УДК 519.837 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 4
MSC 91A23

C-ядро в дифференциальных играх на сетях с коммуникационными ограничениями*

А. В. Тур

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Тур А. В.* С-ядро в дифференциальных играх на сетях с коммуникационными ограничениями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 497–508.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.406

Рассматривается класс дифференциальных игр на сетях. Предполагается, что игроки отождествляются с вершинами сети, а их взаимодействие осуществляется вдоль путей этой сети. Для построения кооперативных решений используется характеристическая функция специального вида, учитывающая сетевую структуру игры. В качестве кооперативного принципа оптимальности исследуется С-ядро. Приводится пример.

Ключевые слова: дифференциальная игра, игра на сети, кооперативная игра, С-ядро, вектор Шепли.

1. Введение. Методы теории дифференциальных игр широко применяются к конфликтно-управляемым динамическим системам. Нередко структура взаимодействия игроков в таких системах является нетривиальной и задается сетью или графом. В этом случае методы теории сетевых игр также актуальны. В данных играх игроки отождествляются с вершинами сети, а ребра указывают на связи между ними. Однако правила взаимодействия игроков определяются дополнительно. В некоторых моделях допускается коммуникация только соседних игроков (соединенных ребром) [1, 2]. Кроме того, рассматриваются игры, в которых коммуникация игроков осуществляется по путям сети [3, 4] или в рамках партнерских множеств [5]. К важным особенностям таких игр относится и возможность игроков изменять структуру сети с течением времени. Так, в работах [1–5] рассмотрены задачи, в которых игроки имеют новый тип стратегий с возможностью разрыва связей с соседними игроками в процессе игры. В кооперативных дифференциальных играх на сети новый тип стратегий привел к возможности построения нестандартной характеристической функции, которая легко вычисляется и при этом обладает хорошими свойствами.

В работе [6] данная характеристическая функция также была введена для игры, в которой игроки не могут разрывать связи, но могут ограничивать взаимодействие с другими игроками. Целями настоящей работы являются продолжение исследования игр с ограниченной коммуникацией и изучение структуры и свойств С-ядра в таких играх.

Статья организована следующим образом. В п. 2 описана исходная модель кооперативной дифференциальной игры на сети. В п. 3 для рассматриваемого класса игр изучается такой кооперативный принцип оптимальности как С-ядро. Иллюстративному примеру посвящен п. 4. В п. 5 приведены выводы.

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00051, https://rscf.ru/en/project/22-11-00051/

2. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальную игру n лиц с предписанной продолжительностью T на сети. Пусть задана неориентированная сеть (N, L), где $N = \{1; 2; \ldots; n\}$ — множество вершин, которые отождествляются с игроками, а $L \in N \times N$ — множество ребер. Если $(i, j) \in L$, то существует ребро, соединяющее игроков $i \in N$ и $j \in N$.

Последовательность различных вершин $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset N$ задает путь в сети, если $(i_k, i_{k+1}) \in L$ для любого $k = 1, \ldots, m-1$. Длиной пути будем называть количество ребер, входящих в этот путь. Пусть $p(i, j)$ — кратчайший путь между вершинами i и j, а $d(i, j)$ — его длина.

Для $m = 1, \ldots, n-1$ через $K^m(i) = \{j \in N : \ d(i, j) = m\}$ обозначим множество игроков, связанных с игроком i кратчайшим путем длиной m. Две вершины графа называются связными, если в графе существует путь с концами в данных вершинах.

Пусть $x_i(t) \subset R^m$ — переменная состояния игрока $i \in N$ в момент времени t, $u_i(t) \in U_i \subset R^k$ — управляющая переменная игрока $i \in N$.

Уравнения движения игроков имеют вид

$$\dot{x}_i(\tau) = f_i(x_i(\tau); u_i(\tau)) \text{ для } \tau \in [t_0; T] \text{ и } i \in N, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \tag{1}$$

где функции $f_i(x_i; u_i)$ непрерывно дифференцируемы по x_i и u_i.

Пусть $h_i(x_i(\tau); u_i(\tau))$ — мгновенный выигрыш игрока i, который он может получить самостоятельно, $\delta^{m-1} h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau))$ — мгновенный выигрыш игрока i, который он может получить при взаимодействии с игроком $j \in K^m(i)$. Предположим, что $h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau)) \geqslant 0$ для любых i и j. Коэффициент $\delta \in (0, 1)$ показывает, что чем больше расстояние между игроками на сети, тем меньшее влияние они оказывают друг на друга. Наличие этого множителя объясняет использование кратчайших путей для взаимодействия игроков друг с другом, поскольку применение более длинного пути неизменно приводит к уменьшению их выигрышей. Через $x(t)$ обозначим вектор $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, через $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ — вектор начальных состояний игроков.

Каждый игрок $i \in N$ в любой момент $\tau \in [t_0, T]$ может ограничить коммуникацию с любым связным с ним игроком. В этом случае для $t \geqslant \tau$ в период времени $[t, T]$, если $i \in K^m(j)$, игрок j может получить только $\beta \delta^{m-1} \int_t^T h_j^i(x_j; x_i; u_j; u_i) d\tau$ при взаимодействии с игроком i. Тогда игрок i получит также только $\beta \delta^{m-1} \int_t^T h_i^j(x_i; x_j; u_i; u_j) d\tau$ при взаимодействии с игроком j, здесь $\beta \in (0, 1)$.

Игроки, лежащие на кратчайшем пути между парой любых игроков p, q и не совпадающие с ними, в любой момент времени $\tau \in [t_0, T]$ могут ограничить коммуникацию p и q. В данном случае, если $p \in K^m(q)$, игрок p может получить только $\alpha \delta^{m-1} \int_t^T h_p^q(x_p; x_q; u_p; u_q) d\tau$ при взаимодействии с игроком q, а игрок q лишь $\alpha \int_t^T \delta^{m-1} h_q^p(x_q; x_p; u_q; u_p) d\tau$ при взаимодействии с p при $t \in [\tau, T]$, где $\alpha \in (\beta, 1)$.

Путь называется циклом, если его начальная и конечная вершины совпадают. Цикл называется простым, если вершины в нем не посещаются дважды, за исключением начальной и конечной вершин. Предположим, что сеть (N, L) не содержит простых циклов четной длины. Выполнение данного условия гарантирует отсутствие более одного кратчайшего пути между любыми двумя вершинами. Считаем также, что $\alpha > \delta$. Это необходимо для справедливости следующего неравенства:

$$\alpha \delta^{m-1} h_i^j(x_i; x_j; u_i; u_j) > \delta^{m-1+k} h_i^j(x_i; x_j; u_i; u_j) \ \ \forall \ k > 0.$$

Его выполнение позволяет избежать ситуации, когда после наложения коммуникационных ограничений на пару игроков у них появляется более выгодный путь для взаимодействия, чем кратчайший.

Выигрыш игрока i определяется по правилу

$$H_i(x^0; u_1, \dots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x_i(\tau); u_i(\tau))d\tau +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{j \in K^m(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \min\{a_i^j(\tau), b_i^j(\tau)\} h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau))d\tau, \tag{2}$$

где

$$a_i^j(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \tau_1), \\ \alpha, & t \in [\tau_1, T]; \end{cases}$$

τ_1 — момент, когда какой-либо из промежуточных игроков пути $p(i,j)$ ограничивает коммуникацию i и j;

$$b_i^j(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \tau_2), \\ \beta, & t \in [\tau_2, \infty); \end{cases}$$

τ_2 — момент, когда игрок j ограничивает коммуникацию с игроком i.

Каждый игрок, выбирая управление из класса допустимых, стремится максимизировать свой выигрыш.

Игру на сети (N, L) с динамикой (1) и выигрышами игроков вида (2) будем называть игрой $\Gamma(x^0, T - t_0)$.

Предположим, что игроки кооперируются с целью достижения максимального суммарного выигрыша:

$$\sum_{i \in N} \left(\int\limits_{t_0}^{T} h_i(x_i(\tau); u_i(\tau))d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{j \in K^m(i)} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(x_i(\tau); x_j(\tau); u_i(\tau); u_j(\tau))d\tau \right).$$

Заметим, что игроки, максимизируя суммарный выигрыш, не будут ограничивать коммуникацию, так как $h_i^j \geqslant 0$ (т. е. $a_i^j = b_i^j = 1$) .

Оптимальные кооперативные стратегии $\overline{u}(t) = (\overline{u}_1(t), \dots, \overline{u}_n(t))$ для $t \in [t_0; T]$ определим по правилу

$$\overline{u}(t) = \arg \max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i \in N} H_i(x^0; u_1, \dots, u_n).$$

Траектория $\overline{x}(t) = (\overline{x}_1(t); \overline{x}_2(t); \dots; \overline{x}_n(t))$, соответствующая оптимальным кооперативным стратегиям, — оптимальная кооперативная траектория. Тогда максимальный суммарный выигрыш игроков имеет вид

$$\sum_{i \in N} \left(\int\limits_{t_0}^{T} h_i(\overline{x}_i(\tau); \overline{u}_i(\tau))d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \sum_{j \in K^m(i)} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(\overline{x}_i(\tau); \overline{x}_j(\tau); \overline{u}_i(\tau); \overline{u}_j(\tau))d\tau \right).$$

Обычно для определения способа распределения максимального суммарного выигрыша между игроками по приемлемой схеме используется характеристическая функция [7]. Классический вариант построения характеристической функции, предложенный в [7], предлагает оценивать силу коалиции как нижнее значение игры с нулевой суммой между этой коалицией и игроками, не вошедшими в нее. Однако в последнее время для разных классов игр появляются новые способы построения характеристической функции [1, 8–10]. Для построения кооперативных принципов оптимальности в игре $\Gamma(x^0, T-t_0)$ возьмем характеристическую функцию из работы [6] для рассматриваемого класса игр. Для этого введем вспомогательные обозначения. Будем говорить, что путь принадлежит коалиции $S \subset N$, если все его вершины принадлежат этой коалиции. Пусть $K^m_S(i) = \{j \in S:\ d(i,j) = m,\ p(i,j) \in S\}$ — множество игроков, которые находятся на расстоянии m от i, и кратчайший путь между ними принадлежит коалиции S; $P^m_S(i) = \{j \in S:\ d(i,j) = m,\ p(i,j) \notin S\}$ — множество игроков из S, которые находятся на расстоянии m от i, но кратчайший путь между ними не принадлежит коалиции S. Тогда $P^m_S(i) = (S \cap K^m(i)) \setminus K^m_S(i)$. Пусть $B^m_S(i) = K^m(i) \setminus S$ — множество игроков из $N \setminus S$, находящиеся на расстоянии m от i. Заметим, что $K^m(i) = K^m_S(i) \cup P^m_S(i) \cup B^m_S(i)$.

Для удобства обозначим, что

$$h_i(\overline{x}_i(t); \overline{u}_i(t)) = \overline{h}_i(t), \quad h_i^j(\overline{x}_i(t); \overline{x}_j(t); \overline{u}_i(t); \overline{u}_j(t)) = \overline{h}_i^j(t),$$

$$\overline{h}_i^j(t) + \overline{h}_j^i(t) = \overline{h}_{i,j}(t).$$

Характеристическую функцию, согласно [6], определим по следующему правилу:

$$V(S; x_0, T-t_0) = \sum_{i\in S} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau) d\tau + \sum_{i \in S} \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg(\sum_{j \in K^m_S(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau +$$

$$+ \alpha \sum_{j \in P^m_S(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau + \beta \sum_{j \in B^m_S(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau \Bigg), \tag{3}$$

где $S \subset N$, $\overline{x}(t)$ и $\overline{u}(t)$ — оптимальная кооперативная траектория и оптимальные кооперативные стратегии.

Здесь предполагается, что игроки из коалиции $N \setminus S$ минимизируют выигрыш игроков из S, ограничивая коммуникацию с ними, что отвечает слагаемому $\beta \sum\limits_{j \in B^m_S(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau$, а также ограничивают коммуникацию игроков из S в случае, когда оказываются промежуточными на кратчайшем пути между ними, что отвечает слагаемому $\alpha \sum\limits_{j \in P^m_S(i)} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau$.

3. С-ядро. В [6] было показано, что характеристическая функция, построенная по правилу (3), легко вычисляется и при этом обладает выпуклостью, которая гарантирует непустоту одного из популярных кооперативных принципов оптимальности — С-ядра. Исследуем структуру С-ядра в рассматриваемом классе игр.

Обозначим через $E(x_0, T-t_0)$ множество всех дележей игры:

$$E(x_0, T-t_0) = \{\xi(x_0, T-t_0) = (\xi_1(x_0, T-t_0), \ldots, \xi_n(x_0, T-t_0)) \div$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i(x_0, T-t_0) = V(N; x_0, T-t_0), \xi_i(x_0, T-t_0) \geqslant V(\{i\}; x_0, T-t_0),\ i \in N\}.$$

Определение [11]. C-ядром кооперативной дифференциальной игры называется подмножество дележей вида

$$C(x_0, T-t_0) = \{\xi(x_0, T-t_0) \in E(x_0, T-t_0) : \sum_{i \in S} \xi_i(x_0, T-t_0) \geqslant$$

$$\geqslant V(S; x_0, T-t_0),\ S \subset N\}.$$

Пусть $D_S^m(i) = \{\{k,l\} : l \in S,\ k \in K_S^m(l),\ i \in p(k,l)\}$ — множество пар игроков из S, расстояние между которыми равно m, кратчайший путь между ними лежит в S и игрок i принадлежит этому пути (для удобства $D_N^m(i)$ обозначим через $D^m(i)$). Аналогично $M_S^m(i) = \{\{k,l\} : l \in S, k \in K_S^m(l),\ i \in p(k,l), p \neq i, q \neq i\}$ (в таком случае игрок i всегда промежуточный на пути $p(k,l)$). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если в игре* (1), (2) *характеристическая функция определяется по правилу* (3), *то, чтобы дележ* $\xi(x_0, T-t_0) \in E(x_0, T-t_0)$ *принадлежал C-ядру, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в следующем виде:*

$$\xi_i(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau)d\tau\ +$$

$$+\ (\alpha-\beta) \sum_{j \in K^m(i)} \gamma_i^{i,j} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau + (1-\alpha) \sum_{\{p,q\} \in D^m(i)} \varphi_i^{p,q} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau \Bigg],\ i \in N, \qquad (4)$$

где $\gamma_i^{i,j} + \gamma_j^{i,j} = 1$, $\gamma_i^{i,j} \geqslant 0$, $\gamma_j^{i,j} \geqslant 0$ *для всех* $i \neq j$ *и* $\sum\limits_{i \in p(p,q)} \varphi_i^{p,q} = 1$, $\varphi_i^{p,q} \geqslant 0$ *для всех* $p \neq q$.

Доказательство. *Достаточность*. Докажем сначала, что вектор $\xi(x_0, T-t_0)$, определяемый правилом (4), действительно является дележом. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_0, T-t_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{\{i,j\}: p(i,j)=m} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau\ +$$

$$+\ (\alpha-\beta) \sum_{\{i,j\}: p(i,j)=m} (\gamma_i^{i,j} + \gamma_j^{i,j}) \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau\ +$$

$$+\ (1-\alpha) \sum_{\{p,q\}: p(p,q)=m} \sum_{i \in p(p,q)} \varphi_i^{p,q} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau \Bigg]\ =$$

$$=\ \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{\{i,j\}: p(i,j)=m} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau\ +$$

$$+\ (\alpha-\beta) \sum_{\{i,j\}: p(i,j)=m} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau + (1-\alpha) \sum_{\{p,q\}: p(p,q)=m} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau \Bigg]\ =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n-1}\delta^{m-1}\sum_{j\in K^m(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i^j(\tau)d\tau = V(N;x_0,T-t_0).$$

При этом $V(\{i\};x_0,T-t_0) = \int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i(\tau)d\tau$, а значит, $\xi_i(x_0,T-t_0) \geqslant V(\{i\};x_0,T-t_0)$. Поскольку выполняется свойство групповой и индивидуальной рациональности, $\xi(x_0,T-t_0)$ является дележом в игре $\Gamma(x_0,T-t_0)$.

Покажем теперь, что дележ вида (4) принадлежит C-ядру:

$$\sum_{i\in S}\xi_i(x_0,T-t_0) = \sum_{i\in S}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1}\delta^{m-1}\Bigg[\beta\sum_{i\in S}\sum_{j\in K^m(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i^j(\tau)d\tau +$$

$$+ (\alpha-\beta)\sum_{i,j\in S, d(i,j)=m}(\gamma_i^{i,j}+\gamma_j^{i,j})\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau + (\alpha-\beta)\sum_{i\in S}\sum_{j\in B_S^m(i)}\gamma_i^{i,j}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau +$$

$$+ (1-\alpha)\sum_{\substack{\{p,q\}:p(p,q)\in S\\ d(p,q)=m}}\sum_{i\in p(p,q)}\varphi_i^{p,q}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau +$$

$$+ (1-\alpha)\sum_{i\in S}\sum_{\{p,q\}\in D^m(i)\setminus D_S^m(i)}\varphi_i^{p,q}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau\Bigg] =$$

$$= \sum_{i\in S}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1}\delta^{m-1}\Bigg[\beta\sum_{i\in S}\sum_{j\in K^m(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i^j(\tau)d\tau +$$

$$+ (\alpha-\beta)\sum_{i\in S}\sum_{j\in K_S^m(i)\cup P_S^m(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i^j(\tau)d\tau + (\alpha-\beta)\sum_{i\in S}\sum_{j\in B_S^m(i)}\gamma_i^{i,j}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau +$$

$$+ (1-\alpha)\sum_{i\in S}\sum_{j\in K_S^m(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_i^j(\tau)d\tau + (1-\alpha)\sum_{i\in S}\sum_{\{p,q\}\in D^m(i)\setminus D_S^m(i)}\varphi_i^{p,q}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau\Bigg] =$$

$$= V(S,x_0,T-t_0) + \sum_{m=1}^{n-1}\delta^{m-1}\Bigg[(\alpha-\beta)\sum_{i\in S}\sum_{j\in B_S^m(i)}\gamma_i^{i,j}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau +$$

$$+ (1-\alpha)\sum_{i\in S}\sum_{\{p,q\}\in D^m(i)\setminus D_S^m(i)}\varphi_i^{p,q}\int\limits_{t_0}^{T}\overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau\Bigg] \geqslant V(S;x_0,T-t_0).$$

Тогда получим, что

$$\sum_{i\in S}\xi_i(x_0,T-t_0) \geqslant V(S;x_0,T-t_0),$$

а это доказывает принадлежность дележа $\xi(x_0,T-t_0)$ C-ядру.

Необходимость. Покажем теперь, что любой дележ из С-ядра представим в виде (4). Пусть π — перестановка игроков, $\pi(i)$ — номер игрока i в перестановке π, Π — множество возможных перестановок элементов множества N. Определим, что

$$S_{\pi,k} = \{i \in N: \ \pi(i) \leqslant k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

В работе [11] было показано, что С-ядро является выпуклой оболочкой точек $\alpha(\pi) = (\alpha_1^\pi, \alpha_2^\pi, \ldots, \alpha_n^\pi)$, где

$$\alpha_i^\pi = V(S_{\pi,\pi(i)}, x_0, T - t_0) - V(S_{\pi,\pi(i)-1}, x_0, T - t_0), \quad i \in N.$$

Заметим, что при выходе из коалиции $S_{\pi,\pi(i)}$ игрока i:

– коалиция теряет выигрыш игрока i, равный

$$V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{r} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in B^m_{S_{\pi,\pi(i)}}} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau + \alpha \sum_{j \in P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau \Bigg];$$

– каждый игрок $j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)$ вместо $\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_j^i(\tau)$ получает $\beta\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_j^i(\tau)$;

– каждый игрок $j \in P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)$ вместо $\alpha\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_j^i(\tau)$ получает $\beta\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_j^i(\tau)$;

– игроки $\{p, q\} \in M^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)$ вместо $\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau)$ получают $\alpha\delta^{m-1} \int\limits_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}$.

Тогда имеем, что

$$\alpha_i^\pi = V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{r} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in B^m_{S_{\pi,\pi(i)}}} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} ((1-\beta)\overline{h}_j^i(\tau) + \overline{h}_i^j(\tau)) d\tau +$$

$$+ \sum_{j \in P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} ((\alpha - \beta)\overline{h}_j^i(\tau) + \alpha\overline{h}_i^j(\tau)) d\tau + (1-\alpha) \sum_{\{p,q\} \in M^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau \Bigg] =$$

$$= V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{r} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau + (1-\beta) \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ (\alpha - \beta) \sum_{j \in P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau + (1-\alpha) \sum_{\{p,q\} \in M^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau \Bigg] =$$

$$= V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{r} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau + (\alpha - \beta) \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i) \cup P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ (1-\alpha) \Bigg(\sum_{\{p,q\} \in M^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau + \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau \Bigg) \Bigg] =$$

$$= V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{r} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau + (\alpha - \beta) \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i) \cup P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ (1-\alpha) \sum_{\{p,q\} \in D^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau \Bigg].$$

Вершины ядра имеют координаты $\alpha(\pi) = (\alpha_1^\pi, \alpha_2^\pi, \ldots, \alpha_n^\pi)$ для всех $\pi \in \Pi$. Каждый дележ из С-ядра можно представить в виде выпуклой комбинации точек $\alpha(\pi)$. Тогда, если дележ $\widetilde{\xi}(t)$ принадлежит С-ядру, то его компоненты могут быть представлены следующим образом:

$$\widetilde{\xi}_i(x_0, T - t_0) = \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \alpha_i^\pi,$$

где $\sum\limits_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi = 1,\ \ 0 \leqslant \varepsilon_\pi \leqslant 1$, для всех $\pi \in \Pi$. Отсюда имеем, что

$$\widetilde{\xi}_i(x_0, T - t_0) = \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \Bigg(V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau \Bigg) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[(\alpha - \beta) \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i) \cup P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ (1-\alpha) \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \sum_{\{p,q\} \in D^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau \Bigg] = V(\{i\}) + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[(\alpha - \beta) \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \sum_{j \in K^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i) \cup P^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ (1-\alpha) \sum_{\pi \in \Pi} \varepsilon_\pi \sum_{\{p,q\} \in D^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau) d\tau \Bigg] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1} \Bigg[\beta \sum_{j \in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau) d\tau +$$

$$+ (\alpha-\beta) \sum_{j\in K^m(i)} \gamma_i^{i,j} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau + \sum_{\{p,q\}\in D^m(i)} \int_{t_0}^{T} \varphi_i^{p,q}(1-\alpha)\overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau\Bigg],$$

здесь $\gamma_i^{i,j} = \sum\limits_{\pi:\pi(j)<\pi(i)} \varepsilon_\pi$, $\gamma_j^{i,j} = \sum\limits_{\pi:\pi(i)<\pi(j)} \varepsilon_\pi$, $\varphi_i^{p,q} = \sum\limits_{\pi:\{p,q\}\in D^m_{S_{\pi,\pi(i)}}(i)} \varepsilon_\pi$. Заметим, что $\gamma_i^{i,j} + \gamma_j^{i,j} = 1$ и $\sum\limits_{i\in p(p,q)} \varphi_i^{p,q} = 1$. Таким образом, показано, что произвольный вектор из C-ядра может быть представлен в виде (4). Теорема доказана. □

В качестве примера дележа из C-ядра рассмотрим вектор Шепли [12], определяемый по следующему правилу:

$$Sh_i(x_0, T-t_0) = \sum_{S:\ i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(V(S;x_0,T-t_0) - V(S\setminus i; x_0, T-t_0)).$$

В работе [6] было показано, что в рассматриваемом классе игр вектор Шепли имеет вид

$$Sh_i(x_0, T-t_0) = \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i(\tau)d\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \delta^{m-1}\Bigg[\beta \sum_{j\in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_i^j(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{\alpha-\beta}{2} \sum_{j\in K^m(i)} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{i,j}(\tau)d\tau + \sum_{\{p,q\}\in D^m(i)} \frac{1-\alpha}{m+1} \int_{t_0}^{T} \overline{h}_{p,q}(\tau)d\tau\Bigg],\ \ i\in N.$$

А это является частным случаем формулы (4) при $\gamma_i^{i,j} = \gamma_j^{i,j} = \frac{1}{2}$ и $\varphi_i^{p,q} = \frac{1}{m+1}$ для всех p, q, таких, что $d(p,q) = m$.

4. Пример. Для иллюстрации полученного решения рассмотрим игру 4 лиц, соединенных сетью, представленной на рисунке.

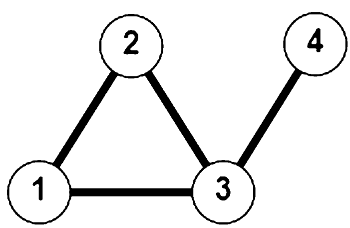

Рисунок. Сеть (N, L)

Приведем общий вид дележа из C-ядра в этой игре:

$$\xi_1 = \int_{t_0}^{T} \Big(\overline{h}_1(\tau) + \beta(\overline{h}_1^2(\tau) + \overline{h}_1^3(\tau) + \delta\overline{h}_1^4(\tau)) + (\alpha-\beta)(\gamma_1^{1,2}\overline{h}_{1,2}(\tau) + \gamma_1^{1,3}\overline{h}_{1,3}(\tau) +$$

$$+ \delta\gamma_1^{1,4}\overline{h}_{1,4}(\tau)) + (1-\alpha)(\varphi_1^{1,2}\overline{h}_{1,2}(\tau) + \varphi_1^{1,3}\overline{h}_{1,3}(\tau) + \delta\varphi_1^{1,4}\overline{h}_{1,4}(\tau))\Big)d\tau,$$

$$\xi_2 = \int\limits_{t_0}^{T} \Big(\overline{h}_2(\tau) + \beta(\overline{h}_2^1(\tau) + \overline{h}_2^3(\tau) + \delta\overline{h}_2^4(\tau)) + (\alpha-\beta)(\gamma_2^{1,2}\overline{h}_{1,2}(\tau) + \gamma_2^{2,3}\overline{h}_{2,3}(\tau) +$$

$$+ \delta\gamma_2^{2,4}\overline{h}_{2,4}(\tau)) + (1-\alpha)(\varphi_1^{1,2}\overline{h}_{1,2}(\tau) + \varphi_2^{2,3}\overline{h}_{2,3}(\tau) + \delta\varphi_2^{2,4}\overline{h}_{2,4}(\tau))\Big)d\tau,$$

$$\xi_3 = \int\limits_{t_0}^{T} \Big(\overline{h}_3(\tau) + \beta(\overline{h}_3^2(\tau) + \overline{h}_3^1(\tau) + \overline{h}_3^4(\tau)) +$$

$$+ (\alpha-\beta)(\gamma_3^{1,3}\overline{h}_{1,3}(\tau) + \gamma_3^{2,3}\overline{h}_{2,3}(\tau) + \gamma_3^{3,4}\overline{h}_{3,4}(\tau)) +$$

$$+ (1-\alpha)(\varphi_3^{1,3}\overline{h}_{1,3}(\tau) + \varphi_3^{2,3}\overline{h}_{2,3}(\tau) + \varphi_3^{3,4}\overline{h}_{3,4}(\tau) + \delta(\varphi_3^{1,4}\overline{h}_{1,4}(\tau) + \varphi_3^{2,4}\overline{h}_{2,4}(\tau)))\Big)d\tau,$$

$$\xi_4 = \int\limits_{t_0}^{T} \Big(\overline{h}_4(\tau) + \beta(\overline{h}_4^3(\tau) + \delta(\overline{h}_4^1(\tau) + \overline{h}_4^2(\tau))) + (\alpha-\beta)(\gamma_4^{3,4}\overline{h}_{3,4}(\tau) + \delta(\gamma_4^{1,4}\overline{h}_{1,4}(\tau) +$$

$$+ \gamma_4^{2,4}\overline{h}_{2,4}(\tau))) + (1-\alpha)(\varphi_4^{3,4}\overline{h}_{3,4}(\tau) + \delta(\varphi_4^{1,4}\overline{h}_{1,4} + \varphi_4^{2,4}\overline{h}_{2,4}(\tau)))\Big)d\tau,$$

где $\gamma_1^{1,2} + \gamma_2^{1,2} = 1$; $\gamma_1^{1,3} + \gamma_3^{1,3} = 1$; $\gamma_1^{1,4} + \gamma_4^{1,4} = 1$; $\gamma_2^{2,3} + \gamma_3^{2,3} = 1$; $\gamma_2^{2,4} + \gamma_4^{2,4} = 1$; $\gamma_3^{3,4} + \gamma_4^{3,4} = 1$; $\varphi_1^{1,2} + \varphi_2^{1,2} = 1$; $\varphi_1^{1,3} + \varphi_3^{1,3} = 1$; $\varphi_1^{1,4} + \varphi_3^{1,4} + \varphi_4^{1,4} = 1$; $\varphi_2^{2,3} + \varphi_3^{2,3} = 1$; $\varphi_2^{2,4} + \varphi_3^{2,4} + \varphi_4^{2,4} = 1$; $\varphi_3^{3,4} + \varphi_4^{3,4} = 1$.

5. Заключение. В статье рассмотрен класс дифференциальных игр на сети с коммуникационными ограничениями. Показано, что при использовании специальной характеристической функции С-ядро игры состоит из дележей, представимых в виде, удобном для вычисления. Приведенный пример иллюстрирует полученное решение.

Литература

1. *Petrosyan L., Yeung D.* Shapley value for differential network games: Theory and application // Journal of Dynamics and Games. 2021. Vol. 8. N 2. P. 151–166.

2. *Tur A. V., Petrosyan L. A.* Cooperative optimality principals in differential games on networks // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. N 6. P. 1095–1106.

3. *Petrosyan L., Yeung D.* Construction of dynamically stable solutions in differential network games // Stability, Control and Differential Games / eds A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings. 2020. Cham: Springer, 2020. P. 51–61. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_5

4. *Tur A., Petrosyan L.* The core of cooperative differential games on networks // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2022 / eds P. Pardalos, M. Khachay, V. Mazalov. Lecture Notes in Computer Sciences, 2022. Cham: Springer, 2022. Vol. 13367. P. 295–314. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09607-5_21

5. *Petrosyan L. A., Yeung D., Pankratova Y. B.* Cooperative differential games with partner sets on networks // Труды Института математики и механики Урал. отд. РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 286–295.

6. *Tur A., Petrosyan L.* Communication restriction-based characteristic function in differential games on networks // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023 / eds M. Khachay, Y. Kochetov, A. Eremeev, O. Khamisov, V. Mazalov, P. Pardalos. Lecture Notes in Computer Science, 2023. Vol. 13930. P. 314–324. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35305-5_22

7. *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press, 1944. 625 p.

8. *Petrosjan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. N 3. P. 381–398.

9. *Parilina E., Petrosyan L.* On a simplified method of defining characteristic function in stochastic games // Mathematics. 2020. Vol. 8. Art. N 1135.

10. *Gromova E., Petrosyan L.* On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 98–118.

11. *Shapley L. S.* Cores of convex games // International Journal of Game Theory. 1971. Vol. 1. P. 11–26.

12. *Shapley L. S.* A value for n-person games // Contributions to the theory of games II / eds H. Kuhn, A. Tucker. Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317. https://doi.org/10.1515/9781400881970-018

Статья поступила в редакцию 15 августа 2023 г.
Статья принята к печати 12 октября 2023 г.

Контактная информация:

Тур Анна Викторовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.tur@spbu.ru

The core in differential games on networks with communication restrictions*

A. V. Tur

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

For citation: Tur A. V. The core in differential games on networks with communication restrictions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 497–508.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.406 (In Russian)

In this paper we consider a class of differential games on networks. It is assumed that the players are identified with the nodes of the network and their interaction takes place along the paths of this network. A characteristic function of a special kind is used, which takes into account the network structure of the game. The C-core is studied as a cooperative optimality principle. An illustrative example is considered.

Keywords: differential game, network game, cooperative game, core, the Shapley value.

References

1. Petrosyan L., Yeung D. Shapley value for differential network games: Theory and application. *Journal of Dynamics and Games*, 2021, vol. 8, no. 2, pp. 151–166.

2. Tur A. V., Petrosyan L. A. Cooperative optimality principals in differential games on networks. *Automation Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 6, pp. 1095–1106.

3. Petrosyan L., Yeung D. Construction of dynamically stable solutions in differential network games. *Stability, Control and Differential Games.* Eds A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. *Lecture Notes in Control and Information Sciences — Proceedings.* Cham, Springer Publ., 2020, pp. 51–61. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_5

4. Tur A., Petrosyan L. The core of cooperative differential games on networks. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2022.* Eds P. Pardalos, M. Khachay, V. Mazalov. *Lecture Notes in Computer Science.* Cham, Springer Publ., 2022, vol. 13367, pp. 295–314. https://doi.org/10.1007/978-3-031-09607-5_21

5. Petrosyan L. A., Yeung D., Pankratova Y. B. Cooperative differential games with partner sets on networks. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [*Transactions of Institute Mathematics and Mechanics of the Ural Department Russian Academy of Sciences*], 2021, vol. 27, no. 3, pp. 286–295.

* This work was funded by the Russian Science Foundation (project N 22-11-00051, https://rscf.ru/en/project/22-11-00051/).

6. Tur A., Petrosyan L. Communication restriction-based characteristic function in differential games on networks. *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2023*. Eds M. Khachay, Y. Kochetov, A. Eremeev, O. Khamisov, V. Mazalov, P. Pardalos. *Lecture Notes in Computer Science*, 2023, vol. 13930, pp. 314–324. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35305-5_22

7. Von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior*. Princeton, Princeton University Press, 1944, 625 p.

8. Petrosjan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2003, vol. 27, no. 3, pp. 381–398.

9. Parilina E., Petrosyan L. On a simplified method of defining characteristic function in stochastic games. *Mathematics*, 2020, vol. 8, art. no. 1135.

10. Gromova E., Petrosyan L. On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, pp. 98–118.

11. Shapley L. S. Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, 1971, vol. 1, pp. 11–26.

12. Shapley L. S. A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games II*. Eds H. Kuhn, A. Tucker. Princeton, Princeton University Press, 1953, pp. 307–317.
https://doi.org/10.1515/9781400881970-018

Received: August 15, 2023.
Accepted: October 12, 2023.

Author's information:

Anna V. Tur — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; a.tur@spbu.ru