УДК 517.538 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
MSC 41A20

Плотность наипростейших дробей с полюсами на окружности в весовых пространствах для круга и отрезка

М. А. Комаров

Владимирский государственный университет,
Российская Федерация, 600000, Владимир, ул. Горького, 87

Для цитирования: *Комаров М. А.* Плотность наипростейших дробей с полюсами на окружности в весовых пространствах для круга и отрезка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 96–107. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.105

Исследуются аппроксимационные свойства наипростейших дробей (логарифмических производных алгебраических полиномов), все полюсы которых лежат на единичной окружности. Получены критерии плотности таких дробей в классических интегральных пространствах — в пространствах функций, суммируемых со степенью p на единичном отрезке с ультрасферическим весом, и (весовых) пространствах Бергмана, аналитических в единичном круге и суммируемых со степенью p по площади круга функций. Полученные результаты обобщают на случай произвольного показателя $p > 0$ известные критерии Чуи и Ньюмана и Абакумова, Боричева и Федоровского для пространств Бергмана с $p = 1$ и $p = 2$ соответственно.

Ключевые слова: наипростейшая дробь, пространство Бергмана, задача Чуи.

1. Введение: задача Чуи. В работе исследуются аппроксимационные свойства наипростейших рациональных дробей вида

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad |z_1| = \cdots = |z_n| = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

(логарифмических производных полиномов с корнями на единичной окружности), в классических интегральных пространствах в единичном круге и на отрезке.

Впервые эта задача возникла в 1971 г., когда Ч. К. Чуи [1] высказал предположение о том, что в круге средняя напряженность гравитационного (или электростатического) поля, порождаемого n единичными массами (положительными зарядами), помещенными в точках $z_1, \ldots, z_n$ на границе круга, не может быть сколь угодно мала; иными словами, существует абсолютная константа $c > 0$ такая, что

$$\iint_{|z|<1} |g_n(z)|\, dxdy > c \qquad (z = x + iy)$$

для любой дроби g_n вида (1). Вскоре Д. Ньюман [2] нашел положительное решение вопроса Чуи, доказав, что

$$\iint_{|z|<1} |g_n(z)|\, dxdy > \frac{\pi n^2}{2(2n+1)^2} \geq \frac{\pi}{18}. \tag{2}$$

В то же время Чуи [3] для ограниченных односвязных областей D комплексной плоскости со спрямляемой границей ∂D установил плотность множества наипростейших дробей с полюсами $z_k \in \partial D$ в пространствах Берса $\mathcal{A}_q(D)$, $2 < q < \infty$.

В случае, когда область D есть единичный круг $\{z : |z| < 1\}$, пространство $\mathcal{A}_q(D)$, $q := 2 + \alpha > 1$, совпадает с классическим пространством Бергмана:

$$\mathbf{A}^1_\alpha, \qquad \alpha > -1$$

(напомним, что пространство Бергмана $\mathbf{A}^p_\alpha$, $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, состоит из аналитических в единичном круге функций f, для которых интеграл

$$\|f\|^p_{\mathbf{A}^p_\alpha} := \iint_{|z|<1} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha \, dxdy$$

конечен). Тем самым, ввиду результатов [2] и [3], справедливо следующее.

Критерий Чуи — Ньюмана. *Наипростейшие дроби* (1) *плотны в пространстве* $\mathbf{A}^1_\alpha$, *если и только если* $\alpha > 0$.

Отметим, что вопрос о точном значении минимума интеграла в (2) остается открытым. Лишь недавно Е. В. Абакумов, А. А. Боричев и К. Ю. Федоровский [4] доказали, что аналогичный минимум в пространствах

$$\mathbf{A}^2_\alpha, \qquad 0 < \alpha \le 1$$

(где ограничение $\alpha > 0$ нужно для принадлежности дробей (1) пространству $\mathbf{A}^2_\alpha$), при каждом n достигается на дроби

$$g_n(z) = \Psi_n(z) := \frac{nz^{n-1}}{z^n - 1} \qquad (\{z_1, \dots, z_n\} = \{\sqrt[n]{1}\})$$

и имеет асимптотику

$$\|\Psi_n\|^2_{\mathbf{A}^2_\alpha} \sim \pi\, \Gamma(\alpha+1)\, \zeta(\alpha+1)\, n^{1-\alpha}, \qquad n \to \infty$$

(Γ — гамма-функция Эйлера; ζ — дзета-функция Римана). Также в [4] полностью исследован и вопрос о плотности дробей (1) в пространствах Бергмана $\mathbf{A}^2_\alpha$.

Критерий Абакумова — Боричева — Федоровского. *Наипростейшие дроби* (1) *плотны в пространстве* $\mathbf{A}^2_\alpha$, *если и только если* $\alpha > 1$.

Более того [4], *при любом* $0 < \alpha \le 1$ *замыкание в* $\mathbf{A}^2_\alpha$ *множества дробей* (1) *совпадает с самим этим множеством*, поскольку для каждой функции $f \in \mathbf{A}^2_\alpha$

$$\liminf_{n\to\infty} \Big(\inf_{g_n} \|f - g_n\|_{\mathbf{A}^2_\alpha} \Big) \ge \lim_{n\to\infty} \|\Psi_n\|_{\mathbf{A}^2_1} = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{6}}, \qquad 0 < \alpha \le 1. \tag{3}$$

2. Задача Насырова и связанные с ней вопросы. Приближения наипростейшими дробями (1) рассматриваются и в других пространствах. Так, для всякого компакта $K \subset \{z : |z| < 1\}$ со связным дополнением они плотны в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на K и аналитических во внутренних точках K [5].

Впервые на приближения дробями (1) в интегральных пространствах *на единичном отрезке* обратил внимание С. Р. Насыров, сформулировавший в 2014 г. следующий вопрос (см [5, § 4]): плотны ли дроби (1) в комплексном пространстве $L^2[-1,1]$?

В работе [6] для произвольной дроби g_n вида (1) автором была получена оценка, из которой тотчас следует отрицательный ответ в задаче Насырова:

$$\|g_n\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} |g_n(x)|^2\, dx > \frac{1}{64}, \tag{4}$$

и высказано предположение о том, что на самом деле верно неравенство

$$\|g_n\|_{L^2} > C\sqrt{n} \tag{5}$$

с некоторой абсолютной постоянной $C > 0$. Кроме того, в связи с оценкой (4) и цитированным выше критерием [4] плотности дробей (1) в пространствах Бергмана $\mathbf{A}_\alpha^2$ ряд вопросов был сформулирован в 2021 г. П. А. Бородиным:

• отделены ли от нуля расстояния

$$\inf_{g_n} \|f - g_n\|_{L^2} \quad (f \not\equiv 0)$$

от произвольной фиксированной функции $f \in L^2[-1,1]$ до множества дробей (1) порядка n, $n \to \infty$?

• что можно сказать о плотности наипростейших дробей (1) в весовых пространствах $L_\alpha^2[-1,1]$ с нормой

$$\|f\|_{L_\alpha^2} = \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 (1-x^2)^\alpha\, dx \Big)^{1/2}$$

при $\alpha > 0$ (в случае $\alpha > 1$ плотность доказана в 2022 г. учеником П. А. Бородина Александром Ершовым)?

При этом очевидно, что оценкой (5) автоматически решается и первый из вопросов Бородина: указанные расстояния оказываются неограниченно возрастающими вместе с n ввиду $\|f - g_n\|_{L^2} \geq C\sqrt{n} - \|f\|_{L^2}$.

Справедливость гипотезы (5) недавно обоснована автором [7]. Доказательство использует решение вспомогательной задачи, представляющей и самостоятельный интерес: *насколько малой для дробей вида* (1) *может быть мера* $\mu(E)$ *множества*

$$E = E_\delta(g_n) := \big\{x \in [-1,1] : \ \big|\mathrm{Re}(x g_n(x))\big| \geq \delta n\big\}, \qquad \delta > 0\,?$$

Оказывается, что при $\delta \geq 1/2$ множество E может иметь нулевую меру, а при каждом $0 < \delta < 1/2$ его мера $\mu(E)$ положительна и допускает следующую точную относительно порядка n дроби g_n оценку [7, теорема 2 и замечание 3].

Теорема А. *Если* $0 < \delta < 1/2$, *то для любой дроби* g_n *вида* (1) *имеем*

$$\mu(E) = \mu(E_\delta(g_n)) \geq K n^{-1}, \qquad K = K(\delta) := \frac{8}{9} \frac{1 - 2\delta}{(3 + 4\delta)(1 + 2\delta)},$$

причем множество E *содержит интервал* (a,b) *такой, что*

$$b - a \geq \frac{1}{2} K n^{-1} \qquad \text{и} \qquad (a,b) \subset I_{n,\delta} := \Big\{x \in [-1,1] : \ |x| \geq 1 - \frac{1}{(1+2\delta)n}\Big\}.$$

Интеграл по всему отрезку $[-1,1]$ оценивается снизу интегралом по множеству E (например, с $\delta := 1/6$), откуда, используя неравенство $\mu(E) \geq Kn^{-1}$ из теоремы A, легко получаем искомую оценку (5) и ее L^p-обобщение.

Следствие [7]. *Для любой дроби g_n вида* (1) *и любого $p > 0$ имеем*

$$\|g_n\|_{L^p}^p = \int_{-1}^{1} |g_n(x)|^p \, dx > \int_{-1}^{1} |xg_n(x)|^p \, dx > \frac{4}{33 \cdot 6^p} \, n^{p-1},$$

поэтому дроби (1) *не плотны ни в одном из пространств $L^p[-1,1]$, $p \geq 1$.*

3. Основной результат о весовых приближениях на отрезке. В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [1–4, 6, 7]. В качестве первого основного результата мы строим критерий плотности наипростейших дробей (1) в весовых пространствах $L^p_\alpha[-1,1]$, $1 \leq p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$, с нормой

$$\|f\|_{L^p_\alpha} = \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x^2)^\alpha \, dx \Big)^{1/p};$$

при $p = 2$ критерий дает полное решение второго вопроса П. А. Бородина (см. раздел 2).

Теорема 1. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$. Множество наипростейших дробей* (1) *плотно в пространстве $L^p_\alpha[-1,1]$, если и только если*

$$\alpha > p - 1. \tag{6}$$

Необходимость условия (6) тотчас вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой дроби g_n вида* (1) *и любого $0 < p < \infty$ имеем*

$$\|g_n\|_{L^p_\alpha}^p > \int_{1-\frac{3}{4n} < |x| < 1} |xg_n(x)|^p (1-x^2)^\alpha \, dx > C_{p,\alpha} \, n^{-(\alpha-p+1)}, \quad -1 < \alpha < \infty, \tag{7}$$

где $C_{p,\alpha} > 0$ — константа, зависящая лишь от p и α.

Ввиду неравенства Минковского, достаточность условия (6) вытекает из плотности алгебраических полиномов в $L^p_\alpha[-1,1]$, $p \geq 1$ (см. [8, § 1.5, теорема 1.5.2]), и следующей леммы 2, где символом $\|\cdot\|_C$ обозначена равномерная норма в единичном круге: $\|f\|_C = \sup_{|z|<1} |f(z)|$.

Лемма 2. *Если P — полином степени $k \geq 0$ с комплексными коэффициентами и $s := 1 + \|P\|_C$, то при каждом натуральном*

$$n > e^{4s}(1+k)$$

существует дробь g_{2n+1} вида (1) *порядка $2n+1$, интерполирующая полином P по n-кратному узлу $z_0 = 0$ с остатком*

$$\Delta(z) := \big|P(z) - g_{2n+1}(z)\big| \leq 19e^{3s} \, \frac{n|z|^n}{1-|z|^{n+1}}, \qquad |z| < 1.$$

При этом, вдоль любого радиального отрезка $z = re^{it}$, $0 < r < 1$, имеем

$$\int_0^1 \Delta^p(re^{it})(1-r^2)^\alpha \, dr < 19^p e^{3ps} \, \tilde{C}_{p,\alpha} \, n^{-(\alpha-p+1)}, \qquad -1 < p-1 < \alpha < \infty,$$

где $\tilde{C}_{p,\alpha} > 0$ — константа, зависящая лишь от p и α.

Ясно, что $\|P - g_{2n+1}\|^p_{L^p_\alpha} = \int_0^1 (\Delta^p(re^{i0}) + \Delta^p(re^{i\pi}))(1-r^2)^\alpha\, dr$. Таким образом, при условии (6) любой полином приближается в $L^p_\alpha[-1,1]$ наипростейшими дробями вида (1) порядка $\le N$ со скоростью

$$O(N^{-(\alpha-p+1)/p}), \qquad N\to\infty \qquad (\alpha-p+1>0).$$

Лемма 1 показывает, что найденный порядок нельзя улучшить.

Замечание 1. В пространствах $L^p_\alpha[-1,1]$, $p\ge 1$, при $\alpha \le p-1$ замыкание множества наипростейших дробей (1) совпадает с самим этим множеством. В самом деле, можно показать, что для любой функции f из $L^p_\alpha[-1,1]$ с указанными p,α

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\inf_{g_n}\|f-g_n\|_{L^p_\alpha}\right) \ge (99p^{1/p})^{-1} > 0 \tag{8}$$

(ср. оценку (3) Е. В. Абакумова, А. А. Боричева и К. Ю. Федоровского и вытекающий из нее результат о замыкании дробей (1) в пространствах Бергмана $\mathbf{A}^2_\alpha$, $0<\alpha\le 1$).

4. Весовые приближения в круге. Второй основной результат работы — теорема 2, доставляющая аналог теоремы 1 для пространств Бергмана $\mathbf{A}^p_\alpha$, $0<p<\infty$, и обобщающая известные критерии для случаев $p=1$ и $p=2$ (см. раздел 1).

Теорема 2. *Пусть $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$. Множество наипростейших дробей (1) содержится в пространстве Бергмана $\mathbf{A}^p_\alpha$, если и только если*

$$\alpha > p-2, \tag{9}$$

и плотно в этом пространстве, если и только если

$$\alpha > p-1.$$

Критерий (9) справедлив, ибо он верен в случае $n=1$.

Лемма 3. *Пусть $0<p<\infty$, $-1<\alpha<\infty$. Дробь $1/(z-1)$ принадлежит пространству $\mathbf{A}^p_\alpha$ в том и только том случае, когда $\alpha>p-2$.*

Далее, необходимость условия $\alpha>p-1$ для плотности наипростейших дробей (1) в $\mathbf{A}^p_\alpha$ следует из леммы 1. В самом деле, для любой дроби g_n вида (1) имеем

$$\iint_{|z|<1} |g_n(z)|^p\,(1-|z|^2)^\alpha\, dxdy = \int_0^{2\pi} dt\int_0^1 |g_n(re^{it})|^p\,(1-r^2)^\alpha r dr =$$

$$= \int_0^{\pi} dt\int_{-1}^1 |g_n(re^{it})|^p\,(1-r^2)^\alpha\,|r|\, dr > \int_0^{\pi} dt\int_{1-\frac{3}{4n}<|r|<1} |g_n(re^{it})|^p\,(1-r^2)^\alpha\,|r|\, dr \ge$$

$$\ge \min\{1;4^{p-1}\}\cdot\int_0^{\pi} dt\int_{1-\frac{3}{4n}<|r|<1} |rg_n(re^{it})|^p\,(1-r^2)^\alpha\, dr$$

(для r из области интегрирования при $p\ge 1$ и, соответственно, $0<p<1$ легко проверяются соотношения $|r|\ge|r|^p$ и $|r|\ge 4^{p-1}|r|^p$), поэтому в силу (7) верна оценка

$$\|g_n\|^p_{\mathbf{A}^p_\alpha} > \frac{1}{4}\,\pi\, C_{p,\alpha}\, n^{-(\alpha-p+1)}, \quad -1<\alpha<\infty, \quad 0<p<\infty, \tag{10}$$

правая часть которой при $\alpha \le p-1$ отделена от нуля константой, не зависящей от n.

Наконец, плотность дробей (1) в случае $\alpha > p-1$ вытекает из леммы 2. Выбирая для произвольного полинома P интерполирующую наипростейшую дробь g_{2n+1} так, как указано в лемме, для остатка интерполяции в круге получим оценку

$$\iint_{|z|<1} \Delta^p(z)(1-|z|^2)^\alpha \, dxdy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \Delta^p(re^{it})(1-r^2)^\alpha \, rdr < \frac{2\pi 19^p e^{3ps} \, \tilde{C}_{p,\alpha}}{n^{\alpha-p+1}}. \quad (11)$$

Тем самым доказано, что и в пространствах $\mathbf{A}^p_\alpha$, $-1 < p-1 < \alpha < \infty$, любой полином приближается дробями вида (1) порядка $\le N$ со скоростью

$$O(N^{-(\alpha-p+1)/p}), \qquad N \to \infty$$

(оценка неулучшаема ввиду (10)). Остается заметить, что алгебраические полиномы плотны в $\mathbf{A}^p_\alpha$ (см. [9, § 1.1, предложение 1.3]).

Замечание 2. Схема доказательства позволяет устанавливать ту же скорость аппроксимации, $O(N^{-(\alpha-p+1)/p})$, для более широких, чем полиномы, классов функций. Рассмотрим, например, класс $\mathcal{B}$ аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, для которых сходится ряд

$$M = M(f) := |a_0| + |a_1| + \ldots .$$

С одной стороны, всякая такая функция приближается в $\mathbf{A}^p_\alpha$ частными суммами $P_k(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1}$, $k \ge 1$, со скоростью $o(k^{-(1+\alpha)/p})$ $(k \to \infty)$, ибо

$$\|a_k z^k + \ldots\|^p_{\mathbf{A}^p_\alpha} \le 2\pi(|a_k| + \ldots)^p \int_0^1 r^{kp+1}(1-r^2)^\alpha \, dr = o(1) k^{-(1+\alpha)}$$

(см. (15)). С другой стороны, при каждом k норма $\|P_k\|_C \le |a_0| + \cdots + |a_{k-1}| \le M$, а потому полином P_k со скоростью $O(N^{-(\alpha-p+1)/p})$ приближается дробью вида (1), порядок N которой связан со степенью $k-1$ полинома *линейным* соотношением $N > 2e^{4+4M}k+1$ (см. лемму 2). Выбирая $N \asymp k$, получим, что *в условиях теоремы* 2,

$$\inf_{g_n, \, n \le N} \|f - g_n\|_{\mathbf{A}^p_\alpha} = O(N^{-(\alpha-p+1)/p}), \qquad f \in \mathcal{B}.$$

Можно ставить вопрос о дальнейшем расширении подходящего класса функций.

5. Доказательство леммы 1 и оценки (8). Применим теорему А к произвольной дроби g_n вида (1), полагая для определенности $\delta = 1/6$ и обозначая

$$E^* = \left\{ x \in [-1,1] : \ |x g_n(x)| \ge \frac{n}{6} \right\}, \qquad I^*_n = \left\{ x \in [-1,1] : \ |x| \ge 1 - \frac{3}{4n} \right\}.$$

По теореме А, существует интервал (a,b) (будем считать $0 < a < b$) такой, что

$$(a,b) \subset E^* \cap I^*_n, \qquad b - a \ge \frac{2}{33n}.$$

Возьмем произвольное $0 < p < \infty$. Покажем, что при любых $-1 < \alpha < \infty$

$$\int_{I^*_n} |x g_n(x)|^p (1-x^2)^\alpha \, dx > C_{p,\alpha} \, n^{-(\alpha-p+1)}, \qquad C_{p,\alpha} > 0,$$

где значения $C_{p,\alpha}$ можно определить равенствами

$$C_{p,\alpha} := \frac{2^{\alpha+1}}{6^p(\alpha+1)33^{\alpha+1}} \quad (0 \le \alpha < \infty), \qquad C_{p,\alpha} := \frac{3^\alpha 2}{6^p 2^\alpha 33} \quad (-1 < \alpha < 0).$$

В самом деле, учитывая, что $|xg_n(x)| \ge n/6$ на (a, b), в случае $0 \le \alpha < \infty$ имеем

$$\int_{I_n^*} |xg_n(x)|^p (1-x^2)^\alpha \, dx > \int_a^b \frac{n^p}{6^p} (1-x)^\alpha \, dx > \frac{n^p}{6^p} \int_0^{b-a} y^\alpha \, dy = \frac{n^p}{6^p} \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

тогда как в случае $-1 < \alpha < 0$ ввиду $a \ge 1 - 3/(4n)$ имеем

$$(1-x^2)^\alpha > (1-a^2)^\alpha > 3^\alpha/(2n)^\alpha \quad (a < x < b),$$

$$\int_{I_n^*} |xg_n(x)|^p (1-x^2)^\alpha \, dx > \int_a^b \frac{n^p}{6^p} (1-x^2)^\alpha \, dx > \frac{n^p}{6^p} \frac{3^\alpha}{2^\alpha n^\alpha} (b-a).$$

Остается вспомнить, что $b-a \ge 2/(33n)$. Лемма доказана. Отметим, что при $\alpha = p-1$

$$\int_{I_n^*} |xg_n(x)|^p (1-x^2)^{p-1} \, dx > C_{p,p-1} = \begin{cases} (99^p p)^{-1}, & 1 \le p < \infty, \\ (4^{p-1}\, 99)^{-1}, & 0 < p < 1. \end{cases} \tag{12}$$

Теперь докажем оценку (8).

Если $\alpha < p-1$, то $\|\cdot\|_{L^p_\alpha} \ge \|\cdot\|_{L^p_{p-1}}$ и $L^p_\alpha[-1,1] \subset L^p_{p-1}[-1,1]$, поэтому достаточно проверить, что при $1 \le p < \infty$ для любой функции $f \in L^p_{p-1}[-1,1]$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\inf_{g_n} \|f - g_n\|_{L^p_{p-1}} \right) \ge c_p := (99 p^{1/p})^{-1},$$

где инфимум в скобках берется по всем дробям g_n порядка n вида (1).

Допустим обратное. Предположим, что существуют сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, функция $f \in L^p_{p-1}[-1,1]$ и последовательность дробей $g_{n_1}, g_{n_2}, \dots, g_{n_k}, \dots$ вида (1) порядков $n_1 \le n_2 \le \dots \le n_k \le \dots$ $(n_k \to \infty)$ такие, что

$$\|f - g_{n_k}\|_{L^p_{p-1}} \le c_p - 2\varepsilon, \qquad k \ge k_0. \tag{13}$$

Сохраняя введенное выше обозначение множеств I_n^* $(n = 1, 2, \dots)$, при каждом $k = 1, 2, \dots$ положим

$$F_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,1] \setminus I^*_{n_k}, \\ f(x), & x \in I^*_{n_k}, \end{cases} \qquad G_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,1] \setminus I^*_{n_k}, \\ g_{n_k}(x), & x \in I^*_{n_k}. \end{cases}$$

Функции $F_k^p(x)(1-x^2)^{p-1}$, $k = 1, 2, \dots$, на отрезке $[-1,1]$ суммируемы и мажорируются суммируемой функцией $|f(x)|^p(1-x^2)^{p-1}$, причем для всех $-1 < x < 1$ имеем

$$F_k(x) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

(по определению, множества I_n^* при $n \to \infty$ стягиваются к двум точкам ± 1). Следовательно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_{-1}^1 |F_k(x)|^p (1-x^2)^{p-1} \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

и найдется натуральное число $k_1 \geq k_0$ такое, что

$$\|F_k\|_{L^p_{p-1}} \leq \varepsilon, \quad k \geq k_1. \tag{14}$$

Применяя (13), (14) и неравенство Минковского, при $k \geq k_1$ получаем

$$\|G_k\|_{L^p_{p-1}} \leq \|F_k\|_{L^p_{p-1}} + \|G_k - F_k\|_{L^p_{p-1}} \leq \|F_k\|_{L^p_{p-1}} + \|g_{n_k} - f\|_{L^p_{p-1}} \leq c_p - \varepsilon.$$

Противоречие с тем, что

$$\|G_k\|^p_{L^p_{p-1}} \equiv \int_{I^*_{n_k}} |g_{n_k}(x)|^p (1-x^2)^{p-1}\, dx > c^p_p$$

согласно (12). Неравенство (8) доказано. $\square$

Замечание 3. Приведенный вывод неравенства (8) близок к данному в работе [4] доказательству оценки (3) (из которой, в частности, следует совпадение множества дробей (1) с его замыканием в $\mathbf{A}^2_\alpha$ при $0 < \alpha \leq 1$).

Аналогичное рассуждение, основанное на вытекающей из (12) оценке

$$\iint_{1-\frac{3}{4n}<|z|<1} |g_n(z)|^p (1-|z|^2)^{p-1}\, dxdy > C(p) > 0$$

для дробей (1) (ср. вывод (10)), приводит к неравенству

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\inf_{g_n} \|f - g_n\|_{\mathbf{A}^p_{p-1}} \right) \geq C(p)^{1/p} > 0, \quad f \in \mathbf{A}^p_{p-1}, \quad 0 < p < \infty.$$

Следовательно, теорема 2 дополняется замечанием: *в пространствах*

$$\mathbf{A}^p_\alpha, \quad p-2 < \alpha \leq p-1 \quad (0 < p < \infty,\ -1 < \alpha < \infty),$$

множество дробей (1) *совпадает со своим замыканием.*

6. Доказательство леммы 2. Производная P' всякого комплексного полинома P, будучи ограниченной при $|z| < 1$, принадлежит и H^1 — пространству Харди аналитических в круге $|z| < 1$ функций f с конечной величиной

$$\|f\|_{H^1} := \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt.$$

Следовательно, к полиному P применима теорема 3 работы [10], согласно которой при каждом натуральном

$$n > \max\{1; h\}, \quad h := e^{2\|P\|_C}(\|P\|^2_C + \|P'\|_{H^1}),$$

существует дробь g_{2n+1} порядка $2n+1$ вида (1), интерполирующая полином P по узлу $z_0 = 0$ с кратностью n, причем выполняется поточечная оценка

$$|P(z) - g_{2n+1}(z)| \leq A \frac{|z|^n}{1 - |z|^{n+1}}, \qquad |z| < 1,$$

где

$$A = \frac{(2n+1+\|P\|_C)(e^{\|P\|_C} + \pi e^{2\|P\|_C}\|P\|_C) + \pi h}{1 - h/n} \qquad (1 - h/n > 0).$$

В силу неравенства Бернштейна имеем $\|P'\|_{H^1} \le \|P'\|_C \le k\|P\|_C$,

$$h \le \max\{1; h\} < e^{2s}(s^2 + ks) < e^{2s}s^2(1+k) < e^{4s}(1+k)/2,$$

где $k = \deg P$, $s = 1 + \|P\|_C \ge 1$. Следовательно, выбирая

$$n > e^{4s}(1+k) \ge e^4,$$

будем иметь $h < n/2$, $2n + 1 + s < 2n + n/e^4 + n/4 < 2.27\,n$,

$$A < \frac{(2n+1+s)(e^s + \pi e^{2s} s) + \pi n/2}{1 - 1/2} < 4.54\,n(1+\pi)e^{3s} + \pi n < 19e^{3s}n,$$

что доказывает первую часть леммы.

С учетом полученной поточечной оценки остатка интерполяции остается проверить существование оценки вида

$$\int_0^1 \frac{n^p r^{np}}{(1 - r^{n+1})^p}(1-r)^\alpha\,dr < C\,n^{-(\alpha - p + 1)}, \qquad -1 < p - 1 < \alpha < \infty,$$

где $C > 0$ — константа, зависящая лишь от p и α. Положим

$$\varepsilon = \ln(2)/n \quad (1 - \varepsilon > 0)$$

и рассмотрим интегралы

$$I_1 = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{n^p x^{np}}{(1 - x^{n+1})^p}(1-x)^\alpha\,dx, \qquad I_2 = \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{n^p x^{np}}{(1 - x^{n+1})^p}(1-x)^\alpha\,dx.$$

При $x \in (0, 1-\varepsilon)$ имеем

$$1 - x^{n+1} > 1 - (1-\varepsilon)^n = 1 - e^{n\ln(1-\varepsilon)} > 1 - e^{-n\varepsilon} = 1/2,$$

следовательно,

$$I_1 < \int_0^{1-\varepsilon} 2^p n^p x^{np}(1-x)^\alpha\,dx < 2^p n^p \int_0^1 x^{np}(1-x)^\alpha\,dx = 2^p n^p\,\frac{\Gamma(np+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(np+\alpha+2)}.$$

Для частного гамма-функций при любых фиксированных a, b имеет место асимптотическое равенство [11, с. 62, § 1.18, формула (4)]:

$$\Gamma(t+a)/\Gamma(t+b) = t^{a-b}(1 + O(t^{-1})), \qquad t > 0. \tag{15}$$

Применяя эту формулу при $t = np$, $a = 1$, $b = \alpha + 2$, получим оценку

$$I_1 < C_1\,n^{-(\alpha-p+1)}(1 + O(n^{-1})), \qquad C_1 = 2^p p^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1).$$

Если, напротив, $1 - \varepsilon < x < 1$, то с учетом $1 - (1-\varepsilon)^{n+1} > 1/2$ имеем

$$1 + x + \cdots + x^n > \sum_{j=0}^n (1-\varepsilon)^j = (1 - (1-\varepsilon)^{n+1}) \sum_{j=0}^\infty (1-\varepsilon)^j > \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{n}{\ln 4},$$

$$\frac{n^p x^{np}(1-x)^\alpha}{(1-x^{n+1})^p} < \frac{n^p(1-x)^\alpha}{(1-x^{n+1})^p} = \frac{n^p(1-x)^{\alpha-p}}{(1+x+\dots+x^n)^p} < (\ln 4)^p(1-x)^{\alpha-p}.$$

Таким образом,

$$I_2 < \int_{1-\varepsilon}^1 (\ln 4)^p(1-x)^{\alpha-p}\,dx = \frac{(\ln 4)^p\,\varepsilon^{\alpha-p+1}}{\alpha-p+1} = C_2\,n^{-(\alpha-p+1)}, \quad C_2 = \frac{2^p(\ln 2)^{\alpha+1}}{\alpha-p+1}$$

$(\alpha > p-1)$. Соединяя оценки I_1 и I_2, приходим к искомому результату.

7. Доказательство леммы 3. При $-1<\alpha<\infty$, $0<p<\infty$ положим

$$I := \left\|\frac{1}{z-1}\right\|^p_{\mathbf{A}^p_\alpha} = \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\,dr \int_0^{2\pi}\frac{dt}{(1+r^2-2r\cos t)^{p/2}}.$$

Выразив внутренний интеграл через значения гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$ по формуле [11, с. 92, § 2.4, формула (10)], получим

$$I = 2\pi\int_0^1 r(1-r^2)^\alpha\ {}_2F_1(\tfrac{p}{2},\tfrac{p}{2};1;r^2)\,dr = \pi\int_0^1 (1-x)^\alpha\ {}_2F_1(\tfrac{p}{2},\tfrac{p}{2};1;x)\,dx.$$

Далее, при $y, \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\beta > 0$ и $|\arg(1+\omega y)| < \pi$ имеет место формула [12, с. 265, § 2.21.1, формула 4]

$$\int_0^y x^{\gamma-1}(y-x)^{\beta-1}\ {}_2F_1(a,b;c;-\omega x)\,dx = \mathrm{B}(\gamma,\beta)y^{\gamma+\beta-1}\ {}_3F_2(a,b,\gamma;c,\gamma+\beta;-\omega y).$$

Здесь ${}_3F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция; B — бета-функция.

Положим $y=1=\gamma=c$, $\beta=1+\alpha$ $(\alpha>-1)$, $a=b=p/2$, $\omega=-1$. Тогда

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha\ {}_2F_1(\tfrac{p}{2},\tfrac{p}{2};1;x)\,dx = \mathrm{B}(1,1+\alpha)\ {}_3F_2(\tfrac{p}{2},\tfrac{p}{2},1;1,2+\alpha;1),$$

$$I = \pi\,\mathrm{B}(1,1+\alpha)\sum_{k=0}^\infty \frac{(\frac{p}{2})_k(\frac{p}{2})_k(1)_k}{(1)_k(2+\alpha)_k}\frac{1}{k!} = \frac{\pi}{1+\alpha}\sum_{k=0}^\infty\frac{(\frac{p}{2})_k(\frac{p}{2})_k}{(2+\alpha)_k}\frac{1}{k!},$$

где $(\cdot)_k$ — символ Похгаммера:

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_k = x(x+1)\dots(x+k-1) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}, \quad k=1,2,\dots.$$

Преобразовывая общий член ряда и применяя соотношение (15) с $t=k$, получаем

$$\frac{(\frac{p}{2})_k(\frac{p}{2})_k}{(2+\alpha)_k}\frac{1}{k!} = \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+k)\Gamma(\frac{p}{2}+k)\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(2+\alpha+k)}\frac{1}{k!} =$$
$$= c_{\alpha,p}\left(\frac{\Gamma(k+\frac{p}{2})}{\Gamma(k)}\right)^2\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2+\alpha)}\frac{1}{k} = c_{\alpha,p}\,k^{p-3-\alpha}(1+O(k^{-1}))$$

$(c_{\alpha,p} = \Gamma(2+\alpha)\big/(\Gamma(\frac{p}{2}))^2 > 0)$. Таким образом, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы $p-3-\alpha<-1$, что равносильно $\alpha>p-2$. □

Подчеркнем, что в случае $\alpha \le p-2$ ни одна из дробей вида (1) (не только однополюсные) не принадлежит $\mathbf{A}^p_\alpha$.

Литература

1. Chui C. K. A lower bound of fields due to unit point masses. *Amer. Math. Monthly* **78** (7), 779–780 (1971). https://doi.org/10.1080/00029890.1971.11992851

2. Newman D. J. A lower bound for an area integral. *Amer. Math. Monthly* **79** (9), 1015–1016 (1972). https://doi.org/10.1080/00029890.1972.11993174

3. Chui C. K. On approximation in the Bers spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **40** (2), 438–442 (1973). https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0340608-9

4. Abakumov E., Borichev A., Fedorovskiy K. Chui's conjecture in Bergman spaces. *Math. Ann.* **379** (3–4), 1507–1532 (2021). https://doi.org/10.1007/s00208-020-02114-1

5. Бородин П. А. Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы. II. *Матем. сборник* **207**, вып. 3, 19–30 (2016). https://doi.org/10.4213/sm8500

6. Komarov M. A. A lower bound for the $L_2[-1,1]$-norm of the logarithmic derivative of polynomials with zeros on the unit circle. *Пробл. анал. Issues Anal.* **8** (2), 67–72 (2019). https://doi.org/10.15393/j3.art.2019.6030

7. Komarov M. A. A Newman type bound for $L_p[-1,1]$-means of the logarithmic derivative of polynomials having all zeros on the unit circle. *Constr. Approx.* **58** (3), 551–563 (2023). https://doi.org/10.1007/s00365-023-09622-8

8. Сегё Г. *Ортогональные многочлены*, пер. с англ. Москва, Физматгиз (1962).

9. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman Spaces.* New York, Springer (2000). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8

10. Комаров М. А. О скорости аппроксимации в единичном круге функций класса H^1 логарифмическими производными полиномов с корнями на границе круга. *Изв. РАН. Сер. матем.* **84**, вып. 3, 3–14 (2020). https://doi.org/10.4213/im8901

11. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, пер. с англ. Москва, Наука (1965).

12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы.* Москва, Физматлит (2003).

Статья поступила в редакцию 12 марта 2023 г.;
доработана 3 июля 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Комаров Михаил Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kami9@yandex.ru

Density of simple partial fractions with poles on the circle in weighted spaces for the disk and the interval

M. A. Komarov

Vladimir State University, 87, ul. Gor'kogo, Vladimir, 600000, Russian Federation

For citation: Komarov M. A. Density of simple partial fractions with poles on the circle in weighted spaces for the disk and the interval. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 96–107. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.105 (In Russian)

Approximation properties of simple partial fractions (the logarithmic derivatives of algebraic polynomials) having all poles on the unit circle are investigated. We obtain criteria for the density of such fractions is some classical integral spaces: in the spaces of functions summable with degree p in the unit interval with the ultraspheric weight and in the (weighted) Bergman spaces of functions analytic in the unit disk and summable with degree p over the area of the disk. Our results generalize to the case of an arbitrary exponent $p > 0$ the known criteria by Chui and Newman and by Abakumov, Borichev and Fedorovskiy for the Bergman spaces with $p = 1$ and $p = 2$, correspondingly.

Keywords: simple partial fraction, Bergman space, Chui's problem.

References

1. Chui C. K. A lower bound of fields due to unit point masses. *Amer. Math. Monthly* **78** (7), 779–780 (1971). https://doi.org/10.1080/00029890.1971.11992851

2. Newman D. J. A lower bound for an area integral. *Amer. Math. Monthly* **79** (9), 1015–1016 (1972). https://doi.org/10.1080/00029890.1972.11993174

3. Chui C. K. On approximation in the Bers spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **40** (2), 438–442 (1973). https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0340608-9

4. Abakumov E., Borichev A., Fedorovskiy K. Chui's conjecture in Bergman spaces. *Math. Ann.* **379** (3–4), 1507–1532 (2021). https://doi.org/10.1007/s00208-020-02114-1

5. Borodin P. A., Approximation by simple partial fractions with constraints on the poles. II. *Matem. Sbornik* **207**, iss. 3, 19–30 (2016). https://doi.org/10.4213/sm8500 (In Russian) [Eng. transl.: *Sbornik: Mathematics* **207**, iss. 3, 331–341 (2016). https://doi.org/10.1070/SM8500].

6. Komarov M. A. A lower bound for the $L_2[-1,1]$-norm of the logarithmic derivative of polynomials with zeros on the unit circle. *Probl. Anal. Issues Anal.* **8** (2), 67–72 (2019). https://doi.org/10.15393/j3.art.2019.6030

7. Komarov M. A. A Newman type bound for $L_{\mathrm{p}}[-1,1]$-means of the logarithmic derivative of polynomials having all zeros on the unit circle. *Constr. Approx.* **58** (3), 551–563 (2023). https://doi.org/10.1007/s00365-023-09622-8

8. Szegő G. *Orthogonal Polynomials.* Providence R. I., American Mathematical Society (1959). [Rus. ed.: Szegő G. *Ortogonal'nye mnogochleny* Moscow, Fizmatlit Publ. (1962)].

9. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman Spaces.* New York, Springer (2000). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8

10. Komarov M. A. On the rate of approximation in the unit disc of H^1-functions by logarithmic derivatives of polynomials with zeros on the boundary. *Izv. RAN. Ser. Mat.* **84**, iss. 3, 3–14 (2020). https://doi.org/10.4213/im8901 (In Russian) [Eng. transl.: *Izvestiya: Mathematics* **84**, iss. 3, 437–448 (2020). https://doi.org/10.1070/IM8901].

11. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 1: Hypergeometric function. Legendre functions.* McGraw-Hill (1953) [Rus. ed.: Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Gipergeometricheskaia funktsiia. Funktsii Lezhandra*, Moscow, Nauka Publ. (1965)].

12. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series. Vol. 3. Complementary chapters.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2003). (In Russian)

Received: March 12, 2023
Revised: July 3, 2023
Accepted: August 31, 2023

Author's information:

Mikhail A. Komarov — kami9@yandex.ru