УДК 517.987.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
MSC 37E05, 37E10

Леммы о замыкании для отображений сдвигов отрезков

А. Д. Кривовичева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривовичева А. Д.* Леммы о замыкании для отображений сдвигов отрезков // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 108–114. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.106

Изучаются отображения сдвига отрезков (дуг окружности), которые можно представить как отображения перекладывания отрезков с перекрытием. Известно, что для любого отображения такого вида существует борелевская вероятностная инвариантная безатомная мера, которая строится как слабый предел инвариантных мер отображений с периодическими параметрами. В последнем случае это просто нормированная мера Лебега на некотором семействе подотрезков. Для таких предельных мер в случае сдвига дуг окружности показывается, что любая точка носителя этой меры может быть сделана периодической сколь угодно малым изменением параметров системы без изменения числа отрезков. Для произвольной инвариантной меры при помощи теоремы Пуанкаре о возвращении показывается, что любая точка может быть сделана периодической при малом изменении параметров системы, причем количество интервалов для отображения увеличивается не более чем на два.

Ключевые слова: отображения сдвига отрезков, инвариантные меры, лемма Пью о замыкании, теорема Пуанкаре о возвращении.

1. Введение. Отображения сдвигов отрезков (interval translation mappings) являются естественным обобщением отображений перекладывания отрезков (interval exchange transformations). Они играют важную роль в теории динамических систем, в частности используются в изучении биллиардов в рациональных многоугольниках [1]. Впервые сдвиги отрезков были рассмотрены в работе М. Бошерницана и И. Корнфельда в 1995 г. [2]. С тех пор опубликовано множество работ по данной теме (обзор последних результатов см. [3–6]).

Пусть окружность $S^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}$ разбита на дуги $\{I_j\}_{j=0}^n, I_j = [t_j, t_{j+1}), t_0 = t_n$. *Отображение сдвига отрезков* с параметрами $\{t_j\}, \{c_j\} \subset \mathbb{R}$ — это отображение $f : S^1 \to S^1$, определяемое равенством

$$f(t) = t + c_j \mod 1, \quad t \in I_j.$$

Иногда это определение формулируют в терминах отрезка, а не окружности. Если отображение сдвига отрезков f биективно, оно называется *отображением перекладывания отрезков*. Очевидно, мера Лебега является инвариантной относительно такого отображения. Существование инвариантной борелевской вероятностной меры для всякого отображения сдвига отрезков доказано в [7].

Напомним также, что мера называется *безатомной*, если ее значение на всех одноточечных подмножествах равно нулю.

Основным результатом этой статьи является своего рода аналог *леммы Пью о замыкании* [8]: любое отображение сдвига имеет инвариантную борелевскую вероятностную безатомную меру такую, что каждая точка носителя этой меры может быть сделана периодической сколь угодно малыми изменениями параметров системы. Также было доказано, что если допустить увеличение количества отрезков не более чем на два, то подобным свойством обладает любая инвариантная мера.

2. Основные результаты. Теорема 1. *Пусть T — отображение сдвига дуг окружности. Тогда существует борелевская вероятностная безатомная мера μ, инвариантная относительно T и обладающая следующим свойством: для всякой точки $x \in \operatorname{supp}\mu$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется отображение сдвига T' с тем же количеством дуг, для которого точка x является периодической, причем для параметров $\{t_k\}$, $\{c_k\}$ и $\{t'_k\}$, $\{c'_k\}$ отображений T и T' соответственно верно $|t_k - t'_k| < \varepsilon$, $|c_k - c'_k| < \varepsilon$, $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. В качестве искомой инвариантной меры возьмем меру, построенную в работе [7]. Напомним вкратце идею построения этой меры, она понадобится для дальнейших рассуждений.

Сперва параметры $\{t_k\}, \{c_k\}$ приближаются рациональными последовательностями $\{t_k^m\}, \{c_k^m\}$ так, что если линейная комбинация $\{t_k\}, \{c_k\}$ с целочисленными коэффициентами равна нулю, то и линейная комбинация $\{t_k^m\}, \{c_k^m\}$ с теми же коэффициентами равна нулю. Затем рассматриваются соответствующие параметрам $\{t_k^m\}, \{c_k^m\}$ отображения T_m. Инвариантная мера μ_m определяется как мера Лебега на множестве

$$J_m = \bigcap_{j=1}^{\infty} T_m^j(S^1),$$

нормированная до вероятностной. Поскольку T_m периодично, это пересечение конечно, так что J_m имеет ненулевую меру Лебега и мера μ_m не вырождена, а ее инвариантность очевидна.

По теореме Банаха — Алаоглу множество борелевских вероятностных мер компактно в пространстве мер со $*$-слабой топологией. Значит, последовательность μ_m содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой борелевской вероятностной мере μ. Несложная проверка инвариантности показывает, что μ — искомая мера (см. [7]). Проверим тот факт, что мера является безатомной, отдельно.

Лемма 1. *Построенная мера μ может быть выбрана безатомной.*

Доказательство. Если μ, построенная по указанному выше алгоритму, не является безатомной, то верно одно из двух утверждений. Либо представляет собой не более чем счетную сумму мер Дирака с положительными коэффициентами, т. е.

$$\mu = \sum_{k=1}^{N} a_k \delta(x_k), \tag{1}$$

где $a_k > 0$; x_k — различные точки окружности S^1; $\delta(x_k)$-соответствующие δ — меры, а $N \in \mathbb{N} \bigcup \infty$. Либо она представима в виде суммы взаимно сингулярных мер $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_1 имеет вид (1), а μ_2 безатомная, причем обе меры μ_i инвариантны.

Отметим также, что наличие инвариантной меры типа (1) означает, что все точки x_k периодические (что следует из конечности меры μ и того факта, что $\mu(\{T(x)\}) \geq \mu(\{x\})$ для любого $x \in S^1$).

В случае же наличия периодических точек, как отмечено в [7] (по аналогии с результатом для отображений перекладывания отрезков [1]), имеется целый отрезок, состоящий из периодических точек одного периода — периодический отрезок. Тогда рассматриваемое отображение так или иначе имеет безатомную инвариантную меру — сужение меры Лебега на траекторию этого периодического отрезка. □

Для простоты обозначений будем считать, что слабая сходимость к мере μ имеет место для всей последовательности μ_m (исходную последовательность надо «проредить» и переобозначить).

Приступим к доказательству теоремы. Пусть $x \in \operatorname{supp}\mu$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, отличная от тождественного нуля, носитель которой содержится в $B_{\varepsilon/2}(x)$. Ясно, что ее интеграл по мере μ положителен, так как x лежит в носителе меры. Сходимость мер μ_m к μ в $*$-слабой топологии, в частности, означает, что

$$\int_{S^1} \varphi\, d\mu_m \longrightarrow \int_{S^1} \varphi\, d\mu.$$

Выберем натуральное число M таким, что параметры отображения T_M отличаются от параметров T меньше чем на $\varepsilon/2$ и верно $\int_{S^1} \varphi\, d\mu_M > 0$. Тогда на дуге $B_{\varepsilon/2}(x)$ есть точка $\tilde{x}$, лежащая в носителе меры μ_M. По построению T_M точка $\tilde{x}$ будет периодической для T_M.

Положим $T' = R_{-\alpha} \circ T_M \circ R_\alpha$, где R_α — поворот окружности на угол $\alpha = \tilde{x} - x < \varepsilon/2$. Это отображение — искомое. Действительно, точка x является периодической для отображения T', так как для всякого j верно $(T')^j = R_{-\alpha} \circ T_M^j \circ R_\alpha$. Также ясно, что параметры отображения T' получаются сдвигом параметров отображения T на $\pm\alpha$. Таким образом, $|t_k - t'_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Аналогичная формула справедлива для параметров c_k и c'_k. □

Для отображений сдвига отрезков справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 1$'$. *Пусть T — отображение сдвига отрезков. Тогда существует борелевская вероятностная безатомная мера μ, инвариантная относительно T и обладающая следующим свойством: для всякой точки x носителя меры μ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется отображение сдвига T' с тем же количеством отрезков, для которого существует периодическая точка x', такая, что $|x - x'| < \varepsilon$, причем для параметров $\{t_k\}$, $\{c_k\}$, $\{t'_k\}$ и $\{c'_k\}$ отображений T и T' соответственно верно*

$$|t_k - t'_k| < \varepsilon, \qquad |c_k - c'_k| < \varepsilon, \qquad , k = 1, \ldots, n.$$

Вопрос о том, верно ли свойство, сформулированное в теореме 1, для произвольной инвариантной меры, остается открытым. Тем не менее несложно получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть T — отображение сдвига n дуг окружности, μ — борелевская вероятностная инвариантная мера, $x \in \operatorname{supp}\mu$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует отображение T'' сдвига не более чем $n+2$ дуг окружности, имеющее периодическую точку y такую, что $|y - x| < \varepsilon$. При этом верно*

$$\sup_{t \in S^1} |T(t) - T''(t)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Сначала напомним одно из классических определений эргодической теории (см., например, [1, теорема 4.1.19]).

Теорема Пуанкаре о возвращении. *Пусть T — сохраняющее вероятностную меру μ преобразование пространства (X, μ) и пусть $A \subset X$ — измеримое подмножество. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\mu(\{x \in A | \{T^n(x)\}_{n \geq N} \subset X \setminus A\}) = 0.$$

В частности, из этого вытекает следующее утверждение.

Предложение. *Пусть X в утверждении теоремы Пуанкаре о возвращении — метрическое пространство. Для любой точки x носителя μ и для любого $\varepsilon > 0$ для почти каждого $y \in B_\varepsilon(x)$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $T^N(y) \in B_\varepsilon(x)$. В частности, такие y и N существуют.*

Итак, пусть $\varepsilon < 1/2$ и $x \in \operatorname{supp} \mu$. По предложению выше имеем точку $y \in B_{\varepsilon/2}(x)$ и натуральное N такие, что $T^N(y) \in B_{\varepsilon/2}(x)$. Обозначим

$$\Xi = \{T(y), T^2(y), \ldots, T^N(y)\}.$$

Выберем из Ξ точку $z = T^k(y)$, ближайшую к y. Тогда, очевидно, наименьшая из дуг (y, z) и (z, y) не содержит точек множества Ξ. Обозначим $p = T^{k-1}(y)$ и выберем $\delta > 0$ такое, что дуга $(p, p + \delta)$ не пересекается с Ξ.

Определим отображение T'' следующим образом:

$$T''(t) = \begin{cases} T(t) + y - z, & t \in [p, p + \delta); \\ T(t) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем, что T'' — искомое отображение, т. е. что оно равномерно близко к T, сдвигает не более $n + 2$ дуг окружности и имеет периодическую точку, достаточно близкую к x.

Так как точки y и $T^N(y)$ лежат в $B_{\varepsilon/2}(x)$, расстояние между ними не больше ε. Значит, расстояние между точками y и z также не превосходит ε, откуда следует равномерная близость отображений, а именно, что $\sup_{t \in S^1} |T(t) - T''(t)| < \varepsilon$.

Несложно проверить, что y — периодическая точка для T:

$$(T'')^k(y) = T'' \circ T^{k-1}(y) = T''(p) = T(p) + y - z = y.$$

Также T'' сдвигает не более $n + 2$ дуг окружности, что видно из определения.

□

Замечание 1. В этом доказательстве уже не получится использовать сопряжение с поворотом, чтобы обеспечить периодичность исходной точки x, так как это может нарушить равномерную близость отображений.

Замечание 2. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы также и для отображений, меняющих ориентацию некоторых дуг (или отрезков).

Замечание 3. Утверждение, полностью аналогичное теореме 2, справедливо и для отображений сдвигов отрезков.

Ниже приводится пример системы, сводящейся к отображению сдвига отрезков. Данная модель описывает поведение осторожного биржевого игрока, а именно моделируется следующая стратегия поведения: при умеренных колебаниях стоимости актива поведение игрока (покупка или продажа актива) линейно зависит от динамики цены актива. Однако же, если изменения превышают некоторый порог, игрок выводит часть средств в ожидании волатильности рынка. Такая динамика может быть приближенно описана следующими уравнениями, в которых переменная s имеет смысл изменения количества актива на руках у игрока (покупки и продажи), а переменная x — стоимость актива по отношению к некоторому нулевому уровню.

Пусть дана пара чисел (x_0, s_0), где $s_0 \in [-1, 1],\ x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим динамическую систему, состояния которой задаются уравнениями

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n + \alpha s_n, \\ s_{n+1} = \Psi(s_n + x_{n+1} - x_n), \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda \in (-1, 1),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а Ψ — срезающая функция для отрезка $[-1, 1]$:

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} 0, \text{ если } |\tau| > 1, \\ \tau, \text{ если } |\tau| \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Для удобства систему (2) будем записывать в виде

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_n \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $s_n \in [-1, 1]$ для всякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, так что полоса

$$\mathcal{L} = \{(x, s) :\ x \in \mathbb{R},\ s \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$$

является фазовым пространством системы (2). К тому же легко видеть, что неподвижные точки f составляют отрезок в $\mathcal{L}$ с концами в точках

$$E = \left(\frac{\alpha}{1-\lambda}, 1\right) \text{ и } F = \left(-\frac{\alpha}{1-\lambda}, -1\right).$$

Оказывается, что если $\alpha \in (-1, 1)$ и $\alpha + \lambda \in (-1, 1)$, то траектория системы (2) совпадает с траекторией линейного отображения с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ \lambda - 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

и сходится к некоторой неподвижной точке на EF (см. [11]). Но при $\lambda + \alpha > 1$ для всякой точки (x_0, s_0) вне EF найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $|s_k + x_{k+1} - x_k| > 1$ (т. е. траектория «почувствует» разрывность отображения f). Для этого случая в работе [11] доказано следующее.

Теорема. *Пусть $\lambda \in (-1, 0)$, $\alpha + \lambda > 1$. Тогда:*

1) для всякой точки $(x_0, s_0) \notin EF$ существует натуральное число k такое, что $f^k(x_0, s_0) \in \{(x, 0)\}$;

2) для f существует инвариантная мера μ такая, что $\operatorname{supp} \mu \cap EF = \varnothing$*;*

3) множество неблуждающих точек f, не лежащих на отрезке EF, несчетно.

В процессе доказательства данной теоремы показано, что динамика системы (2) определяется динамикой одномерного отображения $T: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, которое задается как модуль отображения Пуанкаре для f на прямую $\{s = 0\}$. При этом T оказывается топологически сопряженным отображению сдвига отрезков, параметры которого определяются параметрами системы (2). В частности, по инвариантной мере для данного сдвига строится инвариантная мера для f с носителем, не пересекающим отрезок EF. К тому же для f оказывается справедлив аналог теоремы $1'$: для всякой точки из $\mathcal{L}$ малым изменением параметров системы (2) можно добиться существования периодической точки, сколь угодно близкой к данной.

Моделирование подобных разрывных систем на компьютере позволяет фактически получить точки, приближаемые периодическими точками близких отображений. Результаты, изложенные в статье, показывают, что таким образом может быть получен весь носитель инвариантной меры. Здесь имеет смысл заметить, что более широкие множества неблуждающих и цепно-рекуррентных точек хотя и могут быть определены для разрывных систем, не играют столь важной роли в их динамике. По сути вместо них, как правило, рассматриваются инвариантные меры и их носители.

Литература/References

1. Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press (1997).

2. Boshernitzan M., Kornfeld I. Interval translation maps. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* **15**, 821–832 (1995). https://doi.org/10.1017/S0143385700009652

3. Schmeling J., Troubetzkoy S. Interval Translation maps. In: *Dynamical Systems (Luminy-Marseille, 1998)*, 291–302. World Sci. Publ., River Edge, NJ (2000). https://doi.org/10.1142/97898127938290027

4. Artigiani, M., Fougeron C., Hubert P., Skripchenko A. A note on double rotations of infinite type. *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **82**, 157–172 (2021). https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.11803

5. Bruin H., Troubetzkoy S. The Gauss map on a class of interval translation mappings. *Israel Journal of Mathematics* **137** (1), 125–148 (2007). https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0211351

6. Volk D. Almost every Interval Translation Map of three intervals is finite type. Discrete and Continuous Dynamical Systems **34** (5) 2307–2314 (2014). https://doi.org/10.48550/arXiv.1203.3405

7. Kryzhevich S. G. Invariant measures for some piecewise continuous maps. *Math. Model. Nat. Phenom.* **15**, 14 (2020). https://doi.org/10.1051/mmnp/2019041

8. Pugh C. C. An Improved Closing Lemma and a General Density Theorem. *American Journal of Mathematics* **89** (4), 956–1009 (1967). https://doi.org/10.2307/2373414

9. Buzzi J. Piecewise isometries have zero topological entropy. *Ergod. Th. and Dynam. Syst.* **21**, 1371–1377 (2001). https://doi.org/10.1017/S0143385701001651

10. Buzzi J., Hubert P. Piecewise monotone maps without periodic points: Rigidity, measures and complexity. *Ergod. Theory Dyn. Syst.* **24**, 383–405 (2004). https://doi.org/10.1017/S0143385703000488

11. Kryzhevich S, Avrutin V., Begun N., Rachinskii D., Tajbakhsh K. Dynamics of Systems with a Discontinuous Hysteresis Operator and Interval Translation Maps. *Axioms* **10**, 80 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020080

Статья поступила в редакцию 7 января 2023 г.;
доработана 14 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Кривовичева Анна Дмитриевна — студент; sedovaannad@yandex.ru

Closing lemmas for interval translation maps

A. D. Krivovicheva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivovicheva A. D. Closing lemmas for interval translation maps. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 108–114. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.106 (In Russian)

A interval translation mapping (or a circle translation mapping) is studied. Such maps can be regarded as interval exchange maps with overlaps. It is known that for any mapping of that type admits a Borel probability invariant non-atomic measure. This measure can be constructed as a weak limit of invariant measures of maps with periodic parameters. Those measures, are just normalized Lebesgue ones on a family of sub-sectors. For such limit measures, in the case of a shift of the arcs of the circle, it is shown that any point of their supports can be made periodic by arbitrarily small change of the parameters of the system without changing the number of segments. For any invariant measure, it is deduced from Poincarés Recurrence Theorem shows every point can be made periodic by a small change in the parameters of the system, with the number of intervals increasing by two at most.

Keywords: interval translation maps, invariant measures, Pugh lemma, Poincaré recurrence theorem.

Received: January 7, 2023
Revised: May 14, 2023
Accepted: August 31, 2023

Author's information:

Anna D. Krivovicheva — sedovaannad@yandex.ru