УДК 519.62 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 4
MSC 70H05, 70H30

Производящие функции оператора Коши гамильтоновой системы*

А. С. Шмыров, В. А. Шмыров, Д. В. Шиманчук

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Шмыров А. С., Шмыров В. А., Шиманчук Д. В.* Производящие функции оператора Коши гамильтоновой системы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 522–528. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.408

В статье исследуется математический аппарат для описания фазовых траекторий гамильтоновой системы. Предложен подход, связанный с построением производящих функций для оператора Коши. Получено, что однопараметрические семейства производящих функций удовлетворяют уравнению Гамильтона — Якоби или его модификациям. На примере малых колебаний математического маятника показано, что описание оператора Коши на достаточно больших промежутках времени требует использования производящих функций различного вида. С помощью производящих функций сформулирован вариационный принцип, аналогичный принципу наименьшего действия. Также отмечена эффективность применения производящих функций при разработке консервативных методов численного интегрирования.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона, производящая функция, оператор Коши, вариационный принцип.

1. Введение. Хорошо известно [1, 2], что оператор Коши гамильтоновой системы сохраняет симплектическую структуру, т. е. является симплектоморфизмом. Отсюда следует, что траектории гамильтоновой системы в фазовом пространстве можно описать, по крайней мере, локально с помощью подходящей производящей функции. Рассмотрим преимущества и недостатки такого подхода на достаточно простых примерах.

2. Производящие функции оператора Коши. Представим гамильтонову систему с гамильтонианом $H(x,y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_2(x,y), \\ \dot{y} &= -H_1(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Через H_1 обозначим вектор частных производных по первым n переменным x_1, …, x_n, а через H_2 — вектор частных производных по второй группе из n переменных.

Пусть

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha(t, x_0, y_0), \\ y(t) &= \beta(t, x_0, y_0) \end{aligned} \tag{2}$$

есть решение задачи Коши для гамильтоновой системы (1) с начальными данными (x_0, y_0), т. е.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/

$$
\begin{aligned}
&\alpha(0, x_0, y_0) = x_0, \\
&\beta(0, x_0, y_0) = y_0.
\end{aligned}
$$

Если зафиксировать время $t = \tau$, то отображение $(x_0, y_0) \to (\alpha(\tau, x_0, y_0), \beta(\tau, x_0, y_0))$ — это оператор Коши, или, как иногда говорят, оператор сдвига вдоль траектории системы (1) на время τ. Если же изменять величину t, то получим однопараметрическое семейство операторов сдвига.

Уравнения (2) можно представить в более удобном виде при выполнении специальных условий разрешимости. Пусть, например, второе уравнение из (2) разрешимо в окрестности в расширенном фазовом пространстве [2] относительно переменной y_0, т. е.

$$
y_0 = \gamma(t, x_0, y).
$$

Тогда в некоторой окрестности точки (t, x_0, y) существует функция $W(x_0, y, t)$ такая, что

$$
\begin{aligned}
&\alpha(t, x_0, \gamma(t, x_0, y)) = W_2(x_0, y, t), \\
&\gamma(t, x_0, y) = W_1(x_0, y, t).
\end{aligned}
$$

На траекториях движения (2) имеем уравнения

$$
\begin{aligned}
&x(t) = W_2(x_0, y(t), t), \\
&y_0 = W_1(x_0, y(t), t).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Они описывают оператор Коши через производящую функцию W. Понятно, что при $t = 0$ отображение Коши есть тождественное отображение, поэтому получаем уравнение

$$
W(x_0, y, 0) = x_0 y. \tag{4}
$$

Выведем уравнения для производящей функции W с помощью дифференцирования (3) по переменной t. Продифференцировав первое уравнение (3), приходим к уравнению

$$
\dot{x}(t) = W_{2t}(x_0, y(t), t) + W_{22}(x_0, y(t), t)\dot{y}(t),
$$

где W_t — частная производная производящей функции W по переменной t. С учетом (1) находим, что

$$
H_2(x(t), y(t)) = W_{2t}(x_0, y(t), t) - W_{22}(x_0, y(t), t) H_1(x(t), y(t)). \tag{5}
$$

Подставим в (5) выражение для x из (3):

$$
H_2(W_2(x_0, y(t), t), y(t)) = W_{2t}(x_0, y(t), t) - W_{22}(x_0, y(t), t) H_1(W_2(x_0, y(t), t), y(t)).
$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$
\frac{\partial}{\partial y} \left(H(W_2(x_0, y(t), t), y(t)) - W_t(x_0, y(t), t) \right) = 0. \tag{6}
$$

Дифференцируя второе уравнение (3) по переменной t, получаем, что

$$0 = W_{1t}(x_0, y(t), t) + W_{12}(x_0, y(t), t)\dot{y}(t),$$

или с учетом (1) и (3)

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(W_t(x_0, y(t), t) - H(W_2(x_0, y(t), t), y(t))\right) = 0. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) можно удовлетворить, положив, что

$$W_t(x_0, y, t) = H(W_2(x_0, y, t), y). \tag{8}$$

Уравнение (8) называется уравнением Гамильтона — Якоби (с точностью до знака гамильтониана) и возникает при попытке построить каноническое преобразование переменных, приводящее систему (1) к интегрируемому виду. Как оказалось, уравнению (8) удовлетворяет и одна из производящих функций для оператора Коши, а именно $W(x_0, y, t)$. Условие (4) задает начальные данные для этого уравнения.

Предположим теперь, что выполнено другое условие разрешимости. А именно, что из первого уравнения (2) можно выразить вектор y_0, т. е.

$$y_0 = \widetilde{\gamma}(t, x_0, x),$$

тогда второе уравнение (2) запишем в виде

$$y = \beta(t, x_0, \widetilde{\gamma}(t, x_0, x)).$$

Существует функция $F(x_0, x, t)$ такая, что

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}(t, x_0, x) = -F_2(x_0, x, t), \\ &\beta(t, x_0, \widetilde{\gamma}(t, x_0, x)) = F_1(x_0, x, t). \end{aligned} \tag{9}$$

Существование функций W и F следует из того, что линейная форма $y_0 dx_0 - \beta d\alpha$ есть полный дифференциал. Перепишем уравнение (9) с учетом (2):

$$\begin{aligned} &y(t) = -F_2(x_0, x(t), t), \\ &y_0 = F_1(x_0, x(t), t) \end{aligned} \tag{10}$$

и продифференцируем по t. Из первого уравнения (10) получаем, что

$$\dot{y}(t) = -F_{22}(x_0, x(t), t)\dot{x}(t) - F_{2t}(x_0, x(t), t),$$

или

$$H_1(x(t), y(t)) = F_{22}(x_0, x(t), t)H_2(x(t), y(t)) + F_{2t}(x_0, x(t), t),$$

а с учетом (10) —

$$H_1(x(t), -F_2(x_0, x(t), t)) = F_{22}(x_0, x(t), t)H_2(x(t), -F_2(x_0, x(t), t)) + F_{2t}(x_0, x(t), t). \tag{11}$$

Уравнение (11) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_t(x_0, x(t), t) - H(x, -F_2(x_0, x(t), t))\right) = 0.$$

Продифференцировав второе уравнение (10), имеем равенство

$$0 = F_{1t}(x_0, x(t), t) + F_{12}(x_0, x(t), t)\dot{x}(t), \tag{12}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(F_t(x_0, x(t), t) - H(x, -F_2(x_0, x(t), t))\right) = 0.$$

Уравнения (11) и (12) можно удовлетворить, положив, что

$$F_t(x_0, x, t) = H(x, -F_2(x_0, x, t)),$$

т. е. опять получим уравнение Гамильтона—Якоби. Однако для функции F мы не можем сформулировать начальные условия вида (4), поскольку для тождественного отображения нужное условие разрешимости не выполнено.

К сожалению, описание оператора Коши с помощью одной производящей функции часто оказывается невозможным из-за нарушения условия разрешимости. Покажем это на примере малых колебаний математического маятника.

Пример. Пусть x — угловая переменная. Уравнения малых колебаний $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ имеют гамильтонову форму с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Оператор Коши задается уравнениями

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t, \\ y(t) &= y_0 \cos t - x_0 \sin t. \end{aligned} \tag{13}$$

Если $\cos t \neq 0$, то из (13) получаем, что

$$y_0 = \frac{y + x_0 \sin t}{\cos t} = W_1(x_0, y, t)$$

и

$$x = \frac{x_0}{\cos t} + y\mathrm{tgt} = \mathrm{W_2(x_0, y, t)},$$

где

$$W(x_0, y, t) = \frac{x_0 y}{\cos t} + \frac{1}{2}(x_0^2 + y^2)\mathrm{tgt}. \tag{14}$$

Из (14) видно, что производная функция W имеет особенность при $t = \frac{\pi}{2}$, и в этом случае для описания оператора Коши следует воспользоваться производящей функцией другого типа, например F.

3. Вариационный принцип. Производящие функции можно использовать для формулировки вариационных принципов. Зафиксируем промежуток времени τ и вычислим траекторию гамильтоновой системы в моменты времени $k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. траекторию $((x(\tau), y(\tau)), \ldots, (x(k\tau), y(k\tau)), \ldots)$.

Обозначим, что

$$\begin{aligned} x_k &\overset{\Delta}{=} x(k\tau), \\ y_k &\overset{\Delta}{=} y(k\tau), \end{aligned}$$

и пусть $F(x_0, x) = F(x_0, x(\tau))$ — производящая функция оператора сдвига на время τ. Тогда, в силу уравнений (10), имеем, что

$$\begin{aligned} &y_{k+1} = -F_2(x_k, x_{k+1}), \\ &y_k = F_1(x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

Увеличив во втором уравнении последних равенств индекс k на единицу и вычитая из второго уравнения первое, получим, что

$$F_2(x_k, x_{k+1}) + F_1(x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \left(F(x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}, x_{k+2})\right) = 0. \tag{15}$$

Если теперь ввести функцию

$$\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k, x_{k+1}),$$

то формула (15) является необходимым условием стационарности функции Φ по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Переменные x_0 и x_n закрепляются. Таким образом, траектории $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ гамильтоновой системы доставляют экстремум функции Φ. Если проводить аналогии с механикой, то производящая функция F играет роль лагранжиана для симплектоморфизмов, а функция Φ напоминает действие по Гамильтону [3].

4. Симплектическое интегрирование. Производящие функции оператора Коши можно эффективно использовать при разработке консервативных методов численного интегрирования. При достаточно малых величинах τ оператор Коши близок к тождественному и можно применять производящую функцию W для приближенного построения решения. Отдельная итерация оказывается в таком случае симплектоморфизмом, что является сутью метода симплектического интегрирования [4]. В работах [5, 6] данный подход реализован для построения симплектических интеграторов для описания движения в окрестности коллинеарной точки либрации. При этом для механических систем метод оказывается «прямым», т. е. допускает аналитическое выражение аппроксимационного симплектоморфизма.

5. Заключение. Производящие функции позволяют эффективно исследовать свойства решений гамильтоновой системы уравнений. В общем случае описание оператора Коши с помощью некоторой фиксированной производящей функции не всегда возможно из-за нарушения условия разрешимости. Однако для небольших промежутков времени, когда оператор Коши близок к тождественному, условие разрешимости выполняется. Это дает возможность реализации консервативных численных методов в задачах механики, так называемых методов симплектического интегрирования [5, 6]. С помощью производящих функций формулируются вариационные принципы для канонических отображений, что существенно расширяет класс исследуемых уравнений.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

2. *Шмыров А. С.* Устойчивость в гамильтоновых системах. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1995. 127 с.

3. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: учеб. пособие для университетов. М.: Наука, 1990. 416 с.

4. *Yoshida H.* Construction of higher order symplectic integrators // Physics Letters A. 1990. Vol. 150. Iss. 5–7. P. 262–268. htpps://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90092-3

5. *Shmyrov A., Shmyrov V., Shymanchuk D.* The research of motion in a neighborhood of collinear libration point by conservative methods // AIP Conference Proceedings. 9$^{\text{th}}$ International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. AMiTaNS 2017. 2017. Vol. 1895. Art. N 060003. htpps://doi.org/10.1063/1.5007388

6. *Малявкин Г. П., Шмыров А. С., Шмыров В. А.* Об одном численном методе для управляемых гамильтоновых систем // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Естественные и технические науки. 2016. № 2. С. 34–37.

Статья поступила в редакцию 14 сентября 2023 г.
Статья принята к печати 12 октября 2023 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Шмыров Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.shmyrov@spbu.ru

Шмыров Василий Александрович — канд. физ.-мат. наук, доц.; v.shmyrov@spbu.ru

Шиманчук Дмитрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; d.shimanchuk@spbu.ru

Generating functions of the Cauchy operator of a hamiltonian system*

A. S. Shmyrov, V. A. Shmyrov, D. V. Shymanchuk

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Shmyrov A. S., Shmyrov V. A., Shymanchuk D. V. Generating functions of the Cauchy operator of a hamiltonian system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 522–528.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.408 (In Russian)

The article is related to the mathematical apparatus for describing the phase trajectories of a hamiltonian system. An approach related to the construction of generating functions for the Cauchy operator is proposed. It is shown that one-parameter families of generating functions satisfy the Hamilton — Jacobi equation or its modifications. Using the example of small oscillations of a mathematical pendulum, it is shown that the description of the Cauchy operator for sufficiently long periods of time requires the use of generating functions of various types. With the help of generating functions, a variational principle similar to the principle of least action is formulated. The efficiency of using generating functions in the development of conservative methods of numerical integration is also noted.

Keywords: hamilton equations, generating function, Cauchy operator, variational principle.

References

1. Arnold V. I. *Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki* [*Mathematical methods of classical mechanics*]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 472 p. (In Russian)

2. Shmyrov A. S. *Ustojchivost' v gamil'tonovyh sistemah* [*Stability in hamiltonian systems*]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 1995, 127 p. (In Russian)

3. Markeev A. P. *Teoreticheskaya mekhanika* [*Theoretical mechanics*]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 416 p. (In Russian)

* This work was founded by the Russian Science Foundation (project N 23-21-00027, https://rscf.ru/project/23-21-00027/).

4. Yoshida H. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 1990, vol. 150, iss. 5–7, pp. 262–268. https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90092-3

5. Shmyrov A., Shmyrov V., Shymanchuk D. The research of motion in a neighborhood of collinear libration point by conservative methods. *AIP Conference Proceedings. 9th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AMiTaNS 2017*, 2017, vol. 1895, art. no. 060003. https://doi.org/10.1063/1.5007388

6. Malyavkin G. P., Shmyrov A. S., Shmyrov V. A. Ob odnom chislennom metode dlya upravlyayemykh gamil'tonovykh sistem [On the numerical method for a controlled hamiltonian system]. *Vestnik of Saint Petersburg State University of Technology and Design. Natural and Technical Science*, 2016, no. 2, pp. 34–37. (In Russian)

Received: September 14, 2023.
Accepted: October 12, 2023.

Authors' information:

Alexander S. Shmyrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.shmyrov@spbu.ru

Vasiliy A. Shmyrov — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; v.shmyrov@spbu.ru

Dmitry V. Shymanchuk — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; d.shimanchuk@spbu.ru