ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977
MSC 49J20

Вариационное условие оптимальности в задаче минимизации нормы конечного состояния составной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений*

А. В. Аргучинцев

Иркутский государственный университет,
Российская Федерация, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1

Для цитирования: *Аргучинцев А. В.* Вариационное условие оптимальности в задаче минимизации нормы конечного состояния составной системой гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 540–548.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410

Исследуется задача оптимального управления линейными гиперболическими системами первого порядка, в которых граничные условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая квадратичного целевого функционала (норма конечного состояния) предложена неклассическая точная формула приращения. На этой основе доказано условие оптимальности вариационного типа. Осуществлена редукция исходной задачи для системы гиперболических уравнений к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гиперболическая система, управляемые граничные условия, минимизация нормы, вариационное условие оптимальности, редукция задачи.

1. Введение. В статье рассматривается задача оптимального управления системой линейных гиперболических уравнений первого порядка, в которой краевые условия на одной из границ определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Составные (каскадные, гибридные) системы взаимосвязанных гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений используются при моделировании ряда процессов динамики популяций [1], взаимодействия потоков жидкости и газа с твердыми телами или гибкими мембранами [2], динамики плазмы [3], динамики кровотока [4] и др. В частности, в моделях популяций с воз-

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/

растной структурой уравнением с гиперболическим дифференциальным оператором описывается развитие популяций, а управление рождаемостью (вброс мальков в водоемы и т. п.) может осуществляться с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе [5] подобная задача была рассмотрена для линейного целевого функционала и линейной правой части обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов, зависящих от управления. На основе применения двух симметричных нестандартных вариантов формул приращения целевого функционала первого порядка получены два симметричных вариационных условия оптимальности. Это позволило свести исходную задачу к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей статье изучен случай квадратичного целевого функционала в виде квадрата нормы отклонения конечного состояния от заданной функции. Для развития идеи [5] пришлось применить уже формулу приращения второго порядка и матричные импульсы Габасова [6]. Основной результат заключается в редукции исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичным критерием качества. Редукция задачи дает возможность очень существенно уменьшить объем вычислительной работы. Наиболее сложным и громоздким является интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными. Применение классических итерационных методов вынуждает решать начально-краевые задачи для исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений на каждой итерации. Полученный результат позволяет ограничиться лишь тремя интегрированиями гиперболических систем.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = B(s,t)x + d(s,t), \tag{1}$$

$$(s,t) \in \Pi, \quad \Pi = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция; $A(s,t)$, $B(s,t)$ — $n\times n$-матрицы. Предполагаем, что система (1) записана в инвариантном виде, т. е. матрица $A(s,t)$ диагональная. Дополнительно считаем, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в Π:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1+1, m_1+2, \dots, m_2,$$

$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2+1, m_2+2, \dots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размера $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размера $(n-m_2)\times(n-m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ также выделим два подвектора, соответствующие положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A:

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n).$$

Поставим для системы (1) управляемые начально-краевые условия. Будем считать, что начальные условия и условия на правой границе прямоугольника Π фиксированы:

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \tag{2}$$

$$x^-(s_1,t) = q(t), \quad t \in T. \tag{3}$$

Краевые условия на другой боковой границе прямоугольника определяются из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_t^+(s_0,t) = C(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(u(t),t), \ \ t \in T, \tag{4}$$

$$x^+(s_0,t_0) = [x^0(s_0)]^+.$$

Здесь $C(u,t)$ — матричная функция размера $m_1 \times m_1$; $b(u,t)$ — m_1-мерная вектор-функция.

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на отрезке T вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению типа включения

$$u(t) \in U, \tag{5}$$

в котором U — компакт из пространства E^r.

Цель задачи — минимизация квадратичного функционала (нормы конечного состояния процесса)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_S \|x(s,t_1) - y(s)\|^2 \, ds, \tag{6}$$

где $y(s)$ — заданная функция, а под нормой понимается обычная евклидова норма в n-мерном пространстве.

Задача оптимального управления (1)–(6) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t), \ i = 1,2,\dots,n$, матрицы A непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике Π;

2) вектор-функции $q(t)$ и $x^0(s)$ непрерывны соответственно на T и S;

3) выполнено условие согласования: $q(t_0) = (x^0(s_1))^-$;

4) матричные функции $B(s,t), C(u,t)$ и вектор-функции $d(s,t), b(u,t), y(s)$ непрерывны по своим аргументам всюду в области своего определения.

Для любого допустимого управления существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(4) из класса непрерывных в Π функций. Отметим, что данное решение, вообще говоря, не является классическим: производные функций x_i по независимым переменным s и t могут не существовать. Однако каждая компонента x_i непрерывно дифференцируема вдоль соответствующего семейства характеристик гиперболической системы [7].

Несмотря на выпуклость целевого функционала (6), рассматриваемая задача оптимального управления не относится к классу линейно-выпуклых. Это вызвано тем, что матрица коэффициентов в правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) зависит от управления. Потому принцип максимума Л. С. Понтрягина здесь не является достаточным условием оптимальности, а для численного решения задач подобного вида обычно применяются общие методы нелинейной теории оптимального управления. Их недостаток — необходимость на каждой итерации решать исходную и сопряженную начально-краевые задачи для уравнений с частными производными.

3. Точная формула приращения целевого функционала. Рассмотрим два произвольных допустимых процесса: $\{u(t), \ x = x(s,t,u)\}$ и $\{\widetilde{u} = u(t) + \Delta u(t), \ \widetilde{x} =$

$x(s,t)+\Delta x = x(s,t,\widetilde{u})\}$. В дальнейшем обозначим дифференциальный оператор в (1) через $D_A x = x_t + A(s,t)x_s$.

Тогда задача в приращениях имеет вид

$$D_A \Delta x = B(s,t)\Delta x, \quad (s,t)\in \Pi,$$

$$\frac{\partial \Delta x^+(s_0,t)}{\partial t} = C(\widetilde{u},t)\widetilde{x}^+(s_0,t) - C(u(t),t)x^+(s_0,t) + \Delta b(u(t),t), \quad t\in T,$$

$$\Delta x(s,t_0)=0, \quad s\in S,$$

$$\Delta x^-(s_1,t)=0, \quad t\in T.$$

Здесь $\Delta b(u,t) = b(\widetilde{u},t) - b(u,t)$.

Для получения точной (без остаточных членов) формулы приращения квадратичного целевого функционала недостаточно введения вектор-функции сопряженных переменных и соответствующей сопряженной задачи. Необходимо использование матричных импульсов Р. Ф. Габасова [6] и соответствующей матричной сопряженной задачи. Для этого в правую часть формулы приращения

$$\Delta J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_S \left(\|\widetilde{x}(s,t_1) - y(s)\|^2 - \|x(s,t_1)-y(s)\|^2\right) ds$$

добавим следующие нулевые слагаемые:

$$\begin{gathered}
\iint\limits_{\Pi} \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle \, ds\, dt,\\
\int\limits_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) - \\
- C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t)\rangle \, dt,\\
\frac{1}{2}\iint\limits_{\Pi} \langle \Psi(s,t)\Delta x(s,t), D_A\Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle \, ds\, dt,\\
\int\limits_T \langle P(t)\Delta x^+(s_0,t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) - \\
- C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t)\rangle \, dt.
\end{gathered} \tag{7}$$

В (7) и далее угловыми скобками обозначены скалярные произведения в конечномерных евклидовых пространствах, $\psi(s,t)$ и $p(t)$ — пока произвольные n-мерная и m_1-мерная вектор-функции, $\Psi(s,t)$ и $P(t)$ — произвольные симметричные $n\times n$ и $m_1\times m_1$ матричные функции соответственно, которые в дальнейшем используются как матричные импульсы Р. Ф. Габасова [6]. При этом мы воспользовались представлением

$$C(\tilde{u},t)\,\tilde{x}^+(s_0,t) - C(u,t)\,x^+(s_0,t) =$$

$$= \Delta_{\tilde{u}} C(u(t),t)\tilde{x}^+(s_0,t) + C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t).$$

Для интегралов по отрезку T применим классическую, а для интегралов по прямоугольнику Π обобщенную [8] формулы интегрирования по частям. При преобразованиях полезным оказывается следующее тождество, справедливое для произвольной симметричной матрицы Q:

$$\langle Q\tilde{x}, \tilde{x}\rangle - \langle Qx, x\rangle = \langle Q\Delta x, \Delta x\rangle + 2\langle Qx, \Delta x\rangle.$$

Наконец, подчиним функции $\psi(s,t)$, $p(t)$, $\Psi(s,t)$, $P(t)$ векторно-матричной сопряженной задаче

$$\begin{gathered} D_A\psi + A_s\psi = -B^T(s,t)\psi, \quad (s,t) \in \Pi, \\ \psi(s,t_1) = y(s) - x(s,t_1), \quad s \in S, \\ \psi^+(s_1,t) = 0, \quad \psi^-(s_0,t) = 0, \quad t \in T, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\dot{p} = -A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t) - C^T(u(t),t)p, \;\; p(t_1) = 0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} D_A\Psi + A_s\Psi = -\Psi(B(s,t) + B^T(s,t)), \quad (s,t) \in \Pi, \\ \Psi(s,t_1) = -E, \quad s \in S, \\ \Psi_{ij}(s_1,t) = 0, \;\; i = 1,2,\ldots,m_1, \;\; j = 1,2,\ldots,n, \\ \Psi_{ij}(s_0,t) = 0, \;\; i = m_2+1, m_2+2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad t \in T, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\dot{P}(t) = -A^+(s_0,t)\Psi^+(s_0,t) - C^T(u(t),t)P - PC(u(t),t), \quad t \in T, \;\; P(t_1) = 0. \tag{11}$$

Здесь B^T и C^T — транспонированные матрицы B и C; E — единичная матрица; вектора ψ^+ и ψ^- аналогичны по размерам векторам x^+ и x^-; нулями обозначены нулевые вектора и матрицы соответствующих размеров.

Окончательно приходим к формуле приращения целевого функционала следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = -\int_T \langle p(t,u) + P(t,u)(x^+(s_0,t,\tilde{u}) - \\ - x^+(s_0,t,u)), \Delta_{\tilde{u}}C(u(t),t)x^+(s_0,t,\tilde{u}) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что при сделанных предположениях решения сопряженных задач (9) и (11) являются абсолютно непрерывными на отрезке T функциями. Для задач (8) и (10) можно гарантировать существование обобщенных решений лишь в классе кусочно-непрерывных функций. Матричная задача (10) не содержит управляющую функцию. Поэтому она может быть решена всего лишь один раз. Если матрица B в правой части исходной гиперболической системы (1) диагональная, то матричная система в (10) превращается в систему из n дифференциальных уравнений.

4. Вариационное условие оптимальности и редукция задачи. Полученная в п. 3 формула приращения целевого функционала (12) является точной (без остаточных членов), хотя рассматриваемая задача оптимального управления не относится к классу линейно-квадратичных. «Плата» за это — присутствие в формуле значений вектор-функции состояния x^+, подсчитываемых как на управлении u, так и на управлении $\tilde{u}$. При этом решение сопряженной задачи определяется на управлении u. Данный факт позволяет получить условие оптимальности вариационного типа и осуществить редукцию исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Зафиксируем произвольное допустимое управление $u(t)$, вычислим соответствующее данному управлению состояние $x^+(s_0, t, u)$ и решим сопряженную задачу (8)–(11). Тем самым определим функции $p(t, u)$ и $P(t, u)$, которые подставим в формулу приращения (12). Рассмотрим следующую задачу оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений для ограниченных и измеримых на отрезке T вектор-функций $v(t)$:

$$I(v) = -\int\limits_T \langle p(t,u) + P(t,u)\,(z(t,v) - x^+(s_0,t,u)), (C(v(t),t) -$$

$$- C(u(t),t))\, z(t,v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\, dt \to \min, \qquad (13)$$

$$\dot{z} = C(v(t),t)z + b(v(t),t), \quad t \in T,$$

$$z(t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+,$$

$$v(t) \in U, \ \ t \in T,$$

в которой $z(t)$ — m_1-мерная функция состояния процесса.

Теорема (вариационное условие оптимальности). *Для оптимальности управления* $\tilde{u}(t)$ *в задаче* (1)–(6) *необходимо и достаточно, чтобы управление* $\tilde{v} = \tilde{u}(t)$ *было оптимальным в задаче* (13).

Доказательство непосредственно следует из доказанной формулы приращения (12).

Полученный результат позволяет осуществить редукцию исходной задачи (1)–(6) к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Действительно, для осуществления редукции нужно выбрать произвольное допустимое управление $u(t)$. Затем следует вычислить соответствующее ему решение $x = x(s, t, u)$ начально-краевой задачи (1)–(4) для исходной гиперболической системы. Далее решить сопряженную задачу (8)–(11) и определить функции $p(t, u)$ и $P(t, u)$. После этого сформировать задачу (13), оптимальное управление в которой, в силу доказанной теоремы, и будет являться решением исходной задачи.

5. Обсуждение результата и заключительные замечания. Прокомментируем полученный результат.

1. Из-за того, что формула приращения (12) справедлива для любой пары допустимых управлений (является нелокальной), доказанная теорема на самом деле представляет не одно, а бесконечно много условий. Каждое из допустимых управлений исходной задачи порождает свое условие оптимальности. Данный факт важен при реализации численных методов.

2. Доказанная теорема — необходимое и достаточное условие оптимальности. При этом она легко может быть сформулирована в виде соответствующего условия глобальной оптимальности.

3. Редукция задачи позволяет на порядки уменьшить объем вычислительной работы. Наиболее сложным и громоздким является интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными. Действительно, применение классических итерационных методов вынуждает решать начально-краевые задачи для исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений на каждой итерации. Изложенная схема редукции дает возможность ограничиться лишь тремя интегрированиями

гиперболических систем: решение исходной начально-краевой задачи (1)–(4), однократное решение сопряженной задачи (8)–(11) и (если это необходимо) итоговое решение исходной начально-краевой задачи (1)–(4) для вычисления состояния процесса, соответствующего оптимальному управлению.

4. Задача оптимального управления (13), к которой свелась исходная задача, имеет специфическую структуру. Ее целевой функционал квадратичный, правая часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений линейна по состоянию, но матрица коэффициентов в этой системе зависит от управления. Для решения подобных задач в билинейных системах с квадратичным функционалом представляется перспективным применять разработанные в последнее время эффективные методы. Среди них можно отметить методы, основанные на нестандартной параметризации задачи [9, 10], использовании сплайн-аппроксимаций [11], второй вариации целевого функционала [12] и др.

5. Использование формул приращения второго порядка позволяет применять предлагаемый подход для улучшения особых неоптимальных управлений.

6. В случае линейного целевого функционала [5] формальная замена $\tilde{u}$ на u и u на $\tilde{u}$ в формуле приращения целевого функционала приводит к симметричной формуле приращения, в которой решение сопряженной задачи подсчитывается на управлении $\tilde{u}$. В рассмотренном варианте квадратичного функционала такого симметричного результата получить не удается, поскольку в формуле приращения целевого функционала будут фигурировать решения как исходной гиперболической системы, так и сопряженной задачи, подсчитываемые на возмущенном управлении $\tilde{u}$.

7. Для уменьшения громоздкости изложения был рассмотрен лишь случай управляемых краевых условий на одной из границ и поточечных ограничений на управления. Без каких-либо особенных затруднений полученный результат распространяется на случаи управляемых стартовых условий, интегральных ограничений на управления и т. п.

Изложенная методика позволяет, вообще говоря, исследовать на предмет получения вариационных условий оптимальности другие классы каскадных систем, например комбинации параболических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Апонин Ю. М., Апонина Е. А., Кузнецов Ю. А.* Математическое моделирование пространственно-временной динамики возрастной структуры популяции растений // Математическая биология и биоинформатика. 2006. Т. 1. № 1. С. 1–16.

2. *Vazquez J. L., Zuazua E.* Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction // Comm. Partial Differential Equations. 2003. Vol. 28. N 9–10. P. 1705–1738. https://doi.org/10.1081/PDE-120024530

3. *Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C.* Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER // Computer Physics Communications. 2017. Vol. 217. P. 43–57. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.04.003

4. *Weihua Ruan.* A coupled system of ODEs and quasilinear hyperbolic PDEs arising in a multiscale blood flow model // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 343. Iss. 2. P. 778–796. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.064

5. *Arguchintsev A. V.* Solution of the problem of the optimal control of initial-boundary conditions of a hyperbolic system based on exact increment formulas // Russian Mathematics. 2002. Vol. 46. N 12. P. 21–27.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 592 с.

8. *Potapov M. M.* A generalized solution of a mixed problem for a first-order semilinear hyperbolic system // Differential Equations. 1983. Vol. 19. N 10. P. 1826–1828.

9. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В.* Параметризация некоторых задач управления линейными системами // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2019. Т. 30. С. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83

10. *Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г.* Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3

11. *Popkov A. S.* Optimal program control in the class of quadratic splines for linear systems // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 4. С. 462–470. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.411

12. *Дривотин О. И.* О численном решении задачи оптимального управления на основе метода, использующего вторую вариацию траектории // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 2. С. 283–295. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.211

Статья поступила в редакцию 9 сентября 2023 г.
Статья принята к печати 12 октября 2023 г.

Контактная информация:

Аргучинцев Александр Валерьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; arguch@math.isu.ru

The variational optimality condition in the problem of minimizing the finite state norm by a composite system of hyperbolic and ordinary differential equations*

A. V. Arguchintsev

Irkutsk State University, 1, ul. K. Marksa, Irkutsk,
664003, Russian Federation

For citation: Arguchintsev A. V. The variational optimality condition in the problem of minimizing the finite state norm by a composite system of hyperbolic and ordinary differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 540–548. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.410 (In Russian)

An optimal control problem for a system of linear first-order hyperbolic equations is studied. The boundary conditions are determined from controlled systems of ordinary differential equations. A nonclassical exact formulae for the increment of a linear performance index (a finite state norm) is suggested. Based on this result, a variational optimality condition is proved. The original optimal control problems for a hyperbolic system is reduced to the problem for systems of ordinary differential equations.

Keywords: hyperbolic system, controlled boundary conditions, norm minimization, variational optimality condition, problem reduction.

References

1. Aponin Yu. M., Aponina E. A., Kuznetsov Yu. A. Matematicheskoe modelirovanie prostranstvenno-vremennoi dinamiki vozrastnoi struktury populyatsii rastenii [Mathematical modeling of space-

* This work was funded by the Russian Science Foundation (project N 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/).

time dynamics of the age structure of the plants population]. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 1–16. (In Russian)

2. Vazquez J. L., Zuazua E. Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations*, 2003, vol. 28, no. 9–10, pp. 1705–1738. https://doi.org/10.1081/PDE-120024530

3. Faugeras B., Blum J., Heumann H., Boulbe C. Optimal control of a coupled partial and ordinary differential equations system for the assimilation of polarimetry Stokes vector measurements in tokamak free-boundary equilibrium reconstruction with application to ITER. *Computer Physics Communications*, 2017, vol. 217, pp. 43–57. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.04.003

4. Weihua Ruan. A coupled system of ODEs and quasilinear hyperbolic PDEs arising in a multiscale blood flow model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 343, iss. 2, pp. 778–796. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.064

5. Arguchintsev A. V. Solution of the problem of the optimal control of initial-boundary conditions of a hyperbolic system based on exact increment formulas. *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 12, pp. 21–27.

6. Gabasov R., Kirillova F. M. *Osobye optimal'nye upravleniya* [*Special optimal controls*]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 256 p. (In Russian)

7. Rozhdestvenskiyi B. L., Yanenko N. N. *Systemi kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* [*Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 592 p. (In Russian)

8. Potapov M. M. A generalized solution of a mixed problem for a first-order semilinear hyperbolic system. *Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 1826–1828.

9. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. Parametrizatsiya nekotorykh zadach upravleniya lineynymi sistemami [Parameterization of some linear systems control problems]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2019, vol. 30, pp. 83–98. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.30.83 (In Russian)

10. Srochko V. A., Aksenyushkina E. V., Antonik V. G. Reshenie lineino-kvadratichnoi zadachi optimal'nogo upravlenia na osnove konechnomernykh modelei [Resolution of a linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional models]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3 (In Russian)

11. Popkov A. S. Optimal program control in the class of quadratic splines for linear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 4, pp. 462–470. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.411

12. Drivotin O. I. O chislennom reshenii zadach optimal'nogo upravleniya na osnove metoda, ispol'zuyuschego vtoruyu variatsiyu traektorii [On numerical solution of the optimal control problem based on a method using the second variation of a trajectory]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 2, pp. 283–295. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.211 (In Russian)

Received: September 9, 2023.
Accepted: October 12, 2023.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

Alexander V. Arguchintsev — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; arguch@math.isu.ru