Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
УДК 512.6, 512.7, 512.8
MSC 01, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22

Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. II. Ранние работы Суслина*

Н. А. Вавилов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Вавилов Н. А.* Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. II. Ранние работы Суслина // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 48–83.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.103

Настоящий обзор продолжает описание вклада петербургских математиков в теорию линейных, классических и алгебраических групп. Вторая часть посвящена работам Суслина 1970-х — начала 1980-х годов в области классической алгебраической K-теории и теории линейных и классических групп. Мы описываем общий контекст этих работ, формулируем некоторые наиболее важные результаты самого Суслина и его учеников, а также некоторые наиболее тесно связанные с ними последующие результаты.

Ключевые слова: линейные группы, классические группы, алгебраические группы, группы Шевалле, алгебраическая K-теория.

В настоящей части обзора, являющейся непосредственным продолжением [1], мы обсуждаем пионерские работы Андрея Суслина и его школы второй половины 1970-х — начала 1980-х годов по структурной теории **классических групп** над кольцами (см. [2–21]) и их изложение в обзорах самого Суслина [22–24]. Эти работы в значительной степени определили *вторую* революцию общности в этой области и сформировали ее общий контекст. Их влияние на основные темы и методы исследований на следующие 45–50 лет невозможно переоценить.

Чтобы поставить эти работы в контекст, обрисуем совсем конспективно историю этой области. Чуть более подробно эта история изложена в [25] (и в том, что касается групп над полями, в [26]).

• Ученые XIX в. изучали классические группы над классическими полями, такими как $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, в контексте **групп Ли**, и в контексте **групп перестановок** и совершенно другими методами, над конечными полями. Леонард Диксон, вероятно,

*Первая часть статьи см.: *Вавилов Н. А.* Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (63). Вып. 3. С. 381–405. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301

Современные результаты, упоминаемые в этой и дальнейших частях настоящего обзора, были поддержаны большим количеством грантов и проектов, среди которых следует особо упомянуть завершенные: 1) проект РНФ 14-11-00335 «Разложение унипотентов в редуктивных группах», 2) проект РНФ 17-11-01261 «Расщепимые редуктивные группы над кольцами и близкие к ним», и текущие: 3) проект фонда «Базис» 20-7-1-27-1 «Высшие символы в алгебраической K-теории», 4) проект РНФ 22-21-00257 «Алгебраические группы над кольцами и группы Стейнберга».

был одним из первых, кто *явно* осознал аналогию и около 1905 г. начал *единообразно* доказывать результаты над произвольными полями.

• После работ Германа Вейля и в особенности Жана Дьёдонне теория классических групп над произвольными полями и *телами* сформировалась как отдельная большая область исследований, известная как **геометрическая алгебра**, или **геометрия классических групп** [27, 28].

• В 1950–1960-е годы усилиями многих математиков, в первую очередь Клода Шевалле, Армана Бореля, Жака Титса, Тони Спрингера, Жана-Пьера Серра и других, классические группы над полями и *конечномерными* телами стали рассматриваться в основном в контексте теории **алгебраических групп**[1].

• В эти же годы, в основном в связи с потребностями теории чисел и в контексте теории арифметических групп, начали изучаться классические группы над нульмерными кольцами, такими как локальные или полулокальные, и над арифметическими кольцами (кольца главных идеалов, дедекиндовы и т. д.).

• Основополагающие работы Хаймана Басса 1960-х годов запустили *первую* революцию общности в этой области. А именно Басс [29] осознал, что во многих важных отношениях группы финитарных матриц бесконечной степени над произвольным (не обязательно даже коммутативным!) ассоциативным кольцом устроены так же, как обычные группы матриц над полем.

Но в действительности он сделал гораздо больше. Он ввел важнейшую новую размерность кольца, стабильный ранг $\mathrm{sr}(R)$, которая (с точностью до константы) легко мажорируется обычными размерностями. Совершенно поразительное открытие состояло в том, что в **стабильной области**, т. е. когда степень n достаточно велика по сравнению с $\mathrm{sr}(R)$, группы $\mathrm{GL}(n, R)$ все еще во многих аспектах ведут себя примерно так же, как группы над полем. Точнее, отличия от классических ответов есть, но они контролируются значениями неких новых арифметических инвариантов кольца, K-функторами.

• Эти работы послужили отправной точкой **классической алгебраической K-теории** [30]. В самом первом приближении алгебраическая K-теория — это линейная алгебра сегодня. Например, каждое конечномерное векторное пространство над полем является **свободным модулем**, т. е. имеет *базис*. Над кольцом это, вообще говоря, совершенно не так. Чтобы иметь базис, модуль должен для начала хотя бы иметь *координатную систему*, т. е. быть **проективным модулем**[2]. **Группа Гротендика** $\mathrm{K}_0(R)$ кольца R измеряет отклонение ответа от классического: чем она больше, тем больше существует проективных модулей конечного ранга, не являющихся свободными.

Аналогично, как мы все помним с первого курса, над полем группа $\mathrm{SL}(n, R)$ матриц с определителем 1 порождается элементарными преобразованиями первого типа. Над кольцом это, вообще говоря, совершенно не так. **Группа Уайтхеда** $\mathrm{K}_1(R)$ кольца R измеряет отклонение ответа от классического: чем она больше, тем больше существует обратимых матриц, не являющихся произведением элементарных.

[1] При этом возникло совершенно фундаментальное понимание, что одновременно с классическими группами следует изучать (предпочтительно теми же методами!) **исключительные группы**. В последние десятилетия эта тема стала одной из основных для петербургской алгебраической школы. Но сам Андрей Суслин заинтересовался этим не в то время, к которому относятся излагаемые здесь результаты, а значительно позже. Исследования исключительных групп будут упомянуты в заключительной (четвертой) части нашего обзора.

[2] С точки зрения топологии, геометрии и глобального анализа свободные модули — это **тривиальные расслоения**, а проективные модули — это **локально тривиальные расслоения**.

• Следуя Роберту Стейнбергу [31], Джон Милнор [32] определил группы Стейнберга $\mathrm{St}(n,R)$ и функтор $\mathrm{K}_2(R)$ для произвольных ассоциативных колец. Однако здесь возникает фундаментальное отличие от $\mathrm{K}_0(R)$ и $\mathrm{K}_1(R)$, состоящее в том, что группа $\mathrm{K}_2(R)$ уже совершенно нетривиальна и несет нетривиальную арифметическую информацию даже на уровне поля, *классический* ответ выполняется, вообще говоря, лишь для *конечных* полей.

• Фантастическим успехом алгебраической K-теории на начальном этапе было полное решение в работе Басса — Милнора — Серра [33] поставленной в XIX в. **конгруэнц-проблемы** для всех дедекиндовых колец арифметического типа (например, для колец целых в числовых полях). В простейшем виде это вопрос: верно ли, что каждая подгруппа конечного индекса в $\mathrm{SL}(n,R)$ содержит нетривиальную главную конгруэнц-подгруппу, т. е. все матрицы, сравнимые с e по модулю идеала $I \trianglelefteq R$, $I \neq 0$? В работе [33] обнаружена связь группы $\mathrm{K}_1(R)$ с центральными классическими темами алгебраической теории чисел, в частности с **законами взаимности**.

• В работах Басса и его последователей того периода, в первую очередь Энтони Бака, Леонида Васерштейна, Кита Денниса, Майкла Стайна, Андрея Суслина, Вильберда ван дер Каллена и др., были доказаны теоремы стабилизации для K-функторов (в первом изводе) и основные структурные теоремы для классических групп в стабильной области. Притом не только для $\mathrm{GL}(n,R)$ и других собственно классических групп, но и для различных их обобщений, таких как унитарные группы Бака (см. [25, 34]). Чуть позже, хотя и не в полном объеме аналогичные результаты были получены и для исключительных групп.

• Но в тот момент прозошло очередное чудо! Известно, что группа $\mathrm{GL}(2,R)$ ведет себя исключительным образом и надеяться для нее на стандартные ответы не приходится даже для столь просто устроенных колец как $R=\mathbb{Z}$. В 1972–1973 гг. Джон Уилсон и Игорь Голубчик [35, 36] независимо друг от друга заметили, что для групп $\mathrm{GL}(n,R)$ при $n \geq 3$ стандартное описание выполняется над произвольным *коммутативным* кольцом[3].

• Какое-то время это казалось необъяснимой изолированной диковинкой, но вскоре появилась работа Андрея Суслина [10], в которой было доказано[4], что снова над произвольным *коммутативным* кольцом при $n \geq 3$ элементарная подгруппа $E(n,R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$. Более того, там же был предложен систематический метод доказательства такого рода результатов: локально-глобальный **принцип Квиллена — Суслина**.

Эта работа и дальнейшие связанные с ней работы самого Андрея, его учеников, соавторов и последователей, оказали *огромное* и во многих отношениях *определяющее* влияние на все последующие исследования в области теории классических групп над кольцами. Здесь мы планируем чуть подробнее описать сами эти работы и их дальнейшее развитие в Петербурге. Нет, разумеется, никакой возможности отразить здесь *многие сотни* публикаций, инспирированных работами Суслина того времени, скажем в США, Китае или Индии, их мы цитируем очень выборочно, в основном только книги, обзоры и *некоторые* наиболее важные статьи.

[3]И в действительности, для колец, удовлетворяющих более слабым условиям коммутативности, но мы, разумеется, не имеем возможности углубляться здесь в теорию некоммутативных колец.

[4]Сама теорема нормальности доказана в 1976 г., в том числе для *почти* коммутативных колец, т. е. колец, конечно порожденных, как модуль над центром (см. по этому поводу работу Марата Туленбаева [17], где эта теорема в такой общности воспроизводится со ссылкой на Суслина).

Работы Суслина по проблеме Серра (на уровне K_0) и их роль в коммутативной алгебре очень хорошо известны и детально отражены в прекрасных монографиях, в том числе в энциклопедической по охвату книге Тцитюэна Лэма [37]. С другой стороны, дальнейшие работы Суслина на уровне K_2 и K_3, начиная с его великих работ с Сашей Меркурьевым [38–41], а также последующие циклы работ по K-теории Милнора, гомологической стабилизации, вырезанию, мотивным когомологиям, модулярной теории представлений алгебраических групп и т. д. прекрасно отражены в замечательном обзоре Эрика Фридландера и Меркурьева [42].

Поэтому здесь мы ограничиваемся жестким временным периодом (1974–1982) и главным образом работами Суслина на уровне K_1. И по временному охвату и по содержанию это ближе всего к тексту Сурендера Гупты и Павамана Мурти [43], с тем, разумеется, что здесь мы пытаемся отразить, как эти работы Суслина повлияли на основные тенденции развития области в последующие 45 лет.

В этом смысле настоящая часть нашего обзора является не заменой обзора [42], а *дополнением* к нему, где обсуждаются главным образом следующие результаты Суслина, оказавшие *огромное* влияние на все дальнейшие работы по структурной теории классических (и исключительных!) групп над кольцами, но при этом либо вообще не отраженные, либо лишь бегло упомянутые в [42]:

• теорема нормальности Суслина;

• локализационный метод Квиллена — Суслина;

• стабилизация в алгебраической K-теории (простое доказательство теоремы Басса — Васерштейна и аналогичного результата на уровне K_2, теоремы Суслина — Туленбаева, теоремы стабилизации для K-теории Володина);

• линейные группы над полиномиальными кольцами;

• дополняемость унимодулярных строк, матрицы Суслина.

Первоначально я планировал включить также высшие символы Меннике и законы взаимности, но это невозможно в силу ограничений объема.

При этом я даже не пытаюсь формулировать результаты в самой общей, точной или сильной форме. Основная цель — передать дух и стилистику этого направления и сформулировать в *простейшей* ситуации несколько ключевых результатов. Точные формулировки приводятся только для полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$, результаты для других групп лишь упоминаются.

1. Основные обозначения. Напомним несколько стандартных обозначений, используемых далее как в этой части обзора, так и в двух следующих частях. Хороших *современных* книг по теории линейных групп над кольцами нет, единственным источником продолжает оставаться написанная четверть века назад монография Александра Хана и Тимоти О'Миры [44]. Более подробно все эти пререквизиты напоминаются также в нашем обзоре с Алексеем Степановым [45].

1.1. Группы. Наши обозначения, относящиеся к теории групп, совершенно стандартны. Для двух элементов $x, y \in G$ через $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ обозначается их *левонормированный* коммутатор, а через $x^y = y^{-1}xy$ и ${}^y x = yxy^{-1}$ соответственно правый и левый сопряженные к x при помощи y. Кратные (alias высшие) коммутаторы также всегда предполагаются левонормированными, так что, например, $[x, y, z]$ обозначает $[[x, y], z]$.

Мы используем запись $H \le G$, чтобы подчеркнуть, что H является подгруппой в G, а не просто подмножеством, тогда мы написали бы $X \subseteq G$. В свою очередь, запись $H \trianglelefteq G$ обозначает, что подгруппа H нормальна в G, иными словами, что для любых двух элементов $x, y \in G$ из того, что $xy \in H$ вытекает, что $yx \in H$.

Для двух подмножеств $X, Y \subseteq G$ через $X \cdot Y$ или просто XY обозначается их произведение *по Минковскому*, $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$. Точно так же через X^{-1} обозначается множество $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. Множество X называется *симметрическим*, если $X^{-1} = X$.

1.2. Кольца. Пусть R — ассоциативное, но, вообще говоря, не обязательно коммутативное кольцо с 1. Обозначим через $\mathrm{Cent}(R)$ — центр кольца R, состоящий из тех элементов кольца R, которые коммутируют со всеми его элементами. Кольцо $A = \mathrm{Cent}(R)$ коммутативно, а R является A-алгеброй.

По умолчанию идеалами I кольца R называются только *двусторонние* идеалы, в противном случае мы всегда явно говорим о *левых* или *правых* идеалах. Чтобы указать, что I является идеалом в R, мы пишем $I \trianglelefteq R$. Каждому идеалу $I \trianglelefteq R$ отвечает каноническая проекция на фактор-кольцо $\rho_I : R \longrightarrow R/I$, отображающая элемент $\lambda \in R$ в его класс $\bar{\lambda} = \lambda \mod I = \lambda + I$ по модулю I.

1.3. Матрицы. Для двух натуральных чисел m, n через $M(m, n, R)$ обозначается аддитивная группа $m \times n$-матриц с коэффициентами из R. Как обычно, e_{ij} — *стандартная матричная единица*, т. е. матрица, у которой в позиции (i, j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях. Для матрицы $x \in M(m, n, R)$ через x_{ij} обозначается ее матричный элемент в позиции (i, j), так что

$$x = (x_{ij}) = \sum x_{ij} e_{ij}, \qquad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Через x_{*j} обозначается j-й столбец матрицы x, равный (x_{ij}), $1 \le i \le m$. Точно так же через x_{i*} обозначается ее i-я строка (x_{ij}), $1 \le j \le n$.

Матричное умножение превращает аддитивную группу $M(n, R) = M(n, n, R)$ квадратных матриц **степени** n в ассоциативное кольцо, называемое полным матричным кольцом степени n над R. В случае, когда термин «степень» имеет альтернативное значение, об элементах $M(n, R)$ говорят как о матрицах порядка или размера n. Многие вычисления основаны на том, что в терминах стандартных матричных единиц умножение матриц определяется следующим образом:

$$e_{ij} e_{hk} = \delta_{jh} e_{ik}, \qquad 1 \le i \le l, \quad 1 \le j, h \le m, \quad 1 \le k \le n.$$

Как обычно, через $e = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ обозначается единичная матрица степени n. Степень единичной матрицы обычно не фигурирует в обозначениях и определяется из контекста.

Кольцо $M(n, R)$ естественно истолковывается как кольцо линейных операторов свободного R-модуля ранга n.

• Пусть R^n — свободный *правый* R-модуль, состоящий из всех столбцов u высоты n с компонентами из R. Тогда $M(n, R)$ можно отождествить с кольцом эндоморфизмов R^n. А именно, $M(n, R)$ действует на R^n *слева*: $M(n, R) \times R^n \longrightarrow R^n$, $(x, u) \mapsto xu$.

• Следуя Полю Кону, обозначим свободный *левый* R-модуль, состоящий из строк длины n с компонентами из R через ${}^nR$. Ясно, что $M(n, R)$ действует на ${}^nR$ *справа*: ${}^nR \times M(n, R) \longrightarrow {}^nR$, $(v, x) \mapsto vx$.

2. Полная линейная группа. Воспроизведем теперь стандартные обозначения, относящиеся к линейным группам, необходимые для понимания дальнейшего.

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с 1, а n — натуральное число. Мультипликативная группа $M(n,R)^*$ полного матричного кольца $M(n,R)$ обозначается через $G = \mathrm{GL}(n,R)$ и называется **полной линейной группой** степени n над R. Таким образом, по определению

$$\mathrm{GL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \exists y \in M(n,R),\ xy = e = yx\}.$$

Мы обозначаем матрицу, обратную к матрице $g = (g_{ij}) \in G$, через $g^{-1} = (g'_{ij})$. Столбцы и строки обратной матрицы — через g'_{*j} и g'_{i*} соответственно.

Ясно, что $R \to \mathrm{GL}(n,R)$ является функтором из колец в группы. Иными словами, *кольцевой* гомоморфизм $\phi : R \longrightarrow S$ индуцирует *групповой* гомоморфизм

$$\mathrm{GL}(n,\phi) : \mathrm{GL}(n,R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,S), \qquad (g_{ij}) \mapsto (\phi(g_{ij})).$$

Особенно часто в дальнейшем возникает следующий частный случай. Пусть I — идеал кольца R. Рассмотрим каноническую проекцию $\rho_I : R \longrightarrow R/I$, посылающую элемент $\lambda \in R$ в элемент $\bar{\lambda} = \lambda \mod I = \lambda + I$. Эта проекция определяет **гомоморфизм редукции** $\rho_I : \mathrm{GL}(n,R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,R/I)$ такой, что образ матрицы $x = (x_{ij})$ равен $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$. Этот гомоморфизм известен как *редукция по модулю* I.

Как известно, для коммутативного основного кольца R можно построить мультипликативный гомоморфизм $\det : M(n,R) \longrightarrow R$, $\det(xy) = \det(x)\det(y)$. Теорема Крамера состоит в том, что матрица x над коммутативным кольцом R в том и только в том случае обратима, когда ее определитель $\det(x)$ обратим в R. Таким образом, в случае коммутативного кольца R полную линейную группу можно определить следующим образом:

$$\mathrm{GL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) \in R^*\}.$$

Для коммутативного кольца R можно определить **специальную линейную группу** степени n над R, состоящую из матриц с определителем 1,

$$\mathrm{SL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) = 1\}.$$

В силу мультипликативности определителя $\mathrm{SL}(n,R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$, причем фактор-группа $\mathrm{GL}(n,R)/\mathrm{SL}(n,R) \cong R^*$ абелева, $[\mathrm{GL}(n,R),\mathrm{GL}(n,R)] \le \mathrm{SL}(n,R)$.

3. Элементарные преобразования. Напомним, как выглядят самые просто устроенные — и тем самым самые важные! — классы элементов в $\mathrm{GL}(n,R)$, элементарные трансвекции и элементарные псевдоотражения. Это в точности элементарные преобразования первого и второго типа, которым мы учим студентов на первом курсе.

3.1. Элементарные преобразования первого типа. **Элементарной трансвекцией** называется матрица $t_{ij}(\xi)$ вида

$$t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}, \qquad \xi \in R, \quad 1 \le i \ne j \le n.$$

Изобразим для примера элементарные трансвекции в $\mathrm{GL}(2,R)$:

$$t_{12}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t_{21}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

это в точности матрицы того же типа, как те, которые фигурировали в теореме Санова.

Подгруппа полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, называется **элементарной подгруппой** и обозначается $E = E(n, R)$. Таким образом, по определению

$$E(n, R) = \big\langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in R,\ 1 \leq i \neq j \leq n \big\rangle.$$

В алгебраической K-теории принято называть элементы $E(n, R)$ **элементарными матрицами**. Чтобы избежать конфликта с традиционным словоупотреблением, элементарные трансвекции и элементарные псевдоотражения называются **элементарными преобразованиями**.

Пусть кольцо R коммутативно. Тогда определитель всех трансвекций равен 1. Поэтому заведомо $E(n, R) \leq \mathrm{SL}(n, R)$, так что в общем случае никак нельзя ожидать, что $E(n, R) = \mathrm{GL}(n, R)$.

В некоторых важных случаях группа $\mathrm{SL}(n, R)$ порождается элементарными преобразованиями первого типа, иными словами, имеет место равенство $E(n, R) = \mathrm{SL}(n, R)$. Скажем, на первом курсе мы доказываем, что это так для поля $R = K$ и для эвклидова кольца R, например для $\mathbb{Z}$ или $K[x]$.

Однако в общем случае это уже совершенно не так и, вообще говоря, $E(n, R) < \mathrm{SL}(n, R)$ уже для колец главных идеалов. Именно с этим связан известный факт, что приведение матриц к нормальной форме Смита над кольцами главных идеалов гораздо труднее, чем над эвклидовыми кольцами.

3.2. Элементарные преобразования второго типа. Сейчас мы подправим определение элементарной группы, с тем чтобы получить группу, которая еще ближе к $\mathrm{GL}(n, R)$. В коммутативном случае определитель трансвекции равен 1. Таким образом, чтобы получить хорошее приближение к $\mathrm{GL}(n, K)$, нужно ввести другой тип элементарных преобразований, для которых определитель может принимать произвольные обратимые значения.

Для обратимого $\varepsilon \in R^*$ определим **элементарное псевдоотражение**:

$$d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}, \quad \varepsilon \in R^*, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Иными словами, $d_i(\varepsilon) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon, 1, \ldots, 1)$, где ε стоит на i-м месте. Ясно, что $d_i(\varepsilon)^{-1} = d_i(\varepsilon^{-1})$, так что действительно $d_i(\varepsilon) \in \mathrm{GL}(n, R)$ для всех обратимых ε.

Для примера изобразим элементарные псевдоотражения в $\mathrm{GL}(2, R)$:

$$d_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

4. Относительные группы. Пусть теперь I — идеал кольца R. Сейчас мы определим аналоги полной линейной и элементарной групп, зависящие от *пары* (R, I), так называемые *относительные группы*.

4.1. Конгруэнц-подгруппы. Ядро гомоморфизма редукции ρ_I называется **главной конгруэнц-подгруппой** в $\mathrm{GL}(n, R)$ уровня I и обозначается $\mathrm{GL}(n, R, I)$. По определению

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R/I).$$

Две матрицы $x = (x_{ij})$ и $y = (y_{ij})$ называются **сравнимыми по модулю** I, если $x_{ij} \equiv y_{ij} \pmod I$ для всех $1 \le i, j \le n$. Как и для скаляров, сравнимость по модулю I обозначается через $x \equiv y \pmod I$. Главная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{GL}(n, R, I)$ состоит из всех матриц $x \in GL(n, R)$, сравнимых с e по модулю I:

$$\mathrm{GL}(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv e \pmod I\}.$$

Так как ядро *любого* гомоморфизма является нормальной подгруппой, тогда в группе $\mathrm{GL}(n, R)$ может быть довольно много нормальных подгрупп, по крайней мере, если в кольце R много идеалов.

С идеалом I связана еще одна естественная нормальная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$. А именно рассмотрим центр $C(n, R/I)$ группы $\mathrm{GL}(n, R/I)$. Полный прообраз группы $C(n, R/I)$ относительно гомоморфизма редукции ρ_I обозначается через $C(n, R, I)$ и называется **полной конгруэнц-подгруппой** уровня I. $C(n, R, I) = \rho_I^{-1}(C(n, R/I))$. Так как $C(n, R)$ является ядром канонической проекции π_R : $\mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n, R)$, это значит, что $C(n, R, I)$ является ядром $\pi_{R/I} \circ \rho_I$:

$$1 \longrightarrow C(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n, R/I).$$

Тем самым $C(n, R, I)$ тоже является нормальной подгруппой в $\mathrm{GL}(n, R)$. Хайман Басс обозначал группу $C(n, R, I)$ через $\mathrm{GL}'(n, R, I)$, в то время как в книге Хана и О'Миры используется обозначение $\mathrm{GL}^{\sim}(n, R, I)$. Однако обозначение $C(n, R, I)$ является общепринятым в русских источниках и кажется нам более суггестивным.

Переводя это определение на язык сравнений, мы видим, что

$$C(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv \lambda e \pmod I,\ \bar{\lambda} \in \mathrm{Cent}(R/I)\}.$$

4.2. Относительные элементарные группы. Элементарная трансвекция $x = t_{ij}(\xi)$ такая, что $\xi \in I$, называется трансвекцией **уровня** I. Заметим, что классически в этом случае говорили, что уровень x *содержится в* I.

Рассмотрим подгруппу $E(n, I)$ в $E(n, R)$, порожденую всеми элементарными трансвекциями уровня I:

$$E(n, I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \le i \ne j \le n \rangle.$$

Снова эта группа не зависит от выбора объемлющего кольца R с 1, а лишь от самого I, рассматриваемого как кольцо без 1.

Однако, с точки зрения группы $\mathrm{GL}(n, R)$, группа $E(n, I)$ не может быть правильным аналогом элементарной группы $E(n, R)$. Дело в том, что, вообще говоря, группа $E(n, I)$ не может быть нормальной в $\mathrm{GL}(n, R)$. Почему? Возьмем матрицу $x = (x_{ij}) \in E(n, I)$. Тогда $x_{ij} \equiv 0 \pmod I$ для $i \ne j$, но $x_{ii} \equiv 1 \pmod{I^2}$. Но это означает, что, вообще говоря, даже *элементарные сопряженные*

$$z_{ij}(\xi, \zeta) = t_{ji}(\zeta) t_{ij}(\xi) t_{ji}(-\zeta), \qquad \xi \in I, \quad \zeta \in R,$$

не могут принадлежать $E(n, I)$. В самом деле, диагональные элементы

$$z_{12}(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} 1 - \xi\zeta & \xi \\ -\zeta\xi\zeta & 1 + \zeta\xi \end{pmatrix}$$

сравнимы с 1 по модулю I, но, вообще говоря, не по модулю I^2.

Поэтому правильная **относительная элементарная группа** — это нормальное замыкание подгруппы $E(n, I)$ в $E(n, R)$. Эта группа уже зависит от кольца R, что и отражено в ее обозначении — $E(n, R, I)$.

5. Предельная линейная группа и функтор K_1**.** Теперь у нас все готово, чтобы определить важнейший инвариант колец.

5.1. Предельная линейная группа. Через $x_1 \oplus \ldots \oplus x_t$ обозначается **прямая сумма** матриц $x_1, \ldots, x_t$, $x_i \in \mathrm{GL}(n_i, R)$, т. е. блочно диагональная матрица с блоками $x_1, \ldots, x_t$ на главной диагонали и нулями во всех остальных местах. Иногда $x_1 \oplus \ldots \oplus x_t$ называется также **диагональной суммой** $x_1, \ldots, x_t$, и обозначается $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_t)$. Например,

$$x \oplus y = \mathrm{diag}(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $m > n$. Определим вложение $\psi = \psi_n^m$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ степени n в полную линейную группу $\mathrm{GL}(m, R)$ степени m, полагая

$$\psi(x) = x \oplus e = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где e — единичная матрица степени $n - m$, это то, что по-английски называется stability embeddings. В дальнейшем мы *отождествляем* $\mathrm{GL}(n, R)$ с ее образом $\psi(\mathrm{GL}(n, R)) \leq \mathrm{GL}(m, R)$ относительно этого вложения. Особенно важны вложения $\psi_n = \psi_n^{n+1}$, увеличивающие степень матриц на 1.

Ясно, что эти вложения согласованны, иными словами, $\psi_n^l = \psi_m^l \circ \psi_n^m$ для любых $l > m > n$. Индуктивный предел направленной системы $(\mathrm{GL}(n, R), \phi_n^m)$

$$\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}(n, R) = \bigcup \mathrm{GL}(n, R)$$

совпадает с *объединением* всех групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \in \mathbb{N}$, по отношению к этим вложениям, и называется **предельной полной линейной группой** = quite general linear group. Предельные группы часто называются также **стабильными**.

Простейший способ представлять себе $\mathrm{GL}(R)$ состоит в том, чтобы изображать ее элементы бесконечными матрицами

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

такими, что $x_{ij} \in R$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$ и при этом $x_{ij} \neq \delta_{ij}$ лишь для конечного числа пар (i, j). Такие *формально* бесконечные — но отличающиеся от единичной матрицы лишь в конечном числе позиций! — матрицы часто называются **финитарными**. Группа $\mathrm{GL}(R)$ состоит из всех *обратимых* финитарных матриц.

Ясно, что семейства подгрупп $E(n, R)$, $\mathrm{GL}(n, R, I)$ и $E(n, R, I)$ согласованны с вложениями ψ_n^m, в том смысле, что при вложении каждая из этих подгрупп переходит в подгруппу того же типа, но большей степени.

• Это означает, что мы можем определить **предельные элементарные группы** $E(R)$ посредством

$$E(R) = \varinjlim E(n, R) = \bigcup E(n, R).$$

Пусть теперь I — идеал в R. Главные конгруэнц-подгруппы $\mathrm{GL}(n, R, I)$ и относительные элементарные группы $E(n, R, I)$ также согласованы с этими вложениями. В частности, можно определить соответствующие предельные группы, а именно:

• **предельную главную конгруэнц-подгруппу** уровня I

$$\mathrm{GL}(R, I) = \varinjlim \mathrm{GL}(n, R, I) = \bigcup \mathrm{GL}(n, R, I),$$

• **предельную относительную элементарную группу** уровня I

$$E(R, I) = \varinjlim E(n, R, I) = \bigcup E(n, R, I),$$

Великое наблюдение Хаймана Басса [29] состояло в том, что с точки зрения структуры линейные группы устроены тем проще, чем больше их степень. В частности, предельные линейные группы над *произвольным* ассоциативным кольцом устроены примерно так же, как линейные группы конечной степени над полем.

5.2. Функторы $\mathrm{K}_1(n, R, I)$**.** Классическая **лемма Уайтхеда** утверждает, что для любого идеала I в R соответствующая *предельная* относительная элементарная группа $E(R, I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(R)$ и при этом фактор-группа $\mathrm{GL}(R, I)/\,\mathrm{E}(R, I)$ абелева. В действительности имеет даже место несколько более точный результат [32, лемма 4.3]. Группа $\mathrm{GL}(R, I)/E(R, I)$ совпадает с центром $\mathrm{GL}(R)/E(R, I)$.

Фактор-группа $\mathrm{GL}(R, I)/E(R, I)$ настолько важна, что заслуживает специального обозначения. А именно

$$\mathrm{K}_1(R, I) = \mathrm{GL}(R, I)/E(R, I)$$

и $\mathrm{K}_1(R) = \mathrm{K}_1(R, R)$. *Абелева* группа $\mathrm{K}_1(R, I)$ называется K_1**-функтором** пары (R, I), а $\mathrm{K}_1(R)$ называется K_1**-функтором** кольца R.

Хотелось бы по аналогии определить нестабильный K_1-функтор:

$$\mathrm{K}_1(n, R, I) = \mathrm{GL}(n, R, I)/E(n, R, I),$$

однако, вообще говоря, совершенно неясно, почему $\mathrm{K}_1(n, R, I)$ является *группой*, а не просто множеством с отмеченной точкой. Иными словами, почему $E(n, R, I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R, I)$?

Оказывается, в двух важнейших контекстах это действительно так. Один из этих контекстов **стабильная** $=$ **абелева** K-теория был создан Бассом, а второй — **нестабильная** $=$ **неабелева** K-теория — Суслиным.

6. В стабильном ранге. Начнем придавать точный смысл утверждению, что линейные группы устроены тем проще, чем больше их степень.

6.1. Стабильный ранг. Самым полезным понятием размерности, с точки зрения приложений в линейной алгебре, является введенный Хайманом Бассом в 1964 г. стабильный ранг [29].

Напомним, что строка $(a_1, \ldots, a_n) \in {}^nR$ называется **унимодулярной**, если ее компоненты $a_1, \ldots, a_n$ порождают R как *правый* идеал, т. е. $a_1R + \ldots + a_nR = R$. Иными словами, найдутся такие $b_1, \ldots, b_n \in R$, что $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 1$.

Пусть $I \trianglelefteq R$ — идеал в R. Унимодулярная строка $(a_1, \ldots, a_n) \in {}^nR$ называется I**-унимодулярной**, если $a_1 - 1 \in I$ и $a_i \in I$ для всех $2 \le i \le n$. Таким образом,

I-унимодулярная строка $(a_1, \ldots, a_n)$ сравнима со строкой $(1, 0, \ldots, 0)$ по модулю I. Множество всех I-унимодулярных строк длины n обозначается через $\mathrm{Umd}(n, R, I)$, а если $R = I$, то просто через $\mathrm{Umd}(n, R)$. Заметим, что d здесь — это первая буква слова destra.

Аналогичные понятия можно ввести с заменой строк на столбцы. А именно столбец $(b_1, \ldots, b_n)^T \in R^n$ называется **унимодулярным**, если его компоненты $b_1, \ldots, b_n$ порождают R как *левый* идеал, т. е. $Rb_1 + \ldots + Rb_n = R$. Иными словами, найдутся такие $a_1, \ldots, a_n \in R$, что $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 1$. Этот столбец называется **I-унимодулярным**, если $(b_1, \ldots, b_n)^T \equiv e_1 \pmod I$. Множество всех I-унимодулярных столбцов высоты n обозначается через $\mathrm{Ums}(n, R, I)$, а в случае $R = I$ просто через $\mathrm{Ums}(n, R)$. Здесь s — первая буква слова sinistra.

Строка $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ называется **стабильной**, если найдутся $b_1, \ldots, b_n \in R$ такие, что *правый* идеал, порожденный $a_1 + a_{n+1}b_1, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n$, совпадает с *правым* идеалом, порожденным $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Строка называется **I-стабильной**, если можно найти такие $b_1, \ldots, b_n$, принадлежащие идеалу I.

Говорят, что **стабильный ранг** пары (R, I) равен n и пишут $\mathrm{sr}(R, I) = n$, если:

• выполняется условие Басса $\mathrm{SR}_{n+1}(R, I)$, каждая I-унимодулярная строка длины $n + 1$ является I-стабильной;

• не выполняется условие Басса $\mathrm{SR}_n(R, I)$, существует I-унимодулярная строка длины n, не являющаяся I-стабильной.

Если такого n не существует — иными словами, если существуют сколь угодно длинные нестабильные унимодулярные строки, — то говорят, что стабильный ранг пары бесконечен, $\mathrm{sr}(R, I) = \infty$. Как обычно, $\mathrm{sr}(R, R)$ обозначается просто через $\mathrm{sr}(R)$ и называется **стабильным рангом** кольца R.

В действительности термин «стабильный ранг» и обозначение sr появились в результате неправильного перевода. Первоначально Хайман Басс говорил об области стабильности равной stable range, но Леонид Васерштейн [46, 47] ошибочно истолковал range как rank. В результате возник чрезвычайно полезный инвариант колец, вероятно *самый* полезный с точки зрения линейной алгебры.

Стоит предостеречь, что значение $\mathrm{sr}(R)$ сдвинуто на 1 по сравнению с условием Басса $\mathrm{SR}_n(R)$. Например, стабильный ранг поля K равен 1, в то время как с точки зрения Басса выполняется условие $\mathrm{SR}_2(K)$, а 1 не попадает в *область стабильности*. Чтобы добавить еще немного неопределенности, Вильберд ван дер Каллен предложил для $\mathrm{sr}(R) - 1$ обозначение $\mathrm{kdim}(R)$, так что в его обозначениях $\mathrm{kdim}(K) = 0$.

Основным общим результатом о связи стабильного ранга и размерности является теорема Басса. В простейшей версии она оценивает стабильный ранг через **размерность Крулля** $\dim(A) = \dim(\mathrm{Spec}(A))$. В простейшем виде **теорему Басса** можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Если R кольцо, конечно порожденное как модуль над коммутативным кольцом A, то* $\mathrm{sr}(R) \leq \dim(A) + 1$.

Упомянем два простейших следствия этого результата:

• если R дедекиндово, то $\mathrm{sr}(R) \leq 2$;

• если K поле, то $\mathrm{sr}(K[x_1, \ldots, x_n]) \leq n + 1$.

В действительности Басс доказал более сильный результат, в котором фигурирует не размерность Крулля, а более тонкий инвариант кольца — **размерность Басса — Серра** $\delta(R)$. Мы не будем напоминать нужные для ее определения понятия, относящиеся к области комбинаторной топологии, а отметим лишь, что это более точный вариант **размерности Джекобсона** $\mathrm{jdim}(A) = \dim(\mathrm{Max}(A))$ (см. [30, гл. III, предложение 3.13]). Вот та же самая теорема Басса на bis.

Теорема 2. *Если R кольцо, конечно порожденное как модуль над коммутативным кольцом A, то* $\mathrm{sr}(R) \leq \delta(A) + 1$.

6.2. Строение $\mathrm{GL}(n, R)$ ***в стабильной области.*** Основные структурные результаты, верные для линейных групп над полями и для предельных линейных групп, продолжают выполняться и для групп $\mathrm{GL}(n, R)$ в **стабильной области**. Иными словами, для всех колец R, для которых $n > \mathrm{sr}(R)$. Это классическое наблюдение Хаймана Басса [29, 30] послужило отправной точкой всей современной теории линейных групп над кольцами.

Как уже упоминалось, группы $\mathrm{GL}(2, R)$ ведут себя патологическим образом и нет, вообще говоря, никакой надежды доказать для них структурные теоремы для сколь-нибудь общих колец. Поэтому всюду далее мы ограничиваемся случаем $n \geq 3$. Сформулируем два типичных результата Хаймана Басса [29], которые показывают, что для больших n дела обстоят гораздо лучше.

Теорема 3. *Предположим, что* $n \geq \max(\mathrm{sr}(R)+1, 3)$*, а $A, B \trianglelefteq R$ — двусторонние идеалы R. Тогда имеет место равенство*

$$[E(n, R, A), \mathrm{GL}(n, R, B)] = [E(n, R, A), E(n, R, B)].$$

Упомянем два простейших частных случая этого результата:

- в условиях теоремы $E(n, R, I) \trianglelefteq \mathrm{GL}(n, R)$;
- в условиях теоремы $[E(n, R), \mathrm{GL}(n, R, I)] = E(n, R, I)$.

Вторая из этих формул является ключом к доказательству следующего результата.

Теорема 4. *Предположим, что* $n \geq \max(\mathrm{sr}(R) + 1, 3)$. *Тогда подгруппа $H \leq \mathrm{GL}(n, R)$ в том и только том случае нормализуется элементарной группой* $\mathrm{E}(n, R)$, *когда существует идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что $E(n, R, I) \leq H \leq C(n, R, I)$.*

Такой идеал I единственнен и определяется формулой $E(n, R, I) = [E(n, R), H]$.

7. Теорема нормальности Суслина. Хотелось бы понять, что происходит в **метастабильной области**, когда n меньше стабильного ранга кольца.

Определение групп $E(n, R)$ и $E(n, R, I)$ явным образом ссылается на *элементарные* трансвекции, т. е. на стандартный базис модуля R^n. В 1976 г. Андрей Суслин обнаружил совершенно поразительный факт, что для *коммутативных* колец при $n \geq 3$ сами эти группы не зависят от выбора базиса. Следующий ключевой результат, теорема нормальности Суслина, впервые опубликован в [10] (см. также [17]).

Теорема 5. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$. Тогда для любого идеала $I \trianglelefteq R$ относительная элементарная группа $E(n, R, I)$ нормальна в* $\mathrm{GL}(n, R)$.

С точки зрения философа все доказательства этого результата устроены совершенно одинаково. Все трансвекции вида $gt_{ij}(\xi)g^{-1}$, где $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, — или какого-то чуть более общего вида — раскладываются в произведение элементарных множителей. Однако математику более интересен вопрос: *как именно* осуществляется такое разложение?

7.1. Лемма Суслина. В действительности исходное доказательство Суслина доказывало значительно больше, а именно что все трансвекции вида $e + u\xi v$, где $n \geq 3$, $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, $vu = 0$, $\xi \in R$, для которых строка v унимодулярна, а не только сопряженные элементарных трансвекций, принадлежат $E(n, R)$

Это доказательство основывалось на следующей лемме. Пусть вначале $v \in {}^nR$ — произвольная строка. Мы рассматриваем линейное уравнение

$$vx = v_1x_1 + \ldots + v_nx_n = 0$$

по отношению к $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in R^n$. Для коммутативного кольца R у этого уравнения есть следующие очевидные решения: $x(i, j) = v_je_i - v_ie_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Оказывается, в случае, когда строка u унимодулярна, любое решение этого уравнения является линейной комбинацией этих очевидных решений.

Лемма 1. *Пусть R — коммутативное кольцо и $n \geq 3$. Тогда для унимодулярной строки $u \in {}^nR$ любое решение $x \in R^n$ однородного линейного уравнения $ux = 0$ является линейной комбинацией решений $x(i, j)$, $1 \leq i < j \leq n$:*

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^t = \sum_{i<j} c_{ij}x(i, j).$$

Заметим, что можно положить $c_{ij} = v_jx_i - v_ix_j$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Ясно, что $c = (c_{ij})$ образует антисимметрическую матрицу. Напомним, что матрица x называется антисимметрической, если $x_{ij} = -x_{ji}$ для всех $i \neq j$ и $x_{ii} = 0$. Обозначим через $\mathrm{Alt}(n)$ множество всех антисимметрических матриц степени n.

Это замечание позволяет дать следующую чрезвычайно элегантную переформулировку и усиление первоначального рассуждения Андрея Суслина [10] в терминах антисимметрических матриц, [8].

Теорема 6. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$, $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, $vu = 0$. Тогда $e + u\xi v \in E(n, R)$ для всех ξ принадлежащих идеалу, порожденному компонентами столбца u и строки v.*

Таким образом, не нужно требовать даже, чтобы столбец u или строка v по отдельности были унимодулярны.

7.2. Разложение трансвекций. В 1987 г. Алексей Степанов предложил замечательную идею доказательства теоремы Суслина, которая доказывает лишь принадлежность элементарной группе трансвекций вида $gt_{ij}(\xi)g^{-1}$, где $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, но зато с лучшей оценкой на количество элементарных множителей[5]. Следующий результат является небольшим уточнением «темы» работы [49].

Теорема 7. *Пусть R — коммутативное кольцо, $I \trianglelefteq R$ — идеал в нем. Тогда для любой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $n \geq 3$, элементарная группа $\mathrm{E}(n, R, I)$ порождается трансвекциями $e + e_i\xi v$ такими, что $1 \leq i \leq n$, причем $v_i = 0$, а в строке vg^{-1} есть хотя бы одна нулевая компонента.*

[5]Однако в то время мы не рассматривали этот результат как имеющий самостоятельную ценность. Если не считать написанную в 1987 г. кандидатскую диссертацию самого Степанова и мою докторскую диссертацию того же года, первая официальная публикация этой идеи содержится в нашей совместной работе с Евгением Плоткиным [48], сразу в контексте групп Шевалле. Разумеется, все это изменилось, когда мы стали интересоваться явными оценками, о чем будет упомянуто в заключительной части настоящего обзора.

Заметим, что условие $v_i = 0$ необходимо, чтобы $e + e_i\xi v$ действительно было трансвекцией, которая в этом случае автоматически принадлежит $E(n, R, I)$. С другой стороны, наличие нулевой компоненты в строке vg^{-1} гарантирует, что и трансвекция $g(e + e_i\xi v)g^{-1}$ также принадлежит $E(n, R, I)$.

7.3. Контрпримеры. Для $n = 2$ следующий эффектный контрпример, развивающий тему Поля Кона [50], был приведен самим Суслиным [4].

Пусть F — поле алгебраических функций от одной переменной над полем констант K и пусть S — некоторое конечное множество точек поля F. Обозначим через $\mathcal{O}_S$ подкольцо в F, состоящее из функций, не имеющих полюсов вне S. В случае, когда $S = \{v\}$ состоит из одной точки, будем писать $\mathcal{O}_v$ вместо $\mathcal{O}_{\{v\}}$. В случае, когда $\deg(v) = 1$, кольцо $\mathcal{O}_v$ изоморфно кольцу многочленов $K[t]$ и, следовательно, $E(2, K[t]) = \mathrm{SL}(2, K[t])$. Оказывается, это единственный случай, когда $E(2, \mathcal{O}_v)$ нормальна в $\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v)$.

Теорема 8. *Группа $E(2, \mathcal{O}_v)$ в том и только том случае является нормальным делителем в $\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_v)$, когда $\deg(v) = 1$.*

Построение примера для $n \geq 3$ потребовало чуть больше усилий. Следующий замечательный результат Виктора Герасимова показывает, что нет, вообще говоря, никакой надежды обобщить теорему нормальности Суслина на *произвольные* ассоциативные кольца.

Пусть K — произвольное поле. Рассмотрим свободную алгебру от $2n^2$ некоммутирующих переменных x_{ij} и y_{ij} и возьмем ее фактор-алгебру

$$R = K\big\langle x_{ij}, y_{ij}\big\rangle / \big(xy = e = yx\big)$$

по соотношениям, гарантирующим, что общие матрицы $x = (x_{ij})$ и $y = (y_{ij})$ являются двусторонне обратимыми.

Теорема 9. *Группа $\mathrm{GL}(n, R)$ допускает разложение в амальгамированное произведение*

$$\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GE}(n, R) *_{K^*} R^*.$$

Особенно эффектно выглядит этот пример в случае $K = \mathbb{F}_2$, когда $\mathrm{GL}(n, R)$ является свободным произведением $E(n, R)$ и свободной циклической группы, порожденной образом матрицы x. Тем самым в этом случае подгруппа $E(n, R)$ выделяется нетривиальным свободным сомножителем в $\mathrm{GL}(n, R)$ и, значит, настолько далека от нормальности, насколько это вообще можно себе представить.

Это не значит, конечно, что теорему Суслина вообще нельзя обобщить на некоммутативные кольца. Например, как уже упоминалось, сам Суслин обобщил ее на почти коммутативные кольца, т. е. кольца конечномерные как модуль над своим центром. Игорь Голубчик, совместно с Виктором Марковым и Александром Васильевичем Михалевым [52, 53] и другие ученики Михалева, в особенности Сергей Хлебутин, фактически[6] обобщили ее на чрезвычайно широкие классы колец, включающие в себя, в частности, кольца, удовлетворяющие нетривиальному полиномиальному тождеству (PI-кольца). Энтони Бак [54] обобщил ее на квазиконечные

[6] Формально там сформулированы несколько более слабые результаты типа субнормальности. Но, как замечено в [49], фактически из них с учетом совершенности $E(n, R)$ и простых теоретико-групповых соображений типа тождества Холла — Витта, вытекает нормальность.

кольца (правильно определенные индуктивные пределы почти коммутативных колец). Есть и другие более технические варианты в терминах локального стабильного ранга и т. д., детальный обзор можно найти в [25, 34, 49].

7.4. Стандартные коммутационные формулы. Для проведения редукции уровня в духе Басса при описании нормальных подгрупп в $\mathrm{GL}(n, R)$, о чем пойдет речь в следующем разделе, Леонид Васерштейн [55], а также Зенон Боревич и автор [56] доказали следующий пандан к теореме Суслина.

Теорема 10. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$. Тогда для любого идеала $I \trianglelefteq R$ имеет место коммутационная формула $[E(n, R), \mathrm{GL}(n, R, I)] = E(n, R, I)$.*

При этом оба первых доказательства были основаны на идеях Суслина: мы с Боревичем использовали сформулированную выше лемму Суслина, а Васерштейн — лемму Квиллена — Суслина.

Эта тема получила большое развитие в последние 10–15 лет. Леша Степанов, Рузби Хазрат, Дзухонг Чжанг и автор доказали большое количество различных совместных обобщений теорем 6 и 10 для *пар* идеалов, в духе теоремы 3. Сформулируем один из первых наших результатов в этом направлении.

Теорема 11. *Пусть R — квазиконечное кольцо, $n \geq 3$. Тогда для двух любых идеалов $A, B \trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$[E(n, R, A), \mathrm{GL}(n, R, B)] = [E(n, R, A), E(n, R, B)].$$

Вначале мы с Лешей [57] доказали этот (и на самом деле чуть более сильный) результат для коммутативных колец методом **разложения унипотентов**. Потом Рузби и Дзухонг [58] перенесли его в такую общность, используя развитый ими относительный вариант **метода Квиллена — Суслина**[7]. Наконец, мы с Лешей [59] заметили, что при помощи соображений в стиле **релятивизации** (использовавшейся ранее Стайном, Суоном, Суслиным и другими) можно вывести этот результат в такой общности непосредственно из обобщения Бака [54] теоремы Суслина, основанного на его **методе локализации-пополнения**. Подробнее обсуждение такого рода результатов, их вариантов, обобщений и приложений можно найти в наших совместных работах [60–63]. В некотором смысле финальным результатом на этом пути была работа Степанова [64], в которой развито следующее существенное усиление метода Квиллена — Суслина, **универсальная локализация**. В самые последние годы эта тема получила дальнейшее неожиданное развитие в другом направлении, в духе *анрелятивизации*.

7.5. Обобщения на другие группы. Здесь нет, разумеется, никакой возможности обсуждать историю обобщений теоремы Суслина на другие классические группы, которая началась с работ самого Суслина и Славы Копейко [8, 14]. Она детально изложена в наших обзорах и статьях [25, 34, 49, 68]. Поэтому упомянем лишь два рекордных результата: доказательство Джованни Таддеи [65] обобщения теоремы нормальности на все группы Шевалле и доказательство Виктора Петрова и Насти Ставровой [66] обобщения этой теоремы на все достаточно изотропные

[7] Если быть совсем точным, они использовали вариант метода Бака [54]. Но потом выяснилось, что можно обойтись и вариантом исходного метода Квиллена — Суслина (подробнее см. раздел 13).

редуктивные группы. Заметим, что обе эти работы использовали метод Квиллена — Суслина или его варианты и обобщения.

8. Вторая революция общности. В действительности примерно одновременно с теоремой нормальности Суслина было получено несколько важных структурных результатов в такой же общности и было осознано, что для коммутативных и близких к ним колец и многие другие качественные результаты выполняются начиная с некоторого места, не зависящего от размерности кольца.

8.1. Теорема Уилсона — Голубчика. Следующая удивительная теорема, обобщающая для *коммутативных* колец теорему Басса 4 на группы *всех* степеней $n \geq 3$, была открыта Джоном Уилсоном [35] и Игорем Голубчиком [36]. Разумеется, здесь она сформулирована уже с учетом послезнания (сами они различали группу $E(n, R, I)$ и ее нормальное замыкание в $\mathrm{GL}(n, R)$).

Теорема 12. *Пусть R — коммутативное кольцо и $n \geq 3$. Тогда для любой подгруппы H в $\mathrm{GL}(n, R)$, нормализуемой $E(n, R)$, существует единственный идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что $E(n, R, I) \leq H \leq C(n, R, I)$.*

В дальнейшем многие авторы дали новые доказательства этой теоремы, ее обобщений на другие группы, более широкие классы колец и т. д. Из простых ранних доказательств снова упомянем работу Васерштейна [55], где дано *локализационное* доказательство в духе **localisation and patching**, основанное на методе Квиллена — Суслина[8], а также нашу с Боревичем работу [56], где дано *элементарное* доказательство, основанное на том, что два произвольных элемента $a, b \in R$ коммутативного кольца линейно зависимы, $ab - ba = 0$, т. е. фактически снова используются такого же рода соображения, как в лемме Суслина. Позже было предложено и много других доказательств, в частности доказательство, непосредственно основанное на методе разложения унипотентов [49].

Здесь нет никакой возможности обсуждать обобщения этой теоремы на другие классические группы. Этим много занимались Игорь Голубчик, Леонид Васерштейн, Ли Фуань, Ю Хонг и многие другие (см. ссылки в [25, 34, 49, 68]). Мы вернемся к этой теме в последней части настоящего обзора в связи с результатами Раймунда Пройссера по **обратному разложению унипотентов**, которые можно понимать как количественный аналог теоремы 12 с точными оценками [67].

Почти окончательные результаты для групп Шевалле (с какими-то незначительными ограничениями при необратимой 2 для систем с кратными связями) получили Эйичи Абе, Кадзуо Судзуки и Леонид Васерштейн. Потом в моих совместных работах с Мишей Гавриловичем и Сергеем Николенко были предложены новые прямые доказательства, не использующие локализацию (см. ссылки в [68, 69]). Для симплектических групп и группы типа G_2 последние точки при необратимой 2 были поставлены в работах Дугласа Косты и Гордона Келлера [70, 71], а для F_4 — в нашей работе [72], так что теперь результат звучит так: «Пусть R — *произвольное* коммутативное кольцо, а Φ — система корней ранга ≥ 2. Тогда ...» Хотя, конечно,

[8]В действительности, в работе Васерштейна содержатся и достаточно широкие некоммутативные обобщения в следующем духе. В исходном методе Квиллена — Суслина само кольцо R коммутативно и локализации сами являются локальными кольцами, в методе Васерштейна локализация происходит по максимальным идеалам *центра* и требуется, чтобы они удовлетворяли условию стабильности ранга с тем, чтобы можно было применить теорему 4 Басса. Разумеется, у нас нет здесь возможности детально обсуждать точные формулировки этих результатов.

при необратимой 2 этот общий ответ формулируется заметно сложнее, не в терминах идеалов, а в терминах допустимых пар, радиксов и других структур йорданова типа. В предположении обратимости 2 рекордный на сегодня результат для достаточно изотропных редуктивных групп был получен Настей Ставровой и Лешей Степановым [73].

8.2. Стандартность автоморфизмов. Примерно в то же время Василий Петечук, Голубчик, Михалев и Ефим Зельманов доказали стандартность автоморфизмов классических групп в полной общности [74–77]. Доказательство Петечука для группы $\mathrm{GL}(n,R)$ над *коммутативным* кольцом — как и недавние доказательства стандартности автоморфизмов групп Шевалле в работах Лены Буниной — основано буквально на лемме Квилена—Суслина, позволяющей сводить анализ общего случая, к случаю локальных колец, где можно пользоваться геометрическими соображениями.

9. Группа Стейнберга и K_2. В настоящем разделе мы определим группу Стейнберга и сформулируем аналог теоремы нормальности Суслина на уровне K_2.

9.1. Группа Стейнберга и K_2***.*** Рассмотрим теперь группу, заданную абстрактными образующими подчиненными очевидным соотношениям между элементарными трансвекциями — соотношениям Стейнберга. Пусть R — ассоциативное кольцо и $n \geq 3$. Тогда (линейная) **группа Стейнберга** $\mathrm{St}(n,R)$ степени n над R определяется как группа с образующими $x_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$ и следующими определяющими соотношениями: (R1) **аддитивность**, $x_{ij}(\xi)x_{ij}(\zeta) = x_{ij}(\xi+\zeta)$, и (R2) **коммутационная формула Шевалле**,

$$[x_{ij}(\xi), x_{hl}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{если } \ j \neq h,\ i \neq l; \\ x_{il}(\xi\zeta), & \text{если } \ j = h,\ i \neq l; \\ x_{hj}(-\zeta\xi), & \text{если } \ j \neq h,\ i = l. \end{cases}$$

Для $n = 2$ второе из этих соотношений становится пустым, так что обычно добавляют какие-то другие соотношения. В любом случае группа $\mathrm{St}(2,R)$, как она обычно определяется, является аналогом симплектических групп Стейнберга, а вовсе не аналогом $\mathrm{St}(n,R)$, $n \geq 3$.

Так как элементарные трансвекции $t_{ij}(\xi)$ заведомо удовлетворяют этим соотношениям, то по теореме фон Дика существует гомоморфизм $\mathrm{St}(n,R) \longrightarrow E(n,R)$, переводящий $x_{ij}(\xi)$ в $t_{ij}(\xi)$. Ядро этого гомоморфизма обозначается $\mathrm{K}_2(n,R)$ и называется (нестабильным) K_2-функтором. Обычно рассматриваемый K_2 — это индуктивный предел $\mathrm{K}_2(R) = \varinjlim \mathrm{K}_2(n,R)$ относительно гомоморфизмов[9] стабилизации $\psi_n : \mathrm{St}(n,R) \longrightarrow \mathrm{St}(n+1,R)$.

Мы не будем напоминать здесь определение относительных групп Стейнберга $\mathrm{St}(n,R,I)$ и относительных $\mathrm{K}_2(n,R,I)$ (см. [78, 79]). Сделать это в элементарных терминах можно, но совсем не просто, лишь совсем недавно это удалось Егору Воронецкому [80].

[9] В отличие от гомоморфизмов стабилизации для самих линейных групп $\mathrm{GL}(n,R)$, гомоморфизмы стабилизации на уровне групп Стейнберга $\mathrm{St}(n,R)$ не являются, вообще говоря, вложениями, что превращает доказательство теорем стабилизации на уровне K_2 в значительно более трудное занятие, чем на уровне K_1.

9.2. Центральность K_2**.** Аналогом вопроса о нормальности элементарной группы на уровне K_2 является вопрос о центральности $\mathrm{K}_2(n, R)$ в $\mathrm{St}(n, R)$. Образ группы $\mathrm{K}_2(n, R, I)$ относительно гомоморфизма стабилизации централен. Аналогом теоремы нормальности Суслина на уровне K_2 служит следующая замечательная теорема ван дер Каллена — Туленбаева [19, 81].

Теорема 13. *Предположим, что кольцо R почти коммутативно, $n \geq 4$. Тогда расширение* $\mathrm{St}(n, R) \longrightarrow E(n, R)$ *центрально.*

Для доказательства этой теоремы Вильберд ван дер Каллен [81] развил замечательный метод **another presentation**, идея которого состоит в следующем. Прежде всего, строится *модифицированная* группа Стейнберга $\widetilde{\mathrm{St}}(n, R)$ с расширенным множеством образующих, для которой центральность расширения $\widetilde{\mathrm{St}}(n, R) \longrightarrow E(n, R)$ очевидна. Из самого определения группы Стейнберга вытекает существование гомоморфизма $\mathrm{St}(n, R) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{St}}(n, R)$. Построить обратный гомоморфизм намного сложнее. Для этого нужно построить в $\mathrm{St}(n, R)$ *модели* образующих модифицированной группы Стейнберга $\widetilde{\mathrm{St}}(n, R)$. Провести *какую-то* конструкцию таких моделей обычно не слишком сложно, тонкой частью доказательства является проверка *корректности* этих конструкций, т. е. того, что получающийся результат не зависит от использованного разложения, произвола в выборе индексов, etc. Для этого требуется большая свобода, чем при вычислениях на уровне K_1, скажем, наличие в рассматриваемых столбцах не одной, а по крайней мере *двух* нулевых компонент, что объясняет требование $n \geq 4$. Недавно Вендт [82] построил контрпримеры, показывающие, что для $\mathrm{St}(3, R)$ центральность K_2, вообще говоря, не имеет места.

Эти результаты довольно долго не удавалось перенести на другие группы. Лишь в последние годы Андрею Лавренову, Сергею Синчуку и Егору Воронецкому [83–88] удалось доказать центральность K_2 для всех групп Шевалле и унитарных групп, совмещая *три* различных метода: другое представление, метод амальгам и совершенно новый вариант локализационного метода.

10. Теоремы стабилизации в алгебраической K-теории. Совершенно ясно, что Басс определял стабильный ранг ровно таким образом, чтобы отображения стабилизации $\psi_n : \mathrm{K}_1(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{K}_1(n+1, R, I)$ было сюръективным при $n \geq \mathrm{sr}(R)$. Следующий результат Басса является фактически переформулировкой этого условия.

Теорема 14. *При $n \geq \mathrm{sr}(R)$ отображение стабилизации ψ_n сюръективно, иными словами*

$$\mathrm{GL}(n+1, R, I) = \mathrm{GL}(n, R, I)E(n+1, R, I).$$

Более того, как мы узнаем в последнем разделе, для коммутативных колец условие $n \geq \mathrm{sr}(R)$ *эквивалентно* выполнению такого типа разложения, в котором не более $\leq 4n$ элементарных множителей.

10.1. Теорема Басса — Васерштейна. Но подлинное чудо состоит в том, что условие, введенное для *сюръективной* стабилизации K_1, гарантирует *инъективную* стабилизацию K_1 на следующем шаге. Ключевую роль в развитии всей этой области на начальном этапе сыграла следующая **теорема Басса — Васерштейна**.

Теорема 15. *При $n \geq \mathrm{sr}(R)+1$ отображение стабилизации ψ_n инъективно, иными словами*
$$E(n+1,R,I)\cap \mathrm{GL}(n,R,I)=E(n,R,I).$$

Таким образом, при этом предположении $\mathrm{K}_1(n,R,I)\longrightarrow \mathrm{K}_1(n+1,R,I)$ является изоморфизмом. В первых работах, содержащих версии этого результата [30, 33], на кольцо R накладывались дополнительные условия, которые нужно было использовать в доказательствах, поэтому доказательства занимали 40 страниц трудного текста. Вскоре Васерштейн [46] снял эти дополнительные условия и упростил доказательство до 10 страниц.

Но как это часто бывает, естественное доказательство возникает только при попытке доказать более общий результат. А именно при доказательстве *инъективной* стабилизации для K_2 Суслин и Туленбаев передоказали результаты Денниса — Васерштейна о сюръективной стабилизации для K_2 или, что почти то же самое, об инъективной стабилизации для K_1. В частности, они получили доказательство теоремы 15, которое со всеми деталями занимает 2–3 страницы. Оно основано на следующей факторизации группы элементарных матриц.

Пусть, как всегда, I — идеал ассоциативного кольца R. Рассмотрим подгруппы $P=P_I$ и $Q=Q_I$ группы $E(n+1,R,I)$, определенные следующим образом:
$$P=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & a\end{pmatrix},\ u\in I^n,\ a\in E(n,R,I)\right\},\quad Q=\left\{\begin{pmatrix}b & 0\\ v & 1\end{pmatrix},\ v\in {}^nI,\ b\in E(n,R,I)\right\}.$$

Теорема 16. *Пусть $n\geq \mathrm{sr}(R)+1$. Тогда каждый элемент $g\in E(n,R,I)$ можно представить в виде $g=yt_{1,n+1}(\lambda)z$, где $y\in P$, $\lambda\in I$, $z\in Q$.*

Хотя эта параболическая факторизация часто называется **разложением Денниса — Васерштейна**, в действительности в такой точной форме она была впервые сформулирована только в работе Суслина и Туленбаева [5], у Денниса и Васерштейна, как и в сыгравшей огромную роль в развитии этого направления фундаментальной работе Майкла Стайна [90] используются более длинные факторизации. В работах автора и Сергея Синчука [91, 92] содержатся дальнейшие обобщения этого результата на не обязательно терминальные параболические подгруппы и на другие классические группы.

Ясно, что все дальнейшие доказательства рекордных результатов об инъективной стабилизации для других классических групп, в частности работы Бака, Танг Гуопинга, Петрова, Синчука, Ю Вейбо и Воронецкого [93–98] использовали именно эту идею.

Эти результаты до сих пор не перенесены в полном объеме с естественными условиями на исключительные группы, даже на группы Шевалле, несмотря на весьма значительные продвижения в этом направлении, полученные в 1970–1990-х годах Стайном, Женей Плоткиным [90, 99] и др. В самое последнее время здесь происходит новый всплеск активности в связи с получением явных оценок в задачах ограниченного элементарного порождения и ограниченной редукции. Это будет чуть подробнее обсуждаться в последней части настоящего обзора.

10.2. Теорема Суслина — Туленбаева. Разумеется, получить аналогичные результаты на уровне K_2 намного труднее. Уже сюръективная стабилизация для K_2 по сложности примерно соответствует инъективной стабилизации для K_1, т. е.

теореме Басса — Васерштейна. Как уже упоминалось в предыдущем разделе, в 1972–1973 гг. была доказана следующая **теорема Денниса — Васерштейна**.

Теорема 17. *При* $n \geq \mathrm{sr}(R)+1$ *отображение стабилизации* $\mathrm{K}_2(n, R) \longrightarrow \mathrm{K}_2(n+1, R)$ *сюръективно.*

Уже в 1976 г. в [5] получена следующая замечательная **теорема Суслина — Туленбаева**.

Теорема 18. *При* $n \geq \mathrm{sr}(R)+2$ *отображение стабилизации* $\mathrm{K}_2(n, R) \longrightarrow \mathrm{K}_2(n+1, R)$ *инъективно и, следовательно, является изоморфизмом.*

Параллельно интересные результаты по стабилизации K_2 получил ван дер Каллен, но его первоначальная версия [100] зависела от более сильных предположений на кольцо, типа кратного стабильного ранга. В дальнейшем он и Манфред Кольстер [101, 102] получили несколько замечательных усилений теорем стабилизации при различных дополнительных предположениях, но эти глубокие работы незаслуженно малоизвестны.

Однако, мне кажется, что ни для одного другого случая, кроме GL_n, столь же удовлетворительного доказательства инъективной стабилизации K_2 при *естественных* условиях стабильности за прошедшие почти полвека так и не появилось.

Отчасти это связано с чрезвычайной технической сложностью задачи, отчасти с тем, что в 1980-х годах интересы многих ведущих специалистов по алгебраической K-теории сместились в область высших K-функторов и приобрели более геометрическую и топологическую направленность. Здесь нет, разумеется, никакой возможности сколь-нибудь подробно представить — или даже просто упомянуть! — все работы по гомологической стабилизации, теоремам сравнения и т. д., это потребовало бы еще одного обзора такого же объема. Процитирую поэтому лишь несколько пионерских статей ван дер Каллена, самого Суслина и его учеников того времени, Юрия П. Нестеренко и Вани Панина [103–106].

10.3. Стабилизация в высшей K-теории. Заметим, что теоремы Басса — Васерштейна и Суслина — Туленбаева служат базой индукции — первыми двумя шагами — для следующей фантастической по общности и силе **теоремы стабилизации Суслина** для высших K-функторов Володина [20], показывающей, что с точки зрения линейной алгебры именно **K-теория Володина** является правильным обобщением классических функторов K_1 и K_2.

Теорема 19. *При* $n \geq \mathrm{sr}(R) + i - 1$ *отображение стабилизации*

$$\mathrm{K}_i^V(n, R) \longrightarrow \mathrm{K}_i^V(n+1, R)$$

сюръективно. При $n \geq \mathrm{sr}(R) + i$ *это отображение инъективно.*

В той же статье доказана и следующая столь же замечательная **теорема сравнения Суслина**, связывающая K-теории Володина и Квиллена.

Теорема 20. *При* $n \geq 2i + 1$ *существует канонический гомоморфизм* $\mathrm{K}_i^V(n, R) \longrightarrow \mathrm{K}_i^Q(n, R)$, *который сюръективен при* $n \geq \max(2i+1, \mathrm{sr}(R) + i - 1)$ *и биективен при* $n \geq \max(2i+1, \mathrm{sr}(R) + i)$.

Отсюда, конечно, сразу вытекают и теоремы стабилизации для высших K-функторов Квиллена $\mathrm{K}_i^Q(n, R)$, оценки в которых зависят только от номера i и стабильного ранга кольца $\mathrm{sr}(R)$.

12. Теорема Суслина о полиномиальных расширениях. Для многих приложений чрезвычайно важны кольца, для которых $\mathrm{SK}_1(R) = 1$, иными словами, $E(n, R) = \mathrm{SL}(n, R)$. Очевидно, что это так, например, для полулокальных и эвклидовых колец. В отличие от этих случаев следующий результат уже совершенно нетривиален и опирается на всю мощь теории полей классов. Собственно говоря, это один из основных результатов классической работы Басса — Милнора — Серра [33].

Теорема 21. *Пусть R — дедекиндово кольцо арифметического типа, а $n \geq 3$. Тогда* $\mathrm{SK}_1(n, R) = 1$.

Следующий знаменитый результат Суслина [10] представляет собой решение **K_1-аналога проблемы Серра**.

Теорема 22. *Если K поле, то* $\mathrm{SK}_1(n, K[x_1, \ldots, x_m]) = 1$ *при всех $n \geq 3$, независимо от количества переменных.*

В действительности в этой работе доказаны *значительно* более общие результаты, в частности **теорема ранней стабилизации** для полиномиальных расширений.

Теорема 23. *Пусть $A = R[t_1, \ldots, t_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над нетеровым кольцом R. Тогда при $n \geq \max(3, \mathrm{sr}(R) + 2)$ отображение стабилизации*

$$\mathrm{K}_1(n, R[t_1, \ldots, t_m]) \longrightarrow \mathrm{K}_1(n + 1, R[t_1, \ldots, t_m]).$$

является изоморфизмом.

Совершенно замечательно здесь то, что при $n \geq 3$ место, начиная с которого наступает стабилизация, не зависит от количества переменных m. Там же Суслин получил аналогичные результаты для колец многочленов Лорана. В частности, для *регулярных* нетеровых колец теорема Басса — Хеллера — Суона [107] утверждает, что $\mathrm{K}_1(R[t]) \cong \mathrm{K}_1(R)$ — **гомотопическая инвариантность** предельного K_1. Но теперь теорема ранней стабилизации Суслина влечет гомотопическую инвариантность нестабильных функторов $K_1(n, \_)$ для достаточно больших n.

Разумеется, для $n = 2$ аналогичные утверждения безнадежно неверны. Так, уже группа $\mathrm{SK}_1(2, K[x, y])$ нетривиальна. В самом деле, Поль Кон [50] построил примеры неэлементарных 2×2 матриц с определителем 1, вот простейший из них:

$$\begin{pmatrix} 1 + xy & x^2 \\ -y^2 & 1 - xy \end{pmatrix} \notin E(2, K[x, y]).$$

В дальнейшем этот результат послужил источником громадного количества вариаций и обобщений, в которых рассматривались другие группы, другие коэффициенты, другие расширения и т. д., начиная с работ самого Суслина и Славы Копейко, Тона Форста, Эйичи Абе, Груневальда, Меннике и Васерштейна и многих других [8, 14, 15, 108–110]. Самые общие на сегодня результаты получены Настей Ставровой [111–113]. Мы вернемся к этой теме в количественных аспектах в заключительной части настоящего обзора.

Обобщая метод Суслина, Марат Туленбаев в [19] решил для линейного случая **K_2-аналог проблемы Серра**. Подобно доказательству исходной теоремы Суслина, доказательство Туленбаева также основано на локально-глобальном принципе, K_2-аналоге леммы Квиллена — Суслина, о чем будет рассказано в следующем разделе.

Теорема 24. *Пусть* $A = R[t_1, \ldots, t_m]$ *— кольцо многочленов от* m *переменных над нетеровым кольцом* R. *Тогда при* $n \geq \max(4, \mathrm{sr}(R) + 2)$ *отображение стабилизации*

$$\mathrm{K}_2(n, R[t_1, \ldots, t_m]) \longrightarrow \mathrm{K}_2(n+1, R[t_1, \ldots, t_m]).$$

сюръективно, а $n \geq \max(5, \mathrm{sr}(R) + 3)$ *инъективно.*

В отличие от теоремы Суслина, на уровне K_1 этот результат не обобщен пока в полном объеме ни на один случай, лишь в самое последнее время здесь наметился серьезный прогресс в работах Лавренова и Синчука [114, 115].

13. Метод Квиллена — Суслина. Одним из самых важных вкладов Андрея в начальный период было создание локально-глобального принципа, известного как **принцип Квиллена — Суслина**.

13.1. Локализация. По коммутативному кольцу R и его мультипликативной системе $S \subseteq R^\bullet$ строится *кольцо частных* $S^{-1}R$, которое также часто называется *локализацией* R, состоящее из дробей вида x/u, где $x \in R$, $u \in S$. При этом определен гомоморфизм локализации $F_S : R \longrightarrow S^{-1}R$, $x \mapsto x/1$, делающий все элементы S обратимыми. Однако в случае, когда S содержит делители 0, это не обязательно включение. Нам будут встречаться исключительно следующие два примера.

• **Локализация в простом идеале**. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, тогда $S_\mathfrak{p} = R \setminus \mathfrak{p}$ является мультипликативной системой по самому определению простого идеала. Кольцо частных $R_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}^{-1}R$ называется локализацией в $\mathfrak{p}$. Ясно, что кольцо $R_\mathfrak{p}$ локально.

• **Главная локализация**. Пусть $s \notin \mathrm{Nil}(R)$. Тогда $\langle s \rangle = \{1, s, s^2, \ldots\}$ является мультипликативной системой. Кольцо $R_s = R\left[\frac{1}{s}\right] = \langle s \rangle^{-1}R$ называется главной локализацией относительно s.

Соответствующие гомоморфизмы локализации обозначаются $F_\mathfrak{p}$ и F_s соответственно.

13.2. Лемма Квиллена — Суслина. Решение Квиллена проблемы Серра [116] было основано на следующей лемме, являющейся, с современной точки зрения, формулировкой **принципа Квиллена — Суслина** на уровне K_0.

Теорема 25. *Пусть* P *— конечно представимый модуль над* $R[t]$, *и* $P_\mathfrak{m}$ *является расширенным* $R_\mathfrak{m}[t]$ *модулем для каждого максимального идеала* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. *Тогда модуль* P *расширенный.*

Решение Суслина проблемы Серра [2] также основано на локализации, но было оформленно чуть иначе (см. детальное обсуждение в книге Лэма [37]). Вот что писал об этой идее Квиллена сам Суслин: «For one thing Quillen proved an absolutely unexpected fact that being extended is a local property with respect to R»[10] [117].

Теорема 26. *Пусть* $g \in \mathrm{GL}(n, R[t], tR[t])$, $n \geq 3$. *Тогда для того, чтобы* $g \in \mathrm{E}(n, R)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $F_\mathfrak{m}(g) \in \mathrm{E}(n, R_\mathfrak{m}[t])$ *для всех максимальных идеалов* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

Сам Суслин называл этот результат теоремой Квиллена, но все остальные авторы обычно называют его **леммой Квиллена — Суслина**. Его важность была сразу осознана, как мы уже упоминали, он стал сразу применяться к самым различным

[10] «Во-первых, Квиллен доказал абсолютно неожиданный факт, что расширение является локальным свойством по отношению к R» (перевод мой. — *Н. В.*).

задачам теории линейных групп, нормальности элементарной подгруппы, описанию нормальных делителей, доказательству стандартности автоморфизмов и т. д. Среди первых работ, использовавших и обобщавших этот метод, можно упомянуть работы Копейко и Туленбаева, которые были тогда учениками Андрея и на которых Андрей оказал огромное влияние [8, 14, 15, 19].

В частности, Марат Туленбаев в [19] доказал следующий замечательный аналог леммы Квиллена — Суслина на уровне K_2, который он сам также называл «теоремой Квиллена» и который было бы, наверное, правильнее называть **леммой Квиллена — Суслина — Туленбаева**.

Теорема 27. *Пусть* $g \in \mathrm{St}(n, R[t], tR[t])$, $n \geq 5$. *Тогда для того, чтобы* $g = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы* $F_{\mathfrak{m}}(g) = 1 \in \mathrm{St}(n, R_{\mathfrak{m}}[t])$ *для всех максимальных идеалов* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

Вскоре начали появляться работы Васерштейна, Таддеи, Абе, [55, 65, 109] и многих других. Васерштейн широко рекламировал этот метод под названием **localisation and patching** и использовал его в нескольких десятках работ. Общее же количество работ, использующих этот метод для анализа классических групп, измеряется *многими сотнями*, даже если не обсуждать его различные варианты. Причем довольно часто это происходит без прямой ссылки на Квиллена и Суслина, а лишь на какие-то из последующих публикаций.

13.3. Дальнейшая жизнь метода Квиллена — Суслина. Если же говорить о серьезных новациях, то в [54] Тони Бак предложил замечательную вариацию на тему Квиллена — Суслина, **метод локализации-пополнения**, который позволил доказать дальнейшие трудные структурные результаты наподобие следующего[11].

Теорема 28. *Пусть* A *— кольцо, конечно порожденное как модуль над коммутативным кольцом* R *конечной размерности Басса — Серра* $\delta(R)$, *и* $I \trianglelefteq A$ *— идеал в* A. *Тогда для любого* $n \geq 3$ *группа* $\mathrm{K}_1(n, R, I)$ *является расширением абелевой группы при помощи нильпотентной (nilpotent by abelian) класса нильпотентности* $\leq \delta(R) + 1$.

В наших совместных работах с Рузби Хазратом [118–120] этот метод был вскоре обобщен на четные классические группы и группы Шевалле. Для доказательства упоминавшихся в разделе 7 результатов о стандартных коммутационных формулах мы развили еще один относительный вариант метода Бака [58, 121, 122].

Впрочем, вскоре выяснилось, что здесь тоже можно обойтись вариантами исходного метода Квиллена — Суслина. В частности, развитию относительных вариантов метода Квиллена — Суслина в различных контекстах посвящены *многие десятки* публикаций Рави Рао и его многочисленных учениц, в первую очередь Рабейи Басу. Здесь нет, разумеется, никакой возможности процитировать их все, вот несколько типичных работ, где можно найти ссылки на остальные: [123–130].

Совершенно новую динамику всему этому направлению придало создание Степановым метода **универсальной локализации** [64], которое позволило доказывать такого рода результаты *независимо от размерности основного кольца.*

[11] В действительности, конечно, в [54] доказаны гораздо более точные результаты. В частности, для произвольных — а не только конечномерных! — квазиконечных колец построены нильпотентные фильтрации $\mathrm{GL}(n, R, I)$, доказаны теоремы стабилизации для членов этих фильтраций и т. д.

14. Матрицы Суслина. Сформулируем еще один удивительный результат Суслина из работы [9], который даже сам Андрей характеризовал как «любопытный».

• Пусть R — коммутативное кольцо, а $u = (a, b) \in R^2$ — унимодулярная строка. Тогда по самому определению она дополняется до матрицы с определителем 1. В самом деле, существуют $v = (c, d) \in R^2$ такие, что $ac + bd = 1$, и тогда

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} a & b \\ -d & c \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, R).$$

• С другой стороны, унимодулярная строка $u = (a, b, c) \in R^3$, длины 3, для которой существует столбец $v = (a', b', c')$ такой, что $uv = aa' + bb' + cc' = 1$, совершенно не обязана дополняться до матрицы с определителем 1.

Судьбоносное наблюдение Суона, Таубера и Круземейера [131, 132] состояло, однако, в том, что в этом случае строка (a^2, b, c) — которая, очевидно, тоже унимодулярна — уже всегда дополняется. В самом деле,

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} a^2 & b & c \\ -b - 2ac' & {c'}^2 & a' - b'c' \\ -c + 2ab' & -a' - b'c' & {b'}^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, R).$$

Используя вычисления в алгебрах Клиффорда, Андрей смог обобщить эту конструкцию на строки произвольной длины.

Теорема 29. *Пусть* $u = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) \in \mathrm{Umd}(n + 1, R)$ *— унимодулярная строка над коммутативным кольцом* R*. Тогда строка* $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}^{n!})$ *дополняема.*

В действительности из других результатов той же работы вытекает, что тогда дополняема любая строка $(u_1^{m_1}, \ldots, u_n^{m_n}, u_{n+1}^{m_{n+1}})$, для которой $m_1 \ldots m_{n+1}$ делится на $n!$. Исходное доказательство Суслина воспроизведено в книгах Гупты и Мурти, Мандала и Лэма [37, 43, 133]. См. также статьи Мохана Кумара [134, lemma 3] или Сридхарана и Йадава [135, proposition 14.1], которые содержат *другие* доказательства ключевого шага в доказательстве этой теоремы. Возникающие при этом матрицы настолько интересны, что им посвящена довольно обширная литература, в частности статьи Рави Рао и Селби Джоза [136, 137].

Отмечу одно любопытное следствие этой теоремы Суслина. Хорошо известно, что для коммутативных колец равенство $\mathrm{sr}(R) = 1$ *эквивалентно* факторизации $\mathrm{GL}(2, R) = R^* U^- U U^- U$, где U и U^- обозначают соответственно группы верхних и нижних унитреугольных матриц в соответствующей $\mathrm{GL}(n, R)$ (см. [138]). Из теоремы Суслина легко вывести, хотя, как мне кажется, это нигде ранее явно не формулировалось, что то же самое верно для всех значений стабильного ранга.

Теорема 30. *Для коммутативного кольца* R *равенство* $\mathrm{sr}(R) \leq n$ *эквивалентно факторизации* $\mathrm{GL}(n + 1, R) = \mathrm{GL}(n, R) U^- U U^- U$.

Я планирую вернуться к этой теме и другим высшим условиям стабильности, возникающим при доказательстве обобщений теорем ранней стабилизации (типа теоремы 23), в отдельной статье.

15. Заключительные замечания. В настоящем тексте я пытался дать представление о некоторых наиболее характерных темах ранних работ Андрея Суслина и об их влиянии на развитие нашей алгебраической школы и соответствующих областей науки в целом. Сделать это в полном объеме в рамках журнальной статьи совершенно невозможно, настолько богато содержание этих работ и настолько велико их влияние на развитие алгебраической K-теории, теории классических групп и смежных областей алгебры. Кроме того, конечно, в соответствии с целью обзора я фокусировался в первую очередь на тех темах, которые получили наибольшее развитие в Санкт-Петербурге.

Здесь я упомянул даже не все основные результаты работ [5, 6, 8, 10]. Не говоря уже о том, что вообще не затронуты высшие символы Меннике, их роль в вычислении K_1 и их связь с законами взаимности [16, 21]. Между тем под влиянием работ самого Андрея, а потом Васерштейна, ван дер Каллена, Рави Рао и его учеников, это также превратилось в огромное направление внутри алгебраической K-теории и коммутативной алгебры, теснейшим образом связанное с арифметическими работами Манджула Бхаргавы и его последователей.

Ну и, разумеется, оставлены за горизонтом все работы, начиная с совместных работ Андрея с Сашей Меркурьевым по символу норменного вычета и K_2, работы по K-теории Милнора и K_3, совместные работы Андрея с Володей Воеводским по мотивным когомологиям, совместные работы Андрея с Эриком Фридландером по теории представлений алгебраических групп и многое, многое другое. Часть из этого отражена в превосходном тексте Фридландера и Меркурьева [42].

В следующей части обзора я планирую в таком же стиле обрисовать работы Зенона Ивановича Боревича и его школы по расположению подгрупп. Наконец, в заключительной, четвертой части будет рассказано о некоторых наиболее ярких достижениях нашей школы в этой области за последние 20–30 лет, которые здесь пока вообще не упоминались, в частности о работах Коли Гордеева, Вани Панина, Максима Всемирнова и их учеников, а также будут развиты некоторые темы, которые тут лишь упомянуты.

Литература

1. Вавилов Н. А. Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 381–405 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301

2. Суслин А. А. О проективных модулях над кольцами полиномов. *Математический сборник* **93** (4), 588–595 (1974).

3. Васерштейн Л. Н., Суслин А. А. Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория. *Функциональный анализ и его приложение* **8** (2), 65–66 (1974).

4. Суслин А. А. Об одной теореме Кона. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **64**, 127–130 (1976).

5. Суслин А. А., Туленбаев М. С. Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **64**, 131–152, (1976).

6. Васерштейн Л. Н., Суслин А. А. Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория. *Изв. АН СССР. Серия математическая* **40** (5), 993–1054 (1976).

7. Суслин А. А. Проективные модули над кольцом многочленов свободны. *Доклады АН СССР* **229** (5), 1063–1066 (1976).

8. Суслин А. А., Копейко В. И. Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **71**, 216–250 (1977).

9. Суслин А. А. О стабильно свободных модулях. *Математический сборник* **102** (4), 537–550 (1977).

10. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. *Известия АН СССР. Сер. математическая* **41** (2), 235–252 (1977).

11. Суслин А. А. Локально полиномиальные кольца и симметрические алгебры. *Изв. АН СССР. Сер. математическая* **41** (3), 503–515 (1977).

12. Суслин А. А. Теорема о сокращении для проективных модулей над алгебрами. *Докл. АН СССР* **236** (4), 808–811 (1977).

13. Суслин А. А. О структуре проективных модулей над кольцами многочленов в случае некоммутативного кольца коэффициентов. *Тр. МИАН СССР* **148**, 233–252 (1978).

14. Копейко В. И. Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов *Математический сборник* **106** (5), 94–107 (1978).

15. Копейко В. И., Суслин А. А. О квадратичных модулях над кольцами многочленов. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **86**, 114–124 (1979).

16. Суслин А. А. Законы взаимности и стабильный ранг колец многочленов. *Изв. АН СССР. Сер. математическая* **43** (6), 1394–1429 (1979).

17. Туленбаев М. С. Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка, *Записки научных семинаров ЛОМИ* **86**, 162–169 (1979).

18. Суслин А. А. Проблема сокращения для проективных модулей и близкие вопросы. В: *Труды Междунар. конгр. математиков.* Хельсинки, 1978. Т. 1, 160–164 (1980).

19. Туленбаев М. С. Группа Стейнберга кольца многочленов. *Математический сборник* **117** (1), 131–144 (1982).

20. Suslin A. A. Stability in algebraic K-theory. *Algebraic K-theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1980*, Part I. Lect. Notes Math. **966**, 304–333 (1982).

21. Suslin A. A. Mennicke symbols and their applications in the K-theory of fields. *Algebraic K-theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1980*, Part I. Lect. Notes Math. **966**, 334–356 (1982).

22. Суслин А. А. Алгебраическая K-теория. *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия* **20**, 71–152 (1982).

23. Суслин А. А. Алгебраическая К-теория (в МИАНе). *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **168**, 155–170 (1984).

24. Суслин А. А. Алгебраическая K-теория и гомоморфизм норменного вычета. *Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Новые достижения* **25**, 115–207 (1984).

25. Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi). *J. K-Theory* **4** (1), 1–65 (2009).

26. Вавилов Н. А. Простые алгебры Ли, простые алгебраические группы и простые конечные группы. В: *Математика XX века. Взгляд из Петербурга.* А. М. Вершик (ред.). Москва, МЦНМО, 8–46 (2010).

27. Артин Э. *Геометрическая алгебра.* Москва, Наука (1969).

28. Дьёдонне Ж. *Геометрия классических групп.* Москва, Мир (1974).

29. Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

30. Басс Х. *Алгебраическая K-теория.* Москва, Мир (1973).

31. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* Москва, Мир (1975).

32. Милнор Дж. *Введение в алгебраическую K-теорию.* Москва, Мир (1974).

33. Bass H., Milnor J., Serre J.-P. *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_{2n} $(n \geq 2)$. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **33**, 59–133 (1967).

34. Bak A., Vavilov N. Structure of hyperbolic unitary groups. I. Elementary subgroups. *Algebra Colloq.* **7** (2), 159–196 (2000).

35. Wilson J. The normal and subnormal structure of general linear groups. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **71**, 163–177 (1972).

36. Голубчик И. З. О полной линейной группе над ассоциативным кольцом. *Успехи мат. наук* **28** (3), 179–180 (1973).

37. Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Springer (2006).

38. Меркурьев А. С. О гомоморфизме норменного вычета степени два. *Докл. АН СССР* **261** (3), 542–547 (1981).

39. Суслин А. А. Кватернионный гомоморфизм для поля функций на конике. *Докл. АН СССР* **265** (2), 292–296 (1982).

40. Меркурьев А. С., Суслин А. А. K-когомологии многообразий Севери — Брауэра и гомоморфизм норменного вычета. *Докл. АН СССР* **264** (3), 555–559 (1982).

41. Меркурьев А. С., Суслин А. А. K-когомологии многообразий Севери — Брауэра и гомоморфизм норменного вычета. *Изв. АН СССР. Сер. математическая* **46** (5), 1011–1046 (1982).

42. Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc. New Ser.* **57** (1), 1–22 (2020).

43. Gupta S. K., Murthy M. P. Suslin's Work on Linear Groups over Polynomial Rings and Serre Problem. *ISI Lecture Notes*, vol. 8 (Macmillan Co. of India Ltd, New Delhi, 1980).

44. Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Forew. by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 291. Berlin etc., Springer-Verlag. (1989).

45. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Линейные группы над общими кольцами I. Общие места. *Записки научных семинаров ПОМИ* **394**, 33–139 (2011).

46. Васерштейн Л. Н. О стабилизации общей линейной группы над кольцом. *Математический сб.* **79** (3), 405–424 (1969).

47. Васерштейн Л. Н. Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств. *Функциональный анализ и его приложение* **5** (2), 17–27 (1971).

48. Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами. *Докл. АН СССР* **307** (4), 788–791 (1989).

49. Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations. *K-theory* **19** (2), 109–153 (2000).

50. Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **30**, 365–413 (1966).

51. Герасимов В. Н. Группа единиц свободного произведения колец. *Математический сб.* **134** (1), 42–65 (1987).

52. Голубчик И. З., Марков В. Т. Локализационная размерность PI-колец. *Труды семинара им. И. Г. Петровского* **6**, 39–46 (1981).

53. Голубчик И. З., Михалев А. В. Элементарная подгруппа унитарной группы над PI-кольцом. *Вестник Московского университета. Серия Математика. Механика* **1**, 30–36 (1985).

54. Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-theory* **4** (4), 363–397 (1991).

55. Vaserstein L. N. On the normal subgroups of the GL_n of a ring, Algebraic K-theory, Evanston 1980. *Lecture Notes in Math.*, vol. 854, 454–465, Berlin, Springer (1981).

56. Боревич З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полнойлиней ной группе над коммутативным кольцом. *Труды МИАН СССР* **165**, 24–42 (1984).

57. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Стандартная коммутационная формула. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1. **1**, 9–14 (2008).

58. Hazrat R., Zuhong Zhang. Generalized commutator formula. *Commun. Algebra* **39** (4), 1441–1454 (2011).

59. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Еще раз о стандартной коммутационной формуле. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1, **1**, 16–22 (2010).

60. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. The yoga of commutators. *Записки научных семинаров ПОМИ* **387**, 53–82 (2011).

61. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. Commutator width in Chevalley groups. *Note di Matematica* **33** (1), 139–170 (2013).

62. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. The yoga of commutators: further applications *Записки научных семинаров ПОМИ* **421**, 166–213 (2014).

63. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Z. The commutators of classical groups. *Записки научных семинаров ПОМИ* **443**, 151–221 (2016).

64. Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).

65. Taddei G. Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau *Contemp. Math.* **55**, Part 2, 693–710 (1986).

66. Петров В. А., Ставрова А. К. Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах. *Алгебра и анализ* **20** (4), 160–188 (2008).

67. Preusser R. Structure of hyperbolic unitary groups. II: Classification of E-normal subgroups. *Algebra Colloq.* **24** (2), 195–232 (2017).

68. Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics.* Hiroshima, Japan, (30 August — 1 September 1990), 219–335. London, World Scientific Publ. (1991).

69. Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И. Строение групп Шевалле: доказательство из книги. *Записки научных семинаров ПОМИ* **330**, 36–76 (2006).

70. Costa D. L., Keller G. E. Radix redux: Normal subgroups of symplectic groups. *J. Reine Angew. Math.* **427**, 51–105 (1992).

71. Costa D. L., Keller G. E. On the normal subgroups of $G_2(A)$. *Trans. Am. Math. Soc.* **351** (12), 5051–5088 (1999).

72. Hazrat R., Petrov V., Vavilov N. Relative subgroups in Chevalley groups. *J. K-Theory.* **5** (3), 603–618 (2010).

73. Stavrova A., Stepanov A. Normal structure of isotropic reductive groups over rings. *J. Algebra* Available online. 7 December (2022).

74. Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Математический сб.* **117** (4), 534–547 (1982).

75. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом. *Вестник Московского университа. Сер. 1. Математика. Механика* **3**, 61–72 (1983).

76. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **132**, 97–109 (1983).

77. Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом. *Сибирский математический журнал* **26** (4), 49–67 (1985).

78. Keune F. The relativization of K_2. *J. Algebra* **54**, 159–177 (1978).

79. Loday J. L. Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. *J. Algebra* **54**, 178–202 (1978).

80. Voronetsky E. An explicit presentation of relative Steinberg groups. *J. Algebra.* **602**, 278–299 (2022).

81. Kallen W. van der. Another presentation for Steinberg groups. *Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A* **80**, 304–312 (1977).

82. Wendt V. On homotopy invariance for homology of rank two groups. *J. Pure Appl. Algebra* **216**, no. 10, 2291–2301 (2012).

83. Lavrenov A. Another presentation for symplectic Steinberg groups. *J. Pure Appl. Algebra* **219** (9), 3755–3780 (2015).

84. Sinchuk S. On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_l. *J. Pure Appl. Algebra* **220**, 857–875 (2016).

85. Lavrenov A., Sinchuk S. On centrality of even orthogonal K_2. *J. Pure Appl. Algebra* **221** (5), 1134–1145 (2017).

86. Voronetsky E. Centrality of K_2-functor revisited. *J. Pure Appl. Algebra* **225** (4), Article ID 106547, 14 (2021).

87. Voronetsky E. Centrality of odd unitary K_2-functor. arXiv:2005.02926v2 [math.GR] 28 Dec., 37 (2020).

88. Lavrenov A., Sinchuk S., Voronetsky E. Centrality of K_2 for Chevalley groups: a pro-group approach. arXiv:2009.03999v1 [math.GR] 8 Sept., 32 (2020).

89. Dennis R. K. Stability for K_2. *Proc. Conf. Orders, Group Rings related Topics. Ohio State Univ., Columbus 1972. Lect. Notes Math.* **353**, 85–94 (1973).

90. Stein M. R. Stability theorems for K_1 K_2 and related functors modeled on Chevalley groups. *Japan. J. Math.* **4** (1), 77–108 (1978).

91. Вавилов Н. А., Синчук С. С. Разложения типа Денниса — Васерштейна. *Записки научных семинаров ПОМИ* **375**, 48–60 (2010).

92. Вавилов Н. А., Синчук С. С. Параболические факторизации расщепимых классических групп. *Алгебра и анализ* **23** (4), 1–30 (2011).

93. Bak A. Tang Guoping Stability for Hermitian K_1. *J. Pure Appl. Algebra* **150**, 107–121 (2000).

94. Петров В. А. Нечетные унитарные группы. *Записки научных семинаров ПОМИ* **305**, 195–225 (2003).

95. Bak A., Petrov V. Tang Guoping, Stability for quadratic K_1. *J. K-theory* **30** (1), 1–11 (2003).

96. Sinchuk S. Injective stability for unitary K_1. *J. K-theory* **11** (2), 233–242 (2013).

97. Yu Weibo. Injective stability for odd-dimensional unitary K_1. *J. Group Theory* **23** (2), 313–325 (2020). https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0099

98. Voronetsky E. Injective stability for odd unitary K_1. *J. Group Theory* **23** (5), 781–800 (2020).

99. Plotkin E. On the stability of the K_1-functor for Chevalley groups of type E_7. *J. Algebra* **210** (1), 67–85 (1998).

100. Kallen W. van der. Injective stability for K_2. *Algebr. J. K-theory. Proc. Conf. Evanston 1976. Lect. Notes Math.* **551**, 77–154 (1976).

101. Kolster K. On injective stability for K_2. *Algebraic K-theory, Proc. Conf., Oberwolfach 1980. Part I. Lect. Notes Math.* **966**, 128–168 (1982).

102. Kolster K. Improvement of K_2-stability under transitive a ctions of elementary groups. *J. Pure Appl. Algebra.* **24**, 277–282 (1982).

103. Kallen W. van der. Homology stability for linear groups. *Invent. Math.* **60**, 269–295 (1980).

104. Суслин А. А. Гомологии Gl_n, характеристические классы и K-теория Милнора. *Тр. МИАН СССР* **165**, 188–204 (1984).

105. Нестеренко Ю. П., Суслин А. А. Гомологии полной линейной группы над локальным кольцом и K-теория Милнора. *Изв. АН СССР. Сер. математическая* **53** (1), 121–146 (1989).

106. Панин И. А. О стабилизации для ортогональной и симплектической алгебраических K-теорий. *Алгебра и анализ* **1** (3), 172–195 (1989).

107. Bass H., Heller A., Swan R. G. The Whitehead group of a polynomial extension. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 545–564 (1964).

108. Vorst T. The general linear group of polynomial rings over regular rings. *Comm. Algebra* **9** (5), 499–509 (1981).

109. Abe E. Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings. *Comm. Algebra* **11**, 1271–1307 (1983).

110. Grunewald F., Mennicke J., Vaserstein L. On symplectic groups over polynomial rings. *Math. Z.* **206** (1), 35–56 (1991).

111. Stavrova A. Homotopy invariance of non-stable K_1-functors. *J. K-theory* **13** (2), 199–248 (2014).

112. Stavrova A. Non-stable K_1-functors of multiloop groups. *Canad. J. Math.* **68** (1), 150–178 (2016).

113. Stavrova A. Chevalley groups of polynomial rings over Dedekind domains. *J. Group Theory* **23** (1), 121–132 (2020).

114. Lavrenov A. A local-global principle for symplectic K_2. *Doc. Math.* **23**, 653–675 (2018).

115. Lavrenov A., Sinchuk S. A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2. *Doc. Math.* **25**, 767–809 (2020).

116. Quillen D. Projective modules over polynomial rings. *Invent. Math.* **36**, 167–171 (1976).

117. Suslin A. Quillen's solution of Serre's problem. *J. K-theory* **11** (3), 549–552 (2013).

118. Hazrat R. Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules. *J. K-theory* **27**, 293–327 (2002).

119. Hazrat R., Vavilov N. K_1 of Chevalley groups are nilpotent. *J. Pure Appl. Algebra* **179**, 99–116 (2003).

120. Bak A., Hazrat R., Vavilov N. Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by Abelian. *J. Pure Appl. Algebra* **213** (6), 1075–1085 (2009).

121. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Zuhong Relative unitary commutator calculus, and applications. *J. Algebra.* **343** (1), 107–137 (2011).

122. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Zuhong Relative commutator calculus in Chevalley groups. *J. Algebra* **385**, 262–293 (2013).

123. Basu R., Rao R. A., Khanna R. On Quillen's local global principle. Ghorpade, Sudhir (ed.). Commutative algebra and algebraic geometry. Joint Intern. meeting of the Amer. Math. Soc. and the Indian Math. Soc., Bangalore, India (December, 17–20, 2003). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). *Contemp. Math.* **390**, 17–30 (2005).

124. Bak A., Basu R., Rao R. A. Local-global principle for transvection groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (4), 1191–1204 (2010).

125. Apte H., Stepanov A. Local-global principle for congruence subgroups of Chevalley groups. *Cent. Eur. J. Math.* **12** (6), 801–812 (2014).

126. Basu R. Local-global principle for the general quadratic and general Hermitian groups and the nilpotency of KH_1. *Записки научных семинаров ПОМИ* **452**, 5–31 (2016).

127. Basu R., Khanna R., Rao R. A. The pillars of relative Quillen — Suslin theory. Ambily A. A. (ed.) et al. Leavitt path algebras and classical K-theory. Based on the international workshop on Leavitt path algebras and K-theory, Kerala, India, July 1–3, 2017. Singapore, Springer. Indian Stat. Inst. Ser., 211–223 (2020).

128. Basu R. A note on general quadratic groups. *J. Algebra Appl.* **17** (11), Article ID 1850217 (2018).

129. Ambily A. A. Yoga of commutators in DSER elementary orthogonal group. *J. Homotopy Relat. Struct.* **14** (2), 595–610 (2019).

130. Basu R., Singh M. K. Quillen — Suslin theory for classical groups: revisited over graded rings. In: Srivastava, Ashish K. (ed.) et al., Categorical, homological and combinatorial methods in algebra. AMS special session in honor of S. K. Jain's 80^{th} birthday, Ohio State Univ., Columbus, Ohio (March, 16–18, 2018). Providence, RI, Amer. Math. Soc. *Contemp. Math.* **751**, 5–18 (2020).

131. Swan R. G., Towber J. A class of projective modules which are nearly free. *J. Algebra* **36** (3), 427–434 (1975).

132. Krusemeyer M. Skewly completable rows and a theorem of Swan and Towber. *Commun. Algebra* **4** (7), 657–663 (1976).

133. Mandal S. *Projective Modules and Complete Intersections.* Lecture Notes in Mathematics **1672**, Springer, Berlin, (1997)

134. Kumar N. M. A note on the cancellation of reflexive modules. *J. Ramanujan Math. Soc.* **17** (2), 93–100 (2002)

135. Sridharan R., Yadav S. K. On a theorem of Suslin. In: Leavitt path algebras and classical K-theory, 241–260, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore (2020).

136. Jose S., Rao R. A. A fundamental property of Suslin matrices. *J. K-theory* **5** (3), 407–436 (2010).

137. Rao R. A., Jose S. A study of Suslin matrices: their properties and uses. In: Rizvi, Syed Tariq (ed.) et al. Algebra and its applications. ICAA, Aligarh, India (December 15–17, 2014). Proc. Conf. Singapore: Springer, Springer Proc. In: *Mathematics & Statistics* **174**, 89–121 (2016).

138. Вавилов Н. А., Смоленский А. В., Сури Б. Унитреугольные факторизации групп Шевалле. *Записки научного семинара ПОМИ* **388**, 17–47 (2011).

Статья поступила в редакцию 25 июня 2023 г.;
доработана 20 августа 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Вавилов Николай Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф. (1952–2023)

St Petersburg school of linear groups. II. Early works by Suslin*

N. A. Vavilov†

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vavilov N. A. St Petersburg school of linear groups. II. Early works by Suslin. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 48–83. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.103 (In Russian)

The present survey describes the contribution of St Petersburg mathematicians to the theory of linear, classical and algebraic groups. The second part is devoted to the publications by Suslin of the 1970s and the early 1980s, in the areas of classical algebraic K-theory and the theories of linear and classical groups. Also, we describe the general context of these works, state some of the most important results by Suslin himself, and his students, and some of the most closely related follow-ups and subsequent results.

Keywords: linear groups, classical groups, algebraic groups, Chevalley groups, algebraic K-theory.

References

1. Vavilov N. A. St Petersburg school of linear groups. I. Prehistoric period. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 381–405 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 3, 273–288 (2023) 10.1134/S106345412303010X].

*See first part: Vavilov N. A. St Petersburg school of linear groups. I. Prehistorical period. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 381–405. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301

The works reflected in this and subsequent parts of the present survey were supported by a number of grants and projects. Of those, one should specially mention 1) RSF Project 14-11-00335 “Decomposition of unipotents in reductive groups”, 2) RSF Project “Split reductive groups over rings and their relatives” (both terminated) and the current ones 3) “Basis” Foundation Project 20-7-1-27-1 “Higher symbols in algebraic K-theory”, 4) RSF Project 22-21-00257 “Algebraic groups over rings and Steinberg groups”.

2. Suslin A. A. On projective modules over polynomial rings. *Matematicheskii sbornik* **93** (4), 588–595 (1974). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.*, **22** (4), 595–602 (1974)].

3. Vaserstein L. N., Suslin A. A. Serre's Problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory. *Funct. Anal. Appl.* **8** (2), 148–150 (1974).

4. Suslin A. A. One theorem of Cohn. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **64**, 127–130 (1976) (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **17** (2) 1801–1803, (1981)].

5. Suslin A. A., Tulenbaev M. S. Stabilization theorem for the Milnor K_2-functor. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **64**, 131–152 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **17** (2), 1804–1819 (1981)].

6. Vaserstein L. N., Suslin A. A. Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **40** (5), 993–1054 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv* **10** (5), 937–1001 (1976)].

7. Suslin A. A. Projective modules over a polynomial ring are free. *Doklady Acad. Sci. USSR* **229** (5), 1063–1066 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math. Dokl.* **17**, 1160–1164 (1977)].

8. Suslin A. A., Kopeiko V. I. Quadratic modules and ortogonal group over polynomial rings. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **71**, 216–250 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **20** (6), 2665–2691 (1982)].

9. Suslin A. A. On stably free modules. *Matematicheskii sbornik* **102** (4), 537–550 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.* **31**, no. 4, 479–491 (1977)].

10. Suslin A. A. On the structure of the special linear group over polynomial rings. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **41** (2), 235–252 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **11** (2), 221–238 (1977)].

11. Suslin A. A. Locally polynomial rings and symmetric algebras. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **41** (3), 503–515 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **11** (3), 472–484 (1977)].

12. Suslin A. A. A cancellation theorem for projective modules over algebras. *Doklady Acad. Sci. USSR* **236** (4), 808–811 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math. Dokl.* **18**, 1281–1284 (1978)].

13. Suslin A. A. Structure of projective modules over rings of polynomials in the case of a noncommutative ring of coefficients. *Trudy MIAN SSSR* **148**, 233–252 (1978). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **148**, 245–267 (1980)].

14. Kopeiko V. I. The stabilization of symplectic groups over a polynomial ring. *Matematicheskii sbornik* **106** (5), 94–107 (1978). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.* **34** (5), 655–669 (1978)].

15. Kopeiko V. I., Suslin A. A. Quadratic modules over polynomial rings. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **86**, 114–124 (1979). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **17** (4), 2024–2031 (1981)].

16. Suslin A. A. Reciprocity laws and the stable rank of polynomial rings. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **43** (6), 1394–1429 (1979). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **15** (3), 589–623. (1980)].

17. Tulenbaev M. S. Schur multiplier of a group of elementary matrices of finite order. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **86**, 162–169 (1979). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **17** (4), 2062–2067 (1981)].

18. Suslin A. A. Cancellation problem for projective modules and similar questions. In: *Proc. int. Congr. Math., Helsinki 1978*, vol. 1, 323–330 (1980).

19. Tulenbaev M. S. The Steinberg group of a polynomial ring. *Matematicheskii sborn* **117** (1), 131–144 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.* **45** (1), 139–154 (1983)].

20. Suslin A. A. Stability in algebraic K-theory. *Algebraic K-theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1980*, Part I. Lect. Notes Math. **966**, 304–333 (1982).

21. Suslin A. A. Mennicke symbols and their applications in the K-theory of fields. *Algebraic K-theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1980*, Part I. Lect. Notes Math. **966**, 334–356 (1982).

22. Suslin A. A. Algebraic K-theory. Itogi nauki i tekhn. *Ser. Algebra. Topologiia. Geometriia* **20**, 71–152 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **28** (6), 870–923 (1985)].

23. Suslin A. A. Algebraic K-theory. *Trudy MIAN SSSR* **168**, 155–170 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **168**, 161–177 (1986)].

24. Suslin A. A. Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism. *Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovremennye problemy matematiki. Novye dostizheniia* **25**, 115–207 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **30** (6), 2556–2611 (1985)].

25. Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi). *J. K-Theory* **4** (1), 1–65 (2009).

26. Vavilov N. A. Simple Lie algebras, simple algebraic groups and simple finite groups. In: *Mathematics of the XX century. View from St. Petersburg.* Vershik A. M. (ed.), Moscow, Moscow Centre Cont. Math. Education, 8–46 (2010).

27. Artin E. Geometric algebra. Repr. of the orig., publ. by Interscience Publ., Inc. in the series 'Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics (1957) no. 3. Paperbk. ed. Wiley Classics Library. New York etc.: John Wiley & Sons Ltd./Interscience Publishers, Inc. (1988). [Rus. ed.: Artin E. *Geometricheskaia algebra.* Moscow, Nauka Publ. (1969). (In Russian)].

28. Dieudonné J. A. *La géométrie des groupes classiques.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **5**, Berlin; Heidelberg; New York, Springer Verlag (1971). [Rus. ed.: Dieudonné J. *Geometriia klassicheskikh grupp* Moscow, Mir Publ. (1974)].

29. Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

30. Bass H. *Algebraic K-theory.* Mathematics Lecture Note Series. New York; Amsterdam, W. A. Benjamin (1968) [Rus. ed.: Bass H. *Algebraicheskaia K-teoriia.* Moscow, Mir Publ. (1973)].

31. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* University Lecture Series **66** Providence. RI, American Mathematical Society (2016). [Rus. ed.: Steinberg R. *Lektsii o gruppakh Shevalle.* Moscow, Mir Publ. (1975)].

32. Milnor J. W. *Introduction to algebraic K-theory.* Ann. Math. Studies. **72**. Princeton, New York, Princeton University Press and University of Tokyo Press (1971). [Rus. ed.: Milnor J. W. *Vvedenie v algebraicheskuiu K-teoriiu.* Moscow, Mir Publ. (1974)].

33. Bass H., Milnor J., Serre J.-P. *Solution of the congruence subgroup problem for* SL_n $(n \geq 3)$ *and* Sp_{2n} $(n \geq 2)$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **33**, 59–133 (1967).

34. Bak A., Vavilov N. Structure of hyperbolic unitary groups. I. Elementary subgroups. *Algebra Colloq.* **7** (2), 159–196 (2000).

35. Wilson J. The normal and subnormal structure of general linear groups. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **71**, 163–177 (1972).

36. Golubchik I. Z. On the general linear group over an associative ring. *Uspehi Mat. Nauk* **28** (3), 179–180 (1973). (In Russian)

37. Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Springer (2006).

38. Merkurjev A. S. On the norm residue symbol of degree 2. *Doklady Acad. Sci. USSR* **261** (3), 542–547 (1981). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math., Dokl.* **24**, 546–551 (1981)].

39. Suslin A. A. The quaternion homomorphism for the function field on a conic. *Doklady Acad. Sci. USSR* **265** (2), 292–296 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math., Dokl.* **26**, 72–77 (1982)].

40. Merkurjev A. S., Suslin A. A. K-Cohomology of Severi — Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Doklady Acad. Sci. USSR* **264** (3), 555–559 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math., Dokl.* **25**, 690–693 (1982)].

41. Merkurjev A. S., Suslin A. A. K-Cohomology of Severi — Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **46** (5), 1011–1046 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **21** (2), 307–340 (1983)].

42. Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc. New Ser.* **57** (1), 1–22 (2020).

43. Gupta S. K., Murthy M. P. Suslin's Work on Linear Groups over Polynomial Rings and Serre Problem. *ISI Lecture Notes*, vol. 8 (Macmillan Co. of India Ltd, New Delhi, 1980).

44. Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Foreword by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 291. Berlin etc., Springer-Verlag. (1989).

45. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **394**, 33–139 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* (N. Y.) **188** (5), 490–550 (2013)].

46. Vaserstein L. N. On the stabilization of a general linear group over a ring. *Matematicheskii sbornik* **79** (3), 405–424 (1969). (In Russian)

47. Vaserstein L. N. Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozhenie* **5** (2), 17–27 (1971). (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **5** (2), 102–110 (1971)].

48. Vavilov N. A., Plotkin E. B., Stepanov A. V. Computations in Chevalley groups over commutative rings. *Doklady Acad. Sci. USSR* **307** (4), 788–791 (1989). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math., Dokl.* **40** (1), 145–147 (1990)].

49. Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations. *K-theory* **19** (2), 109–153 (2000).

50. Cohn P. M. On the structure of the GL_2 of a ring. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **30**, 365–413 (1966).

51. Gerasimov V. N. The group of units of a free product of rings. *Matematicheskii sbornik* **134** (1), 42–65 (1987). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.* **62** (1), 41–63 (1989)].

52. Golubchik I. Z., Markov V. T. Localization dimension of *PI*-rings. *Tr. semin. im. I. G. Petrovskogo*, **6**, 39–46 (1981). (In Russian)

53. Golubchik I. Z., Mikhalev A. V. Elementary subgroup of a unitary group over a *PI*-ring. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika* **1**, 30–36 (1985). (In Russian) [Eng. transl.: *Mosc. Univ. Math. Bull.* **40** (1), 44–54 (1985)].

54. Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-theory* **4** (4), 363–397 (1991).

55. Vaserstein L. N. On the normal subgroups of the GL_n of a ring, Algebraic K-theory, Evanston 1980. *Lecture Notes in Math.*, vol. 854, 454–465, Berlin, Springer (1981).

56. Borewicz Z. I., Vavilov N. A. Arrangement of subgroups in the general linear group over a commutative ring. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **165**, 24–42 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **165**, 27–46 (1985)].

57. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Standard commutator formula. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1* **1**, 9–14 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Ser. 1* **41** (1) 5–8 (2008)].

58. Hazrat R., Zuhong Zhang. Generalized commutator formula. *Commun. Algebra* **39** (4), 1441–1454 (2011).

59. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Standard commutator formulae, revisited. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1*, **1** 16–22 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Ser. 1* **43** (1), 12–17 (2010)].

60. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. The yoga of commutators. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **387**, 53–82 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **179** (6), 662–678 (2011)].

61. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. Commutator width in Chevalley groups. *Note di Matematica* **33** (1), 139–170 (2013).

62. Hazrat R., Stepanov A., Vavilov N., Zhang Z. The yoga of commutators: further applications *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **421**, 166–213 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **2000** (6), 742–768 (2014)].

63. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Z. The commutators of classical groups. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **443**, 151–221 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **222** (4), 466–515 (2017)].

64. Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).

65. Taddei G. Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau *Contemp. Math.* **55**, Part 2, 693–710 (1986).

66. Petrov V. A., Stavrova A. K. Elementary subgroups of isotropic reductive groups. *Algebra i analiz* **20** (4), 160–188 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **20** (4), 625–644 (2009)].

67. Preusser R. Structure of hyperbolic unitary groups. II: Classification of E-normal subgroups. *Algebra Colloq.* **24** (2), 195–232 (2017).

68. Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics.* Hiroshima, Japan, 30 August — 1 September 1990, 219–335. London, World Scientific Publ. (1991).

69. Vavilov N. A., Gavrilovich M. R., Nikolenko S. I. Structure of Chevalley groups: the proof from the Book. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **330**, 36–76 (2006). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **140** (5), 626–645 (2007)].

70. Costa D. L., Keller G. E. Radix redux: Normal subgroups of symplectic groups. *J. Reine Angew. Math.* **427**, 51–105 (1992).

71. Costa D. L., Keller G. E. On the normal subgroups of $G_2(A)$. *Trans. Am. Math. Soc.* **351** (12), 5051–5088 (1999).

72. Hazrat R., Petrov V., Vavilov N. Relative subgroups in Chevalley groups. *J. K-theory.* **5** (3), 603–618 (2010).

73. Stavrova A., Stepanov A. Normal structure of isotropic reductive groups over rings. *J. Algebra* Available online. 7 December (2022).

74. Petechuk V. M. Automorphisms of matrix groups over commutative ring. *Matematicheskii sbornik* **117** (4), 534–547 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Sb.* **45** (4), 527–542 (1982)].

75. Golubchik I. Z., Mikhalev A. V. Isomorphisms of a complete linear group over an associative ring. *Vestnik Moskovskogo universita. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* **3**, 61–72 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *Mosc. Univ. Math. Bull.* **38** (3), 73–85 (1983)].

76. Golubchik I. Z., Mikhalev A. V. Isomorphisms of unitary groups over associative rings. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **132**, 97–109 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Sov. Math.* **30**, 1863–1871 (1985)].

77. Zel'manov E. I. Isomorphisms of linear groups over an associative ring. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* **26** (4), 49–67 (1985). (In Russian) [Eng. transl.: *Siberian Math. J.* **26** (4), 515–530 (1985)].

78. Keune F. The relativization of K_2. *J. Algebra* **54**, 159–177 (1978).

79. Loday J. L. Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. *J. Algebra* **54**, 178–202 (1978).

80. Voronetsky E. An explicit presentation of relative Steinberg groups. *J. Algebra.* **602**, 278–299 (2022).

81. Kallen W. van der. Another presentation for Steinberg groups. *Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A* **80**, 304–312 (1977).

82. Wendt V. On homotopy invariance for homology of rank two groups. *J. Pure Appl. Algebra* **216** (10), 2291–2301 (2012).

83. Lavrenov A. Another presentation for symplectic Steinberg groups. *J. Pure Appl. Algebra* **219** (9), 3755–3780 (2015).

84. Sinchuk S. On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_l. *J. Pure Appl. Algebra* **220**, 857–875 (2016).

85. Lavrenov A., Sinchuk S. On centrality of even orthogonal K_2. *J. Pure Appl. Algebra* **221** (5), 1134–1145 (2017).

86. Voronetsky E. Centrality of K_2-functor revisited. *J. Pure Appl. Algebra* **225** (4), Article ID 106547, (2021).

87. Voronetsky E. Centrality of odd unitary K_2-functor. arXiv:2005.02926v2 [math. GR] 28 Dec., 37 (2020).

88. Lavrenov A., Sinchuk S., Voronetsky E. Centrality of K_2 for Chevalley groups: a pro-group approach. arXiv:2009.03999v1 [math. GR] 8 Sept., 32 (2020).

89. Dennis R. K. Stability for K_2. *Proc. Conf. Orders, Group Rings related Topics. Ohio State Univ., Columbus 1972. Lect. Notes Math.* **353**, 85–94 (1973).

90. Stein M. R. Stability theorems for K_1 K_2 and related functors modeled on Chevalley groups. *Japan. J. Math.* **4** (1), 77–108 (1978).

91. Vavilov N. A., Sinchuk S. S. Dennis — Vaserstein type decompositions. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **375**, 48–60 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **171** (3), 331–337 (2010)].

92. Vavilov N. A., Sinchuk S. S. Parabolic factorizations of split classical groups классических групп. *Algebra i analiz* **23** (4), 1–30 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **23** (4), 637–657 (2012)].

93. Bak A. Tang Guoping Stability for Hermitian K_1. *J. Pure Appl. Algebra* **150**, 107–121 (2000).

94. Petrov V. A. Odd unitary groups. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **305**, 195–225 (2003). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **30** (3), 4752–4766 (2005)].

95. Bak A., Petrov V. Tang Guoping, Stability for quadratic K_1.*J. K-theory* **30** (1), 1–11 (2003).

96. Sinchuk S. Injective stability for unitary K_1 *J. K-theory* **11** (2), 233–242 (2013).

97. Yu Weibo. Injective stability for odd-dimensional unitary K_1. *J. Group Theory* **23** (2), 313–325 (2020). https://doi.org/10.1515/jgth-2019-0099

98. Voronetsky E. Injective stability for odd unitary K_1 *J. Group Theory* **23** (5), 781–800 (2020).

99. Plotkin E. On the stability of the K_1-functor for Chevalley groups of type E_7. *J. Algebra* **210** (1), 67–85 (1998).

100. Kallen W. van der. Injective stability for K_2. *Algebr. K-Theory. Proc. Conf. Evanston 1976. Lect. Notes Math.* **551**, 77–154 (1976).

101. Kolster K. On injective stability for K_2. *Algebraic K-theory. Proc. Conf., Oberwolfach 1980. Part I. Lect. Notes Math.* **966**, 128–168 (1982).

102. Kolster K. Improvement of K_2-stability under transitive actions of elementary groups. *J. Pure Appl. Algebra.* **24**, 277–282 (1982).

103. Kallen W. van der. Homology stability for linear groups. *Invent. Math.* **60**, 269–295 (1980).

104. Suslin A. A. Homology of Gl_n, characteristic classes and Milnor K-theory. *Trudy MIAN SSSR* **165**, 188–204 (1984).(In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **165**, 207–226 (1985)].

105. Nesterenko Yu. P., Suslin A. A. Homology of the full linear group over a local ring, and Milnor's K-theory. *Izv. AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **53** (1), 121–146 (1989). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Iz* **34** (1), 121–145 (1990)].

106. Panin I. A. Stabilization for orthogonal and symplectic algebraic K-theories. *Algebra i analiz* **1** (3), 172–195 (1989). (In Russian) [Eng. transl.: *Leningrad Math. J.* **1**, no. 3, 741–764 (1990)].

107. Bass H., Heller A., Swan R. G. The Whitehead group of a polynomial extension. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 545–564 (1964).

108. Vorst T. The general linear group of polynomial rings over regular rings. *Comm. Algebra* **9** (5), 499–509 (1981).

109. Abe E. Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings. *Comm. Algebra* **11**, 1271–1307 (1983).

110. Grunewald F., Mennicke J., Vaserstein L. On symplectic groups over polynomial rings. *Math. Z.* **206** (1), 35–56 (1991).

111. Stavrova A. Homotopy invariance of non-stable K_1-functors. *J. K-theory* **13** (2), 199–248 (2014).

112. Stavrova A. Non-stable K_1-functors of multiloop groups. *Canad. J. Math.* **68** (1), 150–178 (2016).

113. Stavrova A. Chevalley groups of polynomial rings over Dedekind domains. *J. Group Theory* **23** (1), 121–132 (2020).

114. Lavrenov A. A local-global principle for symplectic K_2. *Doc. Math.* **23**, 653–675 (2018).

115. Lavrenov A., Sinchuk S. A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2. *Doc. Math.* **25**, 767–809 (2020).

116. Quillen D. Projective modules over polynomial rings *Invent. Math.* **36**, 167–171 (1976).

117. Suslin A. Quillen's solution of Serre's problem. *J. K-theory* **11** (3), 549–552 (2013).

118. Hazrat R. Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules. *J. K-theory* **27**, 293–327 (2002).

119. Hazrat R., Vavilov N. K_1 of Chevalley groups are nilpotent *J. Pure Appl. Algebra* **179**, 99–116 (2003).

120. Bak A., Hazrat R., Vavilov N. Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by Abelian. *J. Pure Appl. Algebra* **213** (6), 1075–1085 (2009).

121. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Zuhong Relative unitary commutator calculus, and applications. *J. Algebra* **343** (1), 107–137 (2011).

122. Hazrat R., Vavilov N., Zhang Zuhong Relative commutator calculus in Chevalley groups. *J. Algebra* **385**, 262–293 (2013).

123. Basu R., Rao R. A., Khanna R. On Quillen's local global principle. Ghorpade, Sudhir (ed.). Commutative algebra and algebraic geometry. Joint Intern. meeting of the Amer. Math. Soc. and the Indian Math. Soc., Bangalore, India (December, 17–20, 2003). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). *Contemp. Math.* **390**, 17–30 (2005).

124. Bak A., Basu R., Rao R. A. Local-global principle for transvection groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (4), 1191–1204 (2010).

125. Apte H., Stepanov A. Local-global principle for congruence subgroups of Chevalley groups. *Cent. Eur. J. Math.* **12** (6), 801–812 (2014).

126. Basu R. Local-global principle for the general quadratic and general Hermitian groups and the nilpotency of KH_1. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **452**, 5–31 (2016).

127. Basu R., Khanna R., Rao R. A. The pillars of relative Quillen — Suslin theory. Ambily A. A. (ed.) et al. Leavitt path algebras and classical K-theory. Based on the international workshop on Leavitt path algebras and K-theory, Kerala, India, July 1–3, 2017. Singapore, Springer. Indian Stat. Inst. Ser., 211–223 (2020).

128. Basu R. A note on general quadratic groups. *J. Algebra Appl.* **17** (11), Article ID 1850217 (2018).

129. Ambily A. A. Yoga of commutators in DSER elementary orthogonal group. *J. Homotopy Relat. Struct.* **14** (2), 595–610 (2019).

130. Basu R., Singh M. K. Quillen — Suslin theory for classical groups: revisited over graded rings. In: Srivastava, Ashish K. (ed.) et al., Categorical, homological and combinatorial methods in algebra. AMS special session in honor of S. K. Jain's 80^{th} birthday, Ohio State Univ., Columbus, Ohio (March, 16–18, 2018). Providence, RI, Amer. Math. Soc. *Contemp. Math.* **751**, 5–18 (2020).

131. Swan R. G., Towber J. A class of projective modules which are nearly free. *J. Algebra* **36** (3), 427–434 (1975).

132. Krusemeyer M. Skewly completable rows and a theorem of Swan and Towber. *Commun. Algebra* **4** (7), 657–663 (1976).

133. Mandal S. *Projective Modules and Complete Intersections.* Lecture Notes in Mathematics **1672**, Springer, Berlin, (1997).

134. Kumar N. M. A note on the cancellation of reflexive modules. *J. Ramanujan Math. Soc.* **17** (2), 93–100 (2002).

135. Sridharan R., Yadav S. K. On a theorem of Suslin. In: Leavitt path algebras and classical K-theory, 241–260, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore (2020).

136. Jose S., Rao R. A. A fundamental property of Suslin matrices. *J. K-theory* **5** (3), 407–436 (2010).

137. Rao R. A., Jose S. A study of Suslin matrices: their properties and uses. In: Rizvi, Syed Tariq (ed.) et al. Algebra and its applications. ICAA, Aligarh, India (December 15–17, 2014). Proc. Conf. Singapore: Springer, Springer Proc. In: *Mathematics & Statistics* **174**, 89–121 (2016).

138. Vavilov N. A., Smolensky A. V., Sury B. Unitriangular factorisations of Chevalley groups. *Zapiski nauchnogo seminara POMI* **388**, 17–47 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **183** (5), 584–599 (2012)].

Received: June 25, 2023
Revised: August 20, 2023
Accepted: August 31, 2023

Author's information:

Nikolai A. Vavilov (1952–2023)