ph. *Ordinary differential equations.* Moscow, Mir Publ., 1970. (In Russian)

Received: September 9, 2022
Revised: July 22, 2023
Accepted: August 31, 2023

Author's information:

Jurabek Sh. Safarov — j.safarov65@mail.ru