

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 539.3+519.6

MSC 35C10, 74B05, 74E10, 74G10

**Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины  
методом Канторовича с использованием специальных полиномов***Д. П. Голоскоков<sup>1</sup>, А. В. Матросов<sup>2</sup>, И. В. Олемской<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет  
путей сообщения им. императора Александра I,  
Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Голоскоков Д. П., Матросов А. В., Олемской И. В.* Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Канторовича с использованием специальных полиномов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 4. С. 423–442.

<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.401>

Рассматривается задача изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластины, защемленной по всем четырем сторонам под действием нормальной равномерно распределенной по ее поверхности нагрузке. Получено аналитическое решение краевой задачи для разрешающего дифференциального уравнения относительно нормального прогиба пластины методом Л. В. Канторовича с помощью полиномов специального вида, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Особенностью таких полиномов является так называемое свойство «квазиортогональности» первых и вторых производных, что приводит к расщеплению системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Л. В. Канторовича на отдельные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые легко решаются аналитически. Однако это свойство полиномов выполняется лишь приближенно. Проведено сравнение двух решений: аналитического в предположении «квазиортогональности» первых и вторых производных полиномов и численно-аналитического без указанного предположения. Исследовано напряженно-деформированное состояние в окрестностях угловых точек. Показано стремление к нулю моментов и перерезывающих сил при приближении к углам пластины, а также двойное изменение знака перерезывающей силы на кромке пластины в окрестности угловых точек.

*Ключевые слова:* изотропная пластина, изгиб тонкой изотропной пластины, защемленная по контуру пластина, численно-аналитические методы, метод Л. В. Канторовича, ортогональные многочлены, полиномы Якоби.

---

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

**1. Введение.** При решении краевых задач математической физики, в частности задач расчета тонких плит, существует проблема строгого удовлетворения граничным условиям. Это приводит к необходимости искать эффективные методы приближенного решения краевых задач. Накопилась обширная литература, посвященная различным методам приближенного выполнения краевых условий.

Для решения краевых задач, в том числе для бигармонического уравнения, применяются приближенные классические методы Бубнова — Галеркина, Ритца, Треффтца, Канторовича, наименьших квадратов и т. д., которые тесно связаны с вариационными методами. В работах [1, 2] приводятся разные подходы к решению бигармонического уравнения.

Использование приближенных методов для решения многих краевых задач, например бигармонического типа, сдерживается трудностью выбора базисных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Полиномы различных видов, в частности ортогональные, часто выступают в качестве базисных функций при изучении двумерных задач теории упругости методом Канторовича.

Краткий обзор истории применения этого метода для решения некоторых плоских задач теории упругости, в которых как функции, частично удовлетворяющие граничным условиям, используются ортонормированные полиномы специального вида, можно найти в работе [3]. В ней отмечается следующее: при отыскании неизвестных функций в методе Л. В. Канторовича делается предположение, что на отрезке ортогональности полиномов интегралы от смешанных произведений первых и вторых производных полиномов пренебрежимо малы; иначе говоря, допускается, что наряду с ортогональностью полиномов имеет место также ортогональность их первых и вторых производных. Благодаря этому бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций распадается на отдельные уравнения четвертого порядка для каждого номера. Подробный обзор работ, использующих как базовые функции ортогональные полиномы, приводится в монографии [4].

Отметим, что исследования по применению различных систем полиномов при аппроксимации решений краевых задач теории упругости, а также классического и расширенного методов Канторовича по-прежнему актуальны. В статьях [5–7] полиномы Якоби специального вида используются для расчета колебаний прямоугольных и секторальных пластин методом Л. В. Канторовича.

В последнее время с помощью расширенного метода Канторовича успешно рассчитываются изгиб [8, 9], устойчивость [10] и свободные колебания [11] тонких пластин из функционально градиентных материалов, параллелограммных [12–14] и трапециевидных [15] пластин из композитных материалов, параллелограммных пластин на упругом основании Винклера [16, 17].

Методом Канторовича успешно определяются устойчивость и изгиб прямоугольных тонких плит при разных нагрузках и граничных условиях [18–24].

Обзор работ, посвященных применению полуаналитического метода Канторовича к изгибу, устойчивости и колебаниям пластин, можно найти в [25].

В данной статье изучается изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Л. В. Канторовича. Базисными функциями служат полиномы специального вида, построенные на основе классических полиномов Якоби и удовлетворяющие условиям защемления. Большое внимание уделено сравнительной оценке двух решений: в условиях квазиортогональности первых и вторых производных полиномов и без указанного предположения.

**2. Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим упругое равновесие

плоской однородной изотропной пластинки постоянной толщины  $h$ , имеющей в плане размеры  $0 \leq \xi \leq a$ ,  $0 \leq \eta \leq b$ . Как известно [26], прогиб  $w(\xi, \eta)$  срединной поверхности пластинки удовлетворяет уравнению

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) = q(\xi, \eta), \quad (1)$$

в котором  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки,  $E, \nu$  — упругие константы изотропной пластинки,  $q(\xi, \eta)$  — заданная поперечная нагрузка.

Введем безразмерные координаты  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  следующим образом:

$$x = \frac{\xi}{a}, \quad x|_{\xi=0} = 0, \quad x|_{\xi=a} = 1, \quad y = \frac{\eta}{b}, \quad y|_{\eta=0} = 0, \quad y|_{\eta=b} = 1.$$

Пусть  $q_0$  — характерный параметр нагрузки, а  $W = \frac{wD}{a^4 q_0}$  — безразмерный прогиб.

Тогда уравнение (1) переписывается так:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{q_0}, \quad (2)$$

где  $\lambda = \frac{a}{b}$ .

Задача определения прогибов и напряжений в однородной пластине, изгибаемой какими-либо усилиями, сводится к интегрированию уравнения (2) при определенных граничных условиях. Будем считать, что пластина защемлена по двум противоположным кромкам  $y = 0$ ,  $y = 1$  и любым способом закреплена по кромкам  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Тогда граничные условия на защемленных кромках имеют вид

$$W_{y=0,1} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{y=0,1} = 0.$$

В соответствии с методом Л. В. Канторовича приближенное решение уравнения (2) будем искать в форме

$$W(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) f_k(y), \quad (3)$$

здесь  $f_k(y)$  — система ортонормированных полиномов, удовлетворяющих однородным условиям

$$f_k(0) = 0, \quad f_k(1) = 0, \quad f'_k(0) = 0, \quad f'_k(1) = 0, \quad (4)$$

а  $g_k(x)$  — пока неизвестные функции.

Следовательно, выражение (3) для прогиба  $W(x, y)$  непосредственно удовлетворяет граничным условиям на защемленных кромках.

Определим теперь систему полиномов  $f_k(y)$ , удовлетворяющих условиям (4). Эти полиномы строятся на основе полиномов Якоби следующим образом [3]. Пусть  $J_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  —  $n$ -й ненормированный полином Якоби, который находится по формуле Родрига

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} \left[ (1-z)^{\alpha+n} (1+z)^{\beta+n} \right].$$

Через  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  обозначим  $n$ -й нормированный с весом  $\rho(z) = (1-z)^\alpha(1+z)^\beta$  ( $\alpha > -1, \beta > -1$ ) полином Якоби. Связь между нормированными  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  и ненормированными  $J_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  полиномами Якоби устанавливается формулой

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = N_n^{(\alpha, \beta)} J_n^{(\alpha, \beta)}(z),$$

$$N_n^{(\alpha, \beta)} = \left\{ \frac{(2n + \alpha + \beta) \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

в которой  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Если  $\alpha = \beta$  (т. е.  $\rho(z) = (1 - z^2)^\alpha$ ), то полиномы с этим весом называются *ультрасферическими*. Частными их случаями при  $\alpha = \beta = 0$  и  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  являются классические полиномы Лежандра и Чебышева соответственно.

Построим систему полиномов, удовлетворяющих однородным условиям (4). Введем новую переменную  $y$  по формуле  $z = 2y - 1, -1 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ . Тогда условие ортонормировки полиномов Якоби можно представить в виде

$$\int_0^1 (1-y)^\alpha y^\beta \bar{P}_m^{(\alpha, \beta)}(y) \bar{P}_n^{(\alpha, \beta)}(y) dy = \delta_{m, n}, \quad (5)$$

где  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = P_n^{(\alpha, \beta)}(2y - 1) = \frac{\bar{P}_n^{(\alpha, \beta)}(y)}{\sqrt{2^{\alpha + \beta + 1}}}$ ;  $\delta_{mn}$  — дельта Кронекера.

Образует новую весовую функцию  $\rho^*(y) = y^{\beta-4}(1-y)^{\alpha-4}$  и через  $\{f_n^{(\alpha, \beta)}(y)\}$  обозначим систему ортонормированных полиномов с этим весом

$$\int_0^1 y^{\beta-4}(1-y)^{\alpha-4} f_m^{(\alpha, \beta)}(y) f_n^{(\alpha, \beta)}(y) dy = \delta_{mn}. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (5) и (6), находим полиномы

$$f_n^{(\alpha, \beta)}(y) = y^2(1-y)^2 \bar{P}_n^{(\alpha, \beta)}(y) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Полиномы (7) удовлетворяют условиям (4).

Неизвестные функции  $g_k(x)$  в формуле (3) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть получена на основании принципа минимума полной потенциальной энергии пластины.

Существует и другой вариант вывода системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций  $g_k(x)$ , основанный на использовании идеи метода Бубнова — Галеркина. Этот путь значительно сокращает их составление. Подставляя выражение (3) для прогиба в уравнение (2), а затем умножая обе его части на величину  $y^{\beta-4}(1-y)^{\alpha-4} f_m^{(\alpha, \beta)}(y) dy$  и интегрируя от  $y = 0$  до  $y = 1$ , для определения функций  $g_k(x)$  получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \delta_{ks} \frac{d^4 g_k}{dx^4} + 2A_{ks} \lambda^2 \frac{d^2 g_k}{dx^2} + B_{ks} \lambda^4 g_k \right] = q_s(x), \quad s = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

Здесь

$$A_{k,s} = \int_0^1 y^{\beta-4} (1-y)^{\alpha-4} \frac{d^2 f_k^{(\alpha,\beta)}(y)}{dy^2} f_s^{(\alpha,\beta)}(y) dy,$$

$$B_{k,s} = \int_0^1 y^{\beta-4} (1-y)^{\alpha-4} \frac{d^4 f_k^{(\alpha,\beta)}(y)}{dy^4} f_s^{(\alpha,\beta)}(y) dy,$$

$$q_s = \frac{1}{q_0} \int_0^1 q(x,y) y^{\beta-4} (1-y)^{\alpha-4} f_s^{(\alpha,\beta)}(y) dy.$$

Для реализации изложенного метода необходимо выбрать конкретную систему базисных функций — полиномы  $\{f_s^{(\alpha,\beta)}(y)\}$ . Заметим, что формулы для вычисления коэффициентов системы (8) существенно упрощаются, если в качестве полиномов взять систему ультрасферических полиномов при  $\alpha = \beta = 4$ . В этом случае, согласно (6), будем иметь соотношения

$$\int_0^1 f_k^{(4,4)}(y) f_s^{(4,4)}(y) dy = \delta_{k,s}.$$

Тогда коэффициенты и правые части уравнений (8) преобразуются к виду

$$A_{k,s} = \int_0^1 \frac{d^2 f_k^{(4,4)}(y)}{dy^2} f_s^{(4,4)}(y) dy, \quad B_{k,s} = \int_0^1 \frac{d^4 f_k^{(4,4)}(y)}{dy^4} f_s^{(4,4)}(y) dy, \quad (9)$$

$$q_s = \frac{1}{q_0} \int_0^1 q(x,y) f_s^{(4,4)}(y) dy.$$

Систему уравнений (8) можно существенно упростить. Это достигается благодаря допущению, что априорно выбираемые ортонормированные полиномы обладают свойством ортогональности своих первых и вторых производных.

Действительно, вычисляя коэффициенты  $A_{k,s}$  и  $B_{k,s}$  по частям, с учетом граничных условий (4) получим, что

$$A_{k,s} = \int_0^1 \frac{d^2 f_k^{(4,4)}(y)}{dy^2} f_s^{(4,4)}(y) dy = - \int_0^1 \frac{df_k^{(4,4)}(y)}{dy} \frac{df_s^{(4,4)}(y)}{dy} dy,$$

$$B_{k,s} = \int_0^1 \frac{d^4 f_k^{(4,4)}(y)}{dy^4} f_s^{(4,4)}(y) dy = \int_0^1 \frac{d^2 f_k^{(4,4)}(y)}{dy^2} \frac{d^2 f_s^{(4,4)}(y)}{dy^2} dy.$$

Таким образом, считая, что

$$A_{k,s} = \begin{cases} A_k, & k = s, \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad B_{k,s} = \begin{cases} B_k, & k = s, \\ 0, & k \neq s, \end{cases} ,$$

$$A_k = A_{k,k}, B_k = B_{k,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

вместо (8) имеем уравнения

$$\frac{d^4 g_k}{dx^4} + 2A_k \lambda^2 \frac{d^2 g_k}{dx^2} + B_k \lambda^4 g_k = q_k(x), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (10)$$

Их общие решения в зависимости от корней соответствующих характеристических уравнений можно записать следующим образом:

1) корни вещественные и разные  $(\pm\alpha_{1,k}, \pm\alpha_{2,k})$ :

$$g_k(x) = C_{1k} \cosh(\alpha_{1k}x) + C_{2k} \sinh(\alpha_{1k}x) + C_{3k} \cosh(\alpha_{2k}x) + C_{4k} \sinh(\alpha_{2k}x) + \Phi_k(x); \quad (11)$$

2) корни вещественные и разные кратности два  $(\pm\alpha_k, \alpha_k > 0)$ :

$$g_k(x) = C_{1k} \operatorname{ch}(\alpha_k x) + C_{2k} x \operatorname{ch}(\alpha_k x) + C_{3k} \operatorname{sh}(\alpha_k x) + C_{4k} x \operatorname{sh}(\alpha_k x) + \Phi_k(x); \quad (12)$$

3) корни комплексные, сопряженные  $(\pm\alpha_k \pm i\beta_k)$ :

$$g_k(x) = C_{1k} \operatorname{ch}(\alpha_k x) \cos(\beta_k x) + C_{2k} \operatorname{sh}(\alpha_k x) \cos(\beta_k x) + C_{3k} \operatorname{ch}(\alpha_k x) \sin(\beta_k x) + C_{4k} \operatorname{sh}(\alpha_k x) \sin(\beta_k x) + \Phi_k(x). \quad (13)$$

Здесь  $\Phi_k(x)$  — частное решение уравнения (10), зависящее от вида внешней нагрузки,  $C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}, C_{4k}$  — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий на кромках  $x = \operatorname{const}$  пластины.

С помощью линейно независимых функций, из которых составлены решения (11)–(13), построим новую систему линейно независимых функций  $L_k(x), M_k(x), N_k(x), K_k(x)$ , обладающих при  $x = 0$  единичной матрицей

$$\left( \begin{array}{c} L_k(x) \\ M_k(x) \\ N_k(x) \\ K_k(x) \end{array} \begin{array}{c} \frac{dL_k(x)}{dx} \\ \frac{dM_k(x)}{dx} \\ \frac{dN_k(x)}{dx} \\ \frac{dK_k(x)}{dx} \end{array} \begin{array}{c} \frac{d^2L_k(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2M_k(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2N_k(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2K_k(x)}{dx^2} \end{array} \begin{array}{c} \frac{d^3L_k(x)}{dx^3} \\ \frac{d^3M_k(x)}{dx^3} \\ \frac{d^3N_k(x)}{dx^3} \\ \frac{d^3K_k(x)}{dx^3} \end{array} \right) \Bigg|_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для определения указанных функций полагаем, что

$$\begin{aligned} L_k(x) &= C_{11}y_1(x) + C_{12}y_2(x) + C_{13}y_3(x) + C_{14}y_4(x), \\ M_k(x) &= C_{21}y_1(x) + C_{22}y_2(x) + C_{23}y_3(x) + C_{24}y_4(x), \\ N_k(x) &= C_{31}y_1(x) + C_{32}y_2(x) + C_{33}y_3(x) + C_{34}y_4(x), \\ K_k(x) &= C_{41}y_1(x) + C_{42}y_2(x) + C_{43}y_3(x) + C_{44}y_4(x), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_{ij}$  — постоянные, подлежащие определению из условий (14);  $y_i(x)$  — известные линейно независимые функции.

Определим, например, постоянные первой строки выражения (15). Подчиняя выражение  $L_k(x)$  условиям (14) при  $x = 0$ , получаем для их определения систему

$$\begin{aligned} C_{11}y_1(0) + C_{12}y_2(0) + C_{13}y_3(0) + C_{14}y_4(0) &= 1, \\ C_{11}y_1'(0) + C_{12}y_2'(0) + C_{13}y_3'(0) + C_{14}y_4'(0) &= 0, \\ C_{11}y_1''(0) + C_{12}y_2''(0) + C_{13}y_3''(0) + C_{14}y_4''(0) &= 0, \\ C_{11}y_1'''(0) + C_{12}y_2'''(0) + C_{13}y_3'''(0) + C_{14}y_4'''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Определитель системы уравнений (16) есть определитель Вронского для системы функций  $\{y_k(x)\}$  при  $x = 0$ . Так как эти функции линейно независимы, определитель Вронского отличен от нуля. Поэтому всегда можно найти постоянные  $C_{ij}$ .

Пусть для определенности корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные. Тогда из решения (13) имеем, что

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \operatorname{ch}(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), & y_2(x) &= \operatorname{sh}(\alpha_k x) \cos(\beta_k x), \\ y_3(x) &= \operatorname{ch}(\alpha_k x) \sin(\beta_k x), & y_4(x) &= \operatorname{sh}(\alpha_k x) \sin(\beta_k x). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя значения функций (17) и их производных при  $x = 0$  в систему (16), находим постоянные

$$C_{11} = 1, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = 0, \quad C_{14} = \frac{\beta_k^2 - \alpha_k^2}{2\alpha_k \beta_k}.$$

Следовательно,  $L_k(x) = y_1(x) + \frac{\beta_k^2 - \alpha_k^2}{2\alpha_k \beta_k} y_4(x)$ . Аналогично получаем выражения

$$M_k(x) = \frac{[\beta_k(3\alpha_k^2 - \beta_k^2)y_2(x) - \alpha_k(3\beta_k^2 - \alpha_k^2)y_3(x)]}{2\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 + \alpha_k^2)},$$

$$N_k(x) = \frac{y_4(x)}{2\alpha_k \beta_k},$$

$$K_k(x) = \frac{1}{2\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 + \alpha_k^2)} [\alpha_k y_3(x) - \beta_k y_2(x)].$$

Для функций и их производных справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L_k'(x) &= -(\alpha_k^2 + \beta_k^2) K_k(x), \\ M_k'(x) &= L_k(x), \quad K_k'(x) = N_k(x), \\ N_k'(x) &= \frac{1}{2\alpha_k \beta_k} [\alpha_k y_3(x) + \beta_k y_2(x)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_k''(x) &= -(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 N_k(x), \\ M_k''(x) &= -(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 K_k(x), \\ N_k''(x) &= y_1(x) + \frac{\alpha_k^2 - \beta_k^2}{2\alpha_k \beta_k} y_4(x), \\ K_k''(x) &= N_k'(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_k'''(x) &= -(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 N_k'(x), \\ M_k'''(x) &= -(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 N_k(x), \\ N_k'''(x) &= \frac{[\alpha_k(\alpha_k^2 - 3\beta_k^2)y_3(x) + \beta_k(3\alpha_k^2 - \beta_k^2)y_2(x)]}{2\alpha_k \beta_k}, \\ K_k'''(x) &= N_k''(x). \end{aligned}$$

Выражения для функций  $L_k(x)$ ,  $M_k(x)$ ,  $N_k(x)$ ,  $K_k(x)$  в случаях вещественных и разных корней, а также вещественных и равных корней находятся аналогично.

Общее решение уравнения (10) представим теперь в виде

$$\begin{aligned} g_k(x) &= g_k(0) L_k(x) + g_k'(0) M_k(x) + \\ &+ g_k''(0) N_k(x) + g_k'''(0) K_k(x) + \Phi_k(x), \end{aligned} \quad (18)$$

где частное решение  $\Phi_k(x)$ , соответствующее внешней заданной нагрузке  $q_k(x)$ , даем формулой

$$\Phi_k(x) = \int_0^x q_k(t) K_k(x-t) dt, \quad (19)$$

причем  $\Phi_k(0) = \Phi_k'(0) = \Phi_k''(0) = \Phi_k'''(0) = 0$ .

Рассмотрим некоторые частные виды внешней нагрузки.

**2.1. Равномерно распределенная нагрузка.** Пусть пластинка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q(x, y) = q_0$ . Тогда, в силу формул (9) и (19), находим, что

$$q_k(x) = f_k^*, \quad f_k^* = \int_0^1 f_k^{(4,4)}(y) dy,$$

$$\Phi_k(x) = f_k^* \int_0^x K_k(x-t) dt.$$

Частное решение можно также представить и так:

$$\Phi_k(x) = \frac{f_k^*}{B_k}.$$

**2.2. Гидростатическая нагрузка.** Пусть пластинка находится под нагрузкой интенсивности  $q(x, y) = q_0x$ . Тогда на основании формул (9) и (19) имеем представления

$$q_k(x) = f_k^*x, \quad f_k^* = \int_0^1 f_k^{(4,4)}(y) dy,$$

$$\Phi_k(x) = f_k^* \int_0^x t K_k(x-t) dt.$$

Частное решение можно также представить и в виде

$$\Phi_k(x) = \frac{f_k^*x}{B_k}.$$

**2.3. Равномерная нагрузка, распределенная по полосе.** Пусть пластинка находится под нагрузкой с интенсивностью  $q_0$ , распределенной по полосе шириной  $x_1 \leq x \leq x_2$ :

$$q(x, y) = q_0 [\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)], \quad \theta(x - x_i) = \begin{cases} 1, & x > x_i, \\ 0, & x \leq x_i. \end{cases}$$

С помощью формул (9) и (19) получаем, что

$$q_k(x) = f_k^* [\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)], \quad f_k^* = \int_0^1 f_k^{(4,4)}(y) dy,$$

$$\Phi_k(x) = f_k^* \int_{x_1}^{x_2} K_k(x-t) dt.$$



Частное решение можно также представить как

$$\Phi_k(x) = \frac{f_k^* [\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)]}{B_k}.$$

Приведем теперь для изгибающих и скручивающего моментов известные зависимости

$$M_x = -a^2 q_0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -a^2 q_0 \left( \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \\ H = -(1 - \nu) \lambda a^2 q_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Зависимости для перерезывающих сил имеют вид

$$Q_x = -a q_0 \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -a q_0 \lambda \left( \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

**3. Расчеты и анализ результатов.** Для исследования полученного решения была рассмотрена квадратная ( $a = b$ ) изотропная пластина: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Пластина закреплена по контуру. Поперечная нагрузка — равномерное давление  $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ .

Графики безразмерных прогибов пластины представлены на рис. 1, I, II в различных сечениях  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . Из них видно, что максимальные прогибы  $w_{\max} = 0.001265$ , вычисленные с использованием полной системы (8) (без предположения о квазиортогональности производных полиномов, рис. 1, II) при удержании в ряде двух первых членов ( $M = 2, k = 0, 2$ ), практически совпадают с максимальным прогибом  $w_{\max} = 0.00126$ , полученным в работе [26]. Отличие составляет не более  $\left| \frac{0.001265 - 0.00126}{0.001265} \right| \cdot 100\% \approx 0,4\%$ . Расчеты, проведенные по формуле (3), в которой функции  $g_k(x)$  определяются соотношением (18) (принимается предположение о квазиортогональности производных полиномов), при удержании в ряде двух первых членов ( $M = 2, k = 0, 2$ ) дают ошибку не более 0.14% (рис. 1, I) по сравнению с результатом решения полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов.

Графики изгибающих моментов, построенные с использованием полной системы (8) (без предположения о квазиортогональности производных полиномов), показаны на рис. 2 и 3. Максимальные значения достигаются на серединах сторон квадрата. Как видно из рис. 2, максимальные по модулю изгибающие моменты уже при удержании в ряде четырех первых членов ( $M = 6, k = 0, 2, 4, 6$ ) дают результат  $|M_y^{\max}| = 0.051336 q_0 a^2$ , отличающийся от результата  $|M_y^{\max}| = 0.0517 q_0 a^2$ , полученного в работе [26], не более чем на 0.8%.

Удержание большего числа членов ряда (шесть членов ряда,  $M = 10$ , семь членов ряда,  $M = 12$  (см. рис. 2) и т. д.) не изменяет результата  $|M_y^{\max}| = 0.051334 q_0 a^2$ .

Графики перерезывающих сил, полученные с использованием полной системы (8) (без предположения о квазиортогональности производных полиномов), показаны на рис. 4, 5. Максимальные значения достигаются на серединах сторон квадрата. Из этих рисунков видно, что максимальная перерезывающая сила  $\frac{Q_y}{a q_0} = 0.441301$  при удержании в ряде пяти первых членов ( $M = 8, k = 0, 2, 4, 6, 8$ ).

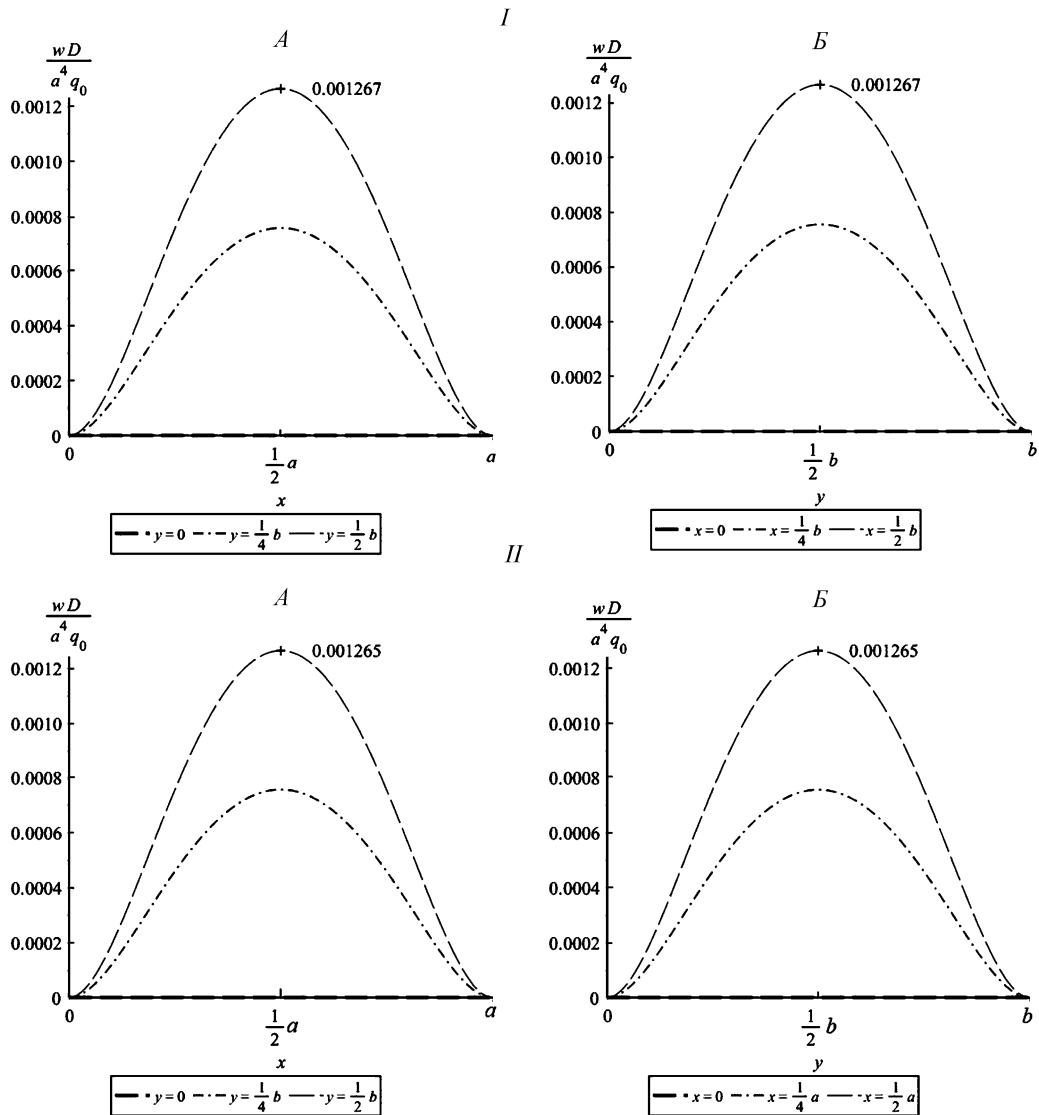


Рис. 1. Безразмерный прогиб изотропной пластины (с учетом предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов (I) и без него (II)) в сечениях  $y = \text{const}$  (A) и  $x = \text{const}$  (B) при  $M = 2$

Удержание большего числа членов ряда (семь членов ряда,  $M = 12$ , восемь членов ряда,  $M = 14$ , девять членов ряда,  $M = 16$ ) не изменяет результата (рис. 4 и 5).

Однако расчеты с удержанием большего числа членов ряда в решении (3) позволили выявить особенность поведения перерезывающих сил в окрестности угловых точек. На рис. 6 приведен график перерезывающей силы на сторонах  $y = 0, b$  и в окрестности угловой точки  $x = 0$  при удержании 16 членов ряда ( $M = 30$ ). Ничего нового здесь не наблюдается: в окрестности угловой точки перерезывающая сила меняет знак. Но вот расчеты с удержанием 21 члена ряда ( $M = 40$ ) (рис. 7) показывают, что при приближении к угловой точке перерезывающая сила снова меняет знак: с отри-

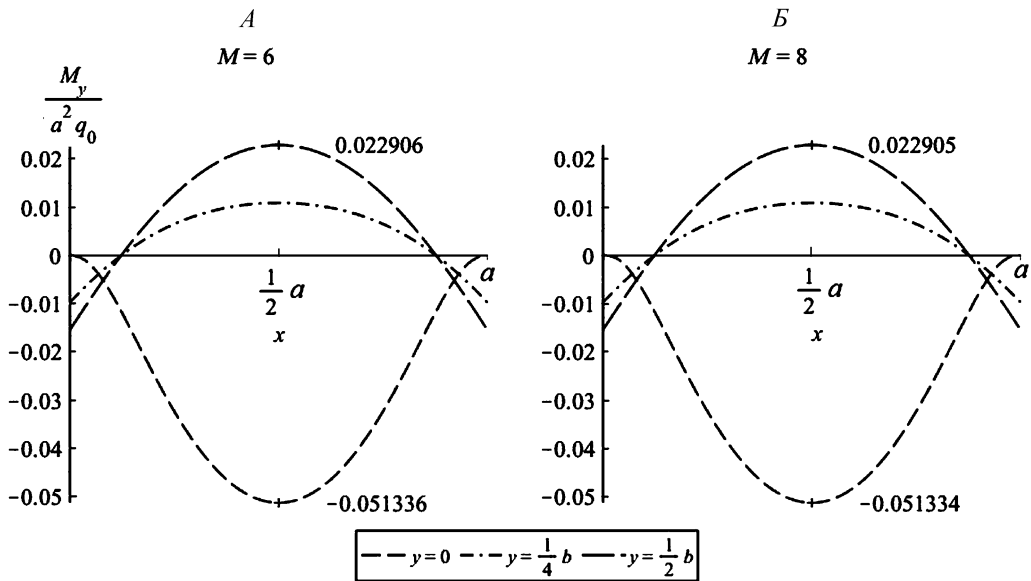


Рис. 2. Безразмерный изгибающий момент в разных сечениях  $y = \text{const}$  изотропной пластины (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов) с 4 (А) и 5 (Б) удерживаемыми членами ряда

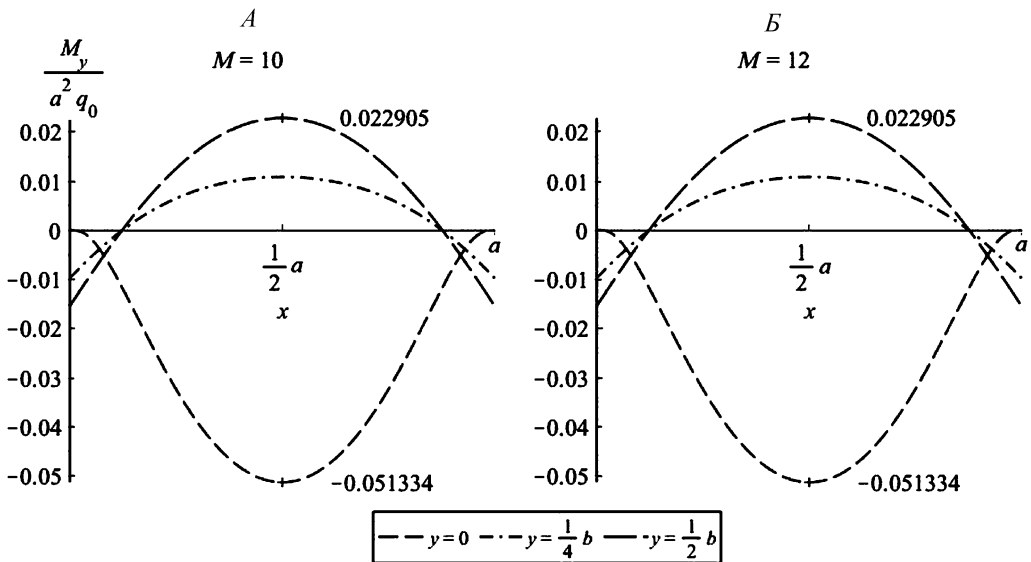


Рис. 3. Безразмерная перерезывающая сила в разных сечениях  $y = \text{const}$  изотропной пластины (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов) с 6 (А) и 8 (Б) удерживаемыми членами ряда

цательного на положительный на стороне  $y = 0$  и, наоборот, с положительного на отрицательный на стороне  $y = b$  (см. рис. 7, Б). Этот результат впервые отмечен в работе [27] и подтвержден в статье [28], в которых применялись методы, не корре-

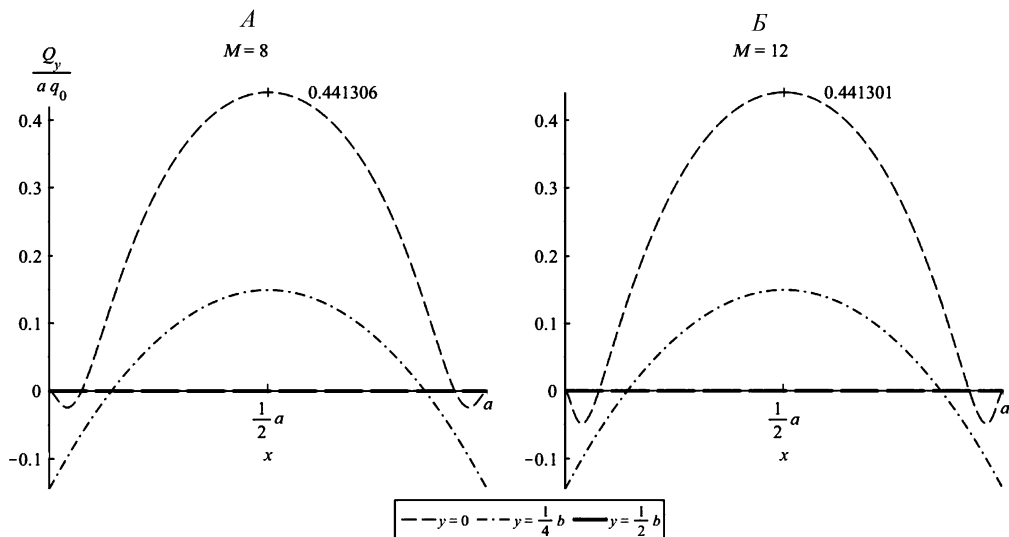


Рис. 4. Безразмерная перерезывающая сила в разных сечениях  $y = \text{const}$  анизотропной пластины (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов) с 5 (А) и 7 (Б) удерживаемыми членами ряда

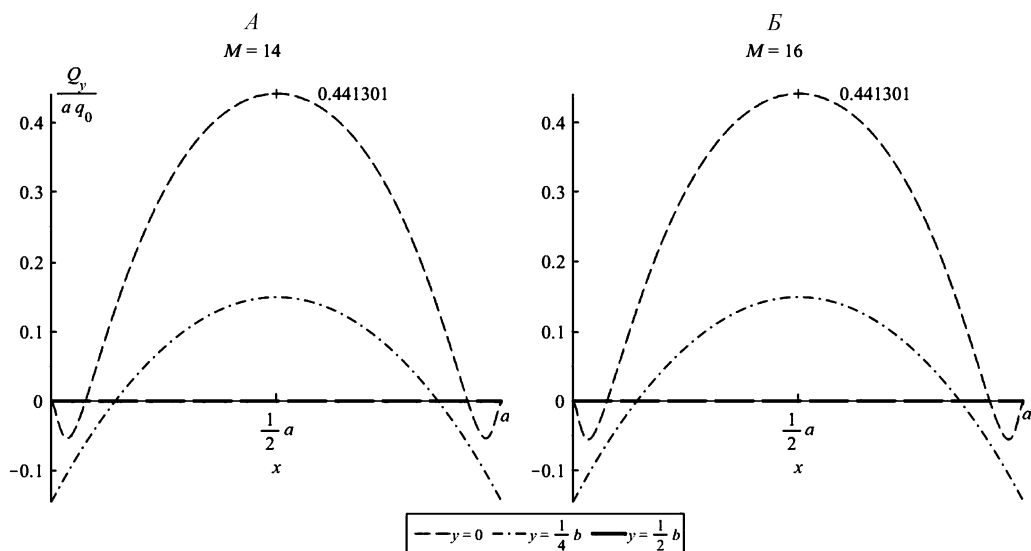


Рис. 5. Безразмерная перерезывающая сила в разных сечениях  $y = \text{const}$  анизотропной пластины (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов) с 8 (А) и 9 (Б) удерживаемыми членами ряда

лирующие между собой: в первой использовался метод суперпозиции, а во второй — метод начальных функций.

Отметим, что выполнение вычислений с помощью формулы (3) и полной системы дифференциальных уравнений (8) (без предположения о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов  $f_k(y)$ ) для определения функций  $g_k(x)$  по-

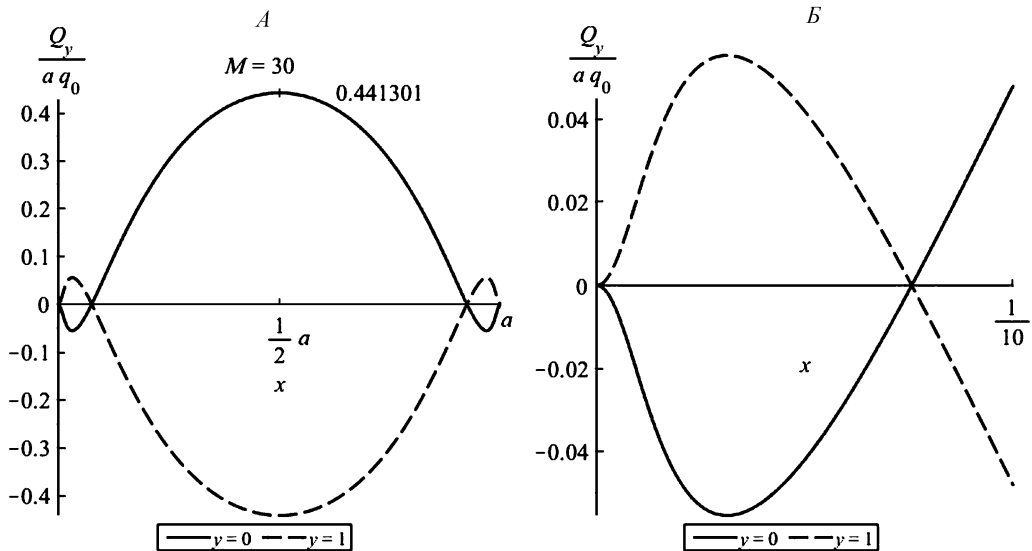


Рис. 6. Безразмерная перерезывающая сила на сторонах  $x = 0$  и  $x = a$  (А) и в малой окрестности точки  $y = 0$  (Б) с удерживаемыми 16 членами ряда  $M = 30$ ,  $k = 0, 2, \dots, 28, 30$  (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов)

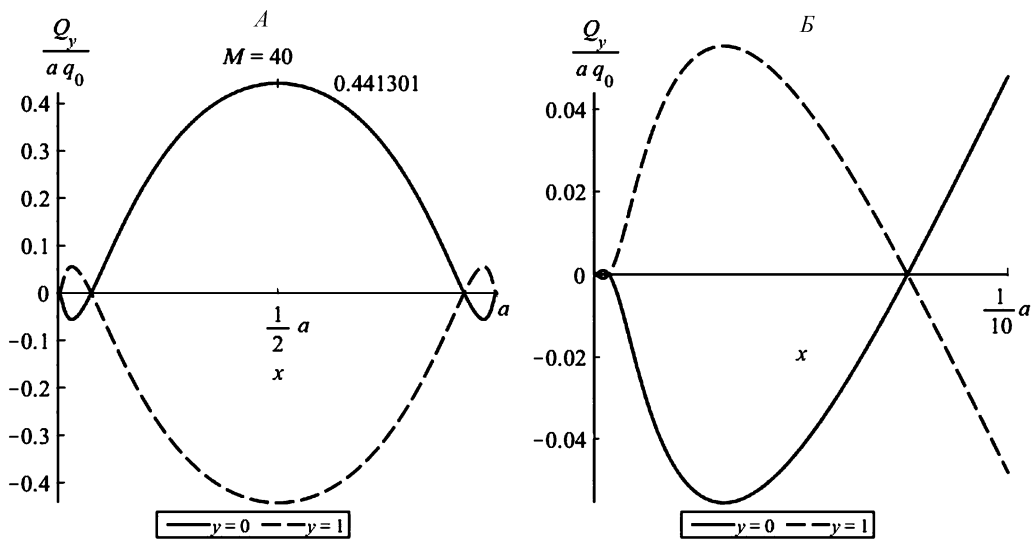


Рис. 7. Безразмерная перерезывающая сила на сторонах  $x = 0$  и  $x = a$  (А) и в малой окрестности точки  $y = 0$  (Б) с удерживаемым 21 членом ряда  $M = 40$ ,  $k = 0, 2, \dots, 38, 40$  (без предположения о квазиортогональности первой и второй производных многочленов)

требовало достаточно больших ресурсов оперативной памяти компьютера. Поэтому были проведены эксперименты с распадающейся на отдельные дифференциальные уравнения системы (8) при условии квазиортогональности полиномов решения, что, естественно, потребовало малого объема оперативной памяти.

В этом случае при расчете сил и моментов оказалось существенным, по какой переменной,  $x$  или  $y$ , выбрать полиномы  $f_k$  и соответственно функции  $g_k$  в представлении (3) решения  $W(x, y)$ . Этот выбор сказывается на погрешности вычислений изгибающих моментов и перерезывающих сил по сравнению с решением при применении полной системы дифференциальных уравнений (8), которое считаем точным. Оказалось, что для определения изгибающего момента  $M_x$  или перерезывающей силы  $Q_x$  при  $x = \text{const}$  следует использовать представление (3), а при вычислении изгибающего момента  $M_y$  или перерезывающей силы  $Q_y$  при  $y = \text{const}$  — представление

$$W(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(y) f_k(x). \quad (20)$$

В формуле (20)  $f_k(x)$  — ультрасферические полиномы Якоби, вычисляемые по (7) при  $\alpha = \beta = 4$  с заменой  $x$  на  $y$ ,  $g_k(y)$  — функции, получаемые из решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения по формуле (18) с заменой  $x$  на  $y$ .

Графики изгибающих моментов  $M_y$ , построенные с помощью формулы (20) (с учетом предположения о квазиортогональности производных полиномов), показаны на рис. 8. При удержании в ряде шести первых членов ( $M = 10, k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ )

максимальное абсолютное значение изгибающего момента  $\left| \frac{M_y^{\max}}{a^2 q_0} \Big|_{y=0, x=\frac{a}{2}} \right| \approx 0.0504$ .

При этом погрешность по сравнению с решением по полной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3) без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов составляет  $\left| \frac{0.0504 - 0.0513}{0.0513} \right| \cdot 100\% \approx 1.8\%$ .

Удержание большего числа членов ряда не изменяет результата (рис. 9).

В табл. 1 приведены результаты расчетов моментов  $M_y$  по формуле (3) с удержанием в решении до 51 члена ряда ( $M = 100$ ). Максимальное абсолютное значение изгибающего момента  $\left| \frac{M_y^{\max}}{a^2 q_0} \right| \approx 0.0570$ , а это дает погрешность  $\left| \frac{0.0570 - 0.0513}{0.0513} \right| \times 100\% \approx 11.1\%$  по сравнению с решением по полной системе обыкновенных дифференциальных уравнений без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов.

Таблица 1. Изгибающий момент  $M_y$ , вычисленный по формуле (3)

$\left  \frac{M_y^{\max}}{a^2 q_0} \Big _{y=0, x=a/2} \right $	$M = 22$	$M = 24$	$M = 26$	$M = 28$
	0.056862	0.056887	0.056907	0.056923
	$M = 40$	$M = 70$	$M = 100$	
	0.056969	0.056993	0.056997	

Аналогичная картина наблюдается и при определении перерезывающих сил (табл. 2 и 3).

Как видно из табл. 2, при удержании в ряде 20 первых членов ( $M = 38$ ) максимальная перерезывающая сила  $\frac{Q_y^{\max}}{a q_0} \approx 0.4147$ , вычисленная по формуле (20) (принимается гипотеза о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов), дает погрешность не более чем  $\left| \frac{0.4413 - 0.4147}{0.4413} \right| \cdot 100\% \approx 6.03\%$  по сравнению

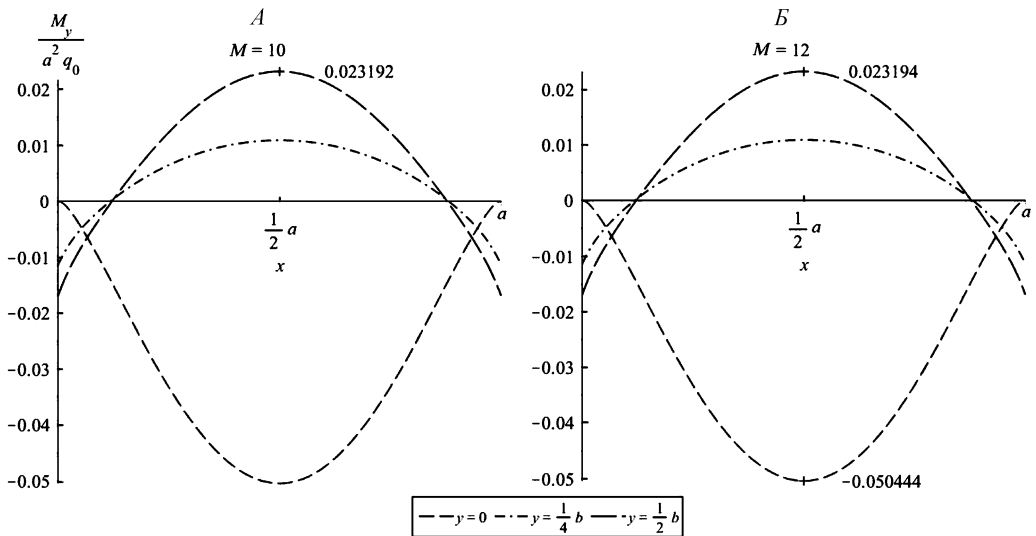


Рис. 8. Безразмерные изгибающие моменты в различных сечениях  $y = \text{const}$  изотропной пластины (с учетом предположения о квазиортогональности первой и второй производных полиномов) с 6 (А) и 8 (Б) удерживаемыми членами ряда

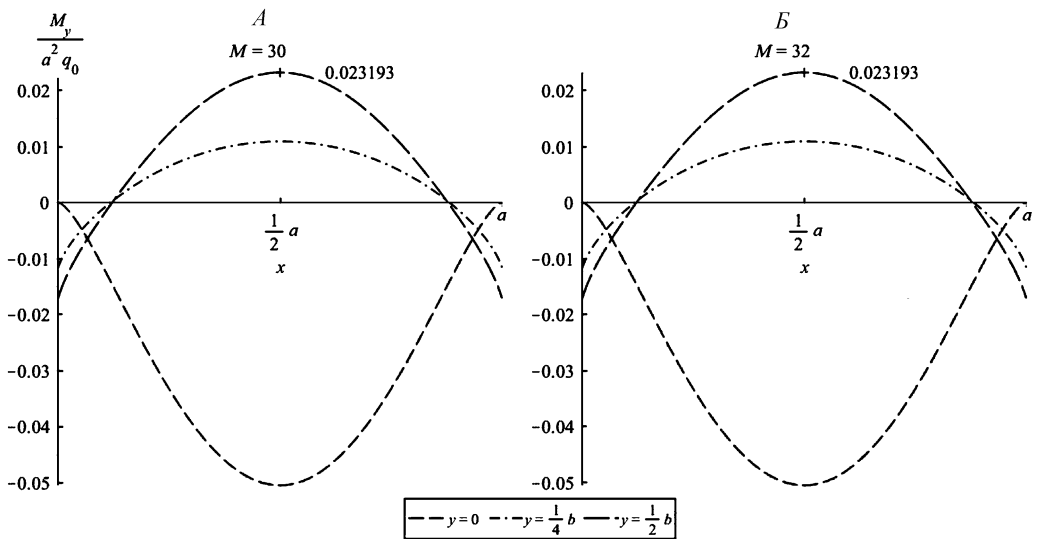


Рис. 9. Безразмерные изгибающие моменты в различных сечениях  $y = \text{const}$  изотропной пластины (с учетом предположения о квазиортогональности первой и второй производных полиномов) с 16 (А) и 17 (Б) удерживаемыми членами ряда

с решением по полной системе обыкновенных дифференциальных уравнений без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов. Вычисление максимальной перерезывающей силы по формуле (3)  $\left. \frac{Q_y^{\max}}{aq_0} \right|_{y=0, x=\frac{a}{2}} \approx 1$  (принимается гипотеза о квазиортогональности первых и вторых производных по-

Таблица 2. Перерезывающая сила  $Q_y$ , вычисленная по формуле (20)

$\frac{Q_y^{\max}}{aq_0} \Big _{y=0, x=a/2}$	$M = 36$	$M = 38$	$M = 50$	$M = 70$
	0.414775	0.414651	0.414468	0.414699
	$M = 100$	$M = 120$	$M = 130$	
	0.414711	0.414710	0.414707	

Таблица 3. Перерезывающая сила  $Q_y$ , вычисленная по формуле (3)

$\frac{Q_y^{\max}}{aq_0} \Big _{y=0, x=a/2}$	$M = 36$	$M = 38$	$M = 40$	$M = 50$
	0.923495	0.929218	0.934445	0.954992
	$M = 60$	$M = 70$	$M = 100$	
	0.969316	0.979869	0.999566	

линомов) приводит к значительной погрешности по сравнению с решением полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов (см. табл. 3).

Отметим, что решение ни по (3), ни по (20) с использованием свойства квазиортогональности первых и вторых производных полиномов не «улавливает» еще одно небольшое колебание в окрестностях угловых точек прямоугольной пластинки.

**4. Заключение.** Численные расчеты показывают достаточно быструю сходимость полученного решения в виде (3) или (20) при условии решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) (без предположения о квазиортогональности производных полиномов): удержание двух членов ряда ( $M = 2, k = 0.2$ ) дает хорошее приближение для максимального прогиба.

Вычисления, выполненные по формуле (3), в которой функции  $g_k$  определяются соотношением (18) (принимается предположение о квазиортогональности производных полиномов), при удержании в ряде двух первых членов ( $M = 2, k = 0.2$ ), дают ошибку не более 0.14 % по сравнению с результатом решения полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений без принятия гипотезы о квазиортогональности первых и вторых производных полиномов.

Таким образом, использование решения в виде (3) или (20), где функции  $g_k$  получаются из решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения типа (18), оправданно для определения прогибов.

С помощью полной системы (8) (без предположения о квазиортогональности производных полиномов) достаточно удерживать для расчета изгибающих моментов четыре члена ряда ( $M = 6, k = 0, 2, 4, 6$ ), а для вычисления перерезывающих сил — пять членов ряда ( $M = 8, k = 0, 2, 4, 6, 8$ ).

Следует отметить, что использование предположения об ортогональности первых и вторых производных полиномов существенного упрощения при расчете моментов и перерезывающих сил не дает.

## Литература

1. Lurie S. A., Vasiliev V. V. The biharmonic problem in the theory of elasticity. London: Gordon and Breach Science Publ., 1995. 276 p.
2. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. 2003. Vol. 56. N 1. P. 33–85.
3. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27. N 11. P. 2498–2509.
4. Голоскоков Д. П., Голоскоков П. Г. Метод полиномов в задачах теории тонких плит. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций, 2008. 251 с.



5. *Голоскоков Д. П.* Применение полиномов специального вида для расчета колебаний прямоугольной пластины // Журнал Университета водных коммуникаций. 2009. Т. 1. № 1. С. 185–188.
6. *Голоскоков Д. П.* Применение полиномов специального вида в задачах о колебаниях прямоугольных и секторальных пластин // Вестник Татарского государственного гуманитарного педагогического университета. 2010. Т. 3. № 21. С. 22–32.
7. *Голоскоков Д. П.* Колебания секторальных пластин // Вестник Инжеккона. Сер. Техн. науки. 2008. Т. 8. № 27. С. 156–161.
8. *Hassan A. H. A., Kurgan N., Can N.* The correct derivation of the buckling equations of the shear-deformable FGM plates for the extended Kantorovich method // *Meccanica*. 2022. Vol. 57. N 2. P. 441–456.
9. *Mamandi A.* Bending deflection and stress analyses in a thin functionally graded material skew plate with different boundary conditions on the Winkler–Pasternak elastic foundation and under combined in-plane and uniform lateral loads using the extended Kantorovich method // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Pt C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2022. Vol. 236. N 1. P. 330–353.
10. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method // *Engineering Science and Technology*. 2020. Vol. 23. N 4. P. 788–800.
11. *Singh A., Kumari P.* Three-dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: An EKM solution // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 180. N 5. P. 1–6.
12. *Fallah A., Kargarnovin M. H., Aghdam M. M.* Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method // *Key Engineering Materials*. 2011. Vol. 471–472. P. 739–744.
13. *Kargarnovin M. H., Joodaky A.* Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method // *ASME 2010 10<sup>th</sup> Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ESDA2010*. 2020. Vol. 2. P. 39–44.
14. *Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M.* A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. N 12. P. 1588–1596.
15. *Farag A. M., Ashour A. S.* Free vibration of orthotropic skew plates // *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*. 2010. Vol. 122. N 3. P. 313–317.
16. *Hassan A. H. A., Kurgan N.* Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method // *Heliyon*. 2020. Vol. 6. N 6. Art. N 04236.
17. *Rajabi J., Mohammadimehr M.* Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby–Mori–Tanaka approach // *Computers and Concrete*. 2019. Vol. 23. N 5. P. 361–376.
18. *Lopatin A. V., Morozov E. V.* Buckling of a rectangular composite orthotropic plate with two parallel free edges and the other two edges clamped and subjected to uniaxial compressive distributed load // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. 2020. Vol. 81. Art. N 103960.
19. *Onyia M. E., Rowland-Lato E. O., Ike C. C.* Galerkin–Kantorovich method for the elastic buckling analysis of thin rectangular SCSC plates // *International Journal of Engineering Research and Technology*. 2020. Vol. 13. N 4. P. 613–619.
20. *Singh A., Kumari P., Hazarika R.* Analytical solution for bending analysis of axially functionally graded angle-ply flat panels // *Mathematical Problems in Engineering*. 2018. Art. N 2597484.
21. *Ruocco E., Mallardo V., Minutolo V., Di Giacinto D.* Analytical solution for buckling of Mindlin plates subjected to arbitrary boundary conditions // *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 50. P. 497–508.
22. *Kumari P., Shakya A. K.* Two-dimensional solution of piezoelectric plate subjected to arbitrary boundary conditions using extended Kantorovich method // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 173. P. 1523–1530.
23. *Singhatanadgid P., Jommalai P.* Buckling analysis of laminated plates using the extended Kantorovich method and a system of first-order differential equations // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2016. Vol. 30. N 5. P. 2121–2131.
24. *Lopatin A. V., Morozov E. V.* Approximate buckling analysis of the CCFE orthotropic plates subjected to in-plane bending // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 85. P. 38–44.
25. *Singhatanadgid P., Singhanart T.* The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. Vol. 26. N 2. P. 170–188.

26. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / пер. с англ. Г. С. Шапиро; под ред. И. К. Снитко. М.: Наука, 1966. 636 с. (*Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. 2<sup>nd</sup> ed. New York: McGraw-Hill Publ., 1987. 580 p.*)

27. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // *Journal of Engineering Mathematics*. 2001. Vol. 40. P. 377–398.

28. Алцыбеев Г. О., Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2022. Т. 18. Вып. 3. С. 347–364. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.305>

Статья поступила в редакцию 1 июля 2023 г.

Статья принята к печати 12 октября 2023 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я :

Голоскоков Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, проф.; [dpg1954@mail.ru](mailto:dpg1954@mail.ru)

Матросов Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; [avmatrosov@mail.ru](mailto:avmatrosov@mail.ru), [a.matrosov@spbu.ru](mailto:a.matrosov@spbu.ru)

Олемской Игорь Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [i.olemskoj@spbu.ru](mailto:i.olemskoj@spbu.ru)

## Bending of a clamped thin isotropic plate by the Kantorovich method using special polynomials

*D. P. Goloskokov<sup>1</sup>, A. V. Matrosov<sup>2</sup>, I. V. Olemskoj<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., St. Petersburg, 190031, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Goloskokov D. P., Matrosov A. V., Olemskoj I. V. Bending of a clamped thin isotropic plate by the Kantorovich method using special polynomials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 4, pp. 423–442. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.401> (In Russian)

The problem of bending a thin isotropic rectangular plate clamped on all four sides under the action of a normal load uniformly distributed over its surface is considered. An analytical solution of the boundary value problem for the resolving differential equation with respect to the normal deflection of the plate is obtained by the method of L. V. Kantorovich using special-type polynomials satisfying homogeneous boundary conditions. A feature of these polynomials is the so-called “quasi-orthogonality” property of the first and second derivatives, which leads to the splitting of the system of ordinary differential equations of the L. V. Kantorovich method into separate ordinary differential equations that are easily solved analytically. However, this property of polynomials is only approximately fulfilled. Two solutions are compared: an analytical one under the assumption of “quasi-orthogonality” of the first and second derivatives of polynomials and a numerical-analytical one without this assumption. The stress-strain state in the neighborhoods of corner points has been studied. It is shown that the moments and shear forces tend to zero when approaching the corners of the plate, as well as a double change in the sign of the shear force on the edge of the plate in the neighborhoods of the corner points.

*Keywords:* isotropic plate, bending of a thin isotropic plate, numerical-analytical methods, clamped plate, L. V. Kantorovich method, orthogonal polynomials, Jacobi polynomials.

## References

1. Lurie S. A., Vasiliev V. V. *The biharmonic problem in the theory of elasticity*. London, Gordon and Breach Science Publ., 1995, 276 p.
2. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.
3. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, vol. 27, no. 11, pp. 2498–2509.
4. Goloskokov D. P., Goloskokov P. G. *Metod polinomov v zadachakh teorii tonkikh plit [The method of polynomials in the problems of the theory of thin plates]*. St. Petersburg, St. Petersburg State University for water communication Press, 2008, 251 p. (In Russian)
5. Goloskokov D. P. Primenenie polinomov spetsial'nogo vida dlia rascheta kolebanii priamougol'noi plastiny [The use of special-type polynomials for calculating the vibrations of a rectangular plate]. *Journal of the University of Water Communications*, 2009, vol. 1, no. 1, pp. 185–188. (In Russian)
6. Goloskokov D. P. Primenenie polinomov spetsial'nogo vida v zadachakh o kolebaniikh priamougol'nykh i sektoral'nykh platin [Application of special-type polynomials in the problems of oscillations of rectangular and sectoral plates]. *Bulletin of the Tatar State Humanitarian Pedagogical University*, 2010, vol. 3, no. 21, pp. 22–32. (In Russian)
7. Goloskokov D. P. Kolebaniia sektoral'nykh platin [Vibrations of sectoral plates]. *Bulletin of the Engineering. Series Technical Sciences*, 2008, vol. 8, no. 27, pp. 156–161. (In Russian)
8. Hassan A. H. A., Kurgan N., Can N. The correct derivation of the buckling equations of the shear-deformable FGM plates for the extended Kantorovich method. *Meccanica*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 441–456.
9. Mamandi A. Bending deflection and stress analyses in a thin functionally graded material skew plate with different boundary conditions on the Winkler – Pasternak elastic foundation and under combined in-plane and uniform lateral loads using the extended Kantorovich method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Pt C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2022, vol. 236, no. 1, pp. 330–353.
10. Hassan A. H. A., Kurgan N. Bending analysis of thin FGM skew plate resting on Winkler elastic foundation using multi-term extended Kantorovich method. *Engineering Science and Technology*, 2020, vol. 23, no. 4, pp. 788–800.
11. Singh A., Kumari P. Three-dimensional free vibration analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity: An EKM solution. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, vol. 180, no. 5, pp. 1–6.
12. Fallah A., Kargarnovin M. H., Aghdam M. M. Free vibration analysis of symmetrically laminated fully clamped skew plates using extended Kantorovich method. *Key Engineering Materials*, 2011, vol. 471–472, pp. 739–744.
13. Kargarnovin M. H., Joodaky A. Bending analysis of thin skew plates using extended Kantorovich method. *ASME 2010 10<sup>th</sup> Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ESDA2010*, 2020, vol. 2, pp. 39–44.
14. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, vol. 52, no. 12, pp. 1588–1596.
15. Farag A. M., Ashour A. S. Free vibration of orthotropic skew plates. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 2010, vol. 122, no. 3, pp. 313–317.
16. Hassan A. H. A., Kurgan N. Buckling of thin skew isotropic plate resting on Pasternak elastic foundation using extended Kantorovich method. *Heliyon*, 2020, vol. 6, no. 6, art. no. 04236.
17. Rajabi J., Mohammadimehr M. Bending analysis of a micro sandwich skew plate using extended Kantorovich method based on Eshelby – Mori – Tanaka approach. *Computers and Concrete*, 2019, vol. 23, no. 5, pp. 361–376.
18. Lopatin A. V., Morozov E. V. Buckling of a rectangular composite orthotropic plate with two parallel free edges and the other two edges clamped and subjected to uniaxial compressive distributed load. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2020, vol. 81, art. no. 103960.
19. Onyia M. E., Rowland-Lato E. O., Ike C. C. Galerkin – Kantorovich method for the elastic buckling analysis of thin rectangular SCSC plates. *International Journal of Engineering Research and Technology*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 613–619.
20. Singh A., Kumari P., Hazarika R. Analytical solution for bending analysis of axially functionally graded angle-ply flat panels. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, art. no. 2597484.
21. Ruocco E., Mallardo V., Minutolo V., Di Giacinto D. Analytical solution for buckling of Mindlin plates subjected to arbitrary boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 50, pp. 497–508.

22. Kumari P., Shakya A. K. Two-dimensional solution of piezoelectric plate subjected to arbitrary boundary conditions using extended Kantorovich method. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 173, pp. 1523–1530.
23. Singhatanadgid P., Jommalai P. Buckling analysis of laminated plates using the extended Kantorovich method and a system of first-order differential equations. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2016, vol. 30, no. 5, pp. 2121–2131.
24. Lopatin A. V., Morozov E. V. Approximate buckling analysis of the CCFE orthotropic plates subjected to in-plane bending. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, vol. 85, pp. 38–44.
25. Singhatanadgid P., Singhanart T. The Kantorovich method applied to bending, buckling, vibration, and 3D stress analyses of plates: A literature review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 170–188.
26. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. 2<sup>nd</sup> ed. New York, McGraw-Hill Publ., 1987, 580 p. (Russ. ed.: Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki*. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.)
27. Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A. Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, vol. 40, pp. 377–398.
28. Alcybeev G. O., Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Metod superpozitsii v zadache izgiba zaschemlennoi' po konturu tonkoi' izotropnoi' plastinki [The superposition method in the problem of bending of a thin isotropic plate clamped along the contour]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 3, pp. 347–364. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.305> (In Russian)

Received: July 1, 2023.

Accepted: October 12, 2023.

#### A u t h o r s ' i n f o r m a t i o n :

*Dmitry P. Goloskokov* — Dr. Sci. in Engineering, Professor; [dpg1954@mail.ru](mailto:dpg1954@mail.ru)

*Alexander V. Matrosov* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; [avmatrosov@mail.ru](mailto:avmatrosov@mail.ru), [a.matrosov@spbu.ru](mailto:a.matrosov@spbu.ru)

*Igor V. Olemskoy* — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; [i.olemskoj@spbu.ru](mailto:i.olemskoj@spbu.ru)