МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60F99

Непрерывный вариант задачи об эгоистичной парковке

С. М. Ананьевский[1], *А. П. Чен*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Университет Западной Онтарио,
Канада, Онтарио, Лондон, ул. Ричмонд, 1151

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Чен А. П.* Непрерывный вариант задачи об эгоистичной парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 84–95. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.104

Работа посвящена исследованию новой модели случайного заполнения отрезка большой длины интервалами меньшей длины. Рассмотрена новая постановка задачи. Изучается модель, в которой единичные интервалы размещаются на отрезке только в том случае, если заполняемый отрезок имеет длину не меньше 2. При этом положение размещаемого интервала подчинено равномерному закону распределения. В работе исследуется поведение среднего числа размещенных интервалов в зависимости от длины заполняемого отрезка. Получено точное выражение для аналога константы Реньи.

Ключевые слова: случайное заполнение отрезка, задача о парковке, асимптотическое поведение математического ожидания.

Задача случайного заполнения отрезка интервалами, также известная как задача о парковке, имеет давнюю историю, которая берет свое начало в 1958 г. Именно тогда вышла работа Реньи [1], в которой была исследована асимптотика среднего числа случайно размещенных интервалов единичной длины на отрезке, длина которого бесконечно увеличивается.

В работе Реньи постановка задачи была следующей. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$, который разбивает первоначальный отрезок на два отрезка $[0, t]$ и $[t+1, x]$, которые в дальнейшем продолжают заполняться по тому же правилу. Размещение интервала

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

$(t, t+1)$ случайным образом означает, что t является случайной величиной с равномерным законом распределения на отрезке $[0,\ x-1]$. Если какой-то из отрезков $[0, t]$ или $[t+1, x]$ будет иметь длину меньше 1, то он в дальнейшем не заполняется. Указанный способ заполнения продолжается до тех пор, пока длина каждого из всех незаполненных отрезков станет меньше 1. После этого подсчитывается количество размещенных интервалов. Его мы обозначим N_x. Если в начале процесса заполнения отрезка $x < 1$, то $N_x = 0$.

Реньи предложил для этой задачи следующую интерпретацию. На улице длины x случайным образом паркуются автомобили единичной длины. Тогда N_x означает число запаркованных на этой улице автомобилей. Эта интерпретация и дала название задаче как задача о парковке.

В работе Реньи [1] было показано, что при любом $n \geq 1$

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}), \qquad (x \to +\infty). \tag{1}$$

Для константы λ также было получено следующее выражение:

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt. \tag{2}$$

В последние годы появился ряд работ по теме задачи о парковке (см. [2–9]), в которых рассматриваются различные модели этой задачи, отличные от классической постановки. В нескольких работах изучаются дискретные аналоги этой задачи (см., например, работы [2, 7–9]). В работе [7] изучается дискретная модель, в которой длина заполняемого отрезка x — целое число, а t — случайная величина, принимающая с равными вероятностями значения $0, 1, \ldots x-1$. При этом процесс размещения интервалов заканчивается, когда длина всех незаполненных отрезков становится меньше 2. Эта модель была названа задачей об эгоистичной парковке. Так же, как и в классической задаче, N_x означает число размещенных интервалов на отрезке длины x. В этой модели выполняются равенства

$$EN_x = \frac{2x-1}{3} \quad \text{при} \quad x \geq 2 \quad \text{и} \quad N_x = 0 \quad \text{при} \quad x < 2. \tag{3}$$

В этой работе мы рассматриваем новую модель задачи о парковке, которую можно считать аналогом задачи об эгоистичной парковке в непрерывном случае.

На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$, который разбивает первоначальный отрезок на два отрезка $[0, t]$ и $[t+1, x]$, которые в дальнейшем продолжают заполняться по тому же правилу. Размещение интервала $(t, t+1)$ случайным образом означает, что t является случайной величиной с равномерным законом распределения на отрезке $[0, x-1]$. Если какой-то из отрезков $[0, t]$ или $[t+1, x]$ будет иметь длину меньше 2, то он в дальнейшем не заполняется. Указанный способ заполнения продолжается до тех пор, пока длина всех незаполненных отрезков окажется меньше 2. После этого подсчитывается количество размещенных интервалов. Его мы будем обозначать за M_x. Если в начале процесса заполнения длина первоначального отрезка $x < 2$, то $M_x = 0$.

Теорема. *Для определенной выше случайной величины M_x справедливо соотношение*

$$EM_x = \kappa x + \kappa - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \tag{4}$$

где

$$\kappa = \int_0^\infty (t+1)\exp\left(-t - 2\int_0^t \frac{1-\exp(-u)}{u}du\right)dt \approx 0.531417.$$

При доказательстве теоремы мы будем придерживаться схемы, предложенной в работах Дворецкого и Роббинса [10] и Реньи [1]. Докажем вначале следующую лемму.

Лемма. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная для $x \geq 0$ и удовлетворяющая условию*

$$f(x+1) = \frac{2}{x}\int_0^x f(t)dt + p(x+1), \tag{5}$$

где $p(x)$ — непрерывная функция, определенная для $x > 1$. И пусть выполнено

$$\sum_{i=2}^\infty \frac{p_i}{i} < \infty,$$

где через p_x обозначено

$$p_x = \sup_{x \leq t \leq x+1} |p(t)|.$$

Тогда существует константа λ такая, что

$$\sup_{n+1 \leq x \leq n+2} |f(x) - \lambda x - \lambda| \leq \frac{2^n}{n!} \sup_{1 \leq x \leq 2} |f(x) - \lambda x - \lambda| + \frac{2^n}{n!}\sum_{j=1}^n \frac{j!}{2^j}R_j,$$

где

$$R_j = \frac{2j+1}{j}p_{j+1} + \frac{2(j+1)(j+3)}{j}\sum_{i=j+2}^\infty \frac{p_i}{i+1}.$$

Доказательство леммы. Из равенства (5) для положительных x, y и $y > x$ имеем

$$f(y+1) = \frac{2}{y}\int_0^x f(t)dt + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)dt + p(y+1) = \frac{1}{y}(xf(x+1) - xp(x+1)) + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)dt + p(y+1)$$

или

$$f(y+1) = \frac{x}{y}f(x+1) + \frac{2}{y}\int_x^y f(t)dt + p(y+1) - \frac{s}{y}p(x+1). \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$I_x = \inf_{x \leq t \leq x+1} \frac{f(t)}{t+1}, \qquad S_x = \sup_{x \leq t \leq x+1} \frac{f(t)}{t+1}.$$

Можно легко увидеть, что функция $f(x) = x + 1$ удовлетворяет условию (5) с $p(x) \equiv 0$, и, следовательно,

$$y + 2 = \frac{x}{y}(x + 2) + \frac{2}{y}\int_x^y (t + 1)dt. \tag{7}$$

Вычтем из равенства (5) равенство (7), умноженное на I_x, и получим

$$f(y+1)-I_x\cdot(y+2) = \frac{x}{y}(f(x+1)-I_x\cdot(x+2))+\frac{2}{y}\int_x^y (f(t)-I_x\cdot(t+1))dt+p(y+1)-\frac{x}{y}p(x+1).$$

Следовательно, в силу определения I_x и свойств функции $p(x)$ для $x \le y \le x + 1$

$$f(y + 1) - I_x(y + 2) \ge 0 + 0 - p_{x+1} - p_{x+1} = -2p_{x+1}.$$

Из чего следует

$$I_{x+1} \ge I_x - \frac{2p_{x+1}}{x + 2}.$$

Вводя обозначение

$$\Delta_x = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_{x+i}}{x + i + 1}$$

и последовательно заменяя x в неравенстве выше на $x + 1, x + 2, \ldots$, получаем, что

$$I_y \ge I_x - \Delta_x.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\liminf_{y\to\infty} I_y \ge I_x - \Delta_x.$$

Из определения Δ_x и из условия леммы имеем $\Delta_x = o(1)$.

Поэтому справедливо неравенство

$$\liminf_{y\to\infty} I_y \ge \limsup_{x\to\infty} I_x.$$

Вспоминая неравенство $I_y \ge I_x - \Delta_x$ и полагая $x = 1$, делаем вывод:

$$\exists \lim_{x\to\infty} I_x = I_\infty, \quad I_\infty > -\infty.$$

Аналогичным образом получаем соответствующие утверждения для S_y:

$$S_y \le S_x + \Delta_x,$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} S_x = S_\infty, \quad S_\infty < \infty.$$

Так как $I_x \le S_x$, то выполнены неравенства

$$\infty < I_\infty \le S_\infty < \infty. \tag{8}$$

Вспоминая равенство (6), получаем для $x > 0$ и $y > 0$

$$f(y+1) - f(x+1) = \frac{x-y}{y} f(x+1) + \frac{2}{y} \int\limits_x^y f(t)dt + p(y+1) - \frac{x}{y} p(x+1).$$

В силу неравенства (8) имеем $f(x) = O(x)$.

Поэтому из последнего равенства следует соотношение

$$\sup_{x \le y \le x+1} |f(y+1) - f(x+1)| = O(1) + 2p_x,$$

из которого следует (учитывая $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{p_i}{i} < \infty$), что

$$S_x - I_x = o(1) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Поэтому

$$I_\infty = S_\infty \neq \pm\infty.$$

Теперь определим константу:

$$\kappa = \lim_{x \to \infty} I_x = \lim_{x \to \infty} S_x = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x+1}.$$

Применяя уже полученные неравенства, можем записать

$$I_x - \Delta_x \le \kappa \le S_x + \Delta_x.$$

Заметим, что для любого $x > 1$ найдется x' такое, что

$$x \le x' \le x+1, \qquad \left| \frac{f(x')}{x'+1} - \kappa \right| \le \Delta_x.$$

Это верно, поскольку в противном случае выполнялось бы одно из неравенств

$$I_x > \kappa + \Delta_x \quad \text{или} \quad S_x < \kappa - \Delta_x,$$

что противоречит (8).

Для каждого $x = n$ такое x' обозначим через x_n. Для $n \ge 2$ имеем

$$|f(x_n) - \kappa(x_n + 1)| \le (n+2)\Delta_n, \quad (n \le x_n \le n+1). \tag{9}$$

Введем функцию $f^*(x) = f(x) - \kappa(x+1)$. Заметим, функция f^* удовлетворяет условию леммы. Применяя равенство (6) для $n \le y \le n+1$ и $x = x_{n+1} - 1$ и равенство (9), получаем

$$|f^*(y+1)| \le \frac{n+1}{n}(n+3)\Delta_{n+1} + \frac{2}{n} \sup_{n \le t \le n+1} |f^*(t)| + p_{n+1} + \frac{n+1}{n} p_{n+1}.$$

Введем обозначение $T_x = \sup\limits_{x \le t \le x+1} |f^*(t)|$ и преобразуем последнее неравенство:

$$T_{n+1} \le \frac{2}{n} T_n + \frac{2n+1}{n} p_{n+1} + \frac{(n+1)(n+3)}{n} \Delta_{n+1} = \frac{2}{n} T_n + R_n,$$

где R_n удовлетворяет условию леммы.

Последовательно применяя данное неравенство для натуральных n, получаем требуемое утверждение:

$$T_{n+1} \leq \frac{2^n}{n!}T_1 + \frac{2^n}{n!}\left(\frac{1!}{2}R_1 + \frac{2!}{2^2}R_2 + \ldots + \frac{n!}{2^n}R_n\right).$$

$\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим отрезок $[0, x+1]$ и предположим, что первый случайно расположенный интервал занял место $(t, t+1)$. Заметим, что число интервалов по окончании процесса заполнения отрезка, расположенных слева от первого интервала — M_t, и число интервалов по окончании процесса заполнения отрезка, расположенных справа от первого интервала — M_{x-t}, являются независимыми случайными величинами при фиксированном значении t. Общее число размещенных интервалов будет равно $M_t + M_{x-t} + 1$. Таким образом,

$$E\left(M_x|t\right) = EM_t + EM_{x-t} + 1, \qquad (0 \leq t \leq x).$$

Введем следущее обозначение: $\mu(x) = EM_x$; учитывая, что случайная величина t равномерно распределена на $[0, x]$, имеем равенство

$$\mu(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x \mu(t)dt + 1.$$

Определим функцию $f(x) = \mu(x) + 1$. Тогда последнее равенство примет вид

$$f(x+1) = \frac{2}{x}\int\limits_0^x f(t)dt.$$

Начальные данные для функции $f(x)$ будут следующими:

$$f(x) = 1 \quad (0 \leq x < 2), \qquad \text{и} \qquad f(2) = 2.$$

Мы видим, что функция $f(x)$ последовательно определена на промежутках $2 < x \leq 3,\ 3 < x \leq 4, \ldots$:

$2 \leq x < 3:$

$$f(x) = 2,$$

$3 \leq x < 4:$

$$f(x) = \frac{2}{x-1}\left(\int\limits_0^2 f(t)dt + \int\limits_2^{x-1} f(t)dt\right) = 4 - \frac{4}{x-1},$$

$4 \leq x < 5:$

$$f(x) = \frac{2}{x-1}\left(\int\limits_0^2 f(t)dt + \int\limits_2^3 f(t)dt + \int\limits_3^{x-1} f(t)dt\right) = 8 - \frac{16}{x-1} - \frac{8}{x-1}\ln\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

и т. д.

Воспользуемся приведенной леммой для получения оценки $\mu(x)$. Как мы уже отметили, функция $f(x)=\mu(x)+1$ удовлетворяет равенству (5) с $p(x)\equiv 0$. Поэтому применима лемма и

$$\exists\kappa=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x)}{x}.$$

И в силу равенства (8) получаем для любых $x>0$

$$\inf_{x\le t\le x+1}\frac{\mu(t)+1}{t+1}=I_x\le\kappa\le S_x=\sup_{x\le t\le x+1}\frac{\mu(t)+1}{t+1}.$$

Вспомним, что при $3\le x<4$

$$f(x)=\frac{2}{x-1}\left(\int\limits_0^2 f(t)dt+\int\limits_2^{x-1} f(t)dt\right)=4-\frac{4}{x-1}.$$

Поэтому в случае $x=3$ имеют место неравенства

$$0.5\le\kappa\le 0.5359$$

Отметим, что можно получить и более точную оценку, если положить $x=4$:

$$4\le x\le 5:\qquad f(x)=8-\frac{16}{x-1}-\frac{8}{x-1}\ln\left(\frac{x-2}{2}\right),$$

тогда

$$0.5306\le\kappa\le 0.5333.$$

Из равенства $\mu(x)=0$ при $1\le x\le 2$ и из даже более грубой оценки $\frac{1}{2}<\kappa<\frac{2}{3}$ следует

$$\sup_{1\le x\le 2}|\mu(x)+1-\kappa x-\kappa|=\max_{1\le x\le 2}|1-\kappa x-\kappa|=|1-3\kappa|<1.$$

Итак, вновь воспользовавшись леммой для $p(x)\equiv 0$, получаем, что

$$\exists\kappa,\quad \frac{1}{2}<\kappa<1:\qquad \sup_{n+1\le x\le n+2}|\mu(x)+1-\kappa x-\kappa|<\frac{2^n}{n!}.$$

По формуле Стирлинга о приближении факториала справедливо соотношение

$$\mu(x)-\kappa x-\kappa+1=O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right),$$

что частично доказывает теорему.

Далее укажем явный вид константы κ.

У нас имеется интегральное уравнение

$$\mu(x+1)=\frac{2}{x}\int\limits_0^x\mu(t)dt+1 \tag{10}$$

с начальными данными

$$\begin{aligned}&\text{при}\quad 0\le x<2\qquad \mu(x)=0,\\ &\text{при}\quad 2\le x<3\qquad \mu(x)=1,\end{aligned}$$

$$\text{при} \quad 3 \le x < 4 \qquad \mu(x) = 3 - \frac{4}{x-1},$$

$$\text{при} \quad 4 \le x < 5 \qquad \mu(x) = 7 - \frac{16}{x-1} - \frac{8}{x-1} \ln\left(\frac{x-2}{2}\right). \tag{11}$$

Найдем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{x}.$$

Умножим обе части равенства (10) на x, продифференцируем по x и получим дифференциальное уравнение:

$$x\mu'(x+1) + \mu(x+1) = 2\mu(x) + 1 \quad \text{при} \;\; x > 1. \tag{12}$$

Рассмотрим преобразование Лапласа функции $\mu(x)$:

$$\phi(s) = \int\limits_0^\infty \mu(x) e^{-sx} dx.$$

Преобразование Лапласа существует, поскольку для функции $\mu(x)$ выполнены неравенства: $0 \le \mu(x) \le x$. Умножая обе части равенства (12) на e^{-sx} и интегрируя от 1 до ∞, приходим к следующему равенству:

$$\int\limits_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx + \int\limits_1^\infty \mu(x+1)e^{-sx} = 2\phi(s) + \frac{e^{-s}}{s}. \tag{13}$$

Учитывая начальные данные (11), перепишем каждое слагаемое в уравнении (13):

$$\int\limits_1^\infty \mu(x+1)e^{-sx}dx = e^s \int\limits_2^\infty \mu(t)e^{-st}dt = e^s\phi(s) \tag{14}$$

и

$$\int\limits_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx = e^s \left(\int\limits_1^\infty (x+1)\mu'(x+1)e^{-s(x+1)}dx - \int \mu'(x+1)e^{-s(x+1)}dx \right) =$$

$$= e^s \left(\int\limits_2^\infty t\mu'(t)e^{-st}dt - \int\limits_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt \right) = -\frac{d}{ds}\left(e^s \int\limits_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt \right),$$

то есть

$$\int\limits_1^\infty x\mu'(x+1)e^{-sx}dx = -\frac{d}{ds}\left(e^s \int\limits_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt \right). \tag{15}$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (15), получаем

$$\int\limits_2^\infty \mu'(t)e^{-st}dt = -e^{-2s} + s\phi(s). \tag{16}$$

Из равенств (13)–(16) следует, что функция $\phi(s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{ds}\left(se^s\phi(s)\right) = \phi(s)(e^s - 2) - e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

Введем новое обозначение $\omega(s) = e^s\phi(s)$. Тогда последнее уравнение перепишется в следующем виде:

$$s\omega'(s) = -2\omega(s)e^{-s} - e^{-s} - \frac{e^{-s}}{s}. \tag{17}$$

Это дифференциальное уравнение относительно ω можно решить, например, методом Лагранжа. Прежде чем выписывать решение уравнения (17), заметим, что в силу неравенства $0 \le \mu(x) \le x$ и условия $\mu(x) = 0$ при $0 \le x \le 1$ выполнено соотношение

$$0 \le \omega(s) \le e^s \int\limits_1^\infty xe^{-sx}dx = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s},$$

из которого следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \omega(s) = 0.$$

Тогда решение уравнения (17) имеет вид

$$\omega(s) = \frac{1}{s^2}\int\limits_s^\infty (t+1)\exp\left(-t - 2\int\limits_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right)dt.$$

Следовательно,

$$\phi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}\int\limits_0^\infty (t+1)\exp\left(-t - 2\int\limits_s^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right)dt,$$

из чего следует

$$\lim_{s\to+0} s^2\phi(s) = C_0,$$

где

$$C_0 = \int\limits_0^\infty (t+1)\exp\left(-t - 2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right)dt \approx 0.531417.$$

Далее воспользуемся тауберовой теоремой: если функция $\alpha(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$ и если при некотором $\beta > 0$

$$\lim_{s\to+0} s^\beta \int\limits_0^\infty e^{-sx}d\alpha(x) = C,$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x^\beta} = C.$$

Функция

$$\alpha(x) = \int_0^x \mu(t)dt$$

монотонно возрастает, и

$$s^\beta \int_0^\infty e^{-sx} d\alpha(x) = s^2 \phi(s).$$

Поэтому согласно тауберовой теореме при $\beta = 2$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x^2} = \frac{\kappa}{2}.$$

Разделив обе части уравнения (10) на $x+1$ и устремив x к бесконечности, получаем, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x+1)}{x+1} = C_0$$

или

$$\kappa = \lim_{x\to\infty} \frac{\mu(x)}{x} = C_0 \approx 0.531417,$$

что полностью доказывает теорему.

Приведем сравнение поведения среднего числа разместившихся единичных интервалов на отрезке большой длины для модели эгоистичной парковки, рассматриваемой в работе [7], и для модели, рассматриваемой в настоящей работе.

Напомним, в работе [7] было установлено, что

$$EN_x = \mu(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} - 1 \quad \text{при натуральных} \quad x \geq 2,$$

и значение константы $\lambda = \frac{2}{3}$.

В настоящей работе

$$EM_x = \mu(x) = \kappa x + \kappa - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right),$$

где $\kappa \approx 0.531417$.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что в непрерывном случае случайное размещение единичных интервалов будет менее плотным или, что то же самое, более разреженным.

Литература

1. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning space-filling. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Pinsky R. G., Problems from the Discrete to the Continuous. *Springer International Publishing Switzerland.* Chapter 3, 21–34 (2014).

3. Ільєнко А. Б., Фатенко В. В. Узагальнення задачі Реньї про паркування. *Наукові вісті НТУУ КПІ: міжнародний науково-технічний журнал* **4** (114), 54–60 (2017).

4. Clay M. P., Simanyi N. J. Rényi's parking problem revisited. 29 Dec. 2014. ArXiv:1406.1781v1 [math. PR].

5. Ананьевский С. М. Задача парковки для отрезков различной длины. *Записки научных семинаров ПОМИ* **228**, 16–23 (1996).

6. Ананьевский С. М., Крюков Н. А. Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* **6** (64), вып. 3, 353–362 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301

7. Ананьевский С. М., Крюков Н. А. Задача об эгоистичной парковке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 4, 549–555 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

8. Ананьевский С. М. Некоторые обобщения задачи о «парковке». *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3** (61), вып. 4, 525–532 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

9. Ананьевский С. М., Чен А. П. Обобщение задачи об эгоистичной парковке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 3, 464–472 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.307

10. Dvoretzky A., Robbins H. On the "parking" problem. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

Статья поступила в редакцию 31 марта 2023 г.;
доработана 28 апреля 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru
Чен Александр Петрович — ассистент преподавателя; sasha.24chen@mail.ru

A continuous version of the selfish parking problem

S. M. Ananjevskii[1], *A. P. Chen*[2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Western University,
1151, ul. Richmond, London, Ontario, Canada

For citation: Ananjevskii S. M., Chen A. P. A continuous version of the selfish parking problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 84–95. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.104 (In Russian)

The work is devoted to the study of a new model of random filling of a segment of large length with intervals of smaller length. A new formulation of the problem is considered. We study a model in which unit intervals are placed on a segment only if the segment being filled has a length of at least 2. In this case, the position of the placed interval is subject to a uniform distribution law. The paper investigates the behavior of the average number of placed intervals depending on the length of the filled segment. An exact expression is obtained for the analog of the Rényi constant.

Keywords: random filling of a segment, parking problem, asymptotic behavior of the expectation.

References

1. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning space-filling. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Pinsky R. G., Problems from the Discrete to the Continuous. *Springer International Publishing Switzerland.* Chapter 3, 21–34 (2014).

3. Ilienko A. B., Fatenko V. V. A Generalization of Rényi's Parking Problem. *Research Bulletin of the National Technical University of Ukraine. Kyiv Politechnic Institute. Physics and Mathematics* **4** (114), 54–60 (2017). (In Ukrainian)

4. Clay M. P., Simanyi N. J. Rényi's parking problem revisited. 29 Dec. 2014. ArXiv:1406.1781v1 [math. PR].

5. Ananjevskii S. M. The parking problem for segments of different length. Journal of Mathematical Sciences. *Zapiski nauchnyh semitnarov POMI* **228**, 16–23 (1996). (In Russian). [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **93**, 125–130 (1999)].

6. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. On Asymptotic Normality in One Generalization of the Renyi Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 3, 353–362 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **52**, iss. 3, 227–233 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301].

7. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A. The problem of selfish parking. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 4, 549–555 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 4, 322–326 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118040039].

8. Ananjevskii S. M. Some generalizations of "parking" problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (61), iss. 4, 525–532 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

9. Ananjevskii S. M., Chen A. P. Generalization of the selfish parking problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 3, 464–473 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.307 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 3, 290–296 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122030025].

10. Dvoretzky A., Robbins H. On the "parking" problem. *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

Received: March 31, 2023
Revised: April 28, 2023
Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Alexander P. Chen — sasha.24chen@mail.ru