К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 517.95
MSC 35-02

Обзор результатов научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных. I*

Д. Е. Апушкинская[1,2], *А. А. Архипова*[3], *А. И. Назаров*[2,3], *В. Г. Осмоловский*[3], *Н. Н. Уральцева*[3]

[1] Российский университет дружбы народов,
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
[2] Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН),
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
[3] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Апушкинская Д. Е., Архипова А. А., Назаров А. И., Осмоловский В. Г., Уральцева Н. Н.* Обзор результатов научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 3–37.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.101

Статья содержит обзор важнейших результатов, полученных в рамках научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных (школы О. А. Ладыженской — Н. Н. Уральцевой). Основное внимание уделено работам, выполненным в нашем университете за последние 50 лет. Предлагаемая читателям первая часть обзора касается разрешимости и качественных свойств решений краевых задач для скалярных квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, а также вариационных задач. В планируемую вторую часть обзора войдут разделы о полностью нелинейных уравнениях и системах уравнений и о задачах со свободными границами.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, краевые задачи, вариационные неравенства, вариационное исчисление.

*Работа Д. Е. Апушкинской и А. И. Назарова выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00027).

1. Введение[1]**.** Научная школа нелинейных уравнений в частных производных (УрЧП) сформировалась в Ленинградском университете в 50-е годы XX в. Из ее предшественников мы выделим С. Н. Бернштейна и Н. М. Гюнтера.

Работы С. Н. Бернштейна, относящиеся к началу XX в. (в то время он еще не работал в Университете), намного опередили развитие теории УрЧП и математической физики во всем мире. Их направление связано в основном с краевыми задачами для линейных и нелинейных эллиптических уравнений при двух независимых переменных, с задачами вариационного исчисления и с различными задачами геометрии поверхностей. Большой цикл его работ посвящен решению двух проблем Гильберта — 19-й и 20-й.

Как известно, 19-я и 20-я проблемы Гильберта во многом определили направление исследований по квазилинейным эллиптическим уравнениям в XX в. В 20-й проблеме утверждалось существование по крайней мере одной функции $u(x)$, дающей минимум регулярному функционалу

$$J(u) := \int_\Omega F(x, u, Du)\, dx \tag{1}$$

(здесь и далее Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$; $Du = (D_1u, \ldots, D_nu)$ — градиент функции u) при условии Дирихле $u|_{\partial\Omega} = u_0(x)$, если класс функций сравнения выбран достаточно широким. Регулярность $J(u)$ означает эллиптичность соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа. В 19-й проблеме утверждалась аналитичность всех обладающих некоторой гладкостью решений эллиптических уравнений, коэффициенты которых аналитичны.

С. Н. Бернштейн доказал справедливость 19-й проблемы Гильберта для общих нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, предполагая решения априори трижды дифференцируемыми. В 20-й проблеме он доказал однозначную разрешимость задачи Дирихле для уравнений вида[2]

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du) = 0 \tag{2}$$

в классе достаточно гладких функций при условии невозрастания функции a по u (в этом случае заведомо имеет место теорема единственности). Из этого результата следовала однозначная разрешимость задачи минимизации функционалов (1) в двумерной области с $F = F(x, Du)$ в классе достаточно гладких функций. Более того, Бернштейн выяснил условия, необходимые для разрешимости задачи Дирихле «в целом». Они касаются поведения функций $a_{ij}(x, p)$, $a(x, p)$, $F(x, p)$ и их производных при $|p| \to \infty$.

Главная идея Бернштейна состояла в том, что разрешимость краевой задачи по существу зависит от наличия априорных оценок максимумов модулей решений и их производных до определенного порядка для данной задачи и какого-либо однопараметрического семейства задач, связывающего данную задачу с заведомо разрешимой. Это положение Бернштейна нашло свое строгое оформление много позже

[1]При подготовке этого раздела в основном использовались материалы коллективной монографии [1].

[2]Все функции здесь и далее считаются вещественными.

в топологических принципах неподвижной точки. Следуя этой идее, Бернштейн основное внимание уделял получению априорных оценок для решений уравнений (2). Им были указаны различные способы получения априорных оценок, среди которых выделим следующий. Благодаря принципу максимума для эллиптических уравнений оказалось возможным получать оценки для весьма широких классов таких уравнений, вводя вместо исследуемых решений $u(x)$ специально подобранные функции от них $v = \phi(u)$ (или $\phi(Du)$, или $\phi(D^2u)$ и пр.). Различные классы уравнений и оценки $\max|u|$ или $\max|D^\ell u|$ требуют введения своей функции ϕ. От удачи в выборе функции ϕ зависит успех в получении оценки. Бернштейн указал такие функции для квазилинейных уравнений вида (2), а также для общих линейных уравнений эллиптического и параболического типов (при любом числе независимых переменных). Однако сама идея рассмотрения наряду с решением задачи специально подобранных функций от него (или каких-либо его производных) оказалась полезной и для других классов квазилинейных и нелинейных уравнений и была использована в дальнейшем многими авторами.

Н. М. Гюнтер работал в нашем университете более 50 лет. Из его работ по нелинейным УрЧП упомянем серию статей по аналитической теории таких уравнений и большой цикл работ по задаче Коши и смешанной задаче для уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Работы по гидродинамике неоднократно приводили Гюнтера к необходимости оперировать с функциями, которые не имеют достаточного числа непрерывных производных. Это привело его к общему понятию функции от области (множества). Таким образом, он является предшественником С. Л. Соболева в создании теории обобщенных функций, которая играет огромную роль в исследованиях по УрЧП.

Говоря о научной школе нелинейных УрЧП, нельзя не упомянуть В. И. Смирнова и С. Л. Соболева. Несмотря на то что сами они нелинейной тематикой не занимались, их научная, а в еще большей степени просветительская деятельность оказала на развитие этой школы колоссальное влияние.

В многогранной деятельности В. И. Смирнова в ЛГУ большое место занимала организация научно-исследовательских семинаров, из которых выросли несколько крупных научных школ в городе. Среди них мы выделим семинар по функциональному анализу (30-е годы), а также общегородской семинар по математической физике (1947), который ныне носит имя своего основателя и в прошлом году отметил свое 75-летие [2]. Почти все ленинградские/петербургские специалисты по уравнениям в частных производных были или являются участниками этого семинара.

Современную теорию нелинейных УрЧП невозможно представить себе без обобщенных функций, обобщенных решений, пространств Соболева, введенных С. Л. Соболевым в работах 30–40-х годов прошлого века. А его монография [3], изданная в Ленинградском университете в 1950 г., долгие годы была настольной книгой всех специалистов в этой области.

Основателем школы нелинейных УрЧП в ЛГУ является О. А. Ладыженская. Выпускница Московского университета (1947), она привезла в наш город культуру УрЧП в московском духе, которую там в большой мере определял ее учитель И. Г. Петровский. С другой же стороны, она быстро освоила технику (идущую от Соболева), основанную на теоремах вложения и обобщенных решениях.

Еще в своей кандидатской диссертации (1949) Ладыженская предложила сходящиеся разностные схемы для общих квазилинейных систем, гиперболических по Петровскому (задача Коши). После защиты докторской диссертации (1953), посвященной смешанной задаче для линейных гиперболических уравнений, она вернулась к изучению нелинейных задач, в частности начально-краевых задач для системы уравнений математической гидродинамики: системы Навье — Стокса.

Первые же работы о разрешимости таких задач оказались прорывными, некоторые из результатов не перекрыты и до сих пор. Результаты О. А. Ладыженской и ее учеников по этой тематике, полученные в 50-х годах, подытожены в монографии [4]. В 1963 г. вышел перевод этой книги на английский язык, а в 1970 г. — второе русское издание, существенно дополненное и переработанное. Позднее монография была переведена еще на несколько языков и стала «библией» для всех специалистов по гидродинамике.

Более подробно об этих и дальнейших работах Ладыженской в области математической гидродинамики можно прочесть в обзорной статье [5].

Другая проблема, которая была в центре внимания О. А. Ладыженской начиная с 50-х годов, — регулярность решений квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов. Большинство результатов в этом направлении было получено в сотрудничестве с ее ученицей Н. Н. Уральцевой (ныне заведующей кафедрой математической физики математико-механического факультета).

Отправными точками этих исследований были работа Ладыженской [6] об оценке градиентов решений эллиптических и параболических квазилинейных уравнений и статьи Э. Де Джорджи (E. De Giorgi) [7] и Дж. Нэша (J. Nash) [8], в которых установлено, что решения линейных равномерно эллиптических и параболических уравнений дивергентного вида с измеримыми коэффициентами удовлетворяют условию Гёльдера. Развивая технику Де Джорджи и Нэша, Ладыженская и Уральцева распространили ее на более общие линейные и квазилинейные уравнения эллиптического и параболического типов. Кроме того, они разработали технику вывода априорных оценок для решений уравнений с сильными нелинейностями. Это позволило им получить точные результаты о разрешимости и гладкости решений классических краевых задач для дивергентных квазилинейных уравнений:

$$L(u) := -\sum_{i=1}^{n} D_i\big(a_i(x,u,Du)\big) + a(x,u,Du) = 0; \tag{3}$$

$$M(u) := \partial_t u - \sum_{i=1}^{n} D_i\big(a_i(x,t,u,Du)\big) + a(x,t,u,Du) = 0,$$

удовлетворяющих так называемым естественным (бернштейновским) условиям роста. В частности, это дало полное решение 19-й и 20-й проблем Гильберта для уравнений второго порядка. Заметим, что как для систем уравнений второго порядка, так и для эллиптических уравнений более высокого порядка утверждение 19-й проблемы Гильберта неверно. Соответствующие контрпримеры были построены в 1968 г. В. Г. Мазья [9] (для высокого порядка) и итальянскими математиками Э. Де Джорджи [10], Э. Джусти и М. Мирандой (E. Giusti, M. Miranda) [11] (для систем).

Полученные результаты по эллиптическим уравнениям были подытожены в монографии [12] (в 1973 г. вышло второе, переработанное издание [13]). Тремя годами позже была опубликована монография [14] (написанная совместно с В. А. Солонниковым, еще одним учеником Ладыженской), посвященная параболическим уравнениям.

Заметим, что гидродинамическая часть школы О. А. Ладыженской — В. А. Солонникова, хотя и пополнялась выпускниками университета, в дальнейшем развивалась в основном на базе Ленинградского/Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова [15, 16]. В то же время задачи, связанные с квазилинейными и полностью нелинейными уравнениями, а также с вариационным исчислением, получили свое развитие именно в ЛГУ — СПбГУ, прежде всего на кафедре математической физики.

Отдельно отметим работы В. Г. Мазья. Выпускник ЛГУ, он более 25 лет работал на математико-механическом факультете. Хотя его многочисленные и разнообразные результаты, многие из которых стали классическими (их обзор можно найти, например, в [17]; см. также [18–20]) относятся в основном к линейным задачам, их влияние на школу О. А. Ладыженской — Н. Н. Уральцевой весьма существенно.

В настоящей статье собраны основные результаты, полученные в рамках этой школы за последние полвека. Первая часть содержит разделы о разрешимости и качественных свойствах решений краевых задач для скалярных квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка (§ 2) и вариационных задач (§ 3). В планируемую вторую часть обзора войдут разделы о полностью нелинейных уравнениях и системах уравнений, а также о задачах со свободными границами.

2. Квазилинейные уравнения. Этот раздел мы начнем с описания цикла работ Н. Н. Уральцевой по уравнениям, имеющим различного рода вырождения эллиптичности по градиенту. Начало этому циклу положила статья [21], в которой, в частности, был получен знаменитый результат о регулярности p-гармонических функций, т. е. решений уравнения

$$\Delta_p u := \sum_{i=1}^{n} D_i\big(|Du|^{p-2} D_i u\big) = 0. \tag{4}$$

Уравнения с p-лапласианом Δ_p при $p > 2$ являются квазилинейными эллиптическими уравнениями с вырождением при нулевом значении градиента. Известно, что решение такого уравнения, вообще говоря, не имеет соболевских вторых производных, и вопрос заключался в доказательстве непрерывности первых производных в окрестности множества, где $Du = 0$. К сожалению, результат, полученный Уральцевой, долго оставался неизвестным за границей и через 9 лет был передоказан и расширен К. Уленбек (K. Uhlenbeck) и другими авторами.

Для класса неравномерно эллиптических уравнений, включающих уравнение Эйлера для функционалов типа площади поверхности

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\frac{D_i u}{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) + f(x,u) = 0 \tag{5}$$

(такие уравнения вырождаются при $|Du| \to \infty$), Н. Н. Уральцевой был разработан метод получения локальных оценок модуля градиента решения. Внутренние оценки градиента, обобщающие результаты Э. Бомбиери (E. Bombieri), Э. Де Джорджи и М. Миранды [22], были получены в работе [23] (совместной с О. А. Ладыженской); позднее авторы распространили этот результат на класс сингулярно возмущенных задач [24]. Приграничные оценки градиента решения для краевого условия типа капиллярности без ограничений на геометрию области, а также разрешимость соответствующих краевых задач были установлены в серии работ [25–27]. В статье

Уральцевой и ее аспирантки А. Б. Урдалетовой [28], по-видимому, впервые были получены результаты о регулярности решений некоторого класса анизотропно вырождающихся эллиптических уравнений. Этот класс включает уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\big(|D_i u|^{p_i-2} D_i u\big) = 0, \qquad 1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n,$$

принадлежащее к весьма популярным в последние десятилетия уравнениям с нестандартным ростом по градиенту (см., например, [29] и [30]).

Новый этап в развитии теории разрешимости квазилинейных уравнений в ЛГУ начался в 1980 г., после выхода знаменитой работы московских математиков Н. В. Крылова и М. В. Сафонова [31], в которой были установлены оценка Гёльдера и неравенство Гарнака для решений равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений общего (недивергентного) вида с измеримыми коэффициентами:

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u = 0;$$

$$\mathcal{M}u := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i u = 0;$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \nu|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2, \qquad \nu > 0.$$

Техника, развитая ранее О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, позволила быстро распространить эти результаты на квазилинейные уравнения общего вида

$$\begin{gathered} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,Du) D_i D_j u + a(x,u,Du) = 0; \\ \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,Du) D_i D_j u + a(x,t,u,Du) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

с квадратичным ростом функции a по компонентам градиента [32]. В работе [33] были получены дальнейшие априорные оценки решений задачи Дирихле для таких уравнений и доказаны теоремы существования.

К работе над этой тематикой Н. Н. Уральцева привлекла своего студента А. И. Назарова. В работе [34] было получено обобщение принципа максимума Александрова — Бакельмана — Крылова[3] для параболических уравнений на случай уравнений с неограниченными младшими коэффициентами (одновременно аналогичные результаты были получены К. Тсо (K. Tso)). Отметим, что подход, развитый в этой работе, основан на геометрических идеях, близких к первоначальным идеям А. Д. Александрова, и более прозрачен, чем чисто аналитический подход Н. В. Крылова. Этот результат позволил получить все необходимые априорные оценки и доказать теоремы существования решения задачи Дирихле для уравнений вида (6), в

[3]Подробный обзор результатов о принципе максимума Александрова — Бакельмана — Крылова, в том числе полученных в СПбГУ, был опубликован в [35] (см. также [36, § 2.3]).

которых функции a могут иметь неограниченные особенности по независимым переменным [37, 38]. Обзор результатов по задаче Дирихле для недивергентных уравнений был опубликован в статье [39] и составил содержание приглашенного доклада Уральцевой на Международном математическом конгрессе (1986) [40]. Сравнительно недавно эта линия исследований была продолжена в [41].

Далее под руководством Н. Н. Уральцевой было развернуто исследование других краевых задач — задачи с наклонной производной (oblique derivative problem) и задачи Вентцеля. В первой из них граничное условие имеет вид

$$b(x,u,Du)=0 \qquad \text{или} \qquad b(x,t,u,Du)=0, \qquad x\in\partial\Omega,$$

в эллиптическом и параболическом случае соответственно и таким образом задает производную решения по направлению некоторого векторного поля (зависящего от самого решения). Функция $b(x,u,p)$ ($b(x,t,u,p)$) удовлетворяет условию некасательности:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}\mathbf{n}_i \geqslant \varkappa\cdot|b_p|, \qquad \varkappa>0.$$

Эта задача изучалась в серии работ, из которых мы упомянем [42–45]. Заметим, что параллельно исследование этой задачи велось зарубежными математиками, в том числе Н. С. Трудингером (N. S. Trudinger) и Г. Либерманом (G. Lieberman).

Задача Вентцеля была впервые поставлена А. Д. Вентцелем в 1959 г. [46] как наиболее общая краевая задача для эллиптического оператора, порождающая генератор марковского случайного процесса. Впоследствии было обнаружено, что задачи с условиями вентцелевского типа описывают процессы в средах, содержащих тонкие пленки на границе, и возникают во многих областях науки и техники. Среди них задачи гидродинамики, электродинамики и теории упругости, инженерные задачи нефтедобычи и некоторые вопросы финансовой математики.

Граничные условия Вентцеля задаются операторами, содержащими производные второго порядка по касательным переменным. Для квазилинейных эллиптических и параболических недивергентных уравнений соответственно они могут быть записаны в виде

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(x,u,D^*u)D_i^*D_j^*u+\beta(x,u,Du)=0, \qquad x\in\partial\Omega,$$

(здесь p^* — проекция вектора p на касательную плоскость к $\partial\Omega$) или

$$\partial_t u-\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}(x,t,u,D^*u)D_i^*D_j^*u+\beta(x,t,u,Du)=0, \qquad x\in\partial\Omega,$$

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}, \qquad \nu|\xi^*|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_i^*\xi_j^*\leqslant\nu^{-1}|\xi^*|^2, \qquad \nu>0; \qquad \sum_{i=1}^{n}\beta_{p_i}\mathbf{n}_i\geqslant 0.$$

Исследование задачи Вентцеля для эллиптических уравнений общего вида было начато в работах Н. С. Трудингера и его ученика Ю. Луо (Y. Luo). Задача получения аналогичных результатов для параболических уравнений была поставлена Н. Н. Уральцевой перед Д. Е. Апушкинской, в дипломной работе которой, опубликованной в [47], были получены локальные оценки типа Александрова — Бакельмана — Крылова. Далее последовала большая серия статей Апушкинской и Назарова (из них мы упомянем [48] и [49]), в которых были получены априорные оценки и доказаны теоремы существования при условиях, близких к необходимым. Итоги этой серии были подведены в обзоре [50]. Отметим также работу [51], в которой была развита теория повторных потенциалов для задачи Вентцеля и более сложных краевых задач, возникающих в акустике.

Следующей естественно возникшей задачей стала **двухфазная** задача Вентцеля для эллиптических и параболических уравнений. Такая задача описывает ситуацию, когда пленка Σ разделяет область Ω на две части: $\Omega^{[1]}$ и $\Omega^{[2]}$. Условие на пленке при этом задается квазилинейным уравнением второго порядка (соответственно эллиптическим или параболическим) по касательным переменным. Главные члены граничного оператора, как и в однофазной задаче, описывают диффузию вдоль пленки, а члены первого порядка образуют оператор «сопряжения» на пленке

$$\mathfrak{J}u := \beta_{[1]}\big(x, u, D^*u + \mathbf{n}(x)\cdot \lim_{\varepsilon\to -0}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot\mathbf{n}(x))\big) - \\ - \beta_{[2]}\big(x, u, D^*u + \mathbf{n}(x)\cdot \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot\mathbf{n}(x))\big)$$

и описывают взаимодействие пленки с подобластями $\Omega^{[1]}$ и $\Omega^{[2]}$.

Изучение двухфазной задачи Вентцеля, как и предыдущих задач, было начато с локальных оценок типа Александрова — Бакельмана — Крылова [52], потребовавших тонкого анализа отображения Лежандра для этой задачи. При дальнейшем анализе выяснилось, что случай, когда пленка не пересекает внешнюю границу области, относительно прост, чего никак нельзя сказать о ситуации, когда такое пересечение имеется. Для трансверсального пересечения задача была решена в серии работ, заключительными в которой были [53] и [54]. Вопрос о разрешимости двухфазной задачи при нетрансверсальном пересечении открыт до сих пор.

В дальнейшем изучение задачи Вентцеля было продолжено. В работе [55] были впервые получены оценки Гёльдера для дивергентной задачи, в [56] этот результат был распространен на задачу Вентцеля на сложной структуре — стратифицированном множестве. В работах [57, 58] установлен принцип максимума Александрова — Бакельмана — Крылова для задачи на стратифицированном множестве типа «книжка».

В последние годы также активно развивается сотрудничество по этой тематике с итальянскими математиками. В статьях [59] и [60] были рассмотрены задачи Вентцеля с нелокальными членами в областях с кусочно гладкой границей. В серии работ [61–66] получены априорные оценки и теоремы о разрешимости линейных и квазилинейных задач Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами из класса *VMO*.

Заметим еще, что исследованию задач вентцелевского типа посвящено много работ зарубежных математиков. Частичный обзор литературы можно найти в [63].

При исследовании задач Вентцеля неоднократно возникала потребность в получении априорных оценок и теорем о разрешимости для вспомогательных задач Дирихле в ситуациях, не рассмотренных ранее. В связи с этим упомянем работы [67, 68], а также [69], в которой было получено существенное обобщение оценок типа Александрова — Бакельмана — Крылова.

Более того, работа над задачей Вентцеля инициировала серию новых результатов в линейной теории параболических уравнений — области, сравнительно хорошо изученной. В работе [70] были впервые рассмотрены краевые задачи для уравнений с непрерывными коэффициентами в областях с ребрами, имеющими произвольную коразмерность. Отметим следующее довольно неожиданное вспомогательное утверждение из этой статьи, представляющее самостоятельный интерес.

Пусть $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega'' \subset \mathbb{R}^{n-m}$.

Обозначим $G'_{\mathcal{D}}(x', y', t)$, $G'_{\mathcal{N}}(x', y', t)$, $G''_{\mathcal{D}}(x'', y'', t)$ *и* $G''_{\mathcal{N}}(x'', y'', t)$ *как функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в областях* Ω' *и* Ω'' *соответственно.*

Тогда функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в области Ω *задаются формулами*

$$G_{\mathcal{D}}(x, y, t) = G'_{\mathcal{D}}(x', y', t) \cdot G''_{\mathcal{D}}(x'', y'', t);$$

$$G_{\mathcal{N}}(x, y, t) = G'_{\mathcal{N}}(x', y', t) \cdot G''_{\mathcal{N}}(x'', y'', t).$$

В серии работ В. А. Козлова и А. И. Назарова [71–74] были установлены коэрцитивные оценки в весовых пространствах для уравнений со старшими коэффициентами, непрерывными по пространственным переменным и лишь измеримыми по времени. Полученные результаты существенно усиливают пионерские оценки Н. В. Крылова.

Изложенные выше результаты касаются априорных оценок и теорем существования. В последнее десятилетие был также получен ряд результатов по качественной теории эллиптических и параболических уравнений, касающихся точных (а при некоторых предположениях даже необходимых и достаточных) условий справедливости классических теорем.

В статье А. И. Назарова и Н. Н. Уральцевой [75] рассматривались эллиптические и параболические уравнения дивергентного вида:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} D_i\big(a_{ij}(x) D_j u\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u = 0;$$

$$Mu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} D_i\big(a_{ij}(x,t) D_j u\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i u = 0$$

с дополнительным структурным условием

$$\operatorname{div}(\mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} D_i b_i \leqslant 0 \quad \text{в смысле обобщенных функций.} \tag{7}$$

Уравнения с младшими коэффициентами, удовлетворяющими (7), возникают в некоторых приложениях (в частности, в задачах математической гидродинамики). В [75] изучался вопрос о том, насколько «плохими» могут быть младшие коэффициенты b_i для выполнения сильного принципа максимума, неравенства Гарнака и теоремы Лиувилля. Было показано, что при условии (7) предположения о b_i можно значительно ослабить в шкале пространств Морри по сравнению с общим случаем.

В серии работ Д. Е. Апушкинской и А. И. Назарова получены точные условия выполнения леммы о нормальной производной (леммы Хопфа — Олейник) для уравнений недивергентного [76, 77] и дивергентного [78] видов.

В статьях [79, 80] получены новые условия для выполнения принципа Фрагмена — Линделёфа в смешанной краевой задаче для эллиптических уравнений недивергентного вида.

Работа [81] посвящена сильному принципу максимума для дивергентных эллиптических уравнений со старшими коэффициентами из класса VMO и младшими коэффициентами из класса Като. Полученные результаты позволили существенно ослабить условия справедливости оценок профиля свободной поверхности в двумерной задаче о волнах в канале.

Наконец, недавний обзор [36] содержит широкую картину развития этой тематики от Гаусса до наших дней.

3. Вариационные задачи. Другое направление, интенсивно развивающееся в ЛГУ/СПбГУ в последние полвека, — исследование разрешимости вариационных задач, регулярности и качественных свойств их решений — находится на стыке теории уравнений в частных производных и вариационного исчисления.

Большой цикл работ Н. Н. Уральцевой и А. А. Архиповой относится к теории вариационных неравенств и охватывает широкий круг задач с выпуклыми ограничениями. Простейшее вариационное неравенство для эллиптического оператора возникает при минимизации регулярного функционала J на выпуклом множестве $\mathcal{K}$ в банаховом пространстве X и имеет вид

$$\langle J'(u), v-u\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v\in\mathcal{K}. \tag{8}$$

Для параболического оператора соответствующее (эволюционное) вариационное неравенство имеет вид

$$\langle u'(t), v-u(t)\rangle + \langle J'(u(t)), v-u(t)\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v\in\mathcal{K}$$

(здесь $u:[0,T]\to X$ — абстрактная функция вещественной переменной из подходящего класса).

Важной проблемой теории вариационных неравенств является исследование регулярности обобщенных решений. Известно, что порог гладкости решений вариационных неравенств существенно зависит от характера ограничений (множества $\mathcal{K}$) и доказательство предельной гладкости требует, как правило, больших усилий.

Формирование теории вариационных неравенств началось в конце 60-х годов XX в. в работах Г. Стампаккья (G. Stampaccia) и его соавторов. Первые работы были посвящены задаче с препятствием. В этой задаче функционал (1) минимизируется на множестве

$$\mathcal{K}_\phi^\psi := \{v\in W_m^1(\Omega)\ \big|\ v(x)\geqslant\psi(x) \quad \text{п. в. в } \Omega,\ v|_{\partial\Omega}=\phi\}. \tag{9}$$

Здесь $m\geqslant 1$, $\phi,\psi\in W_m^1(\Omega)$ — заданные функции, $\psi\geqslant\phi$ на $\partial\Omega$, а интегрант $F(x,u,p)$ — выпуклая по аргументу p функция, удовлетворяющая условию $F(x,u,p)\sim|p|^m$ при $|p|\to\infty$.

При дополнительных ограничениях на поведение частных производных $F_{p_i}(x,u,p)$ и $F_u(x,u,p)$ необходимое условие минимума выражается вариационным неравенством

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n F_{p_i}(x,u,Du)(D_iv-D_iu)+F_u(x,u,Du)(v-u)\right)dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad v\in\mathcal{K}_\phi^\psi,$$

которое можно записать в виде (8), где

$$J'(u) := -\sum_{i=1}^{n} D_i F_{p_i}(x, u, Du) + F_u(x, u, Du)$$

— оператор Эйлера функционала $J[u]$. Понятие вариационного неравенства было распространено и на эллиптические операторы $L(u)$ невариационного типа, имеющие дивергентную структуру (см. (3)). При условиях монотонности и коэрцитивности операторов (и более общих условиях) исследовались качественные свойства решений.

В первых работах А. А. Архиповой, составивших основу ее кандидатской диссертации ([82–84]; см. также [85]) для различных классов эллиптических и параболических операторов изучался вопрос о гладкости решения задачи с одним или двумя (верхним и нижним) препятствиями, в том числе вопрос о предельной гладкости — ограниченности вторых производных решения при условии достаточной гладкости данных задачи.

В работе [83] рассматривалась задача с препятствием для класса недивергентных уравнений

$$\mathcal{L}(u) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

как задача о наименьших суперрешениях уравнения (10) на множестве

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\phi^\psi = \{v \in W^2_{\hat{n}}(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ в } \Omega,\ v|_{\partial\Omega} = \phi\},$$

где $\hat{n} = n$ при $n > 2$, и $\hat{n} = n + \epsilon$, с любым $\epsilon > 0$ при $n = 2$.

Напомним, что функция $g \in \widetilde{\mathcal{K}}_\phi^\psi$ называется суперрешением уравнения $\mathcal{L}(u) = 0$, если она удовлетворяет неравенству $\mathcal{L}(g) \geqslant 0$ п. в. в Ω. В работе [83] сформулированы условия на данные задачи, при которых существует наименьшее суперрешение уравнения $\mathcal{L}(u) = 0$ класса $W^2_q(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ при любых $q < \infty$ и $\lambda \in (0, 1)$. Отметим, что наименьшее суперрешение одновременно является решением неравенства

$$\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du) \Big)(v - u)\, dx \geqslant 0$$
$$\text{для всех } v \in L^2(\Omega),\ v \geqslant \psi \text{ в } \Omega,$$

тогда как для уравнения дивергентного вида (3) наименьшее суперрешение является решением вариационного неравенства

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, Du)(D_i v - D_i u) + a(x, u, Du)(v - u) \Big)\, dx \geqslant 0,$$
$$\text{для всех } v \in \mathcal{K}_\phi^\psi,$$

где множество $\mathcal{K}_\phi^\psi$ определено в (9).

Отметим еще один результат Архиповой, посвященный задаче с препятствием для уравнения средней кривизны (5) при $f(x,u) = n\Lambda(x)$, где $\Lambda(x)$ — заданная кривизна поверхности. В работе [83] приведены условия на $\Lambda(x)$ и границу области Ω, при которых существует наименьшее суперрешение $u \in \widetilde{\mathcal{K}}_\phi^\psi$ класса $W_q^2(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$. Показано, что это суперрешение является также решением соответствующего вариационного неравенства. Этот результат обобщает работу Х. Леви (H. Lewy) и Г. Стампаккья 1971 г., в которой рассматривались минимальные поверхности ($\Lambda(x) \equiv 0$).

Одной из важных прикладных задач, описываемых вариационным неравенством, является задача Синьорини — задача о деформации под действием внешних сил упругого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. В простейшей скалярной постановке это задача о минимизации заданного функционала (1) на выпуклом замкнутом множестве

$$\mathcal{K}[\psi] = \{v \in W_m^1(\Omega) \ \big| \ v \geqslant \psi \text{ на } \Gamma \subset \partial\,\Omega\},$$

где ψ — заданная функция на Γ. Известно, что предельная гладкость решения такой задачи — принадлежность первых производных решения пространству $C^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$.

Задача Синьорини и ее модификации для эллиптических и параболических уравнений и диагональных систем уравнений изучались в работах Н. Н. Уральцевой [86] и [87], а также в ее совместных статьях с А. А. Архиповой [88–92]. Авторами изучалась регулярность (вплоть до предельной) решения задачи Синьорини для различных классов операторов, причем в задаче с двумя препятствиями не исключалась возможность их совпадения на части границы. Для диагональных систем изучалась проблема регулярности решений вариационных неравенств в ситуации, когда «препятствие» на границе области описывалось как принадлежность решения $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N)$, $N > 1$, некоторому выпуклому множеству $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^N$. В статье [93] содержится частичный обзор результатов по проблеме регулярности решений вариационных неравенств.

Отметим также недавнюю серию работ [94–96], выполненную Д. Е. Апушкинской совместно с С. И. Репиным, в которой изучались эллиптические и параболические вариационные неравенства, порожденные задачей с тонким препятствием внутри области, задачей с препятствием для бигармонического оператора, нестационарной задачей с препятствием, а также стационарной и нестационарной скалярными задачами Синьорини. Для этих задач были получены полностью вычисляемые апостериорные оценки энергетической нормы разности между точным решением (минимайзером) и приближенным решением (произвольной функцией из множества $\mathcal{K}$, порождаемого задачей). Важно, что полученные оценки полностью определяются данными задачи и приближенным решением, т. е. для их вычисления знание точного решения не нужно. Кроме того, они обращаются в нуль на решении рассматриваемой задачи и, таким образом, являются точными.

Задачи вариационного исчисления составляют значительную часть в работах В. Г. Осмоловского. В основном они относятся к проблеме фазовых переходов в механике сплошных сред. Специфика этих задач порождается отсутствием выпуклости функционала энергии, возникающей из-за наличия двух фаз с априори неизвестной границей раздела.

Одна из возможных постановок этой задачи такова: для двух фиксированных плотностей энергии $F^{\pm}(D\mathbf{u})$, квадратично зависящих от градиента вектор-функции смещения $\mathbf{u}$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, задается функционал энергии

$$I_0[\mathbf{u}, \chi, t] = \int\limits_{\Omega} \big(\chi(F^+(D\mathbf{u}) + t) + (1-\chi)F^-(D\mathbf{u})\big)\, dx,$$
$$\mathbf{u} \in \mathbb{H} := \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $\mathbb{Z}'$ — множество всех характеристических функций измеримых множеств, а параметр t определяется температурой. Функция χ описывает распределение фаз в области: на ее носителе располагается фаза с плотностью F^+, а на его дополнении — фаза с плотностью F^-. Под состоянием равновесия двухфазовой среды понимается пара $\hat{\mathbf{u}}_t$, $\hat{\chi}_t$, минимизирующая при фиксированном t функционале (11). Функция $\hat{\mathbf{u}}_t$ при этом задает равновесное поле смещений, а $\hat{\chi}_t$ — равновесное распределение фаз.

Функционал (11) содержит энергию каждой из фаз, но не учитывает поверхностной энергии границы раздела фаз. Учет этой энергии (которую естественно считать пропорциональной площади границы раздела) приводит к функционалу

$$I[\mathbf{u}, \chi, t, \sigma] = I_0[\mathbf{u}, \chi, t] + \sigma S[\chi],$$
$$\mathbf{u} \in \mathbb{H}, \quad \chi \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' \cap \mathrm{BV}(\Omega), \quad t, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \tag{12}$$

где $S[\chi]$ — площадь границы раздела фаз, определяемая как полная вариация функции χ, а константа σ называется коэффициентом поверхностного натяжения. Под состоянием равновесия двухфазовой среды с энергией (12) при фиксированных t и σ понимается пара $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma} \in \mathbb{H}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}$, минимизирующая функционал (12).

При $N = 1$ задачи о минимизации функционалов (11) и (12) разрешимы в явном виде. Получающиеся формулы позволяют детально проследить за зависимостью состояний равновесия от параметров задачи t, σ и области Ω. Полное исследование одномерной задачи приведено в [97].

При $N \geqslant 2$ основной целью исследования является получение (пусть иногда на качественном уровне) аналогов одномерных результатов. В этом случае инфимум функционала (11) при некоторых значениях t может не достигаться. Однако, как и в одномерном случае, существуют [98] не зависящие от области Ω температуры фазовых переходов $t_* \leqslant t^*$, для которых

$$\hat{\mathbf{u}}_t \equiv 0, \quad \hat{\chi}_t \equiv 1 \quad \text{при} \quad t < t_*,$$
$$\hat{\mathbf{u}}_t \equiv 0, \quad \hat{\chi}_t \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > t^*$$

— единственное состояние равновесия среды с энергией (11), а при $t \in (t_*, t^*)$ у этой среды нет однофазовых ($\hat{\chi}_t \equiv 0$ или $\hat{\chi}_t \equiv 1$) состояний равновесия. В общей ситуации для температур t_* и t^* получены оценки, а также критерий их совпадения через коэффициенты плотностей $F^{\pm}$. Иногда удается получить и явные формулы для температур t_* и t^*, даже в случае, когда при $t \in (t_*, t^*)$ функционал (11) не достигает минимума [99].

Наиболее удачно в многомерном случае устроена задача о минимизации функционала (11) для изотропных сред

$$F^{\pm}(D\mathbf{u}) = a\, \mathbf{tr}(e(D\mathbf{u}) - c_{\pm}I)^2 + b_{\pm}\, \mathbf{tr}^2(e(D\mathbf{u}) - c_{\pm}I),$$
$$e_{ij}(D\mathbf{u}) = \frac{D_j u^i + D_i u^j}{2}, \tag{13}$$

где $a > 0$, $b_\pm \geqslant 0$, $c_\pm \in \mathbb{R}$ — параметры, а I — единичная матрица в пространстве $\mathbb{R}^N$. Для плотностей энергии (13) эта задача в произвольной области Ω допускает явное решение [100], что приводит к явным формулам для температур t_* и t^*. Любопытно отметить, что при каждом $t \in (t_*, t^*)$ у этой задачи существует континуальное множество различных решений. Однако в каждом хаосе есть свой порядок: объемы, занимаемые фазами, однозначно определяются значением t.

С математической точки зрения функционал (12) существенно лучше функционала (11): он достигает минимума [101] для каждых t, σ. Как и в одномерном случае, полуплоскость параметров (t, σ) разбивается на зоны, в которых дается [102] описание состояний равновесия $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$. При каждом $\sigma > 0$ вводятся температуры фазовых переходов $t_*(\sigma)$ и $t^*(\sigma)$ (совпадающие с t_* и t^* при $\sigma = 0$) и исследуется их зависимость от области Ω. Для близких плотностей энергии $F^\pm$ устанавливается непрерывная дифференцируемость границы раздела фаз [103].

Переход к функционалу (12) можно рассматривать как регуляризацию функционала (11), поскольку этот переход снимает проблему быстрой осцилляции минимизирующей последовательности и обеспечивает достижимость минимума [104]. Однако такая регуляризация не единственно возможная. Другой вариант — замена величины $S[\chi]$ в (12) на некоторую (меньшую единицы) степень L^2-нормы старших производных поля смещений [105, 106]. При такой регуляризации разбиение полуплоскости параметров t, σ на зоны на качественном уровне не меняется.

Наиболее же традиционной регуляризацией функционала (11) является переход к функционалу с интегрантом $\mathcal{F}(D\mathbf{u}, t)$, представляющим собой квазивыпуклую оболочку функции $\min\{F^+(D\mathbf{u}) + t, F^-(D\mathbf{u})\}$. Для плотностей (13) функция $\mathcal{F}(D\mathbf{u}, t)$ явно вычисляется [107], что позволяет описать множество всех решений релаксированной задачи. Последний результат полезен при изучении поведения пар $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ при $\sigma \to 0$. Подробное изложение результатов по этому направлению можно найти в препринте [108]. Они отличаются от близких по тематике работ (см., напр., монографию [109] и приведенную в ней библиографию) большей детализацией свойств решений соответствующих вариационных задач.

Перечислим некоторые другие результаты В. Г. Осмоловского и его учеников в этой области. Задача о фазовых переходах при больших внешних нагрузках изучалась в [110]. Задаче о фазовых переходах при количестве фаз больше двух посвящена статья [111]. В [112] и [113] исследовались вариационные задачи о фазовых переходах при наличии дополнительных ограничений, таких как условие несжимаемости одной из фаз или возникновение абсолютно жестких включений. Вопрос о разрешимости квазистационарной задачи и поведении ее решения при неограниченном возрастании времени изложен в [114]. Наличие температур фазовых переходов при условии Синьорини изучалось в [115]. Исследование задачи о фазовых переходах для температур, зависящих от пространственной переменной, проведено в [116]. Обзор результатов по состоянию на 2017 г. приведен в [117].

Упомянем еще ряд совместных работ Д. Е. Апушкинской и В. Г. Осмоловского с немецкими математиками М. Билдгауэром (M. Bildhauer) и М. Фуксом (M. Fuchs) [118–122]. В этих работах изучались вопросы полной и частичной регулярности решений вариационных задач для функционалов с различным ростом интегранта по градиенту (линейным, неполиномиальным, анизотропным и т. п.).

Проблеме множественности положительных решений квазилинейных краевых задач посвящена серия работ А. И. Назарова и его учеников.

Хорошо известно, что если линейная краевая задача обладает какой-нибудь симметрией, то ее решение обычно наследует эту симметрию. Для квазилинейных уравнений дело обстоит гораздо сложнее. Рассмотрим, например, простейшую задачу:

$$-\Delta u = f(u) \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u > 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{14}$$

В известной работе [123] Б. Гидас, В.-М. Ни и Л. Ниренберг (B. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg) показали[4], что если $\Omega = B_R$ — шар радиуса R, а $f \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, то любое решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ задачи (14) радиально симметрично ($u = u(r)$). Для $f(u) = u^{q-1}$ в [123] была доказана также единственность положительного решения.

В то же время, если $\Omega = B_{R+1} \setminus \overline{B}_R$ — сферический слой, а $f(u) = u^{q-1}$, ситуация кардинально меняется. При $1 < q < 2$ решение задачи (14) по-прежнему радиально симметрично (и единственно), но для любого $2 < q < \frac{2n}{n-2}$, если R достаточно велико, то наряду с радиальным решением существуют и нерадиальные[5]. Более того, увеличивая R, можно обеспечить существование любого наперед заданного количества различных (не получающихся друг из друга поворотом) решений. Аналогичный эффект наблюдается для более общей нелинейности f в (14) при выполнении некоторых структурных условий.

Впервые эффект множественности положительных решений задачи (14) был открыт Ч. Коффманом (C. V. Coffman) [126] при $n = 2$. Затем этот эффект разрабатывался несколькими исследователями в многомерном случае (как ни удивительно, наиболее трудным оказался случай $n = 3$). Назаров [127] получил аналогичные результаты для уравнения с оператором p-лапласиана (4) в левой части уравнения (14). Для ряда других краевых задач эффект множественности был исследован им и его учениками [128–135]. Вариационный метод построения решений с различными симметриями для квазилинейных уравнений во всем пространстве был предложен в [136].

С проблемой множественности решений тесно связаны вопросы о симметрии решений симметричных вариационных задач и о потере симметрии решений при изменении параметров задачи. Эти вопросы оказываются нетривиальными, а ответы подчас неожиданными даже в одномерном случае. Например, потеря симметрии экстремали в одномерном обобщенном неравенстве Пуанкаре

$$\|u\|_{L^q(-1,1)} \leqslant \lambda(p,q,r)\|u'\|_{L^p(-1,1)}, \qquad \int\limits_{-1}^{1} |u(x)|^{r-2}u(x)\,dx = 0 \tag{15}$$

(здесь $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$; при $r = \infty$ последнее соотношение понимается в предельном смысле) исследовалась многими авторами, включая таких известных специалистов, как Б. Дакоронья (B. Dacorogna) и Б. Каволь (B. Kawohl). Окончательные результаты здесь были получены А.И. Назаровым с соавторами [137–139]. Именно при выполнении неравенства $q \leqslant (2r-1)p$ точная константа в (15) не зависит от r, выписывается явно и достигается на нечетной функции, выражаемой в квадратурах.

[4]Отметим, что в основе этого результата лежит знаменитый **метод движущихся плоскостей (moving plane method)**, впервые примененный А. Д. Александровым [124] в задаче о характеризации сферы свойством постоянства ее средней кривизны. Хотя Александров прежде всего известен как геометр, ему принадлежат несколько выдающихся результатов в области УрЧП, описание которых можно найти в обзоре [36].

[5]При $q \geqslant \frac{2n}{n-2}$ некоторые из этих решений по-прежнему существуют, в то время как в шаре $\Omega = B_R$ эта задача решений не имеет, как показано С. И. Похожаевым [125].

Если же $q > (2r-1)p$, то соответствующая экстремальная функция симметрией не обладает и точная константа в явном виде не выписывается.

Потеря симметрии решений как в одномерных, так и в многомерных задачах изучалась в работах Назарова и его учеников [140–145]. Обзор результатов о симметрии и асимметрии экстремалей одномерных задач содержится в [146].

К проблемам симметрии экстремалей примыкают задачи об определении точных констант в интегральных неравенствах и о монотонности различных функционалов при перестановках функций (теоремы типа Пойа — Сегё). Из работ первого направления отметим [147–154], а также обзор [155]. Необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа — Сегё для новых классов функционалов были получены в работах [156–160].

Еще один цикл работ А. И. Назарова с соавторами связан с разрешимостью краевых задач вариационной структуры с «критическим» ростом правой части, когда стандартные теоремы существования не работают, и результат коренным образом зависит от геометрии области (ср. замечание в сноске 5). Из работ этого цикла отметим [161–167] и обзор [168].

Интересные приложения нашли вариационные методы в задачах теории больших уклонений случайных процессов и характеризационных теорем математической статистики. Работы по этой тематике [169–171] были выполнены совместно с представителями вероятностной школы СПбГУ.

В последние десятилетия существенно вырос интерес к уравнениям с нелокальными операторами типа дробных лапласианов, количество работ в мире по этому направлению исчисляется уже сотнями. Начиная с 2014 г., А. И. Назаров в сотрудничестве с итальянским математиком Р. Мусиной (R. Musina) получил ряд основополагающих результатов о качественных свойствах различных дробных лапласианов и неравенствах между ними, в том числе для весьма трудного случая операторов порядка большего единицы [172–179]. Для некоторых классов квазилинейных уравнений и вариационных неравенств с дробными операторами ими установлены неулучшаемые результаты о разрешимости, а также получены важные теоремы о качественных свойствах решений [180–184]. Для дробных аналогов классических неравенств Харди — Соболева получены результаты о значении точных констант и их достижимости/недостижимости [185–187]. Результаты о сравнении дробных лапласианов вошли в приглашенный доклад Назарова на Международном математическом конгрессе 2022 г. Вариационные задачи, связанные с дробными лапласианами, исследуются также его учениками [188–195].

Литература

1. Смирнов В. И. (ред.). *Математика в Петербургском — Ленинградском университете.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1970).

2. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Семинару имени В. И. Смирнова — 75 лет! *Записки научных семинаров ПОМИ* **519**, 5–9 (2022).

3. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1950).

4. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Москва, Физматлит (1961).

5. Серёгин Г. А., Уральцева Н. Н. Ольга Александровна Ладыженская: к 80-летию со дня рождения. *УМН* **58**, 2 (350), 181–206 (2003). https://doi.org/10.4213/rm626

6. Ладыженская О. А. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений. *Доклады Акад. наук СССР* **107**, 636–639 (1956).

7. De Giorgi E. Sulla differenziabilit‘a e l’analiticit‘a delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci.* **3**, 25–43 (1957).

8. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* **80**, 931–954 (1958). https://doi.org/10.2307/2372841

9. Мазья В. Г. Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. *Функциональный анализ и его приложение* **2** (3), 53–57 (1968).

10. De Giorgi E. Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico. *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **1**, 135–137 (1968).

11. Giusti E., Miranda M. Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni. *Boll. Un. Mat. Ital.* **4** (1), 219–226 (1968).

12. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Москва, Наука (1964).

13. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* 2-е изд. перераб. Москва, Наука (1973).

14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва, Наука (1967).

15. Денисова И. В., Ладыженская О. А., Серёгин Г. А., Уральцева Н. Н., Фролова Е. В. К юбилею Всеволода Алексеевича Солонникова. *Записки научных семинаров ПОМИ* **306**, 7–15 (2003).

16. Денисова И. В., Пилецкас К. И., Репин С. И., Серёгин Г. А., Уральцева Н. Н., Фролова Е. В. К 75-летию Всеволода Алексеевича Солонникова. *Записки научных семинаров ПОМИ* **362**, 5–14 (2008).

17. The Maz'ya anniversary collection. Vol. 1: On Maz'ya's work in functional analysis, partial differential equations and applications. *Based on talks given at the conference.* Rostock, Germany. August 31 — September 4, 1998, Rossmann J., Takǎc P., Wildenhain G. Birkhäuser (ed.), Basel. Vol. 109 of Oper. Theory Adv. Appl. (1999).

18. Агранович М. С., Бураго Ю. Д., Вайнберг Б. Р., Вишик М. И., Гиндикин С. Г., Кондратьев В. А., Маслов В. П., Поборчий С. В., Решетняк Ю. Г., Хавин В. П., Шубин М. А. Владимир Гилелевич Мазья: к 70-летию со дня рождения. *УМН* **63**, 1 (379), 183–189 (2008). https://doi.org/10.4213/rm9127

19. Анолик М. В., Бураго Ю. Д., Демьянович Ю. К., Кисляков С. В., Леонов Г. А., Морозов Н. Ф., Поборчий С. В., Уральцева Н. Н., Хавин В. П., Широков Н. А. Владимир Гилелевич Мазья: к семидесятилетию. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **53** (4), 3–6 (2008).

20. Анолик М. В., Апушкинская Д., Архипова А. А., Бураго Ю. Д., Демьянович Ю. К., Ибрагимов И. А., Кисляков С. В., Леонов Г. А., Мишурис Г., Мовчан А., Морозов Н. Ф., Назаров А. И., Нивс М., Романовский И. В., Слепян Л., Слисенко А. О., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. К юбилею Владимира Гилелевича Мазьи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 3, 524–526 (2018).

21. Уральцева Н. Н. Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **7**, 184–222 (1968).

22. Bombieri E., De Giorgi E., Miranda M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. *Arch. Rational Mech. Anal.* **32**, 255–267 (1969). https://doi.org/10.1007/BF00281503

23. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **23**, 677–703 (1970). https://doi.org/10.1002/cpa.3160230409

24. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Локальные оценки градиентов решений простейшей регуляризации некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений. *Записки научных семинаров ПОМИ* **213**, 75–92 (1994).

25. Уральцева Н. Н. Разрешимость задачи о капиллярах. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **18**, 1 (4), 54–64 (1973).

26. Уральцева Н. Н. Разрешимость задачи о капиллярах. Ч. 2. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **20**, 1 (1), 143–149 (1975).

27. Уральцева Н. Н. Об оценках максимумов модулей градиентов для решений задач капиллярности. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **115**, 274–284 (1982).

28. Уральцева Н. Н., Урдалетова А. Б. Ограниченность градиентов обобщенных решений вырождающихся неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **28**, 19 (4), 50–56 (1983).

29. Baroni P., Colombo G., Mingione G. Nonautonomous functionals, borderline cases and related function classes. *Алгебра и анализ* **27** (3), 118–151 (2015).

30. Filippis C. de, Mingione G. A borderline case of Calderon — Zygmund estimates for nonuniformly elliptic problems. *Алгебра и анализ* **31** (3), 82–15 (2019).

31. Крылов Н. В., Сафонов М. В. Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **44** (1), 161–75 (1980).

32. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценка гёльдеровской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **96**, 161–168 (1980).

33. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Об оценках $\max u_x$ для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **138**, 90–107 (1984).

34. Назаров А. И., Уральцева Н. Н. Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **147**, 95–109 (1985).

35. Назаров А. И. Принцип максимума А. Д. Александрова. *Современная математика и ее приложения* **29**, 127–143 (2005).

36. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Лемма о нормальной производной и вокруг нее. *УМН* **77**, 2 (464), 3–68 (202). https://doi.org/10.4213/rm10049

37. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценки константы Гёльдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентам. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **147**, 72–94 (1985).

38. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству. *Тр. МИАН СССР* **179**, 102–125 (1988).

39. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности. *УМН* **41**, 5 (251), 59–83 (1986).

40. Uraltseva N. N. Estimates of derivatives of solutions of elliptic and parabolic inequalities. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986). *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1143–1149 (1987).

41. Назаров А. И. Гёльдеровские оценки решений вырождающихся недивергентных эллиптических и параболических уравнений. *Алгебра и анализ* **21** (4), 174–195 (2009).

42. Uraltseva N. N. Gradient estimates for solutions of nonlinear parabolic oblique boundary problem. Geometry and nonlinear partial differential equations (Fayetteville, AR, 1990). *Amer. Math. Soc., Providence, RI, Contemp. Math.* 119–130 (1992). https://doi.org/10.1090/conm/127/1155414

43. Назаров А. И. Гёльдеровские оценки для ограниченных решений задач с наклонной производной для параболических уравнений недивергентной структуры. *Проблемы мат. анализа* **11**, 37–46 (1990).

44. Уральцева Н. Н. Нелинейная задача с косой производной для параболических уравнений. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **188**, 143–158 (1991).

45. Назаров А. И., Уральцева Н. Н. Задача с наклонной производной для квазилинейного параболического уравнения. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **200**, 118–131 (1992).

46. Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов. *Теория вероятн. и ее примен.* **4** (2), 172–185 (1959).

47. Апушкинская Д. Е. Оценка максимума решений параболических уравнений с граничным условием Вентцеля. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **36**, 2 (8), 3–12 (1991).

48. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition. *Nonlinear evolution equations. Amer. Math. Soc.*, Providence, RI **164**, 1–13. of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 (1995). https://doi.org/10.1090/trans2/164/01

49. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Нестационарная задача Вентцеля с квадратичным ростом по градиенту. *Проблемы мат. анализа* **15**, 33–46 (1995).

50. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. A survey of results on nonlinear Venttsel problems. *Appl. Math.* **45** (1), 69–80 (2000). https://doi.org/10.1023/A:1022288717033

51. Лукьянов В. В., Назаров А. И. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов. *Записки научных семинаров ПОМИ* **250**, 203–218 (1998). Исправление: *Записки научных семинаров ПОМИ* **324**, 129–130 (2005).

52. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Linear two-phase Venttsel problems. *Ark. Mat.* **39** (2), 201–222 (2001). https://doi.org/10.1007/BF02384554

53. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Квазилинейные эллиптические двухфазные задачи Вентцеля в трансверсальном случае. *Проблемы мат. анализа* **24**, 3–28 (2002).

54. Назаров А. И. О нестационарной двухфазной задаче Вентцеля в трансверсальном случае. *Проблемы мат. анализа* **28**, 71–82 (2004).

55. Назаров А. И., Палецких А. А. О гёльдеровости решений эллиптической задачи Вентцеля. *Доклады РАН* **465** (5), 532–536 (2015). https://doi.org/10.7868/S0869565215350066

56. Медведев К. М., Назаров А. И. Оценка Гёльдера для решения дивергентного эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. *Алгебра и анализ* **36** (1), 170–194 (2024).

57. Мироненко Ф. Д., Назаров А. И. Локальная оценка максимума типа Александрова — Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида «книжка». *Записки научных семинаров ПОМИ* **519**, 105–113 (2022).

58. Мироненко Ф. Д. Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида «книжка». *Сибирский математический журн.* **64** (6), 1263–1278 (2023).

59. Creo S., Lancia M. R., Nazarov A., Vernole P. On two-dimensional nonlocal Venttsel' problems in piecewise smooth domains. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.* **12**, (1), 57–64 (2019). https://doi.org/10.3934/dcdss.2019004

60. Creo S., Lancia M. R., Nazarov A. I. Regularity results for nonlocal evolution Venttsel' problems. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **23** (5), 1416–1430 (2020). https://doi.org/10.1515/fca-2020-0070

61. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Elliptic Venttsel problems with VMO coefficients. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **31** (2), 391–399 (2020). https://doi.org/10.4171/rlm/896

62. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Lp-theory of Venttsel BVPs with discontinuous data. *Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **98** (2), A1–16 (2020). https://doi.org/10.1478/AAPP.98S2A1

63. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Venttsel boundary value problems with discontinuous data. *SIAM J. Math. Anal.* **53** (1), 221–252 (2021). https://doi.org/10.1137/19M1286839

64. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И., Палагачев Д. К., Софтова Л. Г. Нестационарная задача Вентцеля со старшими коэффициентами из класса VMOx. *Доклады РАН* **510**, 13–17 (2023). https://doi.org/10.31857/S2686954322600707

65. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И., Палагачев Д. К., Софтова Л. Г. Квазилинейная параболическая задача Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами. *Функц. анализ и его прил.* **57** (2), 93–99 (2023). https://doi.org/110.4213/faa4098

66. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Nonstationary Venttsel problems with discontinuous data. *J. Diff. Equations* **375**, 538–566 (2023). https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.08.024

67. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Оценки на границе области градиента решения недивергентного параболического уравнения с «составной» правой частью и коэффициентами при младших производных. *Проблемы мат. анализа* **14**, 3–27 (1995).

68. Апушкинская Д. Е., Назаров А. И. Задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в областях с гладкими замкнутыми ребрами. *Проблемы мат. анализа* **21**, 3–29 (2000).

69. Назаров А. И. Оценки максимума решений эллиптических и параболических уравнений через весовые нормы правой части. *Алгебра и анализ* **13** (2), 151–164 (2001).

70. Назаров А. И. L_p-оценки решения задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в клине с ребром произвольной коразмерности. *Проблемы мат. анализа* **22**, 126–159 (2001).

71. Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients. *Math. Nachr.* **282** (9), 1220–1241 (2009). https://doi.org/10.1002/mana.200910796

72. Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients in a wedge. *Math. Nachr.* **287** (10), 1142–1165 (2014). https://doi.org/10.1002/mana.201100352

73. Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XV. Advances in mathematical analysis of partial differential equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI. Vol. 232. *Of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 177–191 (2014). https://doi.org/10.1090/trans2/232/10

74. Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients in a wedge. *J. Math. Anal. Appl.* **435** (1), 210–228 (2016).https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.029

75. Назаров А. И., Уральцева Н. Н. Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами. *Алгебра и анализ* **23** (1), 136–168 (2011).

76. Nazarov A. I. A centennial of the Zaremba — Hopf — Oleinik lemma. *SIAM J. Math. Anal.* **44** (1), 437–453 (2012). https://doi.org/10.1137/110821664

77. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. A counterexample to the Hopf — Oleinik lemma (elliptic case). *Anal. PDE* **9** (2), 439–458 (2016). https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.439

78. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. On the boundary point principle for divergence-type equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **30** (4), 677–699 (2019). https://doi.org/10.4171/RLM/867

79. Ibraguimov A., Nazarov A. I. On Phragmen — Lindelöf principle for non-divergence type elliptic equations and mixed boundary conditions. *Mat. Fiz. Komp'yut. Model.* **3** (40), 65–76 (2017). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.5

80. Cao D., Ibraguimov A., Nazarov A. I. Mixed boundary value problems for non-divergence type elliptic equations in unbounded domains. *Asymptot. Anal.* **109** (1–2), 75–90 (2018). https://doi.org/10.3233/asy-181469

81. Kozlov V., Nazarov A. A comparison theorem for nonsmooth nonlinear operators. *Potentia Anal.* **54** (3), 471–481 (2021). https://doi.org/10.1007/s11118-020-09834-8

82. Архипова А. А. О гладкости решений задачи с препятствием. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **38**, 7–9 (1973).

83. Архипова А. А. О наименьших суперрешениях для задачи с препятствием. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **37** (5), 1155–1185 (1973).

84. Архипова А. А. Задача с разрывным препятствием для равномерно эллиптических уравнений. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **19**, 4 (19), 154–155 (1974).

85. Архипова А. А. О предельной гладкости решения задачи с двусторонним ограничением. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **29**, 2 (7), 7–9 (1984).

86. Уральцева Н. Н. О сильных решениях обобщенной задачи Синьорини. *Сибирский математический журн.* **19** (5), 1204–1212 (1978).

87. Уральцева Н. Н. Непрерывность по Гёльдеру градиентов решений параболических уравнений при граничных условиях типа Синьорини. *Доклады Академии наук СССР* **280** (3), 563–565 (1985).

88. Архипова А. А., Уральцева Н. Н. Регулярность решений диагональных эллиптических систем при выпуклых ограничениях на границе области. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **152**, 5–17 (1986).

89. Архипова А. А., Уральцева Н. Н. Предельная гладкость решений вариационных неравенств при выпуклых ограничениях на границе области. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **163**, 5–16 (1987).

90. Архипова А. А., Уральцева Н. Н. Регулярность решения задачи с двусторонним ограничением на границе для эллиптических и параболических уравнений. *Труды МИАН СССР* **179**, 5–22 (1988).

91. Архипова А. А., Уральцева Н. Н. О существовании гладких решений задач с выпуклыми ограничениями на границе области для параболических систем. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **171**, 5–11 (1989).

92. Arkhipova A., Uraltseva N. Sharp estimates for solutions of a parabolic Signorini problem. *Math. Nachr.* **177**, 11–19 (1996). https://doi.org/10.1002/mana.19961770103

93. Уральцева Н. Н. О регулярности решений вариационных неравенств. *УМН* **42**, 6 (258), 151–174 (1987).

94. Apushkinskaya D. E., Repin S. I. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution. *Interfaces Free Bound.* **20** (4), 511–531 (2018). https://doi.org/10.4171/IFB/410

95. Апушкинская Д. Е., Репин С. И. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* **60** (11), 1881–1897 (2020). https://doi.org/10.31857/S0044466920110034

96. Apushkinskaya D., Repin S. Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem. *Comput. Methods Appl. Math.* **22** (2), 259–276 (2022). https://doi.org/10.1515/cmam-2021-0156

97. Osmolovskii V. G. Boundary value problems with free surfaces in the theory of phase transitions. *Differ. Equ.* **53** (13), 1734–1763 (2017). https://doi.org/10.1134/s0012266117130043

98. Осмоловский В. Г. Независимость температур фазовых переходов от области, занимаемой двух-фазовой упругой средой. *Проблемы мат. анализа* **66**, 147–152 (2012).

99. Осмоловский В. Г. Вычисление температур фазовых переходов для одной анизотропной модели двухфазовой упругой среды. *Проблемы мат. анализа* **84**, 151–160 (2016).

100. Осмоловский В. Г. Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов механики сплошных сред. *Проблемы мат. анализа* **27**, 171–206 (2004).

101. Осмоловский В. Г. Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариа-ционной задачи теории фазовых превращений. *Сибирский матем. журн.* **35** (4), 835–846 (1994).

102. Осмоловский В. Г. Изопериметрическое неравенство и состояния равновесия для двухфазовой среды. *Проблемы мат. анализа* **36**, 81–88 (2007).

103. Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V. The effect of a surface energy term on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential. *Math. Methods Appl. Sci.* **25** (2), 149–178 (2002). https://doi.org/10.1002/mma.282

104. Осмоловский В. Г. Критерий слабой полунепрерывности снизу функционала энергии двухфа-зовой упругой среды. *Проблемы мат. анализа* **26**, 215–254 (2003).

105. Осмоловский В. Г. Сравнение двух способов учета поверхностной энергии в задаче о фазовых переходах в больших силовых полях. *Проблемы мат. анализа* **19**, 182–192 (1999).

106. Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V. G. The effect of a penalty term involving higher order derivatives on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential. *Math. Methods Appl. Sci.* **25** (4), 289–308 (2002). https://doi.org/10.1002/mma.287

107. Осмоловский В. Г. Квазивыпуклая оболочка для однородной изотропной двухфазовой упругой среды и решения исходной и релаксированной задачи. *Проблемы мат. анализа* **70**, 161–170 (2013).

108. Осмоловский В. Г. *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред* (2014). Препринт Санкт-Петербургского математического общества. 2014-04. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

109. Allaire G. *Shape optimization by the homogenization method. Vol. 146* (2002). Of Applied Mathematical Sciences. New York, Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9286-6

110. Osmolovskij V. G. Phase transition in the mechanics of continuous media for big loading. *Math. Nachr.* **177**, 233–250 (1996). https://doi.org/10.1002/mana.19961770113

111. Михайлов А. С., Михайлов В. С. Фазовые переходы в многофазовых средах. *Проблемы мат. анализа* **20**, 120–169 (2000).

112. Михайлов В. С. Задачи о фазовых переходах со специальными ограничениями. *Проблемы мат. анализа* **23**, 30–49 (2002).

113. Михайлов А. С. Об определении коэффициента поверхностного натяжения в двухфазовых задачах теории упругости при условии несжимаемости или наличии жестких включений. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **51** (3), 24–34 (2006).

114. Осмоловский В. Г. Квазистационарная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред. Одномерный случай. Нулевой коэффициент поверхностного натяжения. *Проблемы мат. анализа* **82**, 99–110 (2015).

115. Осмоловский В. Г. Поведение решений односторонних вариационных задач о фазовых переходах в механике сплошных сред при больших температурах. *Функц. анализ и его прил.* **53** (4), 38–51 (2019). https://doi.org/10.4213/faa3650

116. Осмоловский В. Г. Одномерная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред при непостоянной температуре. *Записки научных семинаров ПОМИ* **508**, 134–146 (2021).

117. Осмоловский В. Г. Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред. *Алгебра и анализ* **29** (5), 111–178 (2017).

118. Apushkinskaya D., Bildhauer M., Fuchs M. Steady states of anisotropic generalized Newtonian fluids. *J. Math. Fluid Mech.* **7** (2), 261–297 (2005). https://doi.org/10.1007/s00021-004-0118-6

119. Apushkinskaya D., Fuchs M. Partial regularity for higher order variational problems under anisotropic growth conditions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **32** (1), 199–214 (2007).

120. Апушкинская Д. Е., Билдгауэр М., Фукс М. Внутренние оценки градиента функции, локально минимизирующей вариационный интеграл при нестандартных условиях роста. *Проблемы мат. анализа* **43**, 35–50 (2009).

121. Апушкинская Д. Е., Билдгауэр М., Фукс М. О локальном обобщенном решении и локальном тензоре напряжений вариационной задачи с интеграндом линейного роста. *Проблемы мат. анализа* **44**, 39–54 (2010).

122. Fuchs M., Osmolovski V. Variational integrals on Orlicz-Sobolev spaces. *Z. Anal. Anwendungen* **17** (2), 393–415 (1998). https://doi.org/10.4171/ZAA/829

123. Gidas B., Ni W. M., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.* **68** (3), 209–243 (1979).

124. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». V. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 19 (4), 5–8 (1958).

125. Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Доклады Академии наук СССР* **165** (1), 36–39 (1965).

126. Coffman C. V. A nonlinear boundary value problem with many positive solutions. *J. Differential Equations* **54** (3), 429–437 (1984). https://doi.org/10.1016/0022-0396(84)90153-0

127. Назаров А. И. О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего p-лапласиан, в сферическом слое. *Труды СПбМО* **10**, 33–62 (2004).

128. Щеглова А. П. Множественность решений одной краевой задачи с нелинейным условием Неймана. *Проблемы мат. анализа* **30**, 121–144 (2005).

129. Колоницкий С. Б., Назаров А. И. Множественность решений задачи Дирихле для обобщенного уравнения Хенона. *Проблемы мат. анализа* **35**, 91–110 (2007).

130. Колоницкий С. Б. Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое. *Алгебра и анализ* **22** (3), 206–221 (2010).

131. Колоницкий С. Б. Множественность концентрирующихся на кривых положительных решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом. *Функц. анализ и его прил.* **49** (2), 88–92 (2015). https://doi.org/10.4213/faa3193

132. Енин А. И., Назаров А. И. Множественность решений квазилинейной задачи Неймана в трехмерном случае. *Проблемы мат. анализа* **78**, 85–94 (2015).

133. Назаров А. И., Нетеребский Б. О. Множественность положительных решений квазилинейного уравнения, порождаемого неравенством Ильина — Каффарелли — Кона — Ниренберга. *Записки научных семинаров ПОМИ* **444**, 98–109 (2016).

134. Enin A. Multiplicity of positive solutions for a critical quasilinear Neumann problem. *Arch. Math.* **109** (3), 263–272 (2017). https://doi.org/10.1007/s00013-017-1064-x

135. Щеглова А. П. Задача Неймана для обобщенного уравнения Хенона. *Проблемы мат. анализа* **95**, 103–114 (2018).

136. Lerman L. M., Naryshkin P. E., Nazarov A. I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method. *Nonlinear Anal.* **190**, 111590 (2020). https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111590

137. Буслаев А. П., Кондратьев В. А., Назаров А. И. Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла. *Матем. заметки* **64** (6), 830–838 (1998).

138. Назаров А. И. О точной константе в обобщенном неравенстве Пуанкаре. *Проблемы мат. анализа* **24**, 155–180 (2002).

139. Герасимов И. В., Назаров А. И. О точной константе в трехпараметрическом неравенстве Пуанкаре. *Проблемы мат. анализа* **61**, 69–86 (2011).

140. Назаров А. И. Об «одномерности» экстремали в неравенстве Пуанкаре на квадрате. *Записки научных семинаров ПОМИ* **259**, 167–181 (1999).

141. Назаров А. И. Об «одномерности» экстремали в неравенстве Фридрихса для сферического и плоского слоя. *Проблемы мат. анализа* **20**, 171–190 (2000).

142. Назаров А. И. О симметричности экстремали в весовой теореме вложения. *Проблемы мат. анализа* **23**, 50–55 (2001).

143. Назаров А. И., Щеглова А. П. О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева. *Проблемы мат. анализа* **27**, 109–136 (2004).

144. Щеглова А. П. Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией. *Записки научных семинаров ПОМИ* **348**, 272–302 (2007).

145. Мукосеева Е. В., Назаров А. И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения. *Записки научных семинаров ПОМИ* **425**, 35–5. (2014). Исправление: *Записки научных семинаров ПОМИ* **489**, 225 (2020).

146. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Steklov-type 1D inequalities (a survey). (2021). arxiv: math.AP/2101.10752v1

147. Назаров А. И. О собственных функциях одной задачи Штурма — Лиувилля, связанной с обобщенными синусами Ляпунова. *Дифференц. уравнения* **36** (7), 1000 (2000).

148. Назаров А. И. О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка. *Вопросы современной теории аппроксимации*, 146–158 (2004).

149. Назаров А. И., Петрова А. Н. О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **53** (4), 16–20 (2008).

150. Nazarov A. I., Repin S. I. Exact constants in Poincare type inequalities for functions with zero mean boundary traces. *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (15), 3195–3207 (2015). https://doi.org/10.1002/mma

151. Назаров А. И., Устинов Н. С. Об одном обобщении неравенства Харди. *Записки научных семинаров ПОМИ* **477**, 112–118 (2018).

152. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. On the sharp constant in the "magnetic" 1D embedding theorem. *Russ. J. Math. Phys.* **25** (1), 67–72 (2018). https://doi.org/10.1134/S1061920818010065

153. Musina R., Nazarov A. I. A weighted estimate for generalized harmonic extensions. *Math. Inequal. Appl.* **23** (2), 419–424 (2020). https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-32

154. Cora G., Musina R., Nazarov A. I. Hardy type inequalities with mixed weights in cones (2023). arxiv: math.AP/2305.05034v1.

155. Kuznetsov N., Nazarov A. Sharp constants in the Poincare, Steklov and related inequalities (a survey). *Mathematika* **61** (2), 328–344 (2015). https://doi.org/10.1112/S0025579314000229

156. Банкевич С. В., Назаров А. И. Об обобщении неравенства Пойа — Сеге для одномерных функционалов. *Доклады РАН* **438** (1), 11–13 (2011).

157. Bankevich S. V., Nazarov A. I. On monotonicity of some functionals under rearrangements. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **53** (3–4), 627–647 (2015). https://doi.org/10.1007/s00526-014-0761-6

158. Банкевич С. В. О монотонности некоторых функционалов при монотонной перестановке по одной переменной. *Записки научных семинаров ПОМИ* **444**, 5–14 (2016).

159. Банкевич С. В. О неравенстве Пойи — Сегё для функционалов с переменным показателем суммирования. *Функц. анализ и его прил.* **52** (1), 56–60 (2018). https://doi.org/10.4213/faa3523

160. Bankevich S. V., Nazarov A. I. On monotonicity of some functionals with variable exponent under symmetrisation. *Appl. Anal.* **98** (1–2), 362–373 (2019). https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1437420

161. Назаров А. И. Неравенства Харди — Соболева в конусе. *Проблемы мат. анализа* **31**, 39–46 (2005).

162. Демьянов А. В., Назаров А. И. О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем. *Алгебра и анализ* **17** (5), 105–140 (2005).

163. Демьянов А. В., Назаров А. И. О разрешимости задачи Дирихле для полулинейного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом. *Записки научных семинаров ПОМИ* **336**, 25–45 (2006).

164. Nazarov A., Reznikov A. Attainability of infima in the critical Sobolev trace embedding theorem on manifolds. *Nonlinear partial differential equations and related topics. Amer. Math. Soc., Providence, RI* **229** of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 197–210 (2010). https://doi.org/10.1090/trans2/229/12

165. Nazarov A. I., Reznikov A. B. On the existence of an extremal function in critical Sobolev trace embedding theorem. *J. Funct. Anal.* **258** (11), 3906–3921 (2010). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.018

166. Назаров А. И. Неравенства Харди — Соболева для следов в конусе. *Алгебра и анализ* **22** (6), 200–213 (2010).

167. Nazarov A. I. On the Dirichlet problem generated by the Maz'ya-Sobolev inequality. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **49** (1–2), 369–389 (2014). https://doi.org/10.1007/s00526-012-0586-0

168. Nazarov A. I. Dirichlet and Neumann problems to critical Emden-Fowler type equations. *J. Global Optim.* 40 (1–3), 289–303 (2008). https://doi.org/10.1007/s10898-007-9193-6

169. Назаров А. И., Никитин Я. Ю. Некоторые экстремальные задачи для гауссовых и эмпирических случайных полей. *Труды СПбМО. Т. 8.* Новосибирск, Научная книга (2000).

170. Lifshits M., Nazarov A., Nikitin Ya. Tail behavior of anisotropic norms for Gaussian random fields. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **336** (1), 85–88 (2003). https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)00013-4

171. Назаров А. И., Чирина А. В. О доступной локальной асимптотической эффективности некоторых критериев согласия. *Записки научных семинаров ПОМИ* **501**, 218–235 (2021).

172. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians. *Comm. Partial Differential Equations* **39** (9), 1780–1790 (2014). https://doi.org/10.1080/03605302.2013.864304

173. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians — 2. *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* **33** (6), 1667–1673 (2016). https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.08.001

174. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians — 3. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **22** (3), 832–841 (2016). https://doi.org/10.1051/cocv/2015032

175. Musina R., Nazarov A. I. Strong maximum principles for fractional Laplacians. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* **149** (5), 1223–1240 (2019). https://doi.org/10.1017/prm.2018.81

176. Musina R., Nazarov A. I. A note on truncations in fractional Sobolev spaces. *Bull. Math. Sci.* **9** (1), 1950001, 7 (2019). https://doi.org/10.1142/S1664360719500012

177. Musina R., Nazarov A. I. A note on higher order fractional Hardy — Sobolev inequalities. *Nonlinear Anal.* **203**, 112168, 3 (2021). https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112168

178. Musina R., Nazarov A. I. Fractional operators as traces of operator-valued curves (2022). arxiv: math.AP/2208.06873v1

179. Nazarov A. I. On comparison of fractional Laplacians. *Nonlinear Anal.* **218**, 112790 (2022). https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112790

180. Musina R., Nazarov A. I. Non-critical dimensions for critical problems involving fractional Laplacians. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** (1), 257–266 (2016). https://doi.org/10.4171/RMI/885

181. Musina R., Nazarov A. I., Sreenadh K. Variational inequalities for the fractional Laplacian. *Potential Anal.* **46** (3), 485–498 (2017). https://doi.org/10.1007/s11118-016-9591-9

182. Musina R., Nazarov A. I. Variational inequalities for the spectral fractional Laplacian. *Comp. Math. and Math. Phys.* **57** (3), 373–386 (2017). https://doi.org/10.1134/S0965542517030113

183. Musina R., Nazarov A. I. A tool for symmetry breaking and multiplicity in some nonlocal problems. *Math. Methods Appl. Sci.* **43** (16), 9345–9357 (2020). https://doi.org/10.1002/mma.6220

184. Musina R., Nazarov A. I. Complete classification and nondegeneracy of minimizers for the fractional Hardy-Sobolev inequality, and applications. *J. Differential Equations* **280**, 292–314 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.01.022

185. Musina R., Nazarov A. I. On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian. *Nonlinear Anal.* **121**, 123–129 (2015). https://doi.org/10.1016/j.na.2014.09.021

186. Musina R., Nazarov A. I. Fractional Hardy-Sobolev inequalities on half spaces. *Nonlinear Anal.* **178**, 32–40 (2019). https://doi.org/10.1016/j.na.2018.07.002

187. Musina R., Nazarov A. I. Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces. *Adv. Calc. Var.* **14** (1), 127–145 (2021). https://doi.org/10.1515/acv-2018-0020

188. Устинов Н. С. Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье. *Записки научных семинаров ПОМИ* **459**, 104–126 (2017).

189. Устинов Н. С. О достижимости точных констант в дробных неравенствах Харди — Соболева со спектральным лапласианом Дирихле. *Функц. анализ и его прил.* **53** (4), 93–98 (2019). https://doi.org/10.4213/faa3673

190. Ustinov N. The effect of curvature in fractional Hardy — Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian. *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (11), 7785–7815 (2020). https://doi.org/10.1090/tran/8124

191. Устинов Н. С. О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка. *Функц. анализ и его прил.* **54** (4), 85–97 (2020). https://doi.org/10.4213/faa3828

192. Щеглова А. П. Множественность положительных решений для обобщенного уравнения Хенона с дробным лапласианом. *Записки научных семинаров ПОМИ* **489**, 207–224 (2020).

193. Назаров А. И., Щеглова А. П. Новые классы решений для полулинейных уравнений R^n в с дробным лапласианом. *Записки научных семинаров ПОМИ* **508**, 124–133 (2021).

194. Устинов Н. С. О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью. *Алгебра и анализ* **33** (1), 194–212 (2021).

195. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Solutions with various structures for semilinear equations in R^n driven by fractional Laplacian. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **62** (4), 112, 31 (2023). https://doi.org/10.1007/s00526-023-02453-2

Статья поступила в редакцию 19 апреля 2023 г.;
доработана 29 августа 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Апушкинская Дарья Евгеньевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; apushkinskaya@gmail.com

Архипова Арина Алексеевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; arinaark@gmail.com

Назаров Александр Ильич — д-р физ.-мат. наук, проф.; al.il.nazarov@gmail.com

Осмоловский Виктор Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; victor.osmolovskii@gmail.com

Уральцева Нина Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; uraltsev@pdmi.ras.ru

A survey of results of St. Petersburg State University research school on nonlinear partial differential equations*

D. E. Apushkinskaya[1,2], *A. A. Arkhipova*[3], *A. I. Nazarov*[2,3], *V. G. Osmolovskii*[3], *N. N. Uraltseva*[3]

[1] RUDN University,
6, ul. Miklukho-Maklaya, Moscow, 117198, Russian Federation
[2] St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (POMI RAS),
27, nab. r. Fontanki, St. Petersburg, 191023, Russian Federation
[3] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Apushkinskaya D. E., Arkhipova A. A., Nazarov A. I., Osmolovskii V. G., Uraltseva N. N. A survey of results of St. Petersburg State University research school on nonlinear partial differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 3–37. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.101 (In Russian)

The article contains a review of the most important results obtained in the framework of the St. Petersburg State University research school on nonlinear PDEs (the O. A. Ladyzhenskaya — N. N. Uraltseva school). The main attention is paid to the works carried out at our university over the past 50 years. The first part of the review concerns the solvability and qualitative properties of solutions to boundary value problems for the second order scalar quasilinear elliptic and parabolic equations, as well as variational problems. The planned second part of the review will include sections on fully nonlinear equations and systems of equations and on free boundary problems.

Keywords: quasilinear equations, boundary value problems, variational inequalities, calculus of variations.

References

1. Smirnov V. I. (ed.). *Mathematics at Petersburg — Leningrad University.* Leningrad, Leningrad University Press (1970). (In Russian)

2. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. 75 years of the V. I. Smirnov seminar. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **519**, 5–9 (2022). (In Russian)

3. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike.* Leningrad, Leningrad University Press (1950). (In Russian) [Eng. transl.: Sobolev S. L. Applications of functional analysis in mathematical physics. In: *Translations of Mathematical Monographs.* Vol. 7. AMS (1963)].

4. Ladyzhenskaya O. A. *Matematicheskie voprosy dinamiki viazkoi neszhimaemoi zhidkosti.* Moscow, Fizmatlit Publ. (1961). (In Russian) [Eng. transl.: Ladyzhenskaya O. A. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* New York, Gordon and Breach Sci. Publ., 1963].

5. Seregin G. A., Uraltseva N. N. Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya (on the occasion of her eightieth birthday). *Uspekhi mat. nauk* **58**, 2 (350), 181–206 (2003). https://doi.org/10.4213/rm626 (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys* **58** (2), 395–425 (2003). https://doi.org/10.1070/RM2003v058n02ABEH000626].

6. Ladyzhenskaya O. A. The first boundary problem for quasilinear parabolic equations. *Doklady Akademii nauk SSSR* **107**, 636–639 (1956). (In Russian)

7. De Giorgi E. Sulla differenziabilit'a e l'analiticit'a delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci.* **3**, 25–43 (1957).

8. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* **80**, 931–954 (1958). https://doi.org/10.2307/2372841.

*The work of D. E. Apushkinskaya and A. I. Nazarov is supported by Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00027).

9. Maz'ya V. G. Examples of nonregular solutions of quasilinear elliptic equations with analytic coefficients. *Funkts. Anal. Prilozh.* **2** (3), 53–57 (1968) (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **2** (3), 230–234 (1997). https://doi.org/10.1007/BF01076124].

10. De Giorgi E. Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico. *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) **1**, 135–137 (1968).

11. Giusti E., Miranda M. Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni. *Boll. Un. Mat. Ital.* **4** (1), 219–226 (1968).

12. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ. (1964). (In Russian) [Eng. transl.: Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Linear and quasilinear elliptic equations. In: *Math. Sci. Eng.*, vol. 46. Amsterdam, Elsevier (1968)].

13. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Linear and quasilinear elliptic equations. 2$^{\text{nd}}$ ed., Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian)

14. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Lineinye i nelineinye uravneniia parabolicheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ. (1967). (In Russian) [Eng. transl.: Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. In: *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 23. AMS (1968)].

15. Denisova I. V., Ladyzhenskaya O. A., Seregin G. A., Uraltseva N. N., Frolova E. V. To the jubilee of Vsevolod Alekseevich Solonnikov *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **306**, 7–15 (2003). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **130** (4), 4775–4779 (2005). https://doi.org/10.1007/s10958-005-0375-9].

16. Denisova I. V., Pileckas K. I., Repin S. I., Seregin G. A., Uraltseva N. N., Frolova E. V. To the 75$^{\text{th}}$ birthday of Vsevolod Alekseevich Solonnikov. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **362**, 5–14 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **159** (A204), 385–390 (2009). https://doi.org/10.1007/s10958-009-9451-x].

17. The Maz'ya anniversary collection. Vol. 1: On Maz'ya's work in functional analysis, partial differential equations and applications. *Based on talks given at the conference.* Rostock, Germany. August 31 — September 4, 1998, Rossmann J., Takăc P., Wildenhain G. Birkhäuser (ed.), Basel. Vol. 109 of Oper. Theory Adv. Appl. (1999).

18. Agranovich M. S., Burago Yu. D., Vainberg B. R., Vishik M. I., Gindikin S. G., Kondrat'ev V. A., Maslov V. P., Poborchii S. V., Reshetnyak Yu. G., Khavin V. P., Shubin M. A. Vladimir Gilelevich Maz'ya (to his 70$^{\text{th}}$ birthday). *Uspekhi Mat. Nauk* **63**, 1 (379), 183–189 (2008). https://doi.org/10.4213/rm9127 (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys* **63** (1), 189–196 (2008) https://doi.org/10.1070/RM2008v063n01ABEH004511].

19. Anolik M. V., Burago Yu. D., Dem'yanovich Yu. K., Kislyakov S. V., Khavin V. P., Leonov G. A., Morozov N. F., Poborchii S. V., Uraltseva N. N., Shirokov N. A. Vladimir Gilelevich Maz'ya: On the occasion of his 70$^{\text{th}}$ anniversary. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **53** (4), 3–6 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **41** (4), 287–289 (2008). https://doi.org/10.3103/S1063454108040018].

20. Anolik M. V., Apushkinskaya D., Arkhipova A. A., Burago Yu. D., Dem'yanovich Yu. K., Ibragimov I. A., Kislyakov S. V., Leonov G. A., Mishuris G., Movchan A., Morozov N. F., Nazarov A. I., Nieves M., Romanovsky J. V., Slepyan L., Slisenko A. O., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N On the anniversary of Vladimir Gilelevich Maz'ya. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 3, 524–526 (2018). (In Russian)

21. Uraltseva N. N. Degenerate quasilinear elliptic systems. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **7**, 184–222 (1968). (In Russian)

22. Bombieri E., De Giorgi E., Miranda M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. *Arch. Rational Mech. Anal.* **32**, 255–267 (1969). https://doi.org/10.1007/BF00281503

23. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **23**, 677–703 (1970). https://doi.org/10.1002/cpa.3160230409

24. Ladyzhenskaya O., Uraltseva N. N. Local gradient estimates for solutions of a simplest regularization of a class of nonuniformly elliptic equations. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **213**, 75–92 (1994). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **84** (1), 862–872 (1997). https://doi.org/10.1007/BF02399938].

25. Uraltseva N. N. The solvability of the capillarity problem. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **18**, 1 (4), 54–64 (1973). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University. Mathematics* **6**, 363–375 (1979)].

26. Uraltseva N. N. The solvability of the capillarity problem. P. II. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **20** 1 (1), 143–149 (1975). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University. Mathematics* **8**, 151–158 (1980)].

27. Uraltseva N. N. Estimates for the maxima of the moduli of the gradients for solutions of capillarity problems. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **115**, 274–284 (1982). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **28**, 806–813 (1985)].

28. Uraltseva N. N., Urdaletova A. B. Boundedness of gradients of generalized solutions of degenerate nonuniformly elliptic quasilinear equations. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **28**, 19 (4), 50–56 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University Mathematics* **16**, 263–270 (1984)].

29. Baroni P., Colombo G., Mingione G. Nonautonomous functionals, borderline cases and related function classes. *Algebra i analiz* **27** (3), 118–151 (2015) [See also: *St. Petersburg Math J.* **27** (3), 347–379 (2016). https://doi.org/10.1090/spmj/1392].

30. De Filippis C., Mingione G. A borderline case of Calderon — Zygmund estimates for nonuniformly elliptic problems. *Algebra i analiz* **31** (3), 82–115 (2019) [See also: *St. Petersburg Math J.* **31** (3), 455–477 (2020). https://doi.org/10.1090/spmj/1608].

31. Krylov N. V., Safonov M. V. A certain property of solutions of parabolic equations with measurable coefficients. *Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. Mat.* **44** (1), 161–175 (1980). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **16** (1), 151–164 (1981). https://doi.org/10.1070/10.1070/IM1981v016n01ABEH001283].

32. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. An estimate of the Hölder norm of solutions of quasilinear general elliptic equations of the second order. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **96**, 161–168 (1980). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **21** (5), 762–768 (1983). https://doi.org/10.1007/BF01094438].

33. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. On estimates of $\max u_x$ for solutions of quasilinear elliptic and parabolic equations of general form and on existence theorems. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **138**, 90–107 (1984). (In Russian)

34. Nazarov A. I., Uraltseva N. N. Convex-monotone hulls and estimation of the maximum of a solution of a parabolic equation. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **147**, 95–109 (1985). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **37**, 851–859 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01387723].

35. Nazarov A. I. The A. D. Aleksandrov maximum principle. *Sovremennaia matematika i ee prilozheniia* **29**, 127–143 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **142** (3), 2154–2171 (2007). https://doi.org/10.1007/s10958-007-0126-1].

36. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. The normal derivative lemma and surrounding issues. *Uspekhi mat. nauk* **77**, 2 (464), 3–68 (2022). https://doi.org/10.4213/rm10049 (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys* **77** (2), 189–249 (2022). https://doi.org/10.1070/RM10049].

37. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Estimates of the Hölder constant for functions satisfying a uniformly elliptic or uniformly parabolic quasilinear inequality with unbounded coefficients. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **147**, 72–94 (1985). (In Russian)

38. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Estimates on the boundary of the domain of first derivatives of functions satisfying an elliptic or a parabolic inequality. *Tr. Mat. inst. Steklov* **179**, 102–125 (1988). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **179** (2), 109–135 (1989)].

39. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. A survey of results on the solvability of boundary value problems for uniformly elliptic and parabolic second-order quasilinear equations having unbounded singularities. *Uspekhi mat. nauk* **41**, 5 (251), 59–83 (1986). (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys* **41** (5), 1–31 (1986). https://doi.org/10.1070/RM1986v041n05ABEH003415].

40. Uraltseva N. N. Estimates of derivatives of solutions of elliptic and parabolic inequalities. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986). *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1143–1149 (1987).

41. Nazarov A. I. Hölder estimates for solutions of degenerate nondivergence elliptic and parabolic equations *Algebra i analiz* **21** (4), 174–195 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **21** (4), 635–650 (2010). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2010-01109-9].

42. Uraltseva N. N. Gradient estimates for solutions of nonlinear parabolic oblique boundary problem. Geometry and nonlinear partial differential equations (Fayetteville, AR, 1990). *Amer. Math. Soc.*, *Providence*, *RI*, *Contemp. Math.* 119–130 (1992). https://doi.org/10.1090/conm/127/1155414

43. Nazarov A. I. Hölder estimates for bounded solutions of problems with an oblique derivative for parabolic equations of nondivergence structure. *Problemy mat. analiza* **11**, 37–46 (1990). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **64** (6), 1247–1252 (1990). https://doi.org/10.1007/BF01098017].

44. Uraltseva N. N. A nonlinear problem with an oblique derivative for parabolic equations. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **188**, 143–158 (1991). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **70** (3), 1817–1827 (1994)].

45. Nazarov A. I., Uraltseva N. N. The oblique boundary-value problem for a quasilinear parabolic equation. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **200**, 118–131 (1992). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **77** (3), 3212–3220 (1995). https://doi.org/10.1007/BF02364713].

46. Venttsel' A. D. On boundary conditions for multidimensional diffusion processes. *Teoriia veroiatnostei i ee primenenie* **4** (2), 172–185 (1959). (In Russian) [Eng. transl.: *Theory Probab. Appl.* **4** (2), 164–177 (1959)].

47. Apushkinskaya D. E. An estimate for the maximum of solutions of parabolic equations with the Venttsel condition. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **36**, 2 (8), 3–12 (1991). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University, Mathematics* **24**, 1–11 (1991)].

48. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition. *Nonlinear evolution equations. Amer. Math. Soc.*, Providence, RI **164**, 1–13. of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 (1995). https://doi.org/10.1090/trans2/164/01

49. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. The nonstationary Venttsel problem with quadratic growth with respect to the gradient. *Probl. mat. anal.* **15**, 33–46 (1995). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **80** (6), 2197–2207 (1996). https://doi.org/10.1007/BF02362382].

50. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. A survey of results on nonlinear Venttsel problems. *Appl. Math.* **45** (1), 69–80 (2000). https://doi.org/10.1023/A:1022288717033

51. Luk'yanov V. V., Nazarov A. I. Solving the Venttsel' problem for the Laplace and Helmholtz equations with the help of iterated potentials. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **250**, 203–218 (1998). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **102** (4), 4265–4274 (1998). https://doi.org/10.1007/BF02673857]. Correction in: *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **324**, 129–130 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **138** (2), 5554 (2006)].

52. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Linear two-phase Venttsel problems. *Ark. Mat.* **39** (2), 201–222 (2001). https://doi.org/10.1007/BF02384554

53. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Quasilinear elliptic two-phase Venttsel's problems in the transversal case. *Problemy mat. analiza* **24**, 3–28 (2002). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **112** (1), 3927–3943 (2002). https://doi.org/10.1023/A:1020000522010].

54. Nazarov A. I. On the nonstationary two-phase Venttsel problem in the transversal case. *Problemy mat. analiza* 2004. no. 28. P. 71–82. (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **122** (3), 3251–3264 (2004). https://doi.org/10.1090/10.1023/B:JOTH.0000031019.56619.4d].

55. Nazarov A. I., Paletskikh A. A. On the Hölder continuity of solutions of the Venttsel' elliptic problem. *Doklady Akad. nauk* **465** (5), 532–536 (2015). https://doi.org/10.7868/S0869565215350066 (In Russian) [Eng. transl.: *Doklady Math.* **92** (3), 747–751 (2015). https://doi.org/10.1134/S1064562415060307].

56. Medvedev K. M., Nazarov A. I. Hölder estimates for solutions of divergence type elliptic equations on stratified sets. *Algebra i analiz* **36** (1), 170–194 (2024). (In Russian)

57. Mironenko F. D., Nazarov A. I. Local Aleksandrov — Bakelman type maximum estimate for solutions to elliptic equations on a book-type stratified set. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **51**, 105–113 (2022). (In Russian)

58. Mironenko F. D. Maximum estimates for solutions to elliptic and parabolic equations on a booktype stratified set. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* **64** (6), 1263–1278 (2023). (In Russian) [Eng. transl.: *Sib. Math. J.* **64** (6), 1385–1398 (2023)]. (In Russian)

59. Creo S., Lancia M. R., Nazarov A., Vernole P. On two-dimensional nonlocal Venttsel' problems in piecewise smooth domains. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **12**, (1), 57–64 (2019). https://doi.org/10.3934/dcdss.2019004

60. Creo S., Lancia M. R., Nazarov A. I. Regularity results for nonlocal evolution Venttsel' problems. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **23** (5), 1416–1430 (2020). https://doi.org/10.1515/fca-2020-0070

61. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Elliptic Venttsel problems with VMO coefficients. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **31** (2), 391–399 (2020). https://doi.org/10.4171/rlm/896

62. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Lp-theory of Venttsel BVPs with discontinuous data. *Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **98** (2), A1–16 (2020). https://doi.org/10.1478/AAPP.98S2A1

63. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Venttsel boundary value problems with discontinuous data. *SIAM J. Math. Anal.* **53** (1), 221–252 (2021). https://doi.org/10.1137/19M1286839

64. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Nonstationary Venttselproblem with VMO_x leading coefficients. *Doklady RAS.* **510**, 13–17 (2023). https://doi.org/10.31857/S2686954322600707 (In Russian) [Eng. transl.: *Doklady Math.* **107** (2), 97–100 (2023). https://doi.org/10.1134/S1064562423700679].

65. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Quasilinear parabolic Venttsel problem with discontinuous principal coefficients. *Funkts. anal. prilozh.* **57** (2), 93–99 (2023). (In Russian). https://doi.org/110.4213/faa4098

66. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I., Palagachev D. K., Softova L. G. Nonstationary Venttsel problems with discontinuous data. *J. Diff. Equations* **375**, 538–566 (2023). https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.08.024

67. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. Boundary estimates for the first-order derivatives of a solution to a nondivergent parabolic equation with composite right-hand side and coefficients of lower-order derivatives. *Probl. mat. anal.* **14**, 3–27 (1995). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **77** (4), 3257–3276 (1995). https://doi.org/10.1007/BF02364860].

68. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations in domains with smooth closed edges. *Probl. mat. anal.* **21**, 3–29 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **105** (5), 2299–2318 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1011362311390].

69. Nazarov A. I. Estimates of the maximum for solutions of elliptic and parabolic equations in terms of weighted norms of the right-hand side. *Algebra i analiz* **13** (2), 151–164 (2001). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **13** (2), 269–279 (2002). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-07-00951-X].

70. Nazarov A. I. L_p-estimates for a solution to the Dirichlet problem and to the Neumann problem for the heat equation in a wedge with edge of arbitrary codimension. *Probl. mat. anal.* **22**, 126–159 (2001). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **106** (3), 2989–3014 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1011319521775].

71. Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients. *Math. Nachr.* **282** (9), 1220–1241 (2009). https://doi.org/10.1002/mana.200910796

72. Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients in a wedge. *Math. Nachr.* **287** (10), 1142–1165 (2014). https://doi.org/10.1002/mana.201100352

73. Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XV. Advances in mathematical analysis of partial differential equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI. Vol. 232. *Of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 177–191 (2014). https://doi.org/10.1090/trans2/232/10

74. Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients in a wedge. *J. Math. Anal. Appl.* **435** (1), 210–228 (2016). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.029

75. Nazarov A. I., Uraltseva N. N. The Harnack inequality and related properties for solutions of elliptic and parabolic equations with divergence-free lower-order coefficients. *Algebra i analiz* **23** (1), 136–168 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **23** (1), 93–115 (2012). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2011-01188-4].

76. Nazarov A. I. A centennial of the Zaremba — Hopf — Oleinik lemma. *SIAM J. Math. Anal.* **44** (1), 437–453 (2012). https://doi.org/10.1137/110821664

77. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. A counterexample to the Hopf — Oleinik lemma (elliptic case). *Anal. PDE* **9** (2), 439–458. 2016. https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.439

78. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. On the boundary point principle for divergence-type equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **30** (4), 677–699 (2019). https://doi.org/10.4171/RLM/867

79. Ibraguimov A., Nazarov A. I. On Phragmen — Lindelöf principle for non-divergence type elliptic equations and mixed boundary conditions. *Mat. Fiz. Komp'yut. Model.* **3** (40), 65–76 (2017). https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.5

80. Cao D., Ibraguimov A., Nazarov A. I. Mixed boundary value problems for non-divergence type elliptic equations in unbounded domains. *Asymptot. Anal.* **109** (1–2), 75–90 (2018). https://doi.org/10.3233/asy-181469

81. Kozlov V., Nazarov A. A comparison theorem for nonsmooth nonlinear operators. *Potentia Anal.* **54** (3), 471–481 (2021). https://doi.org/10.1007/s11118-020-09834-8

82. Arkhipova A. A. Smoothness of solutions of problems with an obstacle. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **38**, 7–9 (1973). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **8**, 351–353 (1977). https://doi.org/10.1070/IM1973v007n05ABEH00200].

83. Arkhipova A. A. On least supersolutions for a problem with an obstacle. *Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. Mat.* **37** (5), 1155–1185 (1973). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. USSR-Izv.* **7**, 1153–1183 (1975). https://doi.org/10.1070/IM1973v007n05ABEH002000].

84. Arkhipova A. A. The problem with discontinuous obstacle for uniformly elliptic equations. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* **19**, 4 (19), 154–155 (1974). (In Russian)

85. Arkhipova A. A. On limiting smoothness of the solution of a problem with a two-sided barrier. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **29**, 2 (7), 7–9 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University Mathematics* **17** (2), 1–6 (1984)].

86. Uraltseva N. N. Strong solutions of the generalized Signorini problem. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* **19** (5), 1204–1212 (1978). (In Russian) [Eng. transl.: *Sib. Math. J.* **19** (5), 850–856 (1978)].

87. Uraltseva N. N. HÅNolder continuity of the gradients of solutions of parabolic equations under boundary conditions of Signorini type. *Dokl. Akad. nauk SSSR* **280** (3), 563–565 (1985). (In Russian) [Eng. transl.: *Soviet Math. Dokl.* **31**, 135–138 (1985)].

88. Arkhipova A. A., Uraltseva N. N. Regularity of the solutions of diagonal elliptic systems under convex constraints on the boundary of the domain. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **152**, 5–17 (1986). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **40**, 591–598 (1988). https://doi.org/10.1007/BF01094182].

89. Arkhipova A. A., Uraltseva N. N. Limit smoothness of the solutions of variational inequalities under convex constraints on the boundary of the domain. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **163**, 5–16 (1987). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **49**, 1121–1128 (1990). https://doi.org/10.1007/BF02208707].

90. Arkhipova A. A., Uraltseva N. N. Regularity of the solution of a problem with a two-sided limit on a boundary for elliptic and parabolic equations. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **179**, 5–22 (1988). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **179**, 1–19 (1989)].

91. Arkhipova A. A., Uraltseva N. N. On the existence of smooth solutions for parabolic systems with convex constraints on the boundary. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **171**, 5–11 (1989). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **56** (2), 2281–2285 (1991). https://doi.org/10.1007/BF01671930].

92. Arkhipova A., Uraltseva N. Sharp estimates for solutions of a parabolic Signorini problem. *Math. Nachr.* **177**, 11–19 (1996). https://doi.org/10.1002/mana.19961770103

93. Uraltseva N. N. Regularity of solutions of variational inequalities. *Uspekhi mat. nauk* **42**, 6 (258), 151–174 (1987). (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys.* **42** (6), 191–219 (1987). https://doi.org/10.1070/RM1987v042n06ABEH001495].

94. Apushkinskaya D. E., Repin S. I. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution. *Interfaces Free Bound.* **20** (4), 511–531 (2018). https://doi.org/10.4171/IFB/410

95. Apushkinskaya D. E., Repin S. I. Biharmonic obstacle problem: guaranteed and computable error bounds for approximate solutions. *J. Comp. Math. Math. Phys.* (2020). **60** (11), 1881–1897. https://doi.org/10.31857/S0044466920110034 (In Russian) [Eng. transl.: *Comput. Math. Math. Phys.* **60** (11), 1823–1838 (2020). https://doi.org/10.1134/S0965542520110032].

96. Apushkinskaya D., Repin S. Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem. *Comput. Methods Appl. Math.* **22** (2), 259–276 (2022). https://doi.org/10.1515/cmam-2021-0156

97. Osmolovskii V. G. Boundary value problems with free surfaces in the theory of phase transitions. *Differ. Equ.* **53** (13), 1734–1763 (2017). https://doi.org/10.1134/s0012266117130043

98. Osmolovskii V. G. Independence of temperatures of phase transitions of the domain occupied by a two-phase elastic medium. *Probl. mat. anal.* **66**, 147–152 (2012). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **186** (2), 302–306 (2012). https://doi.org/10.1007/s10958-012-0986-x].

99. Osmolovskii V. G. Computation of phase transition temperatures for anisotropic model of a two phase elastic medium. *Probl. mat. anal.* **84**, 151–160 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **216** (2), 313–324 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-2902-2].

100. Osmolovskii V. G. Exact solutions to the variational problem of the phase transition theory in continuum mechanics. *Probl. mat. anal.* **27**, 171–206 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **120** (2), 1167–1190 (2004). https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000014845.60594.5f].

101. Osmolovskii V. G. An existence theorem and weak Lagrange equations for a variational problem of the theory of phase transitions. *Sib. mat. zh.* **35** (4), 835–846 (1994). (In Russian) [Eng. transl.: *Sib. Math. J.* **35** (4), 743–753 (1994). https://doi.org/10.1007/BF02106618].

102. Osmolovskii V. G. Isoperimetric inequality and equilibrium states of a two-phase medium. Probl. mat. anal. **36**, 81–88 (In Russian). (2007) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **150** (1), 1875–1884 (2004). https://doi.org/10.1007/s10958-008-0102-4].

103. Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V. The effect of a surface energy term on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential. *Math. Methods Appl. Sci.* **25** (2), 149–178 (2002). https://doi.org/10.1002/mma.282

104. Osmolovskii V. G. Criterion for the lower semicontinuity of the energy functional of a two-phase elastic medium. *Probl. Mat. Anal.* **26**, 215–254 (2003). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **117** (3), 4211–4236. (2003). https://doi.org/10.1023/A:1024820721057].

105. Osmolovskii V. G. Comparison of two methods of consideration of surface energy in problems on phase transitions in large force fields. *Probl. mat. anal.* **19**, 182–192 (1999). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **101** (2), 3001–3008. (2000). https://doi.org/10.1007/BF02672183].

106. Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V. G. The effect of a penalty term involving higher order derivatives on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential. *Math. Methods Appl. Sci.* **25** (4), 289–308 (2002). https://doi.org/10.1002/mma.287

107. Osmolovskii V. G. Quasiconvex hull of energy densities in a homogeneous isotropic two-phase elastic medium and solutions of the original and relaxed problems. *Probl. mat. anal.* **70**, 161–170 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **191** (2), 280–290 (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-013-1316-7].

108. Osmolovskii V. G. *Mathematical problems of the theory of phase transitions in continuum mechanics.* (2014) Preprints of the St. Petersburg Mathematical Society: 2014-04. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/ (In Russian)

109. Allaire G. *Shape optimization by the homogenization method. Vol. 146* (2002). Of Applied Mathematical Sciences. New York, Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9286-6

110. Osmolovskij V. G. Phase transition in the mechanics of continuous media for big loading. *Math. Nachr.* **177**, 233–250 (1996). https://doi.org/10.1002/mana.19961770113

111. Mikhailov A. S., Mikhailov V. S. Phase transitions in multi-phase media. *Probl. mat. anal.* **20**, 120–170 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **102** (5), 4436–4472 (2000). https://doi.org/10.1007/BF02672900].

112. Mikhailov V. S. Problems on phase transitions with special constraints. *Probl. mat. anal.* **23**, 30–49 (In Russian). (2001) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **107** (3), 3827–3840 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1012384010285].

113. Mikhailov A. S. On determination of the surface tension coefficient in the two-phase elasticity problems under the assumption of incompressibility or with inflexible inclusions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **51** (3), 24–34 (2006). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **39** (3), 133–141 (2006)].

114. Osmolovskii V. G. Quasistationary phase transition problem in two-phase media. One-dimensional case. The zero surface stress coefficient. *Probl. mat. anal.* **82**, 99–110 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **210** (5), 664–676 (2015). https://doi.org/10.1007/s10958-015-2585-0].

115. Osmolovskii V. G. Behavior of the solutions of one-sided variational problems on phase transitions in continuous mechanics at large temperatures. *Funkts. anal. prilozh.* **53** (4), 38–51 (2019). https://doi.org/10.4213/faa3650 (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **53** (4), 270–280 (2019). https://doi.org/10.1134/S001626631904004X].

116. Osmolovskii V. G. One-dimensional problem of phase transitions in the mechanics of a continuous medium at a variable temperature. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **508**, 134–146 (2021). (In Russian)

117. Osmolovskii V. G. Mathematical problems in the theory of phase transitions in continuum mechanics. *Algebra i analiz* **29** (5), 111–178 (2017). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **29** (5), 793–839 (2018). https://doi.org/10.1090/spmj/1517].

118. Apushkinskaya D., Bildhauer M., Fuchs M. Steady states of anisotropic generalized Newtonian fluids. *J. Math. Fluid Mech.* **7** (2), 261–297 (2005). https://doi.org/10.1007/s00021-004-0118-6

119. Apushkinskaya D., Fuchs M. Partial regularity for higher order variational problems under anisotropic growth conditions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **32** (1), 199–214 (2007).

120. Apushkinskaya D., Bildhauer M., Fuchs M. Interior gradient bounds for local minimizers of variational integrals under nonstandard growth conditions. *Probl. mat. anal.* **43**, 35–50 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **164** (3), 345–363 (2010). https://doi.org/10.1007/s10958-009-9751-1].

121. Apushkinskaya D., Bildhauer M., Fuchs M. On local generalized minimizers and local stress tensors for variational problems with linear growth. *Probl. mat. anal.* **44**, 39–54 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **165** (1), 42–59 (2010). https://doi.org/10.1007/s10958-010-9779-2].

122. Fuchs M., Osmolovski V. Variational integrals on Orlicz-Sobolev spaces. *Z. Anal. Anwendungen* **17** (2), 393–415 (1998). https://doi.org/10.4171/ZAA/829

123. Gidas B., Ni W. M., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.* **68** (3), 209–243 (1979).

124. Aleksandrov A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. V. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 19 (4), 5–8 (1958). (In Russian) [Eng. transl.: *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, *Vol. 21. Amer. Math. Soc.*, *Providence*, RI, 412–416 (1962)].

125. Pohozaev S. I. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. *Dokl. Akad. nauk SSSR* **165** (1), 36–39 (1965). (In Russian) [Eng. transl.: *Soviet Math. Dokl.* **6**, 1408–1411 (1965)].
126. Coffman C. V. A nonlinear boundary value problem with many positive solutions. *J. Differential Equations* **54** (3), 429–437 (1984). https://doi.org/10.1016/0022-0396(84)90153-0
127. Nazarov A. I. On solutions to the Dirichlet problem for an equation with p-Laplacian in a spherical layer. *Trudy SPbMO* **10**, 33–62 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. St. Petersburg Math. Soc. Vol. X. Providence, AMS Transl. Ser. 2.* Vol. 214, 29–57 (2005). https://doi.org/10.1090/trans2/214/03].
128. Shcheglova A. P. Multiplicity of solutions to a boundary-value problem with nonlinear Neumann condition. *Probl. mat. anal.* **30**, 121–144 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **128** (5), 3306–3333 (2005). https://doi.org/10.1007/s10958-005-0269-x].
129. Kolonitskii S. B., Nazarov A. I. Multiplicity of solutions to the Dirichlet problem for generalized Henon equation. *Probl. mat. anal.* **35**, 91–110. (2007). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **144** (6), 4624–4644 (2007). https://doi.org/10.1007/s10958-007-0299-7].
130. Kolonitskii S. B. Multiplicity of solutions of the Dirichlet problem for an equation with the p-Laplacian in a three-dimensional spherical layer. *Algebra i analiz* **22** (3), 206–221 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **22** (3), 485–495.(2011). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2011-01154-9].
131. Kolonitskii S. B. Multiplicity of 1D-concentrated positive solutions to the Dirichlet problem for an equation with p-Laplacian. *Funkts. anal. prilozh.* **49** (2), 88–92 (2015). https://doi.org/10.4213/faa3193 (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **49** (2), 151–154 (2015). https://doi.org/10.1007/s10688-015-0099-7].
132. Enin A. I., Nazarov A. I. Multiplicity of solutions to the quasilinear Neumann problem in the 3-Dimensional case. *Probl. Mat. Anal.* **78**, 85–94. (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **207** (2), 206–217 (2015). https://doi.org/10.1007/s10958-015-2366-9].
133. Nazarov A. I., Neterebskii B. O. The multiplicity of positive solutions to a quasilinear equation generated by the Il'in-Caffarelli-Cohn-Nirenberg inequality. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **444**, 98–109 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **224** (3), 448–455 (2017). https://doi.org/10.1007/s10958-017-3427-z].
134. Enin A. Multiplicity of positive solutions for a critical quasilinear Neumann problem. *Arch. Math.* **109** (3), 263–272 (2017). https://doi.org/10.1007/s00013-017-1064-x.
135. Shcheglova A. P. The Neumann problem for the generalized Henon equation. *Probl. Mat. Anal.* **95**, 103–114 (2018). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **128** (5), 360–373 (2018). https://doi.org/10.1007/s10958-018-4078-4].
136. Lerman L. M., Naryshkin P. E., Nazarov A. I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method. *Nonlinear Anal.* **190**, 111590 (2020). https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111590
137. Buslaev A. P., Kondrat'ev V. A., Nazarov A. I. On a family of extremal problems and related properties of an integral. *Mat. zametki.* **64** (6), 830–838 (1998). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. Notes* **64** (6), 719–725 (1998). https://doi.org/10.1007/BF02313029].
138. Nazarov A. I. On an exact constant in the generalized PoincarÅLe inequality. *Probl. Mat. Anal.* **24**, 155–180 (2002). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **112** (1), 4029–4047 (2002). https://doi.org/10.1023/A:1020006108806].
139. Gerasimov I. V., Nazarov A. I. Best constant in a three-parameter Poincare inequality. *Probl. Mat. Anal.* **61**, 69–86 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **179** (1), 80–99 (2007). https://doi.org/10.1007/s10958-011-0583-4].
140. Nazarov A. I. On the "one-dimensionality" of the extremal for the Poincare inequality in a square. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **259**, 167–181 (1999). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **109** (5), 1928–1939 (2002). https://doi.org/10.1023/A:1014496325564].
141. Nazarov A. I. The one-dimensional character of an extremum point of the Friedrichs inequality in spherical and plane layers. *Probl. Mat. Anal.* **20**, 171–190 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **102** (5), 4473–4486 (2000). https://doi.org/10.1007/BF02672901].
142. Nazarov A. I. On the symmetry of extremals in the weight embedding theorem. *Probl. Mat. Anal.* **23**, 50–75 (2001). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **107** (3), 3841–3859 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1012336127123].
143. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. On some properties of extremals in a variational problem generated by the Sobolev embedding theorem. *Probl. Mat. Anal.* **27**, 109–136 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **120** (2), 1125–1144 (2004). https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000014842.55031.98].
144. Shcheglova A. P. The Neumann problem for semilinear elliptic equation in thin cylinder. The least energy solutions. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **348**, 272–302 (2007). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **152** (5), 780–798 (2008) https://doi.org/10.1007/s10958-008-9089-0].

145. Mukoseeva E. V., Nazarov A. I. On the symmetry of the extremal in some embedding theorems. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **425**, 35–45 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **210** (6), 779–786 (2015). https://doi.org/10.1007/s10958-015-2589-9]. Correction in: *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **489**, 225 (2020). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* (2022). **260** (1), 155].

146. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. *Steklov-type 1D inequalities (a survey)* (2021). arxiv: math.AP/2101.10752v1.

147. Nazarov A. I. The eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem related to generalized Lyapunov sines. *Differenz. uravneniya* **36** (7), 1000 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *Differ. Equ.* **36** (7), 1112–1113 (2000). https://doi.org/10.1007/BF02754516].

148. Nazarov A. I. On sharp constants in one-dimensional embedding theorems of arbitrary order. In: *Problems of contemporary approximation theory.* St. Petersburg, St. Petersburg University Press 146–158 (2004). (In Russian) [Eng. transl.: arxiv: math.CA/1308.2259v1].

149. Nazarov A. I., Petrova A. N. On exact constants in some embedding theorems of high order. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **53** (4), 16–20 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **41** (4), 298–302 (2008). https://doi.org/10.3103/S1063454108040031].

150. Nazarov A. I., Repin S. I. Exact constants in Poincare type inequalities for functions with zero mean boundary traces. *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (15), 3195–3207 (2015). https://doi.org/10.1002/mma.3290

151. Nazarov A. I., Ustinov N. S. A generalization of the Hardy inequality. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **477**, 112–118 (2018). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **244** (6), 998–1002 (2020). https://doi.org/10.1007/s10958-020-04669-5].

152. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. On the sharp constant in the "magnetic" 1D embedding theorem. *Russ. J. Math. Phys.* **25** (1), 67–72 (2018). https://doi.org/10.1134/S1061920818010065

153. Musina R., Nazarov A. I. A weighted estimate for generalized harmonic extensions. *Math. Inequal. Appl.* **23** (2), 419–424 (2020). https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-32

154. Cora G., Musina R., Nazarov A. I. *Hardy type inequalities with mixed weights in cones* (2023). arxiv: math.AP/2305.05034v1.

155. Kuznetsov N., Nazarov A. Sharp constants in the Poincare, Steklov and related inequalities (a survey). *Mathematika* **61** (2), 328–344 (2015). https://doi.org/10.1112/S0025579314000229

156. Bankevich S. V., Nazarov A. I. A generalization of the Polya — Szegö inequality for onedimensional functionals. *Doklady Akad. Nauk* **438** (1), 11–13 (2011). (In Russian) [Eng. transl.: *Doklady Math.* **83** (3), 287–289 (2011). https://doi.org/10.1134/S1064562411030021].

157. Bankevich S. V., Nazarov A. I. On monotonicity of some functionals under rearrangements. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **53** (3–4), 627–647 (2015). https://doi.org/10.1007/s00526-014-0761-6

158. Bankevich S. V. On monotonicity of some functionals under monotone rearrangement with respect to one variable. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **444**, 5–14 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **224**, 385–390 (2017). https://doi.org/10.1007/s10958-017-3423-3].

159. Bankevich S. V. On the Polya — Szegö inequality for functionals with variable exponent. *Funkts. Anal. Prilozh.* **52** (1), 56–60 (2018). https://doi.org/10.4213/faa3523 (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **52** (1), 45–48 (2018). https://doi.org/10.1007/s10688-018-0205-8].

160. Bankevich S. V., Nazarov A. I. On monotonicity of some functionals with variable exponent under symmetrisation. *Appl. Anal.* **98** (1–2), 362–373 (2019). https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1437420

161. Nazarov A. I. Hardy — Sobolev inequalities in a cone. *Probl. Mat. Anal.* **31**, 39–46 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **132** (4), 419–427 (2006). https://doi.org/10.1007/s10958-005-0508-1].

162. Demyanov A. V., Nazarov A. I. On the existence of an extremal function in Sobolev embedding theorems with limit exponent. *Algebra i analyz* **17** (5), 105–140 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **17** (5), 773–796 (2006). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-06-00929-0].

163. Demyanov A. V., Nazarov A. I. On the solvability of the Dirichlet problem for the semilinear Schrödinger equation with a singular potential. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **336**, 25–45 (2006). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **143** (2), 2857–2868 (2007). https://doi.org/10.1007/s10958-007-0171-9].

164. Nazarov A., Reznikov A. Attainability of infima in the critical Sobolev trace embedding theorem on manifolds. *Nonlinear partial differential equations and related topics. Amer. Math. Soc., Providence, RI* **229** of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 197–210. (2010). https://doi.org/10.1090/trans2/229/12.

165. Nazarov A. I., Reznikov A. B. On the existence of an extremal function in critical Sobolev trace embedding theorem. *J. Funct. Anal.* **258** (11), 3906–3921 (2010). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.018

166. Nazarov A. I. Trace Hardy — Sobolev inequalities in cones. *Algebra i analiz.* **22** (6), 200–213 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **22** (6), 997–1006 (2011). https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2011-01180-X].

167. Nazarov A. I. On the Dirichlet problem generated by the Maz'ya-Sobolev inequality. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **49** (1–2), 369–389 (2014). https://doi.org/10.1007/s00526-012-0586-0

168. Nazarov A. I. Dirichlet and Neumann problems to critical Emden-Fowler type equations. *J. Global Optim.* 40 (1–3), 289–303 (2008). https://doi.org/10.1007/s10898-007-9193-6

169. Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu. Some extremal problems for Gaussian and empirical random fields. *Trudy SPbMO.* Vol. 8. Novosibirsk, Nauchnaya kniga Publ. (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. Soc. Vol. VIII.* Providence, AMS Transl. Ser. 2. Vol. 205, 189–202 (2002). https://doi.org/10.1090/trans2/205].

170. Lifshits M., Nazarov A., Nikitin Ya. Tail behavior of anisotropic norms for Gaussian random fields. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **336** (1), 85–88 (2003). https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)00013-4

171. Nazarov A. I., Tchirina A. V. On the available local asymptotic efficiency of some goodness-of-fit criteria. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **501**, 218–235 (2021). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **273** (5), 804–815 (2023). https://doi.org/10.1007/s10958-023-06543-6].

172. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians. *Comm. Partial Differential Equations* **39** (9), 1780–1790 (2014). https://doi.org/10.1080/03605302.2013.864304

173. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians — 2. *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* **33** (6), 1667–1673 (2016). https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.08.001

174. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians — 3. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **22** (3), 832–841 (2016). https://doi.org/10.1051/cocv/2015032

175. Musina R., Nazarov A. I. Strong maximum principles for fractional Laplacians. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* **149** (5), 1223–1240 (2019). https://doi.org/10.1017/prm.2018.81

176. Musina R., Nazarov A. I. A note on truncations in fractional Sobolev spaces. *Bull. Math. Sci.* **9** (1), 1950001, 7 (2019). https://doi.org/10.1142/S1664360719500012

177. Musina R., Nazarov A. I. A note on higher order fractional Hardy — Sobolev inequalities. *Nonlinear Anal.* **203**, 112168, 3 (2021). https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112168

178. Musina R., Nazarov A. I. Fractional operators as traces of operator-valued curves (2022). arxiv: math.AP/2208.06873v1

179. Nazarov A. I. On comparison of fractional Laplacians. *Nonlinear Anal.* **218**, 112790 (2022). https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112790

180. Musina R., Nazarov A. I. Non-critical dimensions for critical problems involving fractional Laplacians. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** (1), 257–266 (2016). https://doi.org/10.4171/RMI/885

181. Musina R., Nazarov A. I., Sreenadh K. Variational inequalities for the fractional Laplacian. *Potential Anal.* **46** (3), 485–498 (2017). https://doi.org/10.1007/s11118-016-9591-9

182. Musina R., Nazarov A. I. Variational inequalities for the spectral fractional Laplacian. *Comp. Math. and Math. Phys.* **57** (3), 373–386 (2017). https://doi.org/10.1134/S0965542517030113

183. Musina R., Nazarov A. I. A tool for symmetry breaking and multiplicity in some nonlocal problems. *Math. Methods Appl. Sci.* **43** (16), 9345–9357 (2020). https://doi.org/10.1002/mma.6220

184. Musina R., Nazarov A. I. Complete classification and nondegeneracy of minimizers for the fractional Hardy — Sobolev inequality, and applications. *J. Differential Equations* **280**, 292–314 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.01.022

185. Musina R., Nazarov A. I. On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian. *Nonlinear Anal.* **121**, 123–129 (2015). https://doi.org/10.1016/j.na.2014.09.021

186. Musina R., Nazarov A. I. Fractional Hardy-Sobolev inequalities on half spaces. *Nonlinear Anal.* **178**, 32–40 (2019). https://doi.org/10.1016/j.na.2018.07.002

187. Musina R., Nazarov A. I. Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces. *Adv. Calc. Var.* **14** (1), 127–145 (2021). https://doi.org/10.1515/acv-2018-0020

188. Ustinov N. S. Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **459**, 104–126 (2017). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **236** (4), 446-460 (2019). https://doi.org/10.1007/s10958-018-4124-2].

189. Ustinov N. S. On the attainability of the best constant in fractional Hardy — Sobolev inequalities involving the spectral Dirichlet Laplacian. *Funkts. Anal. Prilozh.* **53** (4), 93–98 (2019). https://doi.org/10.4213/faa3673 (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **53** (4), 317–321 (2019). https://doi.org/10.1134/S0016266319040105].

190. Ustinov N. The effect of curvature in fractional Hardy — Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian. *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (11), 7785–7815 (2020). https://doi.org/10.1090/tran/8124

191. Ustinov N. S. On the constancy of the extremal function in the embedding theorem of fractional order. *Funkts. Anal. Prilozh.* **54** (4), 85–97 (2020). https://doi.org/10.4213/faa3828 (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **54** (4), 295–305 (2020). https://doi.org/10.1134/S0016266320040073].

192. Shcheglova A. P. Multiplicity of positive solutions for the generalized Henon equation with fractional Laplacian. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **489**, 207–224 (2020). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **260** (1), 142–154 (2022). https://doi.org/10.1007/s10958-021-05678-8].

193. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. New classes of solutions to semilinear equations in R^n with fractional Laplacian. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **508**, 124–133 (2021). (In Russian)

194. Ustinov N. S. Solvability of a critical semilinear problem with the spectral Neumann fractional Laplacian. *Algebra i analiz* **33** (1), 194–212 (2021) (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **33** (1), 141–153 (2022). https://doi.org/10.1090/spmj/1693].

195. Nazarov A. I., Shcheglova A. P. Solutions with various structures for semilinear equations in R^n driven by fractional Laplacian. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **62** (4), 112, 31 (2023). https://doi.org/10.1007/s00526-023-02453-2

Received: April 19, 2023
Revised: August 29, 2023
Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Darya E. Apushkinskaya — apushkinskaya@gmail.com
Arina A. Arkhipova — arinaark@gmail.com
Alexander I. Nazarov — al.il.nazarov@gmail.com
Victor G. Osmolovskii — victor.osmolovskii@gmail.com
Nina N. Uraltseva — uraltsev@pdmi.ras.ru