

Санкт-Петербургский государственный университет

**В. И. Богатко, Е. А. Потехина**

**ЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ  
В ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКЕ**

*Учебное пособие*

**Санкт-Петербург**

**2024г.**

Рекомендовано Учебно-методической комиссией  
по УГСН 01.00.00 Математика и механика

**Рецензенты:** кандидат физ.-мат. наук, доцент Ю.Н. Ворошилова  
(Санкт-Петербургский государственный университет),  
доктор физ.-мат. наук, профессор И.А. Халидов  
(СПб Политехнический университет Петра Великого)

**Богатко В.И., Потехина Е.А.**

Локальные методы в гиперзвуковой аэродинамике: Учеб. пособие / В.И. Богатко, Е.А. Потехина — СПб.: СПбГУ. 2024. 60 с. Библ. 14 назв.

В настоящем пособии излагаются локальные математические методы решения задач гиперзвуковой аэродинамики. Подробно рассматриваются: формула Ньютона и ее модификации, метод касательных конусов и клиньев, формула Ньютона-Буземана, определение параметров течения в точке торможения и метод постоянной плотности, определение аэродинамических коэффициентов и тел оптимальной формы.

Представленное пособие может быть использовано при подготовке магистров по направлению «Механика и математическое моделирование», а также специалистов по направлениям «Механика» и «Фундаментальная математика и механика». Пособие предназначено для студентов старших курсов специалитета и магистратуры механических отделений университетов и технических вузов с соответствующей математической подготовкой.

© В.И. Богатко, Е.А.Потехина  
© Санкт-Петербургский  
государственный университет

## Введение

**Гиперзвуковая аэродинамика** изучает обтекание тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Эта область науки стала особенно интенсивно развиваться в связи с задачами, связанными с высокоскоростными полетами летательных аппаратов в воздушной или иной атмосфере [см., например, 1-5]. Рассматривается обтекание летательных аппаратов, движущихся с очень большими сверхзвуковыми скоростями, то есть со скоростями, значительно превосходящими скорость звука.

Интерес к изучению таких течений связан прежде всего с развитием авиационной, ракетной и космической техники. При этом наряду с термином «сверхзвуковые течения газа» появляется и термин «гиперзвуковые течения», так как последние обладают особыми свойствами.

С развитием вычислительной математики и вычислительной техники стали доступными для решения ранее трудноразрешимые задачи газовой динамики. Однако, численные исследования и поныне уступают аналитическим в части создания образов и понятий, лежащих в основе понимания сути газодинамических или иных процессов.

В наше время основная газодинамическая информация черпается или из экспериментальных исследований, или, все более, из точных численных расчетов. Практика показывает, однако, что в том и другом случае необходимы надежные представления о качественном характере и свойствах течений. Представление же об «абсолютных» численных алгоритмах, позволяющих решить любую задачу без какой-либо априорной информации о свойствах ее решений, пока что не соответствует действительности.

Такие надежные представления о качественном характере и свойствах течений при обтекании тел необходимы на ранних стадиях проектирования летательных аппаратов, когда нужно выбрать из большого числа альтернативных вариантов ту компоновку, которая в максимальной степени удовлетворяет техническому заданию. В целях экономии времени вместо трудоемких более точных

расчетов приходится прибегать к упрощенным приближенным методам определения давления на поверхности летательного аппарата для нахождения суммарных аэродинамических характеристик, делая упор не на точность расчета, а на его простоту и быстроту.

В результате появилась так называемая «**теория локального взаимодействия**» потока частиц с поверхностью обтекаемого тела и соответственно — локальные методы решения задачи обтекания тела сверхзвуковым потоком газа.

Основная гипотеза теории локального взаимодействия — *гипотеза локальности*, согласно которой влияние среды на элемент поверхности движущегося в ней тела определяется лишь местным углом падения, то есть углом между нормалью к рассматриваемому элементу поверхности тела и характерным направлением движения среды по отношению к телу.

Теория локального взаимодействия имеет статус полуэмпирической теории. Она является приближенной и призвана для быстрого решения множества задач с невысокой точностью в прикидочных расчетах, что соответствует стадии концептуального и эскизного проектирования летательных аппаратов.

Целью настоящего учебного пособия является не только ознакомление студентов старших курсов с этим разделом газовой динамики, но и обучение навыкам аналитических исследований сложных физических явлений.

Материал, содержащийся в пособии, используется при чтении лекций по спецкурсу «Гиперзвуковая аэродинамика», для студентов специалитета и магистратуры математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Сведения об авторах:

Богатко Всеволод Иванович — кандидат физ.-мат. наук, доцент Санкт-Петербургского государственного университета,

Потехина Елена Александровна — кандидат физ.-мат. наук, науч. сотрудник Санкт-Петербургского государственного университета.

# ЛОКАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Одним из простейших методов, позволяющих в рамках локальной теории определять распределение давления по поверхности летательного аппарата, является метод Ньютона. Как показывают многочисленные расчеты, использование метода Ньютона может дать вполне приемлемые для практики результаты при определении суммарных аэродинамических характеристик.

## 1. Формула Ньютона

В начале 17 века Ньютон предложил считать, что при обтекании тела передача импульса частицы данному элементу поверхности происходит так, что

- 1) в данной области не сказывается влияние остальной части поверхности,
- 2) нормальная к поверхности тела составляющая вектора скорости набегающего потока полностью передается телу, а касательная – сохраняется (то есть имеет место так называемое неупругое столкновение),
- 3) на затененной поверхности давление равно нулю (Рис. 1.1).

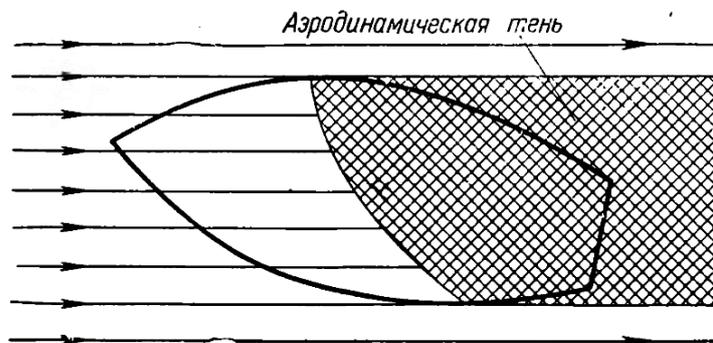


Рис. 1.1. Схема обтекания Ньютона.

Согласно теории Ньютона:

- газообразная среда состоит из одинаковых и невзаимодействующих между собой частиц, расположенных на равных расстояниях друг от друга;
- скорость движения частицы до столкновения с поверхностью тела равна скорости невозмущенного потока;

- при столкновении частицы с поверхностью нормальная составляющая ее скорости становится равной нулю, а касательная составляющая при этом остается неизменной;
- давление в данной точке зависит только от ориентации соответствующего элемента поверхности по отношению к вектору скорости невозмущенного потока, а форма остальной части тела не влияет на давление в заданной точке.

Теория Ньютона не дает возможности определить давление на участках поверхности, находящихся в «аэродинамической тени» (подветренная сторона тела по отношению к вектору скорости набегающего потока). На этих участках поверхности коэффициент давления нужно принимать равным нулю.

Таким образом, согласно теории Ньютона, давление на элемент поверхности тела зависит только от ориентации этого элемента по отношению к набегающему потоку частиц и не зависит от формы остальной части тела. Очевидно, при этом, что сопротивление тела определяется только формой его головной части, так как только эта часть тела испытывает столкновение с частицами.

Пусть сверхзвуковой поток набегаёт со скоростью  $V_\infty$  на тело (B) произвольной формы (Рис. 1.2):

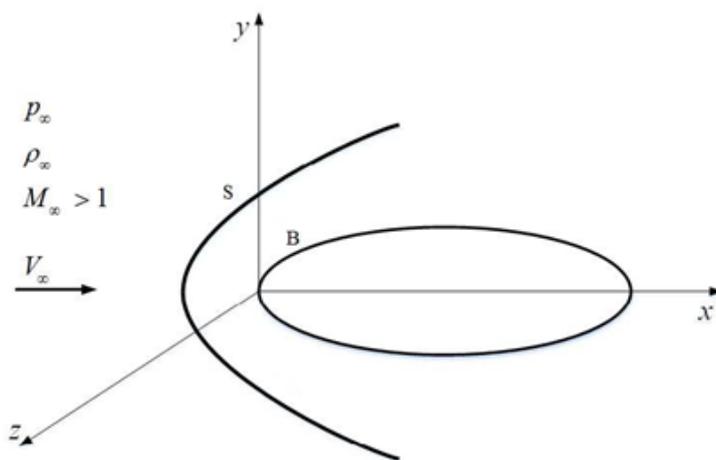


Рис. 1.2. Система координат.

Здесь  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $M$  – число Маха.

Для определения величины давления потока частиц на тело согласно теории Ньютона на поверхности тела выделим элемент  $ds$ . Обозначим через  $\theta$  угол

между внутренней нормалью к поверхности обтекаемого тела и направлением скорости набегающего потока  $\theta = \left( \bar{n}, \bar{V}_\infty \right)$ .

Тогда за время  $dt$  с элементом поверхности  $ds$  столкнутся частицы, расположенные в наклонном по отношению к поверхности обтекаемого тела цилиндре с объемом  $V_\infty \cos \theta dt ds$  (Рис. 1.3). Масса этих частиц  $dm = \rho_\infty V_\infty \cos \theta dt ds$ .

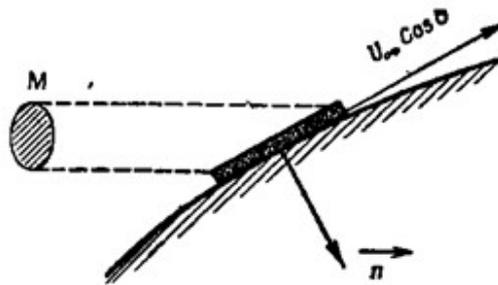


Рис. 1.3. Столкновение частиц газа с поверхностью.

Их количество движения  $d\bar{K} = \bar{V}_\infty dm = \rho_\infty V_\infty \bar{V}_\infty \cos \theta dt ds$ .

Изменение количества движения за время  $dt$  в проекции на нормаль  $\bar{n}$  равно импульсу сил давления

$$\bar{n} \cdot d\bar{K} = \rho_\infty V_\infty^2 \cos \theta dt ds \cos \theta = p ds dt = \rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \theta dt ds.$$

Отсюда следует, что  $p = \rho_\infty V_\infty^2 \cos^2 \theta$ . Если отнести давление к ско-

ростному напору  $\rho_\infty V_\infty^2$ , то  $\frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2} = \cos^2 \theta$ .

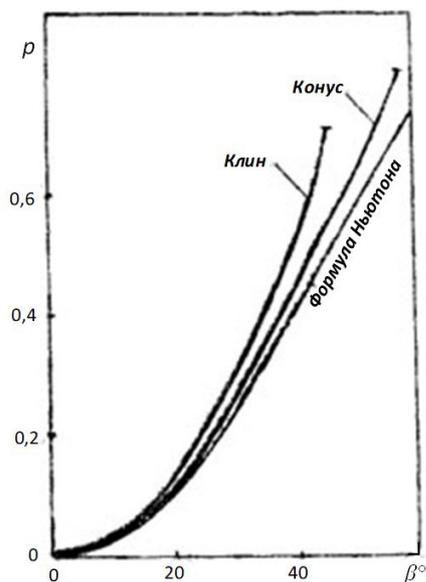
Тогда в безразмерных переменных получим

$$p = \cos^2 \theta. \quad (1.1)$$

Это и есть **формула Ньютона**.

При значениях  $\theta$ , близких к  $\frac{\pi}{2}$ , давление становится пренебрежимо малым и при дальнейшем увеличении угла  $\theta$  от него не зависит. При малых скоростях потока имеем большое расхождение данных эксперимента с расчетами по формуле (1.1).

При больших скоростях картина иная. На рисунке (Рис. 1.4) [4], приведена зависимость давления на поверхностях клина и конуса от угла полураствора тела для показателя адиабаты  $k = 1,4$  в сравнении с расчетами по формуле Ньютона в предельном случае ( $M_\infty = \infty$ ).

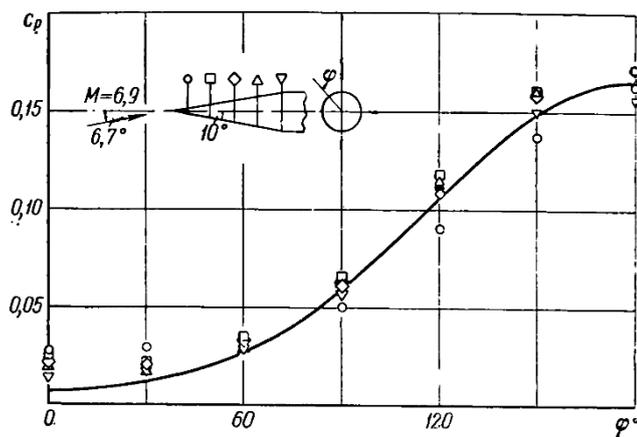


**Рис. 1.4.** Зависимость давления от угла полураствора.

Как следует из Рис. 1.4, даже при значении  $k = 1,4$  сравнение для конуса с формулой Ньютона дает вполне удовлетворительное совпадение.

По теории Ньютона на поверхностях клина и конуса давление должно быть одинаковым. В действительности при обтекании клина в ударном слое образуется равномерный поток, параметры которого подчиняются условиям динамической совместности.

Приведем также сравнение расчетов распределения давления по поверхности конуса, обтекаемого под ненулевым углом атаки, по формуле Ньютона с экспериментальными данными (Рис. 1.5) [1].



**Рис. 1.5.** Конус под углом атаки.

Сравнение показывает, что использование метода Ньютона дает вполне приемлемые для практики результаты.

Из условий динамической совместности имеем

$$p = \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi .$$

Здесь  $\varphi$  – угол между внутренней нормалью к поверхности разрыва (в сторону тела) и направлением набегающего потока.

Формулу Ньютона можно получить при следующих предположениях:

а)  $k = 1$ ;

б)  $\varphi = \theta$ , то есть ударный слой должен быть бесконечно тонким, и ударная волна должна совпадать с поверхностью обтекаемого тела (она как бы облегает поверхность тела);

в) существенным является также прямолинейность образующей тела, так как частица после удара должна продолжать свое движение по инерции, чтобы давление сохранялось постоянным.

При выполнении этих условий формулу (1.1) можно считать обоснованной для клина, так как постоянный поток в этом случае (плоская задача) удовлетворяет уравнениям газовой динамики (в отличие от осесимметричных течений).

Но оказывается, что эта формула дает удивительно хорошие результаты в целом ряде случаев, когда она теоретически необоснованна. Например, при обтекании тупоносых тел экспериментальная кривая  $p(\theta)$  чуть сдвинута относительно зависимости  $p = \cos^2 \theta$  в целом формула (1.1) правильно отражает закон изменения давления вдоль поверхности обтекаемого тела. Но в некоторых точках обтекаемого тела давление может быть известно точно. Например, в точке торможения (ее иногда называют критической точкой) при обтекании с отошедшей ударной волной или в острие при обтекании с присоединенной ударной волной.

Следовательно, можно ввести поправочный коэффициент к формуле Ньютона и тогда получим так называемую модифицированную формулу Ньютона

$$\boxed{p = p_0 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0}}, \quad (1.2)$$

где  $p_0$  — давление в фиксированной точке тела  $M_0$  (при  $\theta = \theta_0$ ).

Если в точке  $M_0$  давление известно, то формула (1.2) дает возможность найти давление в любой точке тела, обращенной к набегающему потоку. При этом, конечно,  $p = 0$  в аэродинамической тени тела.

Покажем, как можно определить величину коэффициента  $p_0$  в двух различных случаях.

### 1.1. Обтекание тела с отошедшей ударной волной

Пусть сверхзвуковой поток набегаёт на затупленный профиль или плоское тело со скоростью  $v_1 > a_*$ , где  $a_*$  — критическая скорость.

В этом случае, как показывает эксперимент, перед телом образуется поверхность сильного разрыва (головная ударная волна), которая расположена на некотором расстоянии от обтекаемого тела (см. Рис. 1.6).

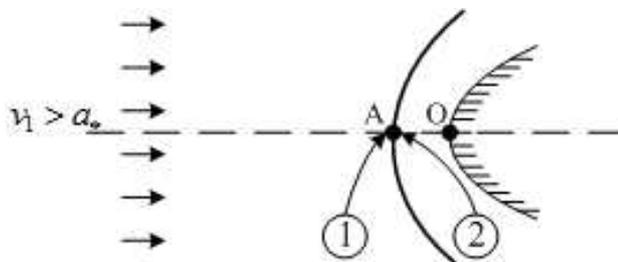


Рис. 1.6. Обтекание с отошедшей ударной волной

Пусть для простоты профиль симметричный и скорость набегающего потока направлена по оси симметрии.

В окрестности осевой линии поверхность сильного разрыва будет перпендикулярна оси симметрии и, следовательно, скорости набегающего потока.

Такая поверхность сильного разрыва называется прямым скачком уплотнения.

Вдоль линии  $AO$  (Рис. 1.6) имеем интеграл Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad M \gg 1.$$

В точке торможения  $O$  скорость частиц  $V_0 = 0$ , поэтому

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k-1}{2k}. \quad (1.3)$$

Здесь  $p_0$  и  $\rho_0$  соответствуют значениям давления и плотности в точке  $O$ .

Из условий адиабатичности имеем  $\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{p_A}{\rho_A^k}$ .

Из условий динамической совместности (см. [6], формулы (13))

$$p_A = \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi_A = \frac{2}{k+1}; \quad \varphi_A = 0; \quad \rho_A = \frac{k+1}{k-1}.$$

Тогда в силу адиабатичности имеем

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} = \frac{2}{k+1} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^k. \quad (1.4)$$

Из системы соотношений (1.3) и (1.4) найдем  $p_0$ .

Из (1.3) следует, что  $\rho_0 = \frac{2k}{k-1} p_0$ .

После подстановки в (1.4) получим

$$p_0 = \frac{2}{k+1} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^k \left( \frac{2k}{k-1} \right)^k p_0^k.$$

Отсюда найдем

$$p_0^{k-1} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{k+1} \left( \frac{1}{k} \right)^k.$$

Формула Рэлея (см., например, [7]) в этом частном случае ( $M_\infty \gg 1$ )

имеет вид

$$p_0 = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

При  $k = 1,4$  величина  $p_0 = 0,92$  и  $p_0 \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow 1$ .

Таким образом, модифицированную формулу Ньютона для тупоносых тел можно представить в виде

$$p = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{1}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} \cos^2 \theta. \quad (1.5)$$

Найдем теперь остальные параметры потока. Из условия адиабатичности  $\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}$  найдем величину  $\rho$  и используем модифицированную формулу Ньютона (1.5).

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} = \rho_0 \cos^{\frac{2}{k}} \theta \quad (1.6)$$

Скорость найдем из уравнения Бернулли с учетом (1.5) и (1.6).

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}; \quad V^2 = 1 - \frac{2k}{k-1} \frac{p_0 \cos^2 \theta}{\rho_0 \cos^{\frac{2}{k}} \theta}$$

А так как в силу (1.3)  $\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = 1$ , то

$$V^2 = 1 - (\cos^2 \theta)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1.7)$$

Определим теперь положение звуковой точки на обтекаемом теле. Имеем  $V_* = a_*$ . Подставим в интеграл Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{1}{2}.$$

Тогда получим

$$V_*^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{k-1} \right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_*^2 = \frac{k-1}{k+1} = 1 - \left( \cos^2 \theta_* \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Отсюда

$$\cos^2 \theta_* = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

При  $k = 1,4$   $\theta_* = 43^\circ 22'$ .

При  $k \rightarrow 1$  имеет место неопределенность. Чтобы ее раскрыть, положим  $k = 1 + \gamma$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ). Вспомним один замечательный предел и получим

$$\cos^2 \theta_* = \left( \frac{2}{2+\gamma} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} = \left[ \left( 1 - \frac{\gamma}{2+\gamma} \right)^{\frac{2+\gamma}{\gamma}} \right]^{\frac{1+\gamma}{2+\gamma}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}}.$$

При  $k \rightarrow 1$   $\cos \theta_* \rightarrow e^{-\frac{1}{4}}$ ,  $\theta_* \rightarrow 38^\circ 51'$ .

## 1.2. Обтекание заостренных тел с присоединенной ударной волной

Пусть сверхзвуковой поток набегаёт на заостренное тело с углом полураствора  $\beta_0$  в острие. При  $\beta_0 > \beta_{\max}$  головная ударная волна отделена от тела и  $p_0$  — это давление в точке торможения (в острие).

В плоском случае  $\beta_{\max} = \arcsin \frac{1}{k} \Big|_{k=1,4} = 45^\circ 35'$ ,

а в осесимметричном случае  $\beta_{\max} = 57^{\circ}32'$ .

При обтекании заостренных впереди тел вращения и плоских контуров с присоединенной ударной волной (при  $\beta_0 \leq \beta_{\max}$ ) значение  $p_0$  в формуле (1.2) следует находить из решения задачи обтекания сверхзвуковым потоком конуса или клина.

К сожалению, точные значения величины  $p_0$  для клина выражаются лишь в неявной форме, а для конуса находятся только численными методами.

В случае обтекания тела под углом атаки (трехмерное течение) полагают  $p_0 = \max \{p\}$ .

Сравнение расчетов по формуле (1.2) с экспериментальными данными показывает, что модифицированная формула Ньютона дает очень хорошие результаты для тел с затуплением типа сферы, то есть для затупленных тел с медленно меняющимся радиусом кривизны. Такие хорошие совпадения имеют место для тел с малой кривизной в направлении течения, если головную ударную волну можно считать сильной ( $M_{\infty} \cos \theta > 4$ ). Для других случаев формула (1.2) может оказаться совсем непригодной. Например, для первого тела (а) на Рис. 1.7.

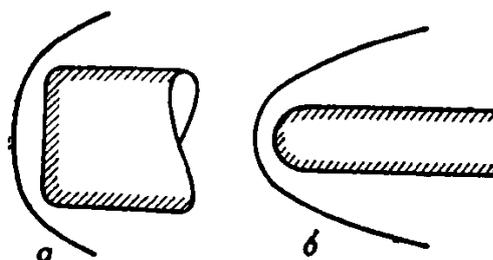


Рис. 1.7. Варианты обтекания тел

Также эта формула дает плохие результаты на цилиндрической части затупленных тел типа (б) и в ее окрестности, хотя в носике результаты вполне удовлетворительные.

Расчеты показывают, что при значениях показателя адиабаты  $k$ , близких к единице (например,  $k = 1,1$ ), хорошие результаты получаются уже при

$M_\infty = 5 \sim 10$ . При этом под  $p$  следует понимать избыточное давление, то есть разность давлений, отнесенную к скоростному напору  $\frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2}$ .

Значение  $k$  зависит от среды, есть газы с очень близким к единице значениями  $k$  (например, для фреона  $k = 1,01$ ).

Отметим, что точность формулы Ньютона выше для конуса, чем для клина.

Точность формулы Ньютона уменьшается также в случае, когда угол поворота потока близок к предельному углу поворота в скачке уплотнения при данном значении  $M_\infty$ . Это объясняется тем, что точность теории Ньютона повышается с уменьшением толщины ударного слоя.

В дополнении к вышесказанному отметим, что приближение Ньютона может рассматриваться как предельное также и при газокINETическом подходе к обтеканию тел разреженным газом. Оно справедливо, если молекулы газа между собой не взаимодействуют, т. е. течение является свободно – молекулярным, а граничное условие взаимодействия молекул с поверхностью тела сводится к неупругому удару [5].

## **2. Метод касательных конусов и клиньев**

Сопоставление расчетов по модифицированной формуле Ньютона с имеющимися точными решениями и с экспериментальными данными показывают, что при гиперзвуковых скоростях давление на обращенный в сторону набегающего потока элемент поверхности тела определяется в основном углом встречи данного элемента с потоком газа, то есть  $p = p(\theta)$ .

Тогда естественно считать, что давление на рассматриваемый элемент поверхности в плоском случае будет таким же, как на клине с соответствующим углом полураствора, помещенном в тот же поток газа, а в осесимметричном случае – на конусе. Этот метод, предложенный С. В. Валландером в 1948 году, получил название метода касательных или местных конусов в осесимметричном случае и метода касательных клиньев в плоском случае.

Метод применяется для тех углов наклона поверхности к набегающему потоку, при которых соответствующее касательное тело обтекается с присоединенной ударной волной, то есть для заостренных впереди профилей и тел вращения.

Поэтому надо иметь формулы для давления как функции угла наклона поверхности.

### 2.1. Плоский случай (клин).

Пусть сверхзвуковой поток набегаёт на клин под нулевым углом атаки. Тогда ось симметрии клина совпадает с направлением набегающего потока.

Обозначим через  $\beta$  угол полураствора клина, а угол полураствора головной ударной волны через  $\sigma$ .

Ось  $x$  совпадает с направлением набегающего потока, а ось  $y$  направлена вертикально вверх (Рис. 2.1).

Обозначим через  $\varphi$  угол между внутренней нормалью к ударной волне ( $S$ ) и осью  $x$ . Тогда  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \sigma$ , при этом  $\beta < \beta_{\max} = 45^\circ 35'$ .

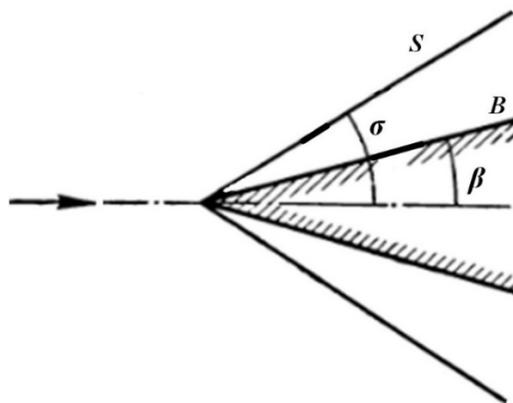


Рис. 2.1. Обтекание симметричного клина

Параметры потока за фронтом ударной волны постоянны (см. [6], формулы (13)):

$$p = \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi = \frac{2}{k+1} \sin^2 \sigma = \frac{1 - \cos 2\sigma}{k+1}$$

Угол  $\sigma$  пока неизвестен, а известен угол поворота потока  $\beta$  : поток должен повернуться сразу после ударной волны на угол  $\beta$ , чтобы выполнялось условие обтекания поверхности клина.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{2}{k+1} \sin \varphi \cos \varphi}{1 - \frac{2}{k+1} \cos^2 \varphi} = \frac{\sin 2 \varphi}{k - \cos 2 \varphi} = \frac{\sin 2 \sigma}{k + \cos 2 \sigma}$$

Далее надо выразить угол  $\sigma$  через угол  $\beta$ , чтобы найти зависимость  $p(\beta)$ .

Имеем  $\sin 2 \sigma = k \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \cos 2 \sigma$ . Умножим это равенство на  $\cos \beta$ , чтобы выразить отсюда  $\sin \beta$ :

$$k \cdot \sin \beta = \sin 2 \sigma \cdot \cos \beta - \cos 2 \sigma \cdot \sin \beta = \sin(2 \sigma - \beta).$$

$$\text{Тогда } 2 \sigma - \beta = \arcsin(k \sin \beta) \text{ и } 2 \sigma = \beta + \arcsin(k \sin \beta).$$

В результате для зависимости давления на поверхности клина от угла полураствора клина получим формулу

$$\begin{aligned} p(\beta) &= \frac{1}{k+1} \{1 - \cos[\beta + \arcsin(k \sin \beta)]\} = \\ &= \frac{1}{k+1} \left[ 1 - \cos \beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} + k \sin^2 \beta \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

В предельном случае при  $k \rightarrow 1$  для давления получим  $p(\beta) \rightarrow \sin^2 \beta$ , т. е. в этом случае приходим к формуле Ньютона, так как

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Угол атаки  $\alpha$  не меняет дела, так как вместо одного клина можно рассматривать два клина с углами полураствора  $\beta - \alpha$  и  $\beta + \alpha$  (Рис. 2.2).

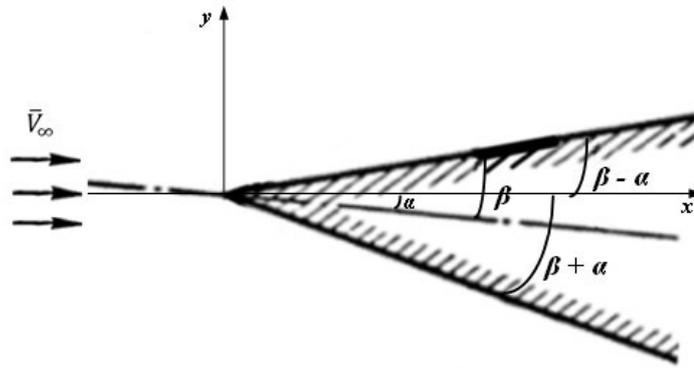


Рис. 2.2. Обтекание клина под углом атаки (несимметричный клин)

Но важно, чтобы выполнялось неравенство  $\beta \pm \alpha < \beta_{\max}$ .

Этот метод используется для определения давления для слабовыпуклых тел при небольших локальных углах  $\beta$ .

## 2.2. Осесимметричный случай (конус)

Пусть имеем некоторое тело вращения, которое обтекается сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. Выберем произвольную точку  $M$  на его поверхности, проведем меридиональное сечение (оно содержит ось симметрии тела) и найдем местный угол  $\beta$  (в точке  $M$ ) между осью симметрии тела и касательной к линии пересечения поверхности обтекаемого тела с меридиональной плоскостью (Рис. 2.3).

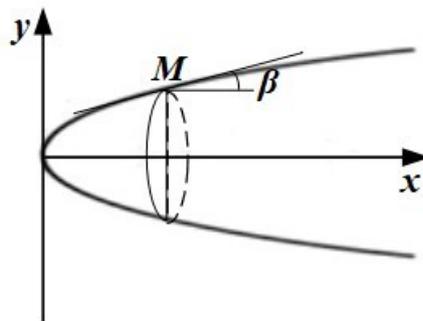


Рис. 2.3. Тело вращения.

За параметры газа в точке  $M$  обтекаемого тела вращения примем гидродинамические элементы потока на поверхности конуса с углом полураствора  $\beta$ .

Если угол атаки равен нулю, то во всех точках линии пересечения поверхности тела плоскостью, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через точку  $M$ , параметры потока будут одинаковы.

Если угол атаки не равен нулю, то параметры газа вдоль указанной линии пересечения будут зависеть от местного угла атаки.

При этом во всех случаях должно быть выполнено условие  $\beta < \beta_{\max} = 57^\circ 32'$ .

Вопросам обтекания конуса при различных режимах полета с углом атаки и без него уделено в литературе очень большое внимание (см., например, [8]).

Рассмотрим задачу обтекания конуса потоком с большой сверхзвуковой скоростью. В этом случае существует точное решение задачи, но не в аналитической форме. Имеются достаточно подробные таблицы З. Копала [9, 10]. Но наша цель была получить зависимость давления от местного угла наклона поверхности  $p(\beta)$ . Есть много приближенных решений и эмпирических формул для различных режимов обтекания.

Рассмотрим одно из приближенных решений. Систему уравнений газовой динамики запишем в сферической системе координат  $(r, \theta, \psi)$

$$\begin{aligned}
 v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} - \frac{v_\theta^2 + v_\psi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\
 v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \psi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} v_\psi^2 &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\
 v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \theta} + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} + \frac{v_r v_\psi}{r} + \frac{\text{ctg} \theta v_\theta v_\psi}{r} &= \\
 -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \psi}, & \tag{2.2} \\
 \frac{\partial (\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_\psi r)}{\partial \psi} &= 0, \\
 v_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) + \frac{v_\psi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

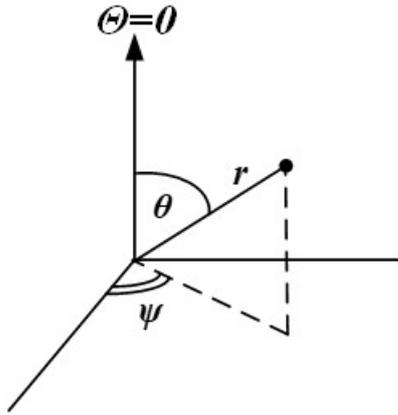


Рис. 2.4. Система координат.

Направим ось  $\theta = 0$  по оси симметрии тела вращения (Рис. 2.4).

$$\text{Тогда } v_\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = 0.$$

В осесимметричном случае система уравнений (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial (\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} &= 0, \\ v_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

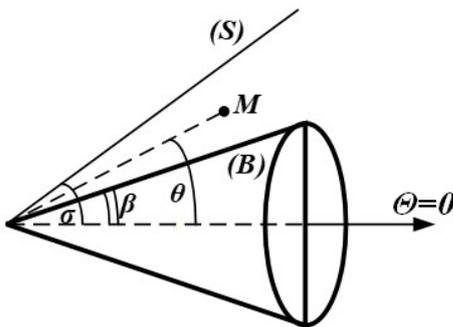


Рис. 2.5. Обтекание конуса.

При обтекании конуса все параметры зависят только от угла  $\theta$ , так как в ударном слое конуса все параметры постоянны вдоль луча (Рис. 2.5).

Поэтому  $\frac{\partial}{\partial r} = 0$ . И для конуса система

уравнений (2.3) примет вид

$$\frac{dv_r}{d\theta} = v_\theta,$$

$$v_\theta \left( \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\theta},$$
(2.4)

$$2\rho v_r \sin \theta + \frac{d}{d\theta}(\rho v_\theta \sin \theta) = 0,$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что все искомые функции зависят только от угла  $\theta$ .

Уравнение неразрывности преобразуем следующим образом:

$$2\rho v_r \sin \theta + \rho \sin \theta \frac{dv_\theta}{d\theta} + \rho v_\theta \cos \theta + v_\theta \sin \theta \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

Разделим на  $\rho \sin \theta$  и воспользуемся первым уравнением из системы (2.4):

$$2v_r + v_r'' + v_r' \operatorname{ctg} \theta = -v_r' \frac{d \ln \rho}{d\theta}. \quad (2.5)$$

Из 4-го уравнения системы (2.4) имеем  $p = A\rho^k$ ,  $A = \text{const}$ .

Из 2-го уравнения системы (2.4) с учетом 1-го уравнения этой системы получим

$$v_r'(v_r'' + v_r) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = -a^2 \frac{d \ln \rho}{d\theta}. \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.5) и (2.6) исключим  $\frac{d \ln \rho}{d\theta}$ :

$$a^2(2v_r + v_r'' + v_r' \operatorname{ctg} \theta) = (v_r')^2(v_r'' + v_r).$$

Разделим на  $a^2$  и приведем подобные члены. Тогда получим

$$\left\{1 - \frac{(v_r')^2}{a^2}\right\} v_r'' + v_r' \operatorname{ctg} \theta \left\{2 - \frac{(v_r')^2}{a^2}\right\} v_r = 0, \quad (2.7)$$

где  $a^2$  выражается через  $v_r$  из интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{k-1}{2} \{1 - v_r^2 - (v_r')^2\}. \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.7) при условии (2.8) должно удовлетворять:

а) условию обтекания при  $\theta = \beta$

$$v_\theta(\beta) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_r'(\beta) = 0}; \quad (2.9)$$

б) условиям на головной ударной волне при  $\theta = \sigma$

$$\begin{aligned} v_\theta = -v_n = -\frac{k-1}{k+1} \sin \sigma & \quad \begin{cases} v_r(\sigma) = \cos \sigma \\ v_r'(\sigma) = -\frac{k-1}{k+1} \sin \sigma \end{cases} \\ v_r = v_\tau = \cos \sigma & \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, для определения поля скоростей в ударном слое конуса имеем нелинейную краевую задачу (2.7) - (2.10).

Оценим нелинейные члены в коэффициентах уравнения (2.7).

$$\text{Из условия обтекания (2.9) следует, что } \left. \frac{(v_r')^2}{a^2} \right|_{(B)} = 0.$$

Из условий динамической совместности на поверхности головной ударной волны (2.10) при  $\theta = \sigma$  имеем

$$\left. \frac{(v_r')^2}{a^2} \right|_{(S)} = \frac{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \sin^2 \sigma}{\frac{k-1}{2} \left[1 - \cos^2 \sigma - \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \sin^2 \sigma\right]} =$$

(сократим на  $\sin^2 \sigma$ , учитывая, что  $1 - \cos^2 \sigma = \sin^2 \sigma$ )

$$= \frac{(k-1)^2}{\frac{k-1}{2} \left[ (k+1)^2 - (k-1)^2 \right]} = \frac{2(k-1)}{4k} = \frac{k-1}{2k} \Big|_{k=1,4} = \frac{1}{7}.$$

При  $k < 1,4$  это величина будет еще меньше.

Считая, что  $\frac{(v_r')^2}{a^2} \ll 1$  во всей области течения за головной ударной волной, из уравнения (2.7) получим линейное уравнение

$$v_r'' v_r + v_r' \operatorname{ctg} \theta + 2v_r = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, для определения компоненты вектора скорости  $v_r$  имеем линейную задачу (2.9) - (2.11).

Уравнение (2.11) – это обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами. Для построения его общего решения с двумя произвольными постоянными надо найти **два линейно независимых** частных решения. Тогда их линейная комбинация и даст общее решение уравнения (2.11).

Одно частное решение легко угадывается –  $v_{r1} = \cos \theta$ . Тогда второе частное решение будем искать в виде  $v_{r2} = f(\theta) \cdot \cos \theta$ .

Найдем производные от этого выражения и подставим их в уравнение (2.11), чтобы определить вид функции  $f(\theta)$ .

$$v_{r2} = f(\theta) \cdot \cos \theta, \quad v_{r2}' = f' \cos \theta - f \sin \theta,$$

$$v_{r2}'' = f'' \cos \theta - 2f' \sin \theta - f \cos \theta.$$

$$f'' \cos \theta - 2f' \sin \theta - f \cos \theta + f' \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - f \cos \theta + 2f \cos \theta = 0.$$

После приведения подобных членов получаем уравнение для функции  $f(\theta)$  уже более простого вида:

$$f'' = (2\operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \theta)f'.$$

Интегрируем один раз

$$\ln f' = -2 \cdot \ln \cos \theta - \ln \sin \theta = -\ln(\sin \theta \cdot \cos^2 \theta),$$

$$f' = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}.$$

Для интегрирования сделаем замену  $t = \cos \theta$ ,  $dt = -\sin \theta d\theta$ .

$$\begin{aligned} f &= - \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = - \int \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt = \\ &= - \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \right) = \frac{1}{\cos \theta} - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos \theta} + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Второе частное решение уравнения (2.11) будет иметь вид

$$v_{r2} = f(\theta) \cdot \cos \theta = 1 + \cos \theta \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.11) запишется в виде

$$v_r = C_1 \cdot \cos \theta + C_2 \cdot \left( 1 + \cos \theta \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right).$$

Теперь надо найти  $C_1$  и  $C_2$  из условий (2.9) и (2.10).

$$v_r' = -C_1 \cdot \sin \theta + C_2 \cdot \left( -\sin \theta \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

Это выражение можно упростить

$$v_r' = -\sin \theta \left\{ C_1 + C_2 \cdot \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \right\}.$$

При  $\theta = \beta$  это выражение должно равняться нулю,

а при  $\theta = \sigma$  должно равняться  $\left(-\frac{k-1}{k+1} \sin \sigma\right)$ .

Тогда приходим к системе трех уравнений

$$C_1 + C_2 \cdot \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta}\right) = 0,$$

$$C_1 + C_2 \cdot \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} - \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma}\right) = \frac{k-1}{k+1},$$

$$C_1 + C_2 \cdot \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{\cos \sigma}\right) = 1$$

для определения  $C_1, C_2$  и функции  $\sigma = \sigma(k, \beta)$ .

Чтобы определить  $C_2$ , вычтем из третьего уравнения второе:

$$C_2 \cdot \left(\frac{1}{\cos \sigma} + \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma}\right) = 1 - \frac{k-1}{k+1}$$

или

$$C_2 \cdot \frac{\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma}{\cos \sigma \cdot \sin^2 \sigma} = \frac{k+1 - k+1}{k+1}.$$

Отсюда

$$\boxed{C_2 = \frac{2}{k+1} \cdot \sin^2 \sigma \cdot \cos \sigma}.$$

Тогда из первого уравнения найдем  $C_1$ :

$$\boxed{C_1 = \frac{2}{k+1} \sin^2 \sigma \cdot \cos \sigma \cdot \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Подставляя  $C_1$  и  $C_2$  во второе уравнение системы, получим трансцендентное уравнение для определения угла наклона поверхности головной ударной волны  $\sigma = \sigma(k, \beta)$ :

$$\boxed{\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} - \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \beta} - \frac{k-1}{2 \sin^2 \sigma \cos \sigma} = 0}.$$

Теперь можно считать, что поле скоростей известно:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{2}{k+1} \cdot \sin^2 \sigma \cdot \cos \sigma \left[ \cos \theta \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \beta} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) + 1 \right], \\ v_\theta &= -\frac{2}{k+1} \cdot \sin^2 \sigma \cdot \cos \sigma \left\{ \sin \theta \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \beta} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) - \operatorname{ctg} \theta \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда  $p(\theta)$  и  $\rho(\theta)$  определяется из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{p}{\rho^k} &= \frac{2}{k+1} \cdot \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^k \sin^2 \sigma, \end{aligned}$$

где  $\sigma = \sigma(k, \beta)$  – считается уже известной функцией.

**Замечание.** Сравним уравнения (2.10) и (2.4). Легко видно, что уравнение (2.4) переходит в уравнение (2.11) при условии  $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$ .

Таким образом, пренебрежение  $\frac{(v_r')^2}{a^2}$  по сравнению с единицей равносильно предположению, что плотность газа постоянна в рассматриваемой области.

Расчеты показывают, что построенное решение дает результаты, близкие к точным при  $\beta \geq 10^\circ$  и  $M_\infty > 2$ .

Отметим еще работу, выполненную на кафедре гидроаэромеханики СПбГУ (ЛГУ) во второй половине прошлого века. А. С. Михеев предположил, что искомые параметры газа являются функциями угла поворота вектора скорости относительно направления невозмущенного потока, а связь между модулем скорости и давлением аппроксимируется линейной функцией в области между головной ударной волной и поверхностью обтекаемого тела. Ему также удалось получить решение в замкнутом виде при произвольных термодинамических свойствах газа. Для совершенного газа при  $k = 1,4$  это решение хорошо совпадает с точным решением, как при умеренных, так и при больших значениях  $M_\infty$  [11].

Отметим еще один приближенный метод решения этой задачи.

Из таблиц видно, что  $\sigma - \beta \ll \beta$ . Поэтому естественно искать решение в виде ряда по степеням  $(\sigma - \beta)$ . Этот метод дает очень простые формулы, которые при учете физико-химических свойств газа очень хорошо аппроксимируют точное решение.

По замыслу этот метод близок к методу тонкого ударного слоя.

На практике метод местных конусов и клиньев используют для слабовыпуклых тел и сравнительно небольших сверхзвуковых чисел  $M_\infty$ . Но его надо применять с осторожностью, так как на выпуклых телах давление может оказаться даже ниже, чем по формуле Ньютона, а тогда метод местных клиньев и конусов только усугубит ошибку.

### 3. Формула Ньютона-Буземана

Можно показать, что формула Ньютона удовлетворяет системе уравнений газовой динамики в предельном случае (при  $M \rightarrow \infty$ ) только для тел с прямолинейными образующими (клин, конус, ромб и т.д.) [1].

Вернемся вновь к задачам обтекания плоской пластинки под углом атаки. При большой сверхзвуковой скорости потока между пластинкой и ударной волной образуется слой сильно сжатого и движущегося с постоянной скоростью газа. Над пластинкой образуется зона с газом пониженной плотности или, при достаточно больших значениях числа Маха, — область вакуума.

Такая картина обтекания пластины с большой сверхзвуковой скоростью близко напоминает картину обтекания, рассмотренную еще Ньютоном, когда при столкновении с элементом поверхности тела частицы изменяют нормальную к элементу поверхности составляющую количества движения. Это и приводит к возникновению силы давления потока на тело.

Из соотношений на скачке уплотнения перед обтекаемым сверхзвуковым потоком телом получаем

$$v_n = v_{n_1} \frac{\rho_1}{\rho}, \quad p - p_1 = \rho_1 v_{n_1}^2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right).$$

Если предположить, что уплотнение газа в скачке становится сколь угодно большим, т. е. считать  $\frac{\rho_1}{\rho} \rightarrow 0$ , то отсюда следует  $v_n \rightarrow 0$  и  $p - p_1 \rightarrow \rho_1 v_{n_1}^2$ .

Таким образом, в этом предельном случае краевое условие обтекания поверхности тела  $v_n = 0$  будет удовлетворено, если скачок располагается непосредственно на поверхности тела, то есть головная ударная волна как бы «стелется» вдоль нее и частицы газа движутся в бесконечно тонком слое за скачком.

Из условия непрерывности касательной составляющей вектора скорости частиц газа на поверхности сильного разрыва следует, что начальная скорость частиц за скачком равна касательной составляющей их скорости перед скачком. Избыточное давление непосредственно за скачком равно нормальной

составляющей импульса набегающего потока, т. е. величине, определяемой формулой Ньютона.

Однако если обтекаемая поверхность искривлена, то давление на поверхности тела не будет равно давлению непосредственно за головной ударной волной, так как при криволинейном движении частиц газа в бесконечно тонком слое возникающая нормальная к поверхности (центробежная) сила должна уравниваться разностью давлений на двух сторонах слоя между ударной волной и поверхностью тела. Несмотря на бесконечно малую толщину слоя, эта разность конечна из-за бесконечно большой плотности в слое. Как следует из газодинамического соотношения вдоль линии тока

$$V dV + \frac{dp}{\rho} = 0,$$

в пределе при  $\rho \rightarrow \infty$  величина скорости частиц при движении в слое остается неизменной.

Пусть теперь тело имеет криволинейную образующую (Рис. 3.1). Рассмотрим плоское или осесимметричное течение в слое вдоль поверхности такого тела.

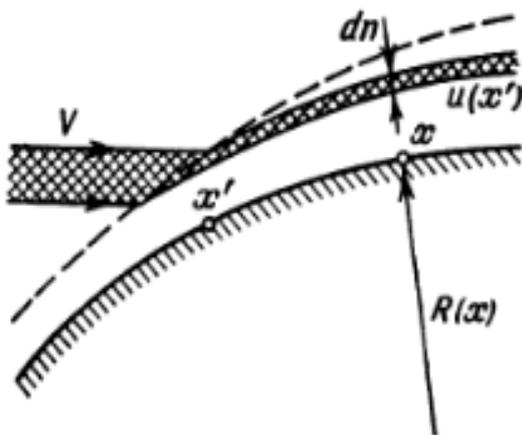


Рис. 3.1. Схема ударного слоя

Слой между ударной волной, изображенной штриховой линией, и контуром тела будем считать бесконечно тонким. В точке с координатой  $x$  разность давлений  $dp$  в слое толщиной  $dn$  частиц, прошедших ударную волну у точки с координатой  $x'$  и имеющих скорость  $u(x)$ , равна

$$dp = \frac{\rho(x, x') u^2(x')}{R(x)} dn. \quad (3.1)$$

Здесь  $R(x)$  – радиус кривизны обтекаемого контура. Из условия сохранения массы в элементарном слое получаем

$$\rho(x, x')u(x') l(x) dn = \rho_1 V_1 dS(x'),$$

где  $l(x) = 1$  и  $l(x) = 2\pi r(x)$  соответственно в случае плоского и осесимметричного течений,  $r$  – радиус сечения тела вращения,  $S$  – площадь сечения.

Используя это выражение и то, что

$$R = -\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha} \frac{dr}{d\alpha},$$

( $\alpha$  – угол между касательной к контуру тела и направлением набегающего потока) преобразуем (3.1) к виду

$$dp = -\rho_1 V_1 \sin\alpha \frac{d\alpha}{dS} u(x') dS(x').$$

Так как касательная к поверхности разрыва составляющая вектора скорости при переходе через поверхность разрыва остается неизменной, то

$$u(x') = V_1 \cos\alpha(x').$$

Интегрируя полученное выражение для  $dp$  и принимая во внимание, что на внешней границе слоя, т. е. непосредственно за ударной волной,  $p = \rho_1 V_1^2 \sin^2\alpha$ , найдем давление на поверхности тела

$$p - p_1 = \rho_1 V_1^2 \left( \sin^2\alpha + \sin\alpha \frac{d\alpha}{dS} \int_{S_0}^S \cos\alpha dS \right). \quad (3.2)$$

В отличие от формулы Ньютона, согласно этому выражению, давление в данной точке обтекаемой поверхности определяется не только ориентацией элемента поверхности по отношению к набегающему потоку, но и формой всей поверхности, расположенной выше по течению.

Формула (3.2) называется **формулой Ньютона -- Буземана**. Можно показать, что она является в двумерном случае (плоском и осесимметричном) асимптотически точной формулой для уравнений газовой динамики в предельном случае бесконечного уплотнения газа при прохождении им головной ударной волны [1].

Для совершенного газа этот предел достигается при  $M \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow 1$ . Если  $M^2 \sin^2 \alpha \gg 1$  то в формуле (3.2) можно пренебречь величиной  $p_1$  по сравнению с  $p$ .

Формулой Ньютона - Буземана можно пользоваться только при  $p > 0$ .

В той точке, где давление, согласно этой формуле, обращается в нуль, слой уплотненного газа отрывается от тела и между ним и телом образуется область вакуума. Форму оторвавшегося слоя можно найти, приравняв нулю скобку в (3.2); в плоском течении это — квадратичная парабола, а в осесимметричном — кубическая парабола.

Формула Ньютона - Буземана дает удовлетворительные результаты для распределения давления по телу лишь при очень сильных уплотнениях газа. Достигаемое при  $k = 1,4$  и  $M = \infty$  уплотнение, равное шести, недостаточно для использования этой формулы; при учете реальных свойств воздуха при гиперзвуковой скорости уплотнение доходит до пятнадцати и более, однако и это во многих случаях не обеспечивает достаточной точности формулы Ньютона – Буземана. В связи с этим развита асимптотическая теория гиперзвукового обтекания тел (теория тонкого ударного слоя), в которой малым параметром наряду с  $\frac{1}{M^2}$  является величина, обратная характерному значению уплотнения газа в

головной ударной волне  $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_S}$  [1].

**Замечание.** Достаточно высокая точность формулы Ньютона при  $k = 1,4$  объясняется компенсирующим влиянием двух факторов. При обтекании тела

газом с  $k = 1,4$  давление за ударной волной выше, чем давление согласно формуле Ньютона, так как угол встречи ударной волны с направлением набегающего потока при этом больше фигурирующего в формуле Ньютона угла  $\alpha$ , образуемого с этим направлением поверхностью тела.

При обтекании выпуклых тел давление за ударной волной уменьшается по направлению к телу из-за центробежной силы, что и компенсирует повышенное давление за ударной волной.

При обтекании вогнутых контуров давление по направлению к телу растет, и формула Ньютона дает плохие результаты.

При  $k = 1,4$  формула Ньютона дает удовлетворительный результат, так как учет центробежных сил в формуле Ньютона-Буземана существенно уменьшает давление; напротив, при  $k = 1,05$  формула Ньютона-Буземана дает результаты, близкие к истинным (в области, не очень близкой к точке, где  $p = 0$ ), формула же Ньютона сильно завышает давление.

Удовлетворительная точность формулы Ньютона при определении давления на выпуклых телах при реально достигаемых уплотнениях газа в гиперзвуковом ударном слое привела к ее широкому использованию на практике для оценочных расчетов аэродинамических сил и моментов при гиперзвуковых скоростях.

#### **4. Окрестность точки торможения. Метод постоянной плотности**

В разделе 2 мы столкнулись с интересным фактом, что предположение о постоянстве плотности в ударном слое конуса дает результаты довольно близкие к точным расчетам.

Вблизи точки торможения местное число Маха мало, и многие локальные исследования опираются на уравнения несжимаемой жидкости. Оценим точность этих уравнений на осевой линии тока, определяя давление в точке тормо-

жения при условии, что  $\rho = \frac{k-1}{k+1} = const.$

Из интеграла Бернулли для несжимаемой жидкости  $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$  (массо-

выми силами пренебрегаем) имеем при  $\varphi = 0$  (см. [6] формулы (13))

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)^2 + \frac{2}{k+1} \frac{k-1}{k+1} = 0 + \frac{p_0}{\rho_0} = p_0 \frac{k-1}{k+1}.$$

Отсюда  $p_0 = \frac{1}{2} \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1} = \frac{k+3}{2(k+1)}.$

При  $k = 1,4$   $p_0 \approx 0,917$ , что достаточно близко к точному значению  $p_0 = 0,920$ . Ошибка  $\frac{0,003}{0,920} = 0,0032$ . Это 0,3%.

Предположение о постоянстве плотности в ударном слое дает возможность получить точные аналитические решения для таких простейших тел, как клин, конус, сфера и цилиндр. Эти решения могут быть использованы при анализе течения около точки торможения у тел, форма носка которых близка к простейшей.

Рассмотрим обтекание сферы сверхзвуковым потоком газа.

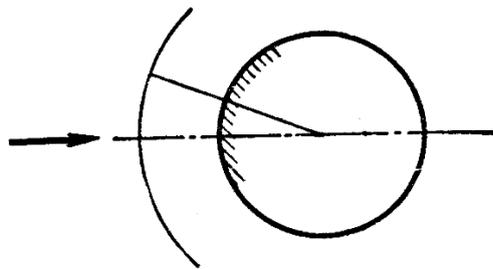


Рис. 4.1. Обтекание сферы.

Систему уравнений газовой динамики запишем в сферической системе координат при наличии симметрии около оси  $\theta = 0$ , которая направлена по скорости набегающего потока. Начало координат поместим в центр сферы (Рис. 4.1).

В безразмерных переменных поверхность обтекаемого тела ( $B$ ) будет определяться уравнением  $r = 1$ .

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial(\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

$$v_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) = 0$$

Предположим, что

- 1) изменением плотности (то есть сжимаемостью среды) в ударном слое можно пренебречь,
- 2) головная ударная волна незначительно отличается от сферической поверхности с центром в точке  $O$ ,
- 3) отношение плотностей на головной ударной волне мало меняется вдоль фронта волны.

Тогда граничные условия при  $(\varphi = \theta)$  запишутся в виде:

на поверхности тела ( $B$ ) при  $r = 1 \rightarrow v_r = 0$ ,

на поверхности головной ударной волны ( $S$ ) при  $r = R_s$

$$v_r|_s = -v_n = -\frac{k-1}{k+1} \cos \theta \quad (\text{направление противоположное}),$$

$$v_\theta|_s = v_\tau = \sin \theta, \quad p_s = \frac{2}{k+1} \cos^2 \theta, \quad \rho_s = \frac{k+1}{k-1} \equiv \frac{1}{\varepsilon}.$$

Пусть  $\boxed{\rho \equiv \rho_s = const.}$ .

Исходя из вида граничных условий, решение системы уравнений газовой динамики будем искать в виде

$$v_r = u(r)\cos\theta, \quad v_\theta = v(r)\sin\theta, \quad p = p_1(r)\cos^2\theta + p_0(r)$$

Подставим такое представление искомым функций в систему уравнений. Тогда получим

$$\begin{aligned} uu' \cos^2 \theta - \frac{uv}{r} \sin^2 \theta - \frac{v^2}{r} \sin^2 \theta &= -\varepsilon p'_1 \cos^2 \theta - \varepsilon p'_0, \\ uv' \sin \theta \cos \theta + \frac{v^2}{r} \sin \theta \cos \theta + \frac{uv}{r} \sin \theta \cos \theta &= \frac{\varepsilon p_1}{r^2} \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon \left[ \frac{d}{dr} (ur^2) \sin \theta \cos \theta + rv^2 \sin \theta \cos \theta \right] &= 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения должны выполняться при любых значениях угла  $\theta$ . Поэтому, заменяя  $\sin^2 \theta$  через  $1 - \cos^2 \theta$  и умножая второе соотношение на  $(-1)$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} uu' + \frac{uv}{r} + \frac{v^2}{r} &= -\varepsilon p'_1, \\ \frac{uv+v^2}{r} &= \varepsilon p'_0, \\ uv' + \frac{uv+v^2}{r} &= 2\varepsilon \frac{p_1}{r}, \\ u'r^2 + 2ru + 2rv &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Получили систему четырех уравнений для определения 4-х функций  $u, v, p_0, p_1$  от переменной  $r$ .

Последнее уравнение из системы (4.1) можно упростить.

$$u + v = -\frac{u'r}{2} \tag{4.2}$$

Преобразуем систему (4.1) с учетом уравнения (4.2)

$$\begin{aligned} uu' - v \frac{u'}{2} &= -\varepsilon p'_1, \\ v &= -u - \frac{u'r}{2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$uv' - \frac{vu'}{2} = \frac{2\varepsilon p_1}{r},$$

$$vu' = 2\varepsilon p'_0.$$

Используя второе уравнение, исключим  $V$  из остальных уравнений и получим систему уравнений в виде

$$3uu' + \frac{1}{2}r(u')^2 = -2\varepsilon p'_1,$$

$$u\left(-u' - \frac{u'}{2} - \frac{r}{2}u''\right) + \frac{u'}{2}\left(u + \frac{u'r}{2}\right) = \frac{2\varepsilon p_1}{r},$$

$$u'u + \frac{(u')^2 r}{2} = 2\varepsilon p'_0,$$

$$v = -u - \frac{u'r}{2}.$$
(4.4)

Второе уравнение этой системы после приведения подобных членов умножим на  $r$

$$\frac{1}{4}r^2(u')^2 - ruu' - \frac{1}{2}r^2uu'' = 2\varepsilon p_1$$
(4.5)

Теперь мы его продифференцируем и опять приведем подобные члены. Тогда получим:

$$\boxed{\frac{1}{2}r(u')^2} + \frac{1}{2}r^2u'u'' - \boxed{r(u')^2} - ruu'' - uu' - ruu'' - \frac{1}{2}r^2u'u'' -$$

$$\frac{1}{2}r^2uu''' = 2\varepsilon p'_1.$$

Это уравнение сложим (после приведения подобных членов) с первым уравнением. Тогда получим одно уравнение для определения функции  $u(r)$

$$\frac{1}{2}r^2uu''' + 2ruu'' - 2uu' = 0$$

Зная  $u(r)$ , из 2-го уравнения найдем  $p_1$ , из 3-го —  $p_0$ , и из 4-го —  $v(r)$ .

Сократим это уравнение для  $u(r)$  на  $u$  введем новую искомую функцию  $g(r)=u'$ . Тогда получим уравнение второго порядка

$$\frac{1}{2} r^2 g'' + 2r g' - 2g = 0 \quad (4.6)$$

Это уравнение Эйлера. Его решение будем искать в виде

$$g(r) = r^m, \quad g' = m r^{m-1}, \quad g'' = m(m-1)r^{m-2}$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.6) и сократим на  $r^m$ . Тогда получим:

$$\frac{1}{2} m(m-1) + 2m - 2 = 0 \quad \text{или} \quad m^2 + 3m - 4 = 0.$$

Находим корни этого квадратного уравнения

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -4$$

и получаем два линейно независимых частных решения уравнения Эйлера. Линейная комбинация этих двух частных решений и даст нам общее решение уравнения (4.6)

$$g(r) = ar + br^{-4}.$$

Но  $g(r) = u'(r)$ , следовательно

$$\boxed{u(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{-3} + C_0} \quad (4.7)$$

Из второго уравнения системы (4.3) для функции  $v(r)$  получим

$$\boxed{v(r) = -2C_1 r^2 + \frac{1}{2} C_2 r^{-3} - C_0} \quad (4.8)$$

Для определения функции  $p_1(r)$  подставим (4.7) в (4.5):

$$2\varepsilon p_1 = \frac{1}{4} r^2 \left( 2C_1 r - 3 \frac{C_2}{r^4} \right)^2 - r \left( C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^3} + C_0 \right) \left( 2C_1 r - 3 \frac{C_2}{r^4} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} r^2 \left( C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^3} + C_0 \right) \left( 2 C_1 + 12 \frac{C_2}{r^5} \right).$$

Откроем скобки

$$2 \varepsilon p_1 = C_1^2 r^4 - 3 \frac{C_1 C_2}{r} + \frac{9 C_2^2}{4 r^6} - \left( 2 C_1^2 r^4 + 2 \frac{C_1 C_2}{r} + 2 C_1 C_0 r^2 - 3 \frac{C_1 C_2}{r} - \right. \\ \left. - 3 \frac{C_1 C_2}{r} - \frac{3 C_2^2}{r^6} - 3 \frac{C_0 C_2}{r^3} \right) - \left( C_1^2 r^4 + \frac{C_1 C_2}{r} + C_1 C_0 r^2 + \frac{6 C_1 C_2}{r} + \frac{6 C_2^2}{r^6} + \frac{6 C_0 C_2}{r^3} \right)$$

и приведем подобные члены. Тогда для  $p_1(r)$  получим формулу

$$p_1 = - \frac{1}{\varepsilon} \left[ C_1^2 r^4 + \frac{3}{2} C_1 C_0 r^2 + \frac{9}{2} \frac{C_1 C_2}{r} + \frac{3}{2} \frac{C_0 C_2}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{C_2^2}{r^6} \right] \quad (4.9)$$

Определим теперь  $p_0(r)$ . Для этого подставим (4.7) в третье уравнение системы (4.4) и откроем скобки:

$$2 \varepsilon p_0' = u u' + \frac{1}{2} r (u')^2 = \left( C_1 r^2 + C_2 r^{-3} + C_0 \right) \left( 2 C_1 r - 3 \frac{C_2}{r^4} \right) + \\ + \frac{1}{2} r \left( 4 C_1^2 r^2 - 12 \frac{C_1 \cdot C_2}{r^3} + 9 \frac{C_2^2}{r^8} \right) = \underline{2 C_1^2 r^3} + \underline{\underline{2 \frac{C_1 \cdot C_2}{r^2}}} + 2 C_1 C_0 r - \\ - \underline{\underline{3 \frac{C_1 C_2}{r^2}}} - 3 \frac{\tilde{N}_2^2}{r^7} - 3 \frac{C_0 C_2}{r^4} + \underline{2 C_1^2 r^3} - \underline{\underline{6 \frac{C_1 \cdot C_2}{r^2}}} + \frac{9 \tilde{N}_2^2}{2 r^7}$$

После приведения подобных членов найдем  $p_0'$

$$p_0' = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 2 C_1^2 r^3 + C_1 C_0 r - \frac{7 C_1 C_2}{2 r^2} - \frac{3 C_0 C_2}{2 r^4} + \frac{3 C_2^2}{4 r^7} \right]$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$p_0(r) = \left[ \frac{1}{2} C_1^2 r^4 + \frac{C_1 C_0}{2} r^2 + \frac{7}{2} \frac{C_1 C_2}{r} + \frac{1}{2} \frac{C_0 C_2}{r^3} - \frac{1}{8} \frac{C_2^2}{r^6} + C_3 \right] \quad (4.10)$$

Для определения величин  $C_0, C_1, C_2, C_3$  имеем граничные условия:

$$\begin{aligned} u(1) = 0; \quad u(R_s) = -\varepsilon; \quad v(R_s) = 1; \\ p_1(R_s) = \frac{2}{k+1} = 1 - \varepsilon; \quad p_0(R_s) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подставим формулы (4.7) - (4.10) в условия (4.11):

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_0 &= 0, \\ C_1 R_s^2 + \frac{C_2}{R_s^3} + C_0 &= -\varepsilon, \\ 2 C_1 R_s^2 - \frac{C_2}{2 R_s^3} + C_0 &= -1, \\ C_1^2 R_s^4 + \frac{3}{2} C_1 C_0 R_s^2 + \frac{9}{2} \frac{C_1 C_2}{R_s} + \frac{3}{2} \frac{C_0 C_2}{R^3} + \frac{3}{8} \frac{C_2^2}{R^6} &= -\varepsilon(1 - \varepsilon), \\ C_3 &= -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} C_1^2 R_s^4 + \frac{C_1 C_0}{2} R_s^2 + \frac{7}{2} \frac{C_1 C_2}{R_s} + \frac{1}{2} \frac{C_0 C_2}{R_s^3} - \frac{1}{8} \frac{C_2^2}{R_s^6} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом имеем 5 уравнений для определения величин  $C_0, C_1, C_2, C_3$  и формы фронта головной ударной волны  $r = R_s$ . Пятое уравнение прямо определит величину  $C_3$ , если известны  $C_1, C_2, C_0$  и  $R_s$ .

С помощью первого уравнения системы (4.12) исключим  $C_0$  из последующих трех уравнений этой системы.

Имеем  $C_0 = -(C_1 + C_2)$ . Тогда получим систему трех уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2$  и  $R_s$ :

$$\begin{aligned}
C_1(1 - R_s^2) + C_2\left(1 - \frac{1}{R_s^3}\right) &= \varepsilon, \\
C_1(1 - 2R_s^2) + C_2\left(1 + \frac{1}{2R_s^3}\right) &= 1, \\
C_1^2 R_s^4 - \frac{3}{2} C_1 R_s^2 (C_1 + C_2) + \frac{9}{2} \frac{C_1 C_2}{R_s} - \\
- \frac{3}{2} \frac{C_2 (C_1 + C_2)}{R_s^3} + \frac{3}{8} \frac{C_2^2}{R_s^6} &= -\varepsilon(1 - \varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Из первых двух уравнений этой системы можно выразить  $C_1$  и  $C_2$  через  $R_s$ , чтобы подставить в третье уравнение. Тогда получается уравнение для определения формы головной ударной волны. Это уравнение для  $R_s$  оказывается достаточно сложным уравнением высокой степени. Поэтому, учитывая основные предположения метода постоянной плотности, его решение обычно ищут в виде:  $R_s = 1 + \delta$ , где  $\delta \ll 1$ .

В результате такого приближенного подхода (отбрасываются высшие степени величины  $\delta$ ) для формы фронта головной ударной волны получается формула  $R_s = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Здесь поправочный коэффициент определяется в одной точке. Можно увеличить число таких коэффициентов и определять их из условия наилучшего приближения в среднем.

В литературе предлагаются различные варианты для зависимости давления в данной точке поверхности обтекаемого тела от угла, определяющего ориентацию элемента поверхности по отношению к набегающему потоку:

$$\begin{aligned}
p &= \cos^2 \theta (p_0 + p_1 \cos 2\theta), \\
p &= a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos^2 \theta, \\
p &= \sum_{j=0}^n A_j (\cos \theta)^j.
\end{aligned}$$

Есть также попытки ввести в формулу поправки на угол атаки.

## 5. Определение аэродинамических коэффициентов на основе локальной теории

Локальные формулы для  $p(\theta)$  дают возможность вычислять суммарные аэродинамические коэффициенты (коэффициент лобового сопротивления  $C_x$ , коэффициент подъемной силы  $C_y$  и коэффициент момента аэродинамической силы относительно оси  $z$   $C_{mz}$ ) путем интегрирования по поверхности тела без детального исследования поля течения газа [12].

На элементарную площадку  $dB$  обтекаемого тела ( $B$ ) (см. Рис. 5.1) с внешней нормалью  $\bar{n}$  действует аэродинамическая сила, равная  $-p\bar{n}$ . Знак минус необходим, так как нормаль  $\bar{n}$  является внешней.

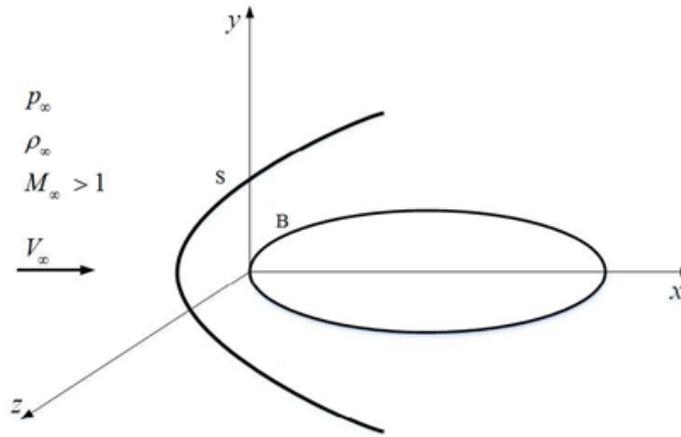


Рис. 5.1. Система координат.

Если отнести суммарную силу, действующую на тело ( $B$ ), к  $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \pi R^2$ , где  $R$  – максимальный радиус сечения осесимметричного тела плоскостью, перпендикулярной оси симметрии, то получим

$$\bar{C} = \frac{\bar{Q}}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \pi R^2} = -\frac{2}{\pi R^2} \iint_{(B)} p \bar{n} dB.$$

Момент, действующий на тело, отнесем к  $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \pi R^2 L$ , где  $L$  – характерный продольный размер тела. Тогда получим:

$$\bar{C}_m = -\frac{2}{\pi R^2 L} \iint_{(B)} p(\bar{r} \times \bar{n}) dB.$$

Если давление  $p$  определяется по модифицированной формуле Ньютона

$$p(\theta) = \begin{cases} p_0 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0}, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases},$$

то область интегрирования ограничивается той частью поверхности  $(B)$ , которая видна со стороны набегающего потока. Граница ее определяется уравнением  $\cos \theta = 0$ . Тогда аэродинамические коэффициенты силы и момента можно записать в виде [12]

$$\bar{C} = -\frac{2p_0}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0} \iint_{(B_*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n})^2 \bar{n} dB, \quad (5.1)$$

$$\bar{C}_m = -\frac{2p_0}{\pi R^2 L \cos^2 \theta_0} \iint_{(B_*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n})^2 (\bar{r} \times \bar{n}) dB,$$

где  $B_*$  – поверхность тела, видимая со стороны набегающего потока.

Пусть единичный вектор скорости  $\bar{V}_0$  в системе координат  $(l, r, z)$  имеет компоненты

$$V_{0l} = \cos \alpha, \quad V_{0r} = \sin \alpha \cdot \cos \varphi, \quad V_{0z} = \sin \alpha \cdot \sin \varphi. \quad (5.2)$$

Здесь углы  $\alpha$  и  $\varphi$  характеризуют ориентацию тела по отношению к набегающему потоку. Этими углами могут быть, например, угол атаки и угол скольжения, углы сферической системы координат, угол атаки и меридиональный угол и др.

Дифференцируя  $\bar{C}$  по  $\alpha$  и  $\varphi$ , получим

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} = -\frac{4p_0}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0} \iint_{(B_*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n}) \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} \cdot \bar{n} \right) \bar{n} dB, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} = - \frac{4p_0}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0} \iint_{(B^*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n}) \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \cdot \bar{n} \right) \bar{n} dV .$$

При этом дифференцирование по пределам интеграла вклада не дает, так как подынтегральное выражение на границе аэродинамической тени обращается в ноль.

Умножая  $\bar{C}$  на  $\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi}$ , а производные от выражений (5.3) на  $\bar{V}_0$ ,

получим:

$$\begin{aligned} 2\bar{C} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} \cdot \bar{V}_0, \\ 2\bar{C} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} \cdot \bar{V}_0. \end{aligned} \tag{5.3a}$$

Эти соотношения между безразмерной силой и ее производными справедливы для тел любой формы.

Умножая теперь  $\bar{C}$  на  $\bar{V}_0$ , производные от выражений (5.3) на соответствующие от  $\bar{V}_0$ , получим:

$$\begin{aligned} 2\bar{C} \cdot \bar{V}_0 + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \right)^{-2} = \\ = - \frac{4p_0}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0} \iint_{(B^*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n}) \left[ (\bar{V}_0 \cdot \bar{n})^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} \cdot \bar{n} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \cdot \bar{n} \right)^2 \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \right)^{-2} \right] dV . \end{aligned}$$

В силу формул (5.2) выражение в квадратных скобках обращается в единицу. Тогда имеем

$$2\bar{C} \cdot \bar{V}_0 + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \right)^{-2} = \frac{4p_0 B'}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0}, \quad (5.4)$$

где  $B' = - \iint_{(B^*)} (\bar{V}_0 \cdot \bar{n}) dB$  – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную набегающему потоку. Соотношение (5.4) зависит от формы тела только через  $B'$ .

Аналогичную формулу можно получить и для момента  $\bar{C}_m$ .

В осесимметричном случае будем иметь

$$\bar{C} = C_x \bar{V}_0 + C_y \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \bar{V}_0 + \left( C_x + \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \alpha^2},$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \varphi} = C_x \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} + C_y \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \alpha \partial \varphi}.$$

В силу соотношений (5.2) векторы  $\bar{V}_0$ ,  $\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi}$  взаимно ортогональны,

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \alpha^2} = -\bar{V}_0, \quad \sin \alpha \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \alpha \partial \varphi} = \cos \alpha \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \left| \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \varphi} \right| = \sin \alpha.$$

Тогда второе соотношение из (5.3а) обращается в тождество, а из первого соотношения (5.3а) и из (5.4) получим:

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} = 3C_y,$$

$$4C_x + \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} + C_y \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4p_0 B'}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0}. \quad (5.5)$$

Исключая отсюда  $C_y$ , приходим к одному дифференциальному уравнению, связывающему  $C_x$  и  $B'$ :

$$\frac{\partial^2 C_x}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} + 12C_x = \frac{12p_0}{\pi R^2 \cos^2 \theta_0} B'. \quad (5.6)$$

В плоском случае вместо (5.6) имеем

$$\frac{\partial^2 C_x}{\partial \alpha^2} + 9C_x = \frac{6p_0}{\cos^2 \theta_0} \frac{B'}{R}.$$

Полученные соотношения позволяют уменьшить объем вычислений при расчете аэродинамических сил по теории Ньютона. Если известна (например, из эксперимента или расчетов) зависимость от угла атаки для какого-то тела одного из аэродинамических коэффициентов, то легко получить информацию и о другом. С другой стороны, если известна зависимость  $B'(\alpha)$ , то можно получить  $C_x(\alpha)$  и  $C_y(\alpha)$ , не зная во всех деталях геометрии тела. Кроме того, найденные связи позволяют установить законы подобия аффинно-неподобных тел в ньютоновском потоке.

Для углов атаки, при которых рассматриваемая поверхность осесимметричного тела обтекается без затенения, можно получить конечные соотношения между аэродинамическими коэффициентами

$$C_x \sin \alpha (5 \cos^2 \alpha - 1) + C_y \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 3) = \frac{2p_0}{\cos^2 \theta_0} \sin 2\alpha \cos^2 \alpha.$$

Вывод основан на вычислениях и преобразованиях и никаких новых идей не содержит.

Все эти результаты были получены при условии, что давление вычисляется по модифицированной формуле Ньютона. Но так как в литературе предлагались различные обобщения этой формулы, то не заставили себя долго ждать и обобщения результатов, которые вытекают из обобщения формулы Ньютона.

При этом обнаружилась тесная связь аэродинамических коэффициентов с дифференциальными уравнениями. Опуская громоздкие выкладки, познакомимся вкратце с этими результатами.

Пусть давление аппроксимируется формулой

$$p = \sum_{j=0}^m \lambda_j u_j(\theta) , \quad u_j\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 . \quad (5.7)$$

В литературе встречаются разные варианты:

$$u_j(\theta) = \begin{cases} \cos^j \theta , \\ \cos j\theta , \\ \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^j , \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Тогда  $C_x$  можно записать в виде

$$C_x = \sum_{j=0}^m \lambda_j S_j , \quad S_j = \iint_{S_*} u_j(\theta) dS , \quad (5.8)$$

где  $S_*$  — освещенная часть  $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  поверхности обтекаемого тела. Здесь

$S_j$  называются функциями формы, а  $\lambda_j$  — коэффициентами режима.

Набор функций формы  $\{S_j\}$  определяется только формой поверхности тела, а набор коэффициентов режима  $\{\lambda_j\}$  характеризует газодинамические условия обтекания. При этом предполагается, что коэффициенты режима не

зависят от углов, определяющих положение тела по отношению к набегающему потоку.

Коэффициенты режима  $\{\lambda_j\}$  и их число  $m + 1$  определяются по данным уже решенной задачи или из эксперимента для другого тела. Функции формы для других компонент силы, действующей на обтекаемое тело, получаются из  $S_j$  дифференцированием по соответствующим углам  $\alpha$  и  $\varphi$ , задающим ориентацию тела по отношению к вектору скорости набегающего потока, а коэффициенты режима, вообще говоря, отличны от  $\{\lambda_j\}$  и должны определяться дополнительно.

В вычислительном отношении определение функций формы  $S_j$  по формуле (5.8) не представляет серьезного труда, но для аналитических исследований использовать формулу (5.8) не удобно. Дело в том, что  $S_j$  есть функция углов  $\alpha$  и  $\varphi$ , определяющих взаимную ориентацию тела и потока, и эти углы входят в  $\theta$  и пределы интегрирования в формуле (5.8). В связи с этим для проведения аналитических исследований весьма полезно выделить функциональную зависимость  $S_j$  от  $\alpha$  и  $\varphi$ .

Для этого воспользуемся следующим искусственным приемом.

Пусть  $f(\rho)$  — произвольная дважды дифференцируемая функция,  $\rho = \cos \theta$ , а орт скорости набегающего потока в системе координат, связанной с телом, имеет такое представление

$$-\overline{V}_0 = (\cos \varphi \sin \alpha, \sin \varphi \sin \alpha, \cos \alpha).$$

Тогда справедливо тождество

$$\frac{d}{d\rho} (1 - \rho^2) \frac{d}{d\rho} f(\rho) = \left[ \operatorname{cosec}^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] f(\rho).$$

При этом  $\theta = \theta(\alpha, \varphi)$ . Подставим сюда вместо  $f(\rho)$  функцию  $u_j(\arccos \rho) \equiv V_j(\rho)$  и проинтегрируем по освещенной части поверхности, то есть по  $S_*$ . Тогда получим

$$S_{j,\varphi\varphi} \operatorname{cosec}^2 \alpha + S_{j,\alpha\alpha} + S_{j,\alpha} \operatorname{ctg} \alpha \iint_{S_*} \frac{d}{d\rho} (1 - \rho^2) \frac{d}{d\rho} V_j(\rho) dS \quad (5.9)$$

Здесь использованы обозначения:

$$S_{j,\alpha} = \frac{\partial S_j}{\partial \alpha}, \quad S_{j,\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 S_j}{\partial \alpha^2}, \quad V_j(0) = V_{j,\rho}(0) = 0.$$

Введем неотрицательную функцию  $q(\rho, \alpha, \varphi)$  следующим образом:

$$\int_0^1 V_j(\rho) q(\rho, \alpha, \varphi) d\rho = S_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Тогда, зная набор функций  $\{u_j\}$  и функцию  $q$ , найдем все  $S_j$ . Затем, подставляя (5.10) в (5.9), получим уравнение для функции  $q(\rho, \alpha, \varphi)$

$$q_{\varphi\varphi} \operatorname{cosec}^2 \alpha + q_{\alpha\alpha} + q_{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha + 2\rho q_{\rho} + \rho^2 q_{\rho\rho} = q_{\rho\rho} \quad (5.11)$$

Таким образом, функция  $q(\rho, \alpha, \varphi)$  является, как говорят, «производящей функцией» для функций формы  $S_j$ , а  $S_j$  – обобщенные моменты (по системе  $V_j(\rho)$ ).

Если перейти к декартовым координатам

$$x_1 = \rho \cos \varphi \sin \alpha, \quad y_1 = \rho \sin \varphi \sin \alpha, \quad z_1 = \rho \cos \alpha,$$

то уравнение (5.11) запишется в более компактной форме

$$\rho^2 \Delta q = q_{\rho\rho}. \quad (5.12)$$

Так как  $0 \leq \rho = \cos \theta \leq 1$ , то решение этого уравнения надо искать только в области, где оно имеет гиперболический тип. Уравнение (5.12) в этой области отличается от трехмерного волнового уравнения только тем, что роль времени играет расстояние  $\rho$  точки от начала координат в пространстве  $x_1, y_1, z_1$  и скорость распространения волны также равна  $\rho$ .

Теперь посмотрим, какие результаты можно получить, используя такой подход.

При  $u_j(\theta) = \cos^j \theta$  получается рекуррентная система линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Пуассона, в которой каждое уравнение связывает  $S_j$  с  $S_{j-2}$ . При этом дифференциальный оператор действует только на  $S_j$ .

Положим далее

$$u_j(\theta) = P_j(\cos \theta), \quad (5.13)$$

где  $P_j(\rho)$  — полиномы Лежандра

$$P_j(\rho) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(\rho^2 - 1)^n]}{d\rho^n}, \quad n = j,$$

которые удовлетворяют уравнению Лежандра

$$(1 - \rho^2)P_j'' - 2\rho P_j' + j(j+1)P_j = 0. \quad (5.14)$$

Их иногда называют шаровыми функциями.

При этом  $P_0(\rho) = 1$ ,  $P_1(\rho) = \rho$ .

Условие непрерывности  $p(\theta)$  на границе с аэродинамической тенью (при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) выполняется в случае, если

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j P_j(0) = 0. \quad (5.15)$$

Тогда из (5.11) получим (с учетом (5.14))

$$\mathcal{D}_j S_j = P_j(0) \mathcal{D}_0 S_0 - P_j^1(0) \mathcal{D}_1 S_1 \quad (5.16)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + (j+1)j, \quad j \geq 2,$$

$$P_j^1(\rho) = -\sqrt{1-\rho^2} \frac{dP_j(\rho)}{d\rho}.$$

Таким образом, при условии (5.13), (5.15) вместо рекуррентной системы мы имеем систему несвязанных (т.е. независимых друг от друга) уравнений при  $j = 2, 3, \dots$ .

При этом можно показать, что и в этом случае сохраняется полезное свойство пропорциональности функций формы для  $C_y$ ,  $C_z$  и производных от функций формы для  $C_x$ , имеющее место, как было показано ранее, в наиболее распространенной модели локальной теории, когда  $u_j(\theta) = \cos^j \theta$ . Здесь уже достаточно наглядно видны преимущества рассмотренного более общего подхода (см. формулу (5.7)).

Рассмотрим теперь осесимметричный случай, в котором хорошо определены границы тени и тем самым изложенная процедура приобретает большую конкретность и наглядность. Тогда  $S_j$ , а, следовательно, и  $q(\rho, \alpha, \varphi)$  уже не зависят от угла  $\varphi$ . Из (5.11) имеем

$$q_{\alpha\alpha} + (\rho^2 - 1) q_{\rho\rho} + q_{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha + 2\rho q_{\rho} = 0.$$

Уравнение характеристик для этого уравнения запишется в виде

$$(d\rho)^2 - (1 - \rho^2)(d\alpha)^2 = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\alpha \mp \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \alpha \mp \int \frac{d(\cos \theta)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = const.$$

Переходя к характеристическим переменным

$$\xi = \alpha + \theta - \pi/2, \quad \eta = \alpha - \theta + \pi/2,$$

придем к уравнению

$$2(\sin \eta + \sin \xi)q_{\xi\eta} + \cos \eta q_{\xi} + \cos \xi q_{\eta} = 0.$$

Это же уравнение в свою очередь с помощью замены переменных  $x = \sin \eta$ ,  $y = \sin \xi$  приводится к уравнению Эйлера-Дарбу

$$q_{xy} = \frac{q_x - q_y}{2(x - y)}.$$

Решение задачи Гурса для этого уравнения выражается с помощью функции Римана, которая для полученного уравнения Эйлера-Дарбу известна в аналитической форме (см., например, [13]).

Пусть тело образовано вращением кусочно-гладкой кривой  $OK$  вокруг оси  $\ell$ . Пусть образующая задана в параметрической форме

$$\ell = \ell(\gamma) \geq 0, \quad r = r(\gamma) \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_1.$$

Начало связанной с телом системы координат  $(\ell, r, z)$  поместим в носке тела, ось  $r$  направим в плоскости  $(\bar{\ell}, \bar{\nu})$ ,  $\alpha$  — угол атаки —  $\alpha = (\bar{\ell}, \bar{\nu})$ ,  $\varphi$  — угол поворота тела вокруг оси  $\ell$  (угол вращения)  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Тогда на поверхности тела имеем

$$\ell = \ell(\gamma), \quad r = r(\gamma) \cos \varphi, \quad z = r(\gamma) \sin \varphi,$$

$$\cos \theta = \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{r'(\gamma)}{\ell'(\gamma)},$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной к оси  $\ell$ .

$$dS = r \sqrt{(\ell')^2 + (r')^2} d\gamma d\varphi,$$

$$S_j(\alpha) = 2 \int_0^{\gamma_1} \int_{\varphi_1}^{\pi} u_j(\theta) r(\gamma) \sqrt{(\ell')^2 + (r')^2} d\varphi d\gamma, \quad (5.17)$$

при этом

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0 & \sin(\beta - \alpha) > 0, \\ \varphi_0 & \sin(\beta - \alpha) \leq 0 < \sin(\beta + \alpha), \\ \pi & \sin(\beta + \alpha) \leq 0. \end{cases}$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Сравнивая (5.17) и (5.10), для тела вращения имеем

$$q(\rho, \alpha) = 2 \int_0^{\gamma_1} r(\gamma) |r'(\gamma)| q_\beta(\rho, \alpha) d\gamma,$$

где  $q_\beta(\rho, \alpha)$  — функция  $q(\rho, \alpha)$  для острого кругового конуса с углом полураствора  $|\beta|$ , касающегося данного тела в точке  $\gamma$  и имеющего с телом общую ось вращения.

Тогда естественно использовать для определения  $C_x$  следующую формулу

$$C_x(\alpha) = 2 \int_0^{\gamma_1} r(\gamma) |r'(\gamma)| \frac{\pi}{S_0(\alpha)} C_x^j(\beta, \alpha) d\gamma,$$

где  $C_x^j(\beta, \alpha)$  — коэффициент сопротивления острого кругового конуса с углом полураствора  $|\beta|$ , касающегося данного тела в точке  $\gamma$  и имеющую с ним общую

ось вращения,  $S_0(\alpha)$  – площадь основания этого конуса, совпадающая с площадью освещенной части поверхности рассматриваемого тела вращения.

Таким образом, мы пришли к так называемому методу местных конусов. Этот метод появился в сверхзвуковой газовой динамике в конце сороковых годов прошлого столетия. Одним из первых его создателей был С. В. Валландер, который предложил этот метод как первое приближение при разложении решения задачи по отношению ординаты к местному радиусу кривизны в осевой плоскости. И хотя следующие приближения оказались слишком громоздкими и не нашли широкого применения, первое приближение под названием метода касательных конусов и клиньев осталось в арсенале гиперзвуковой аэродинамики. Сейчас по аналогии пытаются строить метод касательных сфер и цилиндров для различных классов тел.

В заключение данного раздела отметим один интересный частный случай, когда производится расчет тела вращения при  $S_0 = const$ , то есть постоянна площадь освещенной поверхности тела при изменении угла атаки  $\alpha$  (например, для сферы). Пусть справедливы формулы (5.13) и (5.15):

$$u_j(\theta) = P_j(\cos \theta). \text{ и } \sum_{j=0}^m \lambda_j P_j(0) = 0.$$

Тогда из (5.16) имеем

$$\mathcal{D}_j S_j = 0.$$

Когда  $S_0$  не зависит от  $\alpha$ , а  $S_1 = a_1 \cos \alpha$ , то ограниченное решение этого уравнения пропорционально полиномам Лежандра

$$S_j(\alpha) = a_j P_j(\cos \alpha), \quad j \geq 2.$$

Эти условия выполняются, в частности, когда граница тени не зависит от  $\alpha$ , то есть при  $\beta \geq \alpha$ ,  $\beta = \arctg \frac{r'}{\ell}$ , где  $\ell(\gamma)$  и  $r(\gamma)$  – параметрические уравнения образующей тела вращения.

Рассмотренный частный случай интересен тем, что здесь функции формы  $S_j$  весьма просто сводятся к коэффициентам формы  $\alpha_j$ . Отсюда вытекает, что при  $\beta \geq \alpha$  соответствующие таблицы для  $\alpha_j$  содержат всего лишь линейные комбинации полиномов Лежандра  $P_{2j+1}(\cos \alpha)$ .

## 6. Тела наименьшего сопротивления

При больших сверхзвуковых скоростях сопротивление, связанное с возникновением ударных волн, существенно зависит от формы тела и может быть весьма значительным.

При обтекании не очень тонких тел оно намного превосходит сопротивление, вызываемое наличием вязкого трения. Поэтому естественны попытки отыскания теоретическим путем формы тел, имеющих наименьшее сопротивление при данной скорости движения в идеальном газе и при выполнении тех или иных дополнительных условий (например, при заданных объеме и длине или при заданных продольном и поперечном размерах тела и т.п.).

Большое число разнообразных задач об определении формы тел, обладающих наименьшим сопротивлением в сверхзвуковом потоке, решено в рамках линейной теории. Согласно этой теории в плоском потоке профилем минимального сопротивления при заданной наибольшей относительной толщине является профиль ромбовидного сечения с положением наибольшей толщины в середине хорды. При других дополнительных условиях образующие профилей, обладающих в рамках линейной теории наименьшим сопротивлением, также состоят из отрезков прямых линий. Для примера укажем, что при  $M = 2$  и наибольшей относительной толщине профиля, равной 0,1, коэффициент сопротивления наиболее выгодного профиля равен 0,0226, а коэффициент сопротивления профиля, образованного дугами окружности, равен 0,0308.

Первая задача о теле вращения с минимальным сопротивлением при сверхзвуковой скорости была решена Карманом еще в 1936 году [14]. Он определил форму головной части тела вращения с минимальным сопротивлением при заданном удлинении (удлинение – это отношение размаха крыла к средней хорде).

Уравнение ее имеет вид (длина тела принята за единицу, ось  $x$  направлена по потоку тела, ось  $y$  — перпендикулярно к нему,  $y = y_1$  при  $x = 1$ ):

$$y = y_1 \sqrt{\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} - \frac{2}{\pi} \sqrt{x(1-x)}(1-2x)}, \quad y(1) = y_1.$$

Известны также решения некоторых других задач о телах вращения с минимальным сопротивлением, например задачи об определении формы тела, имеющего наименьшее сопротивление при заданном объеме и заданной длине, о форме тела с протоком (внутренним каналом), обладающего минимальным сопротивлением при заданных длине, площади входного отверстия и площади наибольшего сечения.

Ряд вариационных задач решен в рамках линейной теории как для двумерных, так и для пространственных сверхзвуковых течений.

Однако, несмотря на наличие значительного числа решений линеаризованных задач о телах наименьшего сопротивления в сверхзвуковом потоке, эти решения не могут быть использованы при больших сверхзвуковых скоростях.

При таких скоростях для решения вариационной задачи о нахождении тела минимального сопротивления может быть использована формула Ньютона.

Применим формулу Ньютона для нахождения тел, обладающих наименьшим сопротивлением движению при больших сверхзвуковых скоростях.

Суммарную аэродинамическую силу, действующую на обтекаемое тело ( $B$ ), можно представить в следующем виде

$$\bar{Q} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \iint_{(B)} p \bar{n} \, dB \quad .$$

Согласно формуле Ньютона

$$p = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cos^2 \theta,$$

где  $\theta = (\bar{n}, \bar{n} - \bar{V}_\infty)$ ,  $\bar{n}$  – нормаль к поверхности тела, сила сопротивления, приложенная к участку длиной  $l$  поверхности профиля или тела вращения, равна

$$X = \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^l (2\pi y)^{\nu-1} \cos^2 \theta dl$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1 + \frac{1}{y'^2} \text{ и}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{y'^2}{1+y'^2}, \quad y' = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

$$X = \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^l (2\pi y)^{\nu-1} \frac{y'^2}{1+y'^2} y' dx,$$

где  $\nu = 1$  для плоского и  $\nu = 2$  для осесимметричного течения. Это выражение позволяет решать различные задачи об определении формы тел с наименьшим сопротивлением. Рассмотрим, например, простейший случай, когда заданы координаты концов обтекаемого контура, т. е.  $y(0) = y_0$ ,  $y(l) = y_1$  (в плоском потоке всегда можно считать  $y_0 = 0$ ). Отыскание минимума этого выражения для силы сопротивления приводится, как известно, к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (6.1)$$

где  $F = y^{\nu-1} \frac{y'^3}{1+y'^2}$ . Так как функция  $F$  в рассматриваемом случае не содержит  $x$  явно, то

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

и в силу уравнения (6.1) получим

$$0 = \frac{dF}{dx} - \left( y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

Отсюда после интегрирования находим интеграл этого дифференциального уравнения

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

После подстановки значений для  $F$  и  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  этот интеграл приобретает вид

$$\frac{y^{\nu-1} y'^3}{(1 + y'^2)^2} = \text{const.} \quad (6.2)$$

Таким образом, в плоском потоке ( $\nu = 1$ ) экстремали представляют собой прямые линии. Следовательно, телом наименьшего сопротивления в теории Ньютона, как и в линейной теории, является клин.

Заметим, что в точной теории сверхзвуковых течений идеального газа этот результат несправедлив.

В осесимметричном потоке ( $\nu = 2$ ) решение уравнения экстремалей легко представить в параметрической форме, принимая за параметр величину  $t = y'$  — тангенс угла наклона элемента контура тела к направлению набегающего потока. Согласно равенству (6.2), имеем  $y = C \frac{(1+t^2)^2}{t^3}$ .

Чтобы найти зависимость  $x(t)$ , надо проинтегрировать соотношение  $dx = \frac{dy(t)}{t}$ . Тогда получим

$$x = C \left( \frac{3}{4t^4} + \frac{1}{t^2} + \ln t \right) + C_1.$$

В заключение этого раздела отметим, что при использовании формулы Ньютона-Буземана

$$p - p_1 = \rho_1 V_1^2 \left( \sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dS} \int_{S_0}^S \cos \alpha dS \right)$$

для нахождения тел, обладающих наименьшим сопротивлением движению с большими сверхзвуковыми скоростями в плоском случае экстремали также являются прямыми линиями, а в осесимметричном случае решение вариационной задачи представляется в параметрическом виде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чёрный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М. Физматгиз, 1959, – 220 с.
2. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., ИЛ. 1962. – 607 с.
3. Гиро Ж. Основные вопросы теории гиперзвуковых течений. М., «Мир», – 1965. 327 с.
4. Баранцев Р. Г. Гиперзвуковая аэродинамика идеального газа. Л., ЛГУ, 1983, – 116 с.
5. Лунёв В. В. Течение реальных газов с большими скоростями. М. Физматлит. 2007. – 760 с.
6. Богатко В. И., Потехина Е. А. Введение в гиперзвуковую аэродинамику: Учеб. пособие СПб.: Изд-во ВВМ, 2015. 37 с.
7. Богатко В. И., Потехина Е. А. Простейшие примеры установившихся безвихревых сверхзвуковых течений газа: Учеб. пособие СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2014. 39 с.
8. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. Издательство Наука, М. 1970, 344 с.
9. Kopal Z. Tables of Supersonic Flow around Cones. Department of Electrical Engineering Cambridge, Center of Analysis, Massachusetts Institute of Technology, 1947.
10. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф. Аэродинамика ракет. М., Высшая школа, 1968. 772 с.
11. Михеев А. С. Аналитическое решение задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа. Вестник ЛГУ. 1962. № 7.
12. Мирошин Р. Н. Метод моментов в аэродинамике. СПб: Изд-во «ВВМ», 2012. — 141 с.
13. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М., Наука. 1981. – 308 с.
14. Karman Th. The problem of resistance in compressible fluids, Atti Acad. d'Italia (5 Volta Conv.), Roma. 1936.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Формула Ньютона .....	5
2. Метод касательных конусов и клиньев .....	15
3. Формула Ньютона-Буземана .....	28
4. Окрестность точки торможения. Метод постоянной плотности .....	32
5. Определение аэродинамических коэффициентов на основе локальной теории.....	41
6. Тела наименьшего сопротивления .....	54
Литература .....	59