Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Комарова Наталья Эдуардовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Теоретико-игровые модели банкротства предприятия

010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Петросян Л. А.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение

В различной литературе понятие банкротства предприятия трактуется неоднозначно, но большинство авторов под понятием «банкротство» понимают следующее:

Банкротство (нем. Bankrott, Bankarotta) – долговая несостоятельность предприятия, несостоятельность его удовлетворить требования кредиторов по оплате услуг, товаров и работ, а также неспособность вносить обязательные платежи в бюджет и внебюджетные фонды. Это происходит потому, что долговые обязательства предприятия-должника превышают размеры его имущества или структура его баланса неудовлетворительна.

В России уже более двух лет наблюдается негативная ситуация в экономике, которая приводит к динамике числа банкротств. Так, за 2014 год зафиксировано 14,514 тыс. несостоятельных фирм, что на 20% превышает статистику предыдущего года. Увеличение числа компаний, признающих себя банкротами, продолжается и по сей день. Поэтому тема рассматриваемой работы является актуальной в настоящее время.

Успех деятельности фирмы зависит от большого числа внешних и внутренних факторов и если она ведет эту деятельность неэффективно, то настает момент, когда ее необходимо вывести с рынка. Для этого выполняется ряд процедур, одной из которых является определение ликвидационной стоимости. После чего встает вопрос о разделении этой стоимости между кредиторами, истцами и заявителями, что приводит к большому числу юридических конфликтов. Данная проблема заключается в том, что стоимости фирмы в большинстве случаев недостаточно, чтобы погасить все требования. Необходимо сделать оптимальное распределение денежных средств и установить соответствующие правила дележа.

Схожие задачи раздела имущества зафиксированы еще в древнейшей литературе. Рассмотрим два простых примера описанных в Талмуде:

Проблема спора из-за одежды. Рассматривается одежда ценой 200 единиц и два человека претендующие на 100 и 200 единиц соответственно. Стоит спор распределения стоимости среди двух лиц. Талмуд считает оптимальным- вектор выплат (50;150).

Проблема раздела имущества. У человека три жены и три свадебных контракта, которые определяют суммы выплат 100, 200, 300, после смерти. Когда он умирает, стоимость его владений оценивается в 200. Талмуд предлагает следующие выплаты (50;75;75).

В различных работах также представлен ряд теоретических правил, которые используются на практике, но необходимо эти правила как-то сравнивать между собой для определения достоинств и недостатков каждого из них. Самое распространенное правило- правило пропорциональности, при котором денежные средства между кредиторами распределяются пропорционально требованиям. Но зачастую данный дележ сопровождается большим количеством споров между истцами процедуры банкротства и тогда приходится прибегать к новым правилам.

С другой стороны, цель распределения- удовлетворить потребности кредиторов, истцов и заявителей. А они в свою очередь хотят максимизировать свою часть выплат. Поэтому для решения этой проблемы логично использовать математическое моделирование средствами теории кооперативных игр. Такие игры моделируют ситуации, при которых участники игры, объединяясь, могут получить дополнительную прибыль.

Серьезным шагом в математическом моделировании банкротства станет разработка многоуровневых моделей, которые должны учитывать, что при ликвидации фирмы денежные средства могут поступать на счет должника в определенные моменты времени. Это может быть связано с банковскими особенностями, наличием у фирмы обособленных подразделений и другими экономическими факторами. Тогда распределение денежных средств производится по шагам и сложность дележа возрастает в несколько раз.

Постановка задачи

Пусть у нас есть положительная величина M $\in R_+$ ликвидационная стоимость предприятия. Необходимо распределить её среди конечного множества агентов N (кредиторов, истцов и заявителей) вида $\{1, 2, \ldots, n\}$, требования которых в сумме превышают число M. Определим требование i-ого агента как $d_i \in R_+$. Суммарное требование вычисляется как $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Обозначим класс всех задач о банкротстве D_N.

Тогда под задачей банкротства будем понимать пару (d, M) $\in R_+^N \times R_+$, в которой M $<$ D. Данная задача эквивалента реальной ситуации в суде по делам о банкротстве. Мы будем рассматривать конфликт претензий агентов и искать способы нахождения оптимального распределения вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Правило дележа – это функция, которая для любой пары (d, M) ставит в соответствие вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = M$ и выполняется неравенство $0 \leq x \leq d$. Необходимо определить ряд таких правил и найти способы их сравнения.

Далее построим математическую модель задачи банкротсва при помощи кооперативных игр и рассмотрим способы ее решения. Перейдем к многошаговому случаю, когда нам заранее известна процедура поступления денежных средств на счет должника. Положим, что доступная сумма выплачивается на промежутках времени $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ так, что верно равенство $\sum_{j=1}^{m} M(t_j) = M$. Предложим способы решения такой модели с помощью многошаговых игр и проанализируем полученные результаты.

Обзор литературы

Задачу банкротства изучают довольно длительное время. Авторы предлагают различные правила дележа и способы их сравнения. Анализ трех классических правил был предложен в работе К. Херреро и А. Виллара [2]. В статье Р. Аумана и М. Машлер [1] впервые вводится правило Талмуда, которое описывает древнейшие проблемы раздела имущества. Обширный обзор всех правил был сделан В. Томпсоном в работе [4]. Здесь же описываются семейства правил, которые включают в себя все упомянутые правила и содержат бесконечное число членов.

Кроме того, для решения задачи банкротства был предложен игровой подход. Для того, чтобы понять принципы построения кооперативных моделей можно обратиться к книге Петросяна Л. А., Зенкевича Н. А., Шевкопляс Е. В. [6]. В ней рассмотрены основные понятия теории игр. В работе С. Гуиэзу [3] продемонстрировал пример применения вектора Шепли для раздела имущества должника. Для этого рассмотрена кооперативная игра в виде характеристической функции.

Стоит отметить, что процедура банкротства - это длительный процесс. Анализ финансовой состоятельности и диагностика процедуры выплат должника описываются в книге Бердниковой Т. Б. [5]. Поэтому важным шагом в моделировании рассматриваемой проблемы будет разработка многошаговых моделей. Примеры многошаговых кооперативных моделей в экономике предложены в работах [7],[8].

Глава 1. Правила дележа для проблемы банкротства

1.1. Формулировка правил

1.1.1 Уступать и делить (CD). Это простое правило дележа, которое справедливо для случая $N = \{1, 2\}$. Вектор требований агентов выглядит (d_1, d_2), величина общих выплат равна M. Тогда первый агент претендует на сумму d_1, уступая тем самым $M - d_1$, если эта разность положительна, и 0 в противном случае. Аналогично поступает и второй агент. Итак, получаем $(M - d_1)^+ = \{M - d_1, 0\}$ и $(M - d_2)^+ = \{M - d_2, 0\}$. Далее выплачиваем каждому агенту цену уступки другого, а оставшуюся сумму денег делим пополам.

$$CD_i(d, M) = (M - d_j)^+ + 1/2(M - \sum_{k \in N}(M - d_k)^+),$$

$$\text{где } i, j \in N, i \neq j.$$

Данный сценарий дележа эквивалентен числам, получившимся при распределении Талмуда в задаче «спор из-за одежды».

1.1.2 Пропорциональное правило (P). Данный делёж является одним из самых распространенных в реальных задачах. Существует два типа пропорционального правила.

а) Правило усеченных претензий (TP). Здесь делёж вычисляется пропорционально усеченным претензиям min (d_i, M).

$$TP(d, M) = \alpha d',$$

$$d' = (d'_i), d'_i = min(d_i, M), \alpha = \frac{M}{\sum d'_i}.$$

б) Приведенное правило (A). Это правило- одно из обобщений правила «уступать и делить». Сначала каждому агенту отдается сумма уступки от остальных, т.е. остаток при условии, что все кроме рассматриваемого агента удовлетворили свои требования.

$$m_i(d, M) = (M - \sum_{i \neq j} d_j)^+, m(d, M) = (m_i(d, M))_{i \in N}$$

А вектор остатков $d - m(d, M)$ делится по правилу (а), с учетом, что осталась сумма $M_A = M - \sum_{k \in N} m_k(d, M)$.

$$A(d, M) = m(d, M) + TP(d - m(d, M), M_A).$$

1.1.3 Правило ограниченных равных выплат (CEA). Идея уравнивания часто используется в экономических задачах, но главный вопрос состоит в том, по какому именно критерию уравнивать, если агенты не одинаковы. В задаче о банкротстве участники отличаются лишь величиной требований и уравнивание выплат игнорирует эти отличия. Получается, что агент может получить сумму большую чем ту, на которую претендует, но это противоречит нашему определению дележа. Поэтому вводятся верхние границы выплат, и никто не получит больше, чем требует.

$$CEA_i(d, M) = min\{d_i, \gamma\},$$
$$\gamma : \sum min\{d_i, \gamma\} = M.$$

1.1.4 Правило Пинилеса (Pin). Это правило определено на основе предыдущего, а именно на двойном применении ограниченных равных выплат. Но в данном случае используется не полное требование агента, а только половина заявленной претензии. Правило Пинилеса обычно используют если суммарное требование всех агентов как минимум больше чем в два раза ликвидационной стоимости M. Иначе каждый агент получает половину своей претензии, а потом правило (1.1.3) применяется к остатку и к уменьшенному напополам вектору требований

$$Pin(d, M) = CEA(\frac{d}{2}, M),$$

если выполняется $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i \geq M$,

$$Pin(d, M) = \frac{d}{2} + CEA(\frac{d}{2}, M - \frac{d}{2}),$$

в противном случае.

1.1.5 Ограниченное эгалитарное правило (CE). Это иной подход к идее равенства, который основан на проблеме справедливого дележа в ситуации одновершинных предпочтений. Это правило концентрирует внимание так же на половине требований агентов, но модернизирует идею равномерного правила, что гарантирует одинаковую упорядоченность выплат и требований.

$$CE_i(d, M) = min\{d_i, \gamma\},$$

если выполняется $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \geq M$,

$$CE_i(d, M) = max\{\frac{d_i}{2}, min\{d_i, \gamma\}\},$$

в противном случае.

γ всегда выбирается так, что : $\sum_{i=1}^{n} CE_i(d, M) = M$.

1.1.6 Правило ограниченных равных убытков (CEL). Здесь внимание обращается на убытки- суммы, которые агенты не получили. Определяется вектор, уравнивающий эти убытки и не оставляющий ни одного из агентов должником.

$$CEL_i(d, M) = max\{0, d_i - \gamma\},$$
$$\gamma : \sum_{i \in N} max\{0, d_i - \gamma\} = M.$$

1.1.7 Правило Талмуда (T). Наконец мы можем объяснить те числа, которые предлагает Талмуд при решении жизненных проблем. Как и в правиле Пинилеса рассматривается два случая, которые зависят от суммарного требования по отношению к распределяемой сумме денежных средств. Если это отношение равно соответственно 2:1, то каждый агент получает ровно половину заявленной претензии. Если же распределяемая сумма меньше половины суммарного требования, то применяют правило (1.1.3). Иначе, приходим к правилу(1.1.6).

С другой стороны мы можем объяснить правило Талмуда с помощью простого алгоритма. Положим, что распределяемая сумма колеблется в пределе от 0 до половины суммарного требования. На первом шаге она будет делиться среди всех агентов равномерно до тех пор, пока каждому не достанется величина, которая равна половине минимальной претензии. Затем доля агента с минимальным требованием прекращает расти, а остаток делится между всеми равномерно до того момента, пока все не получат сумму второй по минимальности заявки. Этот процесс будет продолжаться, пока распределяемая сумма не будет равна D/2. В этот момент каждый получит ровно половину своей заявки.

В случае, когда доступная сумма больше половины суммарного требования, будем уменьшать её и делить разность D – M. Сначала эта разность делится до того момента, пока каждый агент не получит убыток, равный половине наименьшей заявки. Аналогично процесс будет идти до тех пор, пока доступная сумма не будет равна D/2.

$$\text{Если } \tfrac{D}{2} > M, \text{ тогда } T_i(d, M) = min\{\frac{d_i}{2}, \gamma\},$$
$$\text{где } \gamma \text{ удовлетворяет } \textstyle\sum_{i=1}^{n} min\{\frac{d_i}{2}, \gamma\} = M.$$
$$\text{Если } \tfrac{D}{2} < M, \text{ тогда } T_i(d, M) = d_i - min\{\frac{d_i}{2}, \gamma\},$$
$$\text{где } \gamma \text{ удовлетворяет } \textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i - min\{\frac{d_i}{2}, \gamma\} = M.$$

1.1.8 Правило случайного поступления (RA). Следующее правило основано на идее (1.1.1). Представим, что распределение денежных средств происходит по очереди, пока не закончится доступная сумма. Ясно, что вектор выплат будет изменяться от порядка агентов, необходимо избавиться от этой зависимости. Для этого возьмем все порядки агентов и посчитаем среднее арифметическое среди них.

$$RA_i(d, M) = \frac{1}{n!} \textstyle\sum_{\pi \in \prod_N} min\{d_i, (M - \sum_{j \in \pi[i]} d_j)^+\},$$

где $\prod_N$ - класс биекций из N в N, а $\pi[i]$ включает в себя всех предшественников i в перестановке π.

Итак, мы определили каталог правил дележа для задачи банкротства предприятия. Но для того , чтобы наглядно представить работу этих правил, рассмотрим числовой пример.

Пример 1. Пусть в процедуре дележа участвуют три агента, вектор требований имеет вид (500,2000,3500), а доступная сумма равна 1500. Воспользуемся правилами (1.1.1)-(1.1.8) и получим следующие результаты:

d_i	TP	A	CEA	Pin	CE	CEL	T	RA
500	125	214	500	250	250	0	250	166
2000	500	643	500	625	625	0	625	667
3500	875	643	500	625	625	1500	625	667
6000	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500

Пример 2.Увеличим доступную сумму до 4500. Тогда правила распределения приведут к следующим выплатам:

d_i	TP	A	CEA	Pin	CE	CEL	T	RA
500	375	286	500	500	500	0	250	333
2000	1500	1357	2000	1625	2000	1500	1375	1333
3500	2625	2857	2000	2375	2000	3000	2875	2833
6000	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500	4500

1.2. Аксиомы правил дележа

Правила дележа обладают определенными свойствами, которые можно рассматривать как аксиомы справедливости. Положим, что рассматривается произвольная задача банкротства предприятия (d, M). Тогда вектор требований имеет вид $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, а вектор выплат агентам соответственно равен $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Определим каталог свойств для данной задачи.

1.2.1 Монотонность выплат. Данная аксиома подразумевает упорядоченность выплат в соответствии с требованиями.

$$\forall i, j \in N : d_i \leq d_j \Rightarrow x_i \leq x_j.$$

1.2.2 Монотонность убытков. Здесь предполагается упорядоченность убытков агентов в соответствии с требованиями.

$$\forall i, j \in N : d_i \leq d_j \Rightarrow d_i - x_i \leq d_j - x_j.$$

1.2.3 Ресурсная монотонность. Если распределяемая сумма возрастает, то выплаты каждому агенту как минимум не уменьшаются. Введем вспомогательную задачу банкротства (d, M') с вектором выплат x'.

$$M \leq M' \leq D \Rightarrow \forall i \in N : x_i \leq x'_i.$$

1.2.4 Выпуклость по распределяемой сумме. Эта и следующая аксиомы относятся к зависимости вектора выплат от изменения доступной суммы или вектора требований. В данном случае имеем, что если доступная сумма для двух агентов возрастает, то это приводит к более значительным улучшениям выплат для агента с бóльшим требованием. Рассмотрим произвольную задачу банкротства (d, M') такую, что:

$$M \leq M' \leq D, d_i \leq d_j \Rightarrow x'_i - x_i \leq x'_j - x_j.$$

1.2.5 Выпуклость по требованиям. Если требование k-ого агента убывает, то из двух агентов, неравных k, более весомые улучшения сопровождают выплаты агенту с бóльшим требованием. Пусть (d, M') - это вспомогательная задача, такая что:

$$\forall k \in N, \forall i, j \neq k : d'_k < d_k, d_i \leq d_j \Rightarrow$$

$$x'_i - x_i \leq x'_j - x_j.$$

1.2.6 Инвариантность относительно усечения требований. Усечение требований до величины распределяемой суммы не изменяет вектор выплат.

1.2.7 Свойство средней точки. Вектор выплат равен вектору половинных требований, если доступная сумма совпадает с половиной суммарного требования.

$$\forall (d, M) \in D_N : M = \frac{D}{2} \Rightarrow x = \frac{x}{2}.$$

Проверим удовлетворяют ли правила (1.1.1-1.1.8) данным аксиомам. Рассмотрим случай $n \geq 3$ для стандартной задачи банкротства.

Аксиомы	TP	A	CEA	Pin	CE	CEL	T	RA
Монотонность выплат	+	+	+	+	+	+	+	+
Монотонность убытков	+	+	+	+	+	+	+	+
Ресурсная монотонность	+	+	+	+	+	+	+	+
Выпуклость по сумме	+	+	+	+	–	+	+	+
Выпуклость по требованиям	+	+	+	+	–	+	+	+
Инвариантность	–	+	+	+	+	–	+	+
Свойство средней точки	+	+	–	+	+	–	+	+

Таким образом, мы получили подход к анализу справедливого дележа. Аксиоматический принцип сравнения играет большую роль в разработке новых правил распределения.

1.3. Семейства правил

Каталог правил дележа для проблемы банкротства постоянно анализируется и пополняется, поэтому Томпсон в своих работах [4] предложил ввести семейства , которые связывают уже перечисленные правила и содержат при этом бесконечное число членов.

1.3.1 Семейство ICI. Показывает эволюцию выплаты каждого агента как функцию распределяемой суммы. Данное семейство можно интерпретировать как обобщение правила Талмуда. Отличие состоит в том, что точки, в которых останавливается рост выплат, и точки, в которых он снова начинается, могут зависеть от вектора претензий.

Пусть D_N- семейство списков $G = \{E_k, F_k\}, k = \{1, \ldots, n-1\}$, вещественные функции, зависящие от вектора претензий $(d_1, \ldots, d_n)$ и удовлетворяющие ICI-условиям, которые гарантируют распределение всей доступной суммы между агентами, учитывая их требования.

Пусть $E_1(d) \leq \cdots \leq E_{n-1}(d) \leq F_{n-1}(d) \leq \cdots \leq F_1(d) \leq D$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dfrac{E_1(d)}{n} & + & \dfrac{D-F_1(d)}{n} & = & d_1 \\
d_1 & + & \dfrac{E_2(d)-E_1(d)}{n-1} & + & \dfrac{F_1(d)-F_2(d)}{n-1} & = & d_2 \\
\dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\
d_{k-1} & + & \dfrac{E_k(d)-E_{k-1}(d)}{n-k+1} & + & \dfrac{F_{k-1}(d)-F_k(d)}{n-k+1} & = & d_k \\
\dots & + & \dots & + & \dots & = & \dots \\
d_{n-1} & + & \dfrac{-E_{n-1}(d)}{1} & + & \dfrac{F_{n-1}(d)}{1} & = & d_n
\end{array}$$

Когда доступная сумма увеличивается от 0 до $E_1(d)$ используется равномерное распределение. В интервале от $E_1(d)$ до $E_2(d)$ выплата первому агенту остается постоянной, а для других агентов используется равномерное распределение. Это будет продолжаться, пока распределяемая сумма не достигнет $E_{n-1}(d)$. Следующая часть полностью распределяется n-му агенту до того момента, когда сумма не будет равна $F_{n-1}(d)$. Затем следует равномерное распределение среди претендентов n и n-1, пока сумма не достигнет $F_{n-2}(d)$. Процесс продолжается до тех пор, пока первый агент вновь не начнет участвовать в дележе.

К этому семейству относят правила: (1.1.3), (1.1.6), (1.1.7).

1.3.2 Семейство CIC. Является обратным к (1.3.1) и определяется как семейство, в котором порядок поступления агентов противоположен. Первый претендент, который принимает участие в дележе- агент с наибольшим требованием.

1.3.3 Параметрическое правило представления. Это семейство объединяет правила с параметром- непрерывной функцией $f : R_+ \times [a,b] \to R_+$,$[a,b] \subset (-\infty;+\infty)$, неубывающей по второму аргументу и удовлетворяющей следующим условиям:

$$\forall d' \in R_+ : f(d',a) = 0, f(d',b) = d.$$

Первый аргумент функции — это вектор требований, второй аргумент представляет собой уровень благосостояния. Доступная сумма делится так, чтобы каждый агент достиг своего уровня благосостояния. Значение функции f и есть величина, которую должен получить рассматриваемый агент, учитывая его претензию. Формально, мы получаем вектор x такой, что:

$$\exists \lambda \in [a, b] : x_i = f(d_i, \lambda), \forall i \in N.$$

К этому семейству относят многие правила: пропорциональное, Пинилеса, Талмуда, ограниченного уравнивания убытков, ограниченного уравнивания выплат и ограниченное эгалитарное правило.

Итак, каждое семейство объединяет большое количество правил, отображает их структуру, тем самым позволяет анализировать и оптимизировать выбор для рассматриваемой интерпретации задачи.

Глава 2. Теоретико-игровые модели банкротства

2.1 Основные понятия

Чтобы построить игровую модель банкротства предприятия, необходимо упомянуть некоторые сведения из теории кооперативных игр.

Под игрой мы будем понимать процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Пусть условия игры допускают совместные действия и перераспределения выигрыша. Главная задача исследования – это оптимальное распределение благ между членами объединения.

2.1.1 Пусть N $= \{1, \ldots, n\}$ – множество всех игроков. Любое непустое подмножество S $\subset$ N будем называть коалицией.

2.1.2 Под характеристической функцией игры n лиц будем понимать вещественную функцию v, определенную на коалициях S $\subset$ N, при этом для любых непересекающихся коалиций T$\subset$ N и S $\subset$ N выполняется неравенство

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S), T \cap S = \varnothing$$

Это неравенство называется свойством супераддитивности. Оно необходимо для содержательной интерпретации числа $v(T)$ как гарантированного выигрыша коалиции T в случае, когда она действует независимо от других игроков. Это означает, что коалиция $T \cup S$ имеет не меньше возможностей, чем две непересекающиеся коалиции T и S, действующие в одиночку.

2.1.3 Кооперативной игрой называется пара (N, v), где v - это характеристическая функция, которая каждой коалиции S $\subset$ N ставит в соответствие максимально возможный выигрыш.

2.1.4 Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будем называть дележом, если он удовлетворяет условиям:

$$\alpha_i \geq v(\{i\}), i \in N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$$

Первое условие - условие индивидуальной рациональности, которое гарантирует, что каждый игрок, участвуя в коалиции, получает по меньшей мере столько, сколько он мог бы получить действуя независимо.

Второе условие– условие групповой рациональности, которое означает, что делится суммарный возможный выигрыш полностью. Если сумма элементов дележа меньше этой величины, то объединение в коалицию бессмысленно. Если больше- значит нарушены условия.

2.1.5 Дележ α доминирует дележ β по коалиции S ($\alpha \succ \beta$) если

$$\alpha_i > \beta_i, \forall i \in S,$$

$$\alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(S).$$

При решении кооперативных игр используются различные принципы оптимальности такие как С-ядро, NM-решение, вектор Шепли.

2.1.6 Множество недоминируемых дележей кооперативной игры называется ее С-ядром.

2.1.7 Подмножество дележей L кооперативной игры (N, v) называется НМ-решением, если:

1) из $\alpha \succ \beta$ следует,что либо $\alpha \notin L$,либо $\beta \notin L$;

2)для любого дележа $\alpha \notin L$ существует дележ $\beta \notin L : \beta \succeq \alpha$

Рассмотрим далее принцип оптимальности, существование и единственность которого гарантируются для любой кооперативной игры. Этот принцип вводится аксиоматически.

2.1.8 Аксиомы Шепли. Поставим в соответствие каждой кооперативной игре в виде характеристической функции вектор $\phi(v) = (\phi_1[v], \ldots, \phi_n[v])$, компоненты которого являются выигрышами игроков.

Аксиома 1.Если S- любая коалиция игры (N, v), то

$$\sum_{i \in S} \phi_i[v] = v(S).$$

Аксиома 2. Для любой подстановки π и $\forall i \in N$ справедливо

$$\phi_{\pi(i)}[\pi v] = \phi_i[v].$$

Аксиома 3. Если (N, u) и (N, v) – две произвольные кооперативные игры, то

$$\phi_i[v + u] = \phi_i[v] + \phi_i[u].$$

2.1.9 Пусть ϕ- это функция, которая ставит в соответствие согласно аксиомам (1)-(3) любой игре (N, v) вектор $\phi(v)$. Тогда этот вектор будем называть вектором Шепли игры (N, v).

Теорема. Существует единственная функция ϕ определенная для всех игр (N, v) и удовлетворяющая аксиомам Шепли.

2.1.10 Динамическая устойчивость принципов оптимальности. Динамически устойчивым кооперативным решением будем принимать такой дележ, который остается оптимальным в любой подыгре с выбранным принципом оптимальности.

2.1 Простая модель банкротства

Кооперативные игры описывают ситуации, при которых участники, объединяясь и действуя совместно, могут получить дополнительную прибыль. Поэтому с помощью них часто моделируют различные экономические задачи. При построении модели возникает ряд проблем:

• все коалиции пытаются увеличить свою долю распределяемой полезности, поэтому мы имеем дело с многоцелевой задачей.

• количество непустых коалиций равно 2^{n-1}, поэтому в большинстве случаев вычисления бывают трудоемкими.

• существует несколько принципов оптимальности, т. е. не установлено единственной концепции решения игр.

Исход кооперативной игры - это результат соглашения всех участников, поэтому при нахождении решения сравнивают дележи, а не ситуации.

Теперь мы можем преобразовать рассматриваемую задачу банкротства в игру. В терминах теории кооперативный игр наша проблема будет иметь следующий вид:

2.2.1 Игрой банкротства будем называть пару (N, v), где $N = 1, \dots, n$ – множество всех агентов (кредиторов, истцов, заявителей), а v- это характеристическая функция, которая каждой коалиции $S \subset N$ ставит в соответствие некоторое вещественное число.

Характеристическую функцию для игры банкротства построим на основании раннее определённых правил распределения. Каждой коалиции поставим в соответствие уступки агентов, не включенных в рассматриваемую коалицию, т.е. разность между распределяемой суммой М и суммарным требованием $\sum d_i$ где $i \in N \setminus S$. В случае если эта разность будет иметь отрицательное значение поставим в соответствие коалиции 0.

2.2.2 Тогда характеристическая функция имеет вид:

$$v^{(d,M)}(S) = max\{M - \sum d_i, 0\},$$

$$S \subset N, i \in N \setminus S.$$

Докажем, что данная функция обладает свойством супераддитивности.

Доказательство. Рассмотрим игру банкротства $\Gamma = (N, v)$, в которой множество игроков $N = \{1, \dots, n\}$, а характеристическая функция задается по формуле (2.2.2). Вектор претензий имеет вид $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, суммарное требование равно D, а доступная сумма – М. Пусть $T \subset N$ и $S \subset N$ две непересекающиеся произвольные коалиции. Далее воспользуемся базовыми свойствами теории множеств и проведем соответствующие преобразования:

$v^{(d,M)}(N) = max\{M - \sum_{i\in N\setminus N} d_i, 0\} = M$

$v^{(d,M)}(T)+v^{(d,M)}(S) = max\{M-\sum_{i\in N\setminus T} d_i, 0\}+max\{M-\sum_{i\in N\setminus S} d_i, 0\}$ $= max\{M-\sum_{i\in S} d_i-\sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i, 0\}+max\{M-\sum_{i\in T} d_i-\sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i, 0\}$ $\leq M - \sum_{i\in S} d_i - \sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i + M - \sum_{i\in T} d_i - \sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i \leq 2M - D - \sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i < M - \sum_{i\in N\setminus(T\cup S)} d_i = v^{(d,M)}(T\cup S)$.

Итак, получили $v^{(d,M)}(T) + v^{(d,M)}(S) < v^{(d,M)}(T\cup S)$.

Свойство доказано.

Приведём пример построения характеристической функции для задачи Талмуда «Проблема раздела имущества», в которой вектор требований имеет вид (100,200,300), а доступную сумму мы будем изменять.

$v^{(d,M)}$	$v^{(d,200)}$	$v^{(d,300)}$	$v^{(d,400)}$
$\{0\}$	0	0	0
$\{1\}$	0	0	0
$\{2\}$	0	0	0
$\{3\}$	0	0	0
$\{1,2\}$	0	0	100
$\{1,3\}$	0	100	200
$\{2,3\}$	100	200	300
$\{1,2,3\}$	200	300	400

После построения характеристической функции необходимо определить справедливое решение для игры,т.е выбрать концепцию решения подходящую для рассматриваемой задачи. Так, при выборе С-ядра важно знать существует ли оно для моделируемой ситуации. Также кооперативная игра может иметь бесконечное число NM-решений, и, соответственно, бесконечное число дележей, что приводит к ограничению применимости этого принципа оптимальности к реальным задачам. Поэтому в качестве справедливого решения можно рассмотреть Вектор Шепли. Он интерпретируется, как распределение, в котором выплата каждому агенту равна его среднему вкладу в благосостояние большой коалиции. Практически вектор

Шепли можно вычислить следующим образом:

$$\phi(v)_i = \sum_{S:S\ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus i)),$$

где n- кол-во игроков, k-кол-во участников коалиции.

Таким образом, в зависимости от исходных данных задачи мы можем выбрать подходящий принцип оптимальности. Поэтому кооперативная модель проблемы банкротства имеет преимущество перед правилами распределения. Для того, чтобы определить справедливое решение, достаточно построить игровую модель,проанализировать возможные решения и выбрать одно из них.

2.3 Многоуровневые модели банкротства

Теперь рассмотрим задачу банкротства для больших предприятий. При их ликвидации можно столкнуться с проблемами, которые приводят к тому, что доступная сумма поступает на счет должника в различные моменты времени. К этому может привести, например, наличие у юридических лиц дочерних подразделений, дебиторских задолженностей, ограничений со стороны банков и другое. Но тогда стоит вопрос каким образом производить распределение денежных средств среди агентов на каждом промежутке времени. В решении данной проблемы может помочь кооперативная теория динамических игр.

Рассмотрим формальную постановку задачи. Пусть мы заранее знаем процедуру поступления денежных средств на счет предпрития-банкрота. Тогда вектор доступной суммы будет иметь вид $M(t) = (M(t_1), \ldots, M(t_m))$, при этом $\sum_{j=1}^{m} M(t_j)) = M$. Необходимо сделать наилучшее распределение поступающих средств в каждый момент поступления среди n агентов, вектор претензий которых равен $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Обозначим вектор выплат в момент времени j как $x^j = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)$.

Предложим несколько подходов к решению данной задачи.

2.3.1 Пропорциональная модель. Построим теоретико-игровую модель, основанную на простой модели (2.2). Рассмотрим семейство игр $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m\}$. Предположим, что в первой игре распределяемая сумма равна сумме поступающих средств на всех промежутках времени. Построим характеристическую функцию и найдём решение. В качестве принципа оптимальности выберем вектор Шепли. Во второй и последующих играх мы будем уменьшать доступную сумму и аналогичным образом проводить вычисления. А в качестве выплат агентам на каждом промежутке времени будут служить разности векторов Шепли рассматриваемого и последующего промежутков.

Алгоритм решения модели:

1) Рассмотрим игру $\Gamma_1 = (N, v^{(d,M_1)})$, где $M_1 = \sum_{j=1}^{m} M(t_j)$.Строим характеристическую функцию $v^{(d,M_1)}(S) = max\{M_1 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, 0\}$, и вычисляем вектор Шепли $Sh^1 = (Sh_1^1, Sh_2^1, \ldots, Sh_n^1)$.

2) Рассмотрим игру $\Gamma_2 = (N, v^{(d,M_2)})$, где $M_2 = \sum_{j=2}^{m} M(t_j)$.Строим характеристическую функцию $v^{(d,M_2)}(S) = max\{M_2 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, 0\}$, и вычисляем вектор Шепли $Sh^2 = (Sh_1^2, Sh_2^2, \ldots, Sh_n^2)$.

$$\ldots$$

k) Рассмотрим игру $\Gamma_k = (N, v^{(d,M_k)})$, где $M_k = \sum_{j=k}^{m} M(t_j)$.Строим характеристическую функцию $v^{(d,M_k)}(S) = max\{M_k - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, 0\}$, и вычисляем вектор Шепли $Sh^k = (Sh_1^k, Sh_2^k, \ldots, Sh_n^k)$.

$$\ldots$$

m) Рассмотрим игру $\Gamma_m = (N, v^{(d,M_m)})$, где $M_m = M(t_m)$.Строим характеристическую функцию $v^{(d,M_m)}(S) = max\{M_m - \sum_{i \in N \setminus S} d_i, 0\}$, и вычисляем вектор Шепли $Sh^m = (Sh_1^m, Sh_2^m, \ldots, Sh_n^m)$.

Тогда выплаты агентам в моменты поступления денежных средств будут следующими:

$$\text{Выплаты в момент времени } t_1 : x^1 = Sh^1 - Sh^2;$$

$$\text{Выплаты в момент времени } t_2 : x^2 = Sh^2 - Sh^3;$$

$$\dots$$

$$\text{Выплаты в момент времени } t_m : x^m = Sh^m.$$

Отметим, что данная модель относительно проста в вычислениях и гарантирует существование и единственность решения. Кроме того, игроки за все периоды выплат получают сумму, равную дележу при единовременном распределении денежных средств, т.е сумму, равную среднему вкладу игрока в благосостояние коалиции.

2.3.2 Модель с усеченными претензиями. Если в исходной задаче доступная сумма на любом промежутке мала в сравнении с компонентами вектора претензий, то значения характеристической функции на многих коалициях будут обнуляться. Поэтому необходимо усекать вектор претензий в соответствии с поступающими денежными средствами в моменты поступления. Построим игровую модель, учитывая эту проблему. Будем рассматривать семейство игр $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}$, каждая из которых является кооперативной игрой (2.2). Все игры будут строиться аналогичным образом. На каждом шаге мы будем выплачивать сумму денег агентам, а при построении следующей игры мы будем учитывать эти выплаты. Кроме того, чтобы максимально приблизить вектор претензий к распределяемой сумме на промежутке, домножим его на коэффициент, равный отношению доступной суммы в момент поступления к сумме всех поступающих средств. Рассмотрим формальный алгоритм:

1) Рассмотрим игру

$\Gamma_1 = (N, v^{(d_1, M_1)})$, где $M_1 = M(t_1), d^1 = d\dfrac{M_1}{M}$.

Построим характеристическую функцию

$$v^{(d^1, M_1)}(S) = max\{M_1 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^1, 0\},$$

и вычислим вектор Шепли $Sh^1 = (Sh_1^1, Sh_2^1, \dots, Sh_n^1)$. Тогда выплаты в момент поступления t_1 будут равны:

$$x^1 = Sh^1 = (Sh_1^1, Sh_2^1, \dots, Sh_n^1).$$

2) Рассмотрим игру
$\Gamma_2 = (N, v^{(d_2, M_2)})$, где $M_2 = M(t_2), d^2 = (d - x^1)\dfrac{M_2}{M}$.
Построим характеристическую функцию

$$v^{(d^2, M_2)}(S) = max\{M_2 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^2, 0\},$$

и вычислим вектор Шепли $Sh^2 = (Sh_1^2, Sh_2^2, \ldots, Sh_n^2)$.
Тогда выплаты в момент поступления t_2 будут равны:

$$x^2 = Sh^2 = (Sh_1^2, Sh_2^2, \ldots, Sh_n^2).$$

$$\ldots$$

k) Рассмотрим игру
$\Gamma_k = (N, v^{(d_k, M_k)})$, где $M_k = M(t_k), d^k = (d - \sum_{j=1}^{k-1} x^j)\dfrac{M_k}{M}$.
Построим характеристическую функцию

$$v^{(d^k, M_k)}(S) = max\{M_k - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^k, 0\},$$

и вычислим вектор Шепли $Sh^k = (Sh_1^k, Sh_2^k, \ldots, Sh_n^k)$.
Тогда выплаты в момент поступления t_k будут равны:

$$x^k = Sh^k = (Sh_1^k, Sh_2^k, \ldots, Sh_n^k).$$

$$\ldots$$

m) Рассмотрим игру
$\Gamma_m = (N, v^{(d_m, M_m)})$, где $M_m = M(t_m), d^m = (d - \sum_{j=1}^{m-1} x^j)\dfrac{M_m}{M}$.
Построим характеристическую функцию

$$v^{(d^m, M_m)}(S) = max\{M_m - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^m, 0\},$$

и вычислим вектор Шепли $Sh^m = (Sh_1^m, Sh_2^m, \ldots, Sh_n^m)$.

Тогда выплаты в момент поступления t_m будут равны:

$$x^m = Sh^m = (Sh_1^m, Sh_2^m, \dots, Sh_n^m).$$

Рассматриваемая модель удобна в тех случаях, когда количество промежутков времени, на которых производятся выплаты агентам, возрастает, а доступная сумма на этих промежутках в разы уменьшается. Поэтому мы усекаем вектор претензий пропорционально поступающим средствам в каждый момент времени. В итоге получается справедливый дележ. Эта модель, как и предыдущая, гарантирует существование и единственность решения, но для некоторых данных вычисления будут достаточно трудоемкими.

2.3.3 Состоятельная кооперативная модель. Отсутствие динамической устойчивости приводит к вероятности отказа каких-либо агентов от ранее принятого плана действий. Поэтому важное значение имеет построение состоятельных во времени моделей для проблемы банкротства. Рассмотрим семейство игр $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}$. Принцип построения модели основан на идее (2.3.1). Отличие заключается в том, что на каждом шаге мы будем выплачивать какую-то сумму денежных средств всем участникам процедуры банкротства, и при построении следующего шага будем учитывать данные выплаты. А для того, чтобы придерживаться одного принципа оптимальности во всех подыграх, мы положим, что разность векторов Шепли на рассматриваемом и последующим шагах и будет равна выплатам на данном времени поступления. Рассмотрим алгоритм решения модели более подробно:

1) Рассмотрим игру:

$\Gamma_1 = (N, v^{(d^1, M_1)})$, где $M_1 = \sum_{j=1}^{m} M(t_j), d_1 = d$.Строим характеристическую функцию $v^{(d^1, M_1)}(S) = max\{M_1 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^1, 0\}$, и вычисляем вектор Шепли $Sh^1 = (Sh_1^1, Sh_2^1, \dots, Sh_n^1)$.

Положим, что мы сделали на этом шаге выплаты $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$.

2) Рассмотрим игру:

$\Gamma_2 = (N, v^{(d^2, M_2)})$, где $M_2 = \sum_{j=2}^{m} M(t_j), d_2 = d_1 - x^1$.

Строим характеристическую функцию

$$v^{(d^2,M_2)}(S) = max\{M_2 - \sum_{i\in N\setminus S} d_i^2, 0\}.$$

Вычисляем вектор Шепли $Sh^2(x^1) = (Sh_1^2(x^1), Sh_2^1(x^1), \ldots, Sh_n^1(x^1))$, который зависит от выплат на первом шаге.После этого мы выставляем следующее требование:

$$Sh^1 - Sh^2(x^1) = x^1$$

Получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными, решаем её и находим вектор x^1, который служит выплатами агентам в момент поступления денежных средств t_1.

$$\ldots$$

m-1) Рассмотрим игру:$\Gamma_{m-1} = (N, v^{(d^{m-1},M_{m-1})})$
где $M_{m-1} = M(t_{m-1}) + M(t_m), d_{m-1} = d^{m-2} - x^{m-2}$.
Строим характеристическую функцию

$$v^{(d^{m-1},M_{m-1})}(S) = max\{M_{m-1} - \sum_{i\in N\setminus S} d_i^{m-1}, 0\}.$$

Вычисляем вектор Шепли

$$Sh^{m-1}(x^{m-2}) = (Sh_1^{m-1}(x^{m-2}), Sh_2^{m-1}(x^{m-2}), \ldots, Sh_n^{m-1}(x^{m-2})),$$

который зависит от выплат на предыдущем шаге.После этого мы выставляем следующее требование:

$$Sh^{m-2} - Sh^{m-1}(x^{m-2}) = x^{m-2}$$

Получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными, решаем её и находим вектор x^{m-2}, который служит выплатами агентам в момент поступления денежных средств t_{m-2}.

m) Рассмотрим игру:

$\Gamma_m = (N, v^{(d^m,M_m)})$, где $M_m = M(t_m), d_m = d^{m-1} - x^{m-1}$.

Строим характеристическую функцию

$$v^{(d^m, M_m)}(S) = max\{M_m - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^m, 0\}.$$

Вычисляем вектор Шепли

$$Sh^m(x^{m-1}) = (Sh_1^m(x^{m-1}), Sh_2^m(x^{m-1}), \ldots, Sh_n^m(x^{m-1})),$$

который зависит от выплат на m-1 шаге.После этого мы выставляем следующее требование:

$$Sh^{m-1} - Sh^m(x^{m-1}) = x^{m-1}.$$

Получаем систему n линейных уравнений с n неизвестными, решаем её и находим вектор x^{m-1}, который служит выплатами агентам в момент поступления денежных средств t_{m-1}.

Далее подставляем компоненты вектора x^{m-1} в $Sh^m(x^{m-1})$ и получаем выплаты на рассматриваемом шаге m.

$$x^m = Sh^m.$$

Данная модель достаточна сложна в реализации, но, при этом, она гарантирует оптимальное распределение доступной суммы на каждом промежутке времени.

Глава 3. Практическая реализация исследований

3.1 Кооперативные многоуровневые модели банкротства на примере одной фирмы

В параграфе (2.3) мы предложили три подхода для решения многошаговой задачи несостоятельности предприятия. Но для того, чтобы убедиться в возможности практического применения данных моделей, рассмотрим реальную процедуру банкротства ООО "Девелопмент". В 2015 году Арбитражный суд принял заявление от указанной организации и возбудил дело о признании ее банкротом.

После ликвидационных процедур основные средства должника составляли 26 801 000 рублей, а не исполненные обязательства: перед акционерным обществом «Сосновоборэлектромонтаж»-37 530 244 рублей; сумма исков людей, неудовлетворенных услугами -13 787 000рублей; банковская задолженность- 18 655 537 рублей. Суммарное требование намного превышала ликвидационную стоимость. Кроме того, у фирмы была дебиторская задолженность-сумма долгов фирмы, со стороны других предприятий, фирм, компаний, а также граждан, являющихся их должниками, дебиторами, которая составляла 11 240 000 рублей. К сожалению, нет точной информации о распределении денежных средств между истцами,кредиторами после суда. Но мы можем предложить справедливый дележ на основе многошаговых кооперативных моделей.

Рассмотрим формальную постановку проблемы. Имеем, задачу банкротства (d, M), где вектор требований имеет вид (13 787 000, 18 655 537, 37 530244). Также нам заранее известна процедура поступления денежных средств на счет должника M(t)=(26 801 000, 11 240 000). Необходимо осуществить справедливое распределение среди агентов (истцов, кредиторов) в два момента поступления. Воспользуемся подходами (2.3) для решения этой задачи.

3.1.1 Пропорциональная модель. Данная модель будет состоять из двух шагов, так как рассматриваются два момента поступления денежных средств.

1)Рассмотрим игру $\Gamma_1 = (N, v^{(d,M_1)})$, где $M_1 = M(t_1) + M(t_2) = 38041000$.

Вектор претензий постоянен и имеет вид

$$d = (d_1, d_2, d_3) = (13787000, 18655537, 37530244).$$

Построим характеристическую функцию:

$v^{(d,M)}$	$v^{(d,M_1)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	5 598 463
$\{1,2\}$	510 756
$\{1,3\}$	19 385 463
$\{2,3\}$	24 254 000
$\{1,2,3\}$	38 041 000

Вычислим, теперь, вектор Шепли покоординатно:

$$Sh_1^1 = \frac{1}{3}(-24254000) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}19385463 + \frac{1}{3}38041000 =$$

$= 6\ 978\ 626.$

$$Sh_2^1 = \frac{1}{3}(-19385463) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000 =$$

$=9\ 412\ 894\ \frac{1}{2}.$

$$Sh_3^1 = \frac{1}{3}(5598463 - 510756) + \frac{1}{6}19385463 + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000 =$$

$= 21\ 649\ 479\frac{1}{2}$

Получаем вектор Шепли $Sh^1 = (6978626, 9412894.5, 21649479.5)$.

2) На втором шаге мы будем рассматривать игру $\Gamma_2 = (N, v^{(d,M_2)})$, где $M_2 = M(t_2) = 11240000$.

Построим характеристическую функцию и вычислим соответствующий вектор Шепли.

$v^{(d,M)}$	$v^{(d,M_2)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{1,2\}$	0
$\{1,3\}$	0
$\{2,3\}$	0
$\{1,2,3\}$	11 240 000

Так как в этом случае доступная сумма меньше, чем минимальное требование агентов, то вектор Шепли считается тривиальным образом.

$$Sh_1^2 = Sh_2^2 = Sh_3^2 = \frac{1}{3}11240000 = 3746666\frac{2}{3}$$

Теперь мы можем расписать выплаты среди агентов в каждый момент поступления.

Моменты поступления	Вектор выплат
t_1	$(\frac{9695878}{3}; \frac{33997367}{6}; \frac{107416877}{6})$
t_2	$(\frac{11240000}{3}; \frac{11240000}{3}; \frac{11240000}{3})$
Сумма выплат	$(6978626, 9412894\frac{1}{2}, 21649479\frac{1}{2})$

3.1.2 Модель с усеченными претензиями. Рассмотрим иной подход к многошаговой задаче.

1) Рассмотрим игру

$\Gamma_1 = (N, v^{(d_1,M_1)})$, где $M_1 = M(t_1) = 26801000$,

$d^1 = d\dfrac{M_1}{M} = (9713345, 13143372, 26441157)$.

Построим характеристическую функцию и вычислим покоординатно вектор Шепли.

$v^{(d,M)}$	$v^{(d^1,M_1)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	3944283
$\{1,2\}$	359843
$\{1,3\}$	13657628
$\{2,3\}$	17087655
$\{1,2,3\}$	28801000

$$Sh_1^1 = \frac{1}{3}(-17087655) + \frac{1}{6}(359843 - 3944283) + \frac{1}{6}13657628 + \frac{1}{3}26801000 =$$

$$= 4916646\frac{1}{3}$$

$$Sh_2^1 = \frac{1}{3}(-13657628) + \frac{1}{6}(359843 - 3944283) + \frac{1}{6}17087655 + \frac{1}{3}26801000 =$$

$$= 6631659\frac{5}{6}$$

$$Sh_3^1 = \frac{1}{3}(3944283 - 359843) + \frac{1}{6}13657628 + \frac{1}{6}17087655 + \frac{1}{3}26801000 =$$

$$= 15252693\frac{5}{6}$$

$$x^1 = Sh^1 = (4916646\frac{1}{3}, 6631659\frac{5}{6}, 15252693\frac{5}{6})$$

2) Рассмотрим игру

$\Gamma_2 = (N, v^{(d_2,M_2)})$, где $M_2 = M(t_2) = 11240000$,

$d^2 = (d - x^1)\frac{M_2}{M} = (2620929, 3552703, 6582363)$.

Построим характеристическую функцию:

$v^{(d,M)}$	$v^{(d^2,M_2)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	1104934
$\{2\}$	2036708
$\{3\}$	5066368
$\{1,2\}$	4657637
$\{1,3\}$	7687297
$\{2,3\}$	8619071
$\{1,2,3\}$	11240000

Вычислим вектор Шепли

$Sh_1^2 = \frac{1}{3}(1104934 - 8619071) + \frac{1}{6}(4657637 - 5066368) + \frac{1}{6}(7687297 - 2036708) + \frac{1}{3}11240000 = 2115597\frac{1}{3}$

$Sh_2^2 = \frac{1}{3}(2036708 - 7687297) + \frac{1}{6}(4657637 - 5066368) + \frac{1}{6}(8619071 - 1104934) + \frac{1}{3}11240000 = 3047371\frac{1}{3}$

$Sh_3^2 = \frac{1}{3}(5066368 - 4657637) + \frac{1}{6}(7687297 - 2036708) + \frac{1}{6}(8619071 - 1104934) + \frac{1}{3}11240000 = 6077031\frac{1}{3}$

$$x^2 = Sh^2 = (2115597\frac{1}{3}, 3047371\frac{1}{3}, 6077031\frac{1}{3})$$

Тогда решение многошаговой задачи имеет вид:

Моменты поступления	Вектор выплат
t_1	$(4916646\frac{1}{3}, 6631659\frac{5}{6}, 15252693\frac{5}{6})$
t_2	$(2115597\frac{1}{3}, 3047371\frac{1}{3}, 6077031\frac{1}{3})$
Сумма выплат	$(7032243\frac{2}{3}, 9679031\frac{1}{6}, 21329725\frac{1}{6})$

3.1.3 Состоятельная модель.

1) Рассмотрим игру $\Gamma_1 = (N, v^{(d^1,M_1)})$, где $M_1 = M(t_1) + M(t_2) = 38041000$.

Вектор претензий имеет вид

$$d^1 = d = (13787000, 18655537, 37530244).$$

Построим характеристическую функцию:

$v^{(d,M)}$	$v^{(d^1,M_1)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	5 598 463
$\{1,2\}$	510 756
$\{1,3\}$	19 385 463
$\{2,3\}$	24 254 000
$\{1,2,3\}$	38 041 000

Вычислим, теперь, вектор Шепли покоординатно:

$Sh_1^1 = \frac{1}{3}(-24254000) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}19385463 + \frac{1}{3}38041000 = 6978626.$

$Sh_2^1 = \frac{1}{3}(-19385463) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000 = 9412894\frac{1}{2}.$

$Sh_3^1 = \frac{1}{3}(5598463 - 510756) + \frac{1}{6}19385463 + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000 = 21649479\frac{1}{2}.$

Получаем вектор Шепли $Sh^1 = (6978626, 9412894\frac{1}{2}, 21649479\frac{1}{2})$.

Здесь предположим, что мы сделали выплату $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$.

2) Рассмотрим игру:

$\Gamma_2 = (N, v^{(d^2,M_2)})$, где $M_2 = M(t_2) = 11240000, d_2 = d - x^1$.

$$d^2 = (13787000 - x_1^1, 18655537 - x_2^1, 37530244 - x_3^1).$$

Строим характеристическую функцию и вычисляем вектор Шепли:

$v^{(d,M)}$	$v^{(d,M_2)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{1,2\}$	$\{-26290244+x_3^1,0\}$
$\{1,3\}$	$\{-7415537+x_2^1,0\}$
$\{2,3\}$	$-2547000+x_1^1$
$\{1,2,3\}$	11 240 000

$$Sh_1^2(x^1)=\frac{-2x_1^1+x_2^1+x_3^1}{6}-\frac{2043927}{2}.$$

$$Sh_2^2(x^1)=\frac{-2x_2^1+x_1^1+x_3^1}{6}+1412305.$$

$$Sh_3^2(x^1)=\frac{-2x_3^1+x_2^1+x_1^1}{6}+\frac{21699317}{2}.$$

Выставим требование $Sh^1-Sh^2(x^1)=x^1$.

$$\begin{cases}6978626-\dfrac{-2x_1^1+x_2^1+x_3^1}{6}+\dfrac{2043927}{2}=x_1^1,\\ 9412894\dfrac{1}{2}-\dfrac{-2x_2^1+x_1^1+x_3^1}{6}-1412305=x_2^1,\\ 21649479\dfrac{1}{2}-\dfrac{-2x_3^1+x_2^1+x_1^1}{6}-\dfrac{21699317}{2}=x_3^1.\end{cases}$$

Решим эту систему , получаем примерное решение:

$$x^1=(7067500,7067500,12666000)$$

Этот вектор служит дележом среди агентов в первый момент поступления.

Подставим полученные значения в характеристическую функцию на 2 шаге:

$v^{(d,M)}$	$v^{(d,M_2)}$
$\{0\}$	0
$\{1\}$	0
$\{2\}$	0
$\{3\}$	0
$\{1,2\}$	0
$\{1,3\}$	0
$\{2,3\}$	4520500
$\{1,2,3\}$	11 240 000

Тогда вектор Шепли $Sh^2(x^1)$:

$$Sh_1^2 = \frac{1}{3}(-4520500) + \frac{1}{3}11240000 = \frac{6719500}{3}.$$

$$Sh_2^2 = \frac{1}{6}4520500 + \frac{1}{3}11240000 = \frac{13500250}{3}.$$
$$Sh_3^2 = \frac{1}{6}4520500 + \frac{1}{3}11240000 = \frac{13500250}{3}.$$

Вектор выплат в момент поступления t_2 равен:

$$x^2 = Sh^2 = (2239833\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3})$$

Выпишем решение многошаговой задачи:

Моменты поступления	Вектор выплат
t_1	(7067500,7067500,12666000)
t_2	$(2239833\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3})$
Сумма выплат	$(9307333\frac{1}{3}, 11567583\frac{1}{3}, 17166083\frac{1}{3})$

Заключение

На основании проведённого исследования можно сделать следующие выводы:

Проблема распределения денежных средств при банкротстве предприятия является актуальной и активно обсуждается в литературе. В работе сделан анализ работающих правил дележа фиксированной суммы среди выдвинувших свои требования истцов. Помимо их перечисления рассмотрен аксиоматический метод сравнения.

С другой стороны, в работе продемонстрирован подход решения задачи банкротства, который определен средствами теории кооперативных игр. Теоретико - игровые модели позволяют истцам, действуя совместно, получить дополнительную прибыль. Поэтому кооперативные игры- это выгодный инструмент при моделировании рассматриваемой задачи.

Кроме того, были разработаны многошаговые теоретико-игровые модели, учитывающие сложность поступления денежных средств на счет должника. Данные модели основаны на принципе оптимальности – векторе Шепли, который гарантирует существование и единственность решения. На числовом примере показано, что такие модели помогают справедливо распределить доступную сумму на каждом промежутке времени.

В дальнейшем была бы интересна разработка теоретико-игровых многошаговых моделей на основании других принципов оптимальности. Практическое применение такого рода моделей поможет избежать ряд юридических конфликтов, а ,значит, облегчит процедуру банкротства.

Список литературы

[1] Aumann R., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. // Journal of Economic Theory, 1985. Vol. 36, No 1. P. 195 – 213.

[2] Herrero C., Villar A.The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. // Mathematical Social Sciences, 2001. Vol. 39, No 3. P. 307 – 328.

[3] Guiasu S. Three ancient problems solved by using the game theory logic based on the Shapley value.//Knowledge, Rationlity and Action, 2011. Vol. 181, No 1. P. 65 – 79.

[4] Thomson W. Axiomatic and Game-theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems.// Mathematical Social Sciences, 2003. Vol. 45, No 3. P. 249 – 280.

[5] Бердникова Т. Б. Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия. М.: Инфра-М, 2007. 215 с.

[6] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В.Теория игр. М.: БХВ-Петербург, 2014. 423 с.

[7] Yeung D. W.K., Petrosjan L. A. Subgame Consistent Economic Optimization. New York: Birkhauser, 2012. 395 P.

[8] Yeung D. W.K., Petrosjan L. A. Cooperative Stochastic Differential Games. New-York, Heidelberg, London: Springer, 2006. 242 P.