

Санкт-Петербургский государственный университет  
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных  
систем

**Панченко Маргарита Станиславовна**

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Исследование явных методов Рунге – Кутты  
повышенного порядка точности**

Направление 010900

«Прикладные математика и физика»

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Кривовичев Г. В.

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

Введение .....	3
Глава 1. Обзор литературы .....	5
1.1. Задача Коши .....	5
1.2. Метод рядов Тейлора .....	5
1.3. Явные методы Рунге–Кутты .....	6
1.4. Область устойчивости .....	10
1.5. Явные методы повышенного порядка точности .....	10
Глава 2. Трехэтапные методы повышенного порядка точности .....	13
2.1. Случай неавтономного уравнения .....	13
2.2. Случай автономного уравнения .....	14
2.3. Функция устойчивости и выбор оптимальных параметров .....	15
Глава 3. Решение тестовых задач .....	19
Заключение .....	24
Список литературы .....	25

## Введение

Задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений описываются разные процессы в науке и технике. Получить аналитическое решение такой задачи можно только в малом числе возможных случаев. В связи с этим задача разработки и исследования численных методов решения задачи Коши является одной из наиболее главных в вычислительной математике.

Сложность получения аналитического решения возникает и при дискретизации уравнений в частных производных методом прямых. В этом случае особенно актуальной становится проблема устойчивости метода. Как правило, число неизвестных в таких системах совпадает с числом узлов сетки, так что они имеют большую размерность. В связи с этим, для подобных систем предпочтительно использовать явные методы, более простые и менее затратные в реализации, но, как правило, условно устойчивые.

В Главе 1 рассматриваются некоторые численные методы решения задачи Коши, а именно: метод рядов Тейлора, явные методы Рунге–Кутты. Рассматриваются такие понятия, как порядок точности и число этапов метода и их зависимость от набора параметров метода. Рассмотрена процедура построения методов. Приводятся определение функции устойчивости и области устойчивости. Приводятся формулы для методов повышенного порядка точности.

В Главе 2 рассматриваются явные методы Рунге–Кутты повышенного порядка точности. Выводятся системы условий порядка метода трех этапов для случаев неавтономного и автономного уравнений. Определяются входные параметры. Производится наглядное сравнение функций устойчивости

обычного метода и метода повышенного порядка точности. Предлагается осуществлять выбор входных параметров таким образом, чтобы площадь области устойчивости оказалась наибольшей.

В Главе 3 при решении тестовых задач показано, что предложенный подход к максимизации площади области устойчивости действительно позволяет улучшать практическую устойчивость методов.

# Глава 1. Обзор литературы

## 1.1. Задача Коши

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (0; T], \quad (1)$$

$$y(0) = y_0, \quad (2)$$

где  $y : [0; T] \rightarrow R$ ,  $f : (0; T] \times R \rightarrow R$ ,  $y_0 \in R$ .

Заметим, что результаты, полученные при построении численных методов для задачи (1)–(2), естественно можно распространить на случай системы уравнений.

## 1.2. Метод рядов Тейлора

Решить задачу (1)–(2) аналитически удастся лишь в некоторых случаях, например, для специальных типов уравнений. Поэтому существуют приближенные способы решения. Один из таких методов — метод степенных рядов, реализацией которого является представление искомой функции  $y(t)$  в виде отрезка ряда Тейлора.

Рассмотрим разбиение отрезка  $t \in (0; T]$  точками:

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T.$$

Полученный набор точек называется сеткой, а точки  $t_i$  — узлами сетки.

Предполагается, что правая часть  $f(t, y(t))$  уравнения (1) имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка  $k$ . В следствие этого искомое решение  $y(t)$  имеет непрерывные производные до порядка  $k+1$  включительно.

Тогда по формуле Тейлора решение в узле  $t_1$  представляется таким образом:

$$y(t_1) \approx y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \dots + \frac{h^k}{k!}y_0^{(k)}, \quad (3)$$

где  $y_0^{(i)} = y^{(i)}(0)$ ,  $h = t_1 - t_0$ .

Производные в правой части (3) могут быть найдены следующим образом:

$$y'_0 = f(0, y_0),$$

$$y''_0 = \{f'_t + ff'_y\},$$

$$y'''_0 = \{f''_{tt} + 2ff''_{ty} + f^2f''_{yy} + (f'_t + ff'_y)f'_y\}.$$

.....

Весомым недостатком данного метода является то, что при увеличении порядка  $k$  выражения для производных становятся более громоздкими.

### 1.3. Явные методы Рунге – Кутты

Карлом Рунге был предложен следующий подход, который основан на найденном приближенном значении  $y_j \approx y(t_j)$  решения  $y = y(t)$  задачи (1)–(2) и вычислении приближенного решения  $y_{j+1}$  в следующем узле  $t_{j+1} = t_j + h$ .

Приближенное решение рассчитывается по формуле:

$$y_{j+1} \approx y_j + \sum_{i=1}^m p_i K_i(h). \quad (4)$$

Функции  $K_i(h)$  задаются следующим образом:

$$K_1(h) = hf(t_j, y(t_j)), \quad K_2(h) = hf(t_j + \alpha_2 h, y(t_j) + \beta_{21} K_1(h)),$$

$$K_3(h) = hf(t_j + \alpha_3 h, y(t_j) + \beta_{31} K_1(h) + \beta_{32} K_2(h)),$$

.....

$$K_m(h) = hf \left( t_j + \alpha_m h, y(t_j) + \sum_{l=1}^{m-1} \beta_{ml} K_l(h) \right),$$

где  $m$  – число этапов метода.

Конкретный метод определяется набором параметров  $p_i, \alpha_k, \beta_{kl}, i = \overline{1, m}, k = \overline{2, m}, l = \overline{1, k-1}$ , которые находятся таким образом, чтобы (4) совпадало с разложением (3) до максимально возможного  $k$  при фиксированном  $m$  (см. [1]). Локальная погрешность метода определяется следующим образом:

$$\rho_{qm}(h) = y(t_j + h) - y_j - \sum_{q=1}^m p_q K_q, \quad (5)$$

где  $y(t_j + h)$  – точное решение. Если для (5) справедливо, что при  $h \rightarrow 0$  :

$$\rho_m(h) = \frac{\rho^{s+1}(\theta)}{(s+1)!} h^{s+1},$$

где  $\rho_m(0) = 0, \rho'_m(0) = 0, \dots, \rho_m^{(s)}(0) = 0$ , то метод имеет порядок точности  $s$ .

В таблице 1 [2] можно увидеть, как относится число этапов метода к порядку его точности.

$m$	1	2	3	4	5	6	7
$s$	1	2	3	4	6	7	9

Таблица 1. Зависимость порядка точности обычного метода Рунге–Кутты от числа его этапов.

Таким образом, параметры функций  $K_i(h)$  (4) задаются так, чтобы обеспечивается максимальный порядок точности при фиксированном числе этапов  $m$ , то есть при фиксированном числе вычислений функции  $f$ .

Для примера рассмотрим построение одноэтапного метода:

$$y(t_j + h) \approx y_j + p_1 K_1(t_j, y_j) = y_j + p_1 h f(t_j, y_j).$$

$$\rho_1(h) = y(t_j + h) - y_j - p_1 h f(t_j, y_j),$$

при  $h = 0$ :

$$\rho_1(0) = y(t_j) - y_j - p_1 \cdot 0 = 0.$$

$$\rho_1'(h) = y'(t_j + h) - p_1 f(t_j, y_j) = f(t_j + h, y(t_j + h)) - p_1 f(t_j, y_j).$$

При  $h = 0$ :

$$\rho_1'(0) = f(t_j, y_j) - p_1 f(t_j, y_j) = (1 - p_1) f(t_j, y_j).$$

$\rho_1'(0) = 0$ , следовательно,  $1 - p_1 = 0$ , тогда  $p_1 = 1$ . Возникает вопрос о том, будет ли достигаться второй порядок точности.

$$\rho_1'' = \left( \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} y'(t_j + h) \right).$$

При  $h = 0$ :

$$\rho_1''(0) = \left( \frac{\partial f(t_j, y_j)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_j, y_j)}{\partial y} f(t_j, y_j) \right).$$

Таким образом, в общем случае  $\rho_1''(0) \neq 0$ , следовательно при  $m = 1$  максимально возможный порядок точности равен 1.

Рассмотрим построение двухэтапного метода:

$$y(t_j + h) \approx y_j + p_1 h f(t_j, y_j) + p_2 h f(t_j + \alpha_2 h, y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)),$$

$$\rho_2(h) = y(t_j + h) - y_j - p_1 h f(t_j, y_j) - p_2 h f(t_j + \alpha_2 h, y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)).$$

Здесь у метода уже 4 параметра:  $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ .

Обозначим  $t_j(h) = t_j + \alpha_2 h$ ,  $y_j(h) = y_j + \beta_{21} h f(t_j, y_j)$ . Тогда

$$\rho_2(0) = y(t_j) - y_j = 0.$$

$$\rho_2'(h) = y'(t_j + h) - p_1 f(t_j, y_j) - p_2 f(t_j(h), y_j(h)) - p_2 h \left( \frac{\partial f(t_j(h), y(t_j(h)))}{\partial t} \alpha_2 + \frac{\partial f(t_j(h), y(t_j(h)))}{\partial y} \frac{dy(t_j(h))}{dt} \beta_{21} \right),$$



при  $h = 0$ :  $\rho_2'(0) = (1 - p_1 - p_2)f(t_j, y_j)$ , следовательно,  $1 - p_1 - p_2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \rho_2''(h) = & \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} + f(t_j + h, y(t_j + h)) \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} - \\ & - 2p_2 \left( \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial y} f(t_j(h), y_j(h)) \right) - \\ & - p_2 h \left( \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j(h), y_j(h))}{\partial y} f(t_j + h, y(t_j + h)) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_2''(h) = & (1 - 2p_2\alpha_2)f_t'(t_j + h, y(t_j + h)) + \\ & + (1 - 2p_2\beta_{21})f_y'(t_j + h, y(t_j + h))f(t_j + h, y(t_j + h)) + \\ & + hp_2 \left( \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial t} \alpha_2 + \beta_{21} \frac{\partial f(t_j + h, y(t_j + h))}{\partial y} f(t_j + h, y(t_j + h)) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\rho_2''(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $1 - 2p_2\alpha_2 = 0$  и  $1 - 2p_2\beta_{21} = 0$ . Имеем систему уравнений для определения параметров (условия порядка):

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ 2p_2\alpha_2 = 1, \\ 2p_2\beta_{21} = 1. \end{cases}$$

Из нее следует, что  $p_2 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$  и  $\beta_{21} \neq 0$ . Имеем систему из трех уравнений относительно четырех неизвестных. Пусть  $\alpha_2$  – входной параметр. Тогда получаем:

$$p_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad p_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha_2}, \quad \beta_{21} = \alpha_2.$$

Известно [2], что за счет выбора параметров нельзя добиться третьего порядка точности при  $m = 2$ .

## 1.4. Область устойчивости

Устойчивость численных методов систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется на примере задачи Коши вида [4]

$$\dot{y} = \lambda y, \quad y(0) = 1. \quad (6)$$

Одношаговый численный метод, применяемый к решению уравнения (6), может быть записан в виде

$$y_{n+1} = \mathcal{R}(z)y_n, \quad z = \lambda h,$$

где  $\mathcal{R}(z)$  – функция устойчивости [3]. Данная задача известна как тестовая задача Далквиста [4]. Тогда множество

$$D = \{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{R}(z)| \leq 1\}$$

называется областью устойчивости данного метода.

Функция устойчивости обычного метода Рунге–Кутты из двух этапов будет иметь вид:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2},$$

а для метода из трех этапов:

$$\mathcal{R}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Как можно заметить, для методов вида (4) за счет выбора параметров никак нельзя влиять на область устойчивости.

## 1.5. Явные методы повышенного порядка точности

В работе Гекена и Джонсона в 2000 году [3] был предложен подход к построению метода повышенного порядка точности, основанного на использовании

первой производной функции  $f$  в случае скалярного уравнения и матрицы Якоби в случае системы уравнений.

В данном методе в представлении по формуле (4) функции  $K_i(h)$  задаются уже иным способом, отличным от обычного дополнительными слагаемыми:

$$K_1(h) = hf(t_j, y(t_j)),$$

$$K_2(h) = hf(t_j + \alpha_{21}h + \alpha_{22}h^2 f'_y, y(t_j) + \beta_{21}K_1(h) + \beta_{22}hK_1(h)f'_y),$$

$$K_3(h) = hf(t_j + \alpha_{31}h + \alpha_{32}h^2 f'_y, y(t_j) + \beta_{31}K_1(h) + \beta_{32}K_2(h) + \beta_{33}hK_1(h)f'_y + \beta_{34}hK_2(h)f'_y),$$

.....

$$K_m(h) = hf\left(t_j + \alpha_{m1}h + \alpha_{m2}h^2 f'_y, y(t_j) + \sum_{l=1}^{m-1} (\beta_{ml} + hf'_y \beta_{m(l+m-1)})K_l(h)\right).$$

Достоинство методов связано с тем, что их порядок точности как минимум на единицу больше, чем число этапов, в отличие от обычных методов [3].

По аналогии с обычным двухэтапным методом Рунге–Кутты строится и двухэтапный метод повышенного порядка точности (рассмотрим для случая стационарного уравнения  $y' = f(y)$ ):

$$y_{n+1} = y_n + p_1 K_1(h) + p_2 K_2(h),$$

$$K_1(h) = hf(y_n), \quad K_2(h) = hf(y_n + \beta_{21}K_1(h) + h\beta_{22}f'_y(y_n)K_1).$$

В отличие от обычного метода такой метод имеет третий порядок. Для нахождения четырех параметров метода  $p_1, p_2, \beta_{21}, \beta_{22}$  имеем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}, \\ p_2 \beta_{22} = \frac{1}{6}, \\ p_2 \beta_{21}^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Как можно видеть  $p_2 \neq 0$ ,  $\beta_{21} \neq 0$ ,  $\beta_{22} \neq 0$ . Решение данной системы  $p_1 = \frac{1}{4}$ ,  $p_2 = \frac{3}{4}$ ,  $\beta_{21} = \frac{2}{3}$ ,  $\beta_{22} = \frac{2}{9}$  – единственное.

Заметим, что предложенные в [3] методы пока недостаточно исследованы. В связи с этим **цель** работы состоит в исследовании методов Рунге–Кутты повышенного порядка точности. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) Изучить методику построения методов Рунге–Кутты повышенного порядка точности.
- 2) Поставить и решить задачу о нахождении оптимальных параметров методов.
- 3) Решить тестовые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

## Глава 2. Трехэтапные методы повышенного порядка точности.

В настоящей работе основное внимание уделяется трехэтапным методам. В случае неавтономного уравнения метод зависит от одного параметра, в случае автономного уравнения – от двух.

### 2.1. Случай неавтономного уравнения.

Система условий порядка для трехэтапного метода в случае неавтономного уравнения представляет собой систему 12 алгебраических уравнений относительно 13 неизвестных:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad (7)$$

$$p_2\alpha_{21} + p_3\alpha_{31} = 1/2, \quad (8)$$

$$p_2\alpha_{21}^2 + p_3\alpha_{31}^2 = 1/3, \quad (9)$$

$$p_2\alpha_{21}^3 + p_3\alpha_{31}^3 = 1/4, \quad (10)$$

$$p_2\alpha_{22} + p_3(\alpha_{21}\beta_{32} + \alpha_{32}) = 1/6, \quad (11)$$

$$p_3\alpha_{21}\alpha_{31}\beta_{32} = 1/8, \quad (12)$$

$$2p_2\alpha_{21}\alpha_{22} + p_3(\alpha_{21}^2\beta_{32} + 2\alpha_{31}\alpha_{32}) = 1/12, \quad (13)$$

$$p_3(\alpha_{22}\beta_{32} + \alpha_{21}\beta_{34}) = 1/24, \quad (14)$$

$$\beta_{31} + \beta_{32} = \alpha_{31}, \quad (15)$$

$$\beta_{33} + \beta_{34} = \alpha_{32}, \quad (16)$$

$$\beta_{21} = \alpha_{21}, \quad (17)$$

$$\beta_{22} = \alpha_{22}. \quad (18)$$

Таким образом, система является недоопределенной и один параметр нужно положить входным. В качестве такого параметра был выбран параметр  $\alpha_{21}$ , так как при таком выборе получается подсистема, через решение которой выражаются остальные параметры.

Из уравнения (12) видно, что  $\alpha_{21} \neq 0$ ,  $\alpha_{31} \neq 0$ ,  $p_3 \neq 0$ ,  $\beta_{32} \neq 0$ . Так как параметр  $\alpha_{21}$  – входной, то из подсистемы уравнений (8)-(10) через  $\alpha_{21}$  выражаются параметры  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $\alpha_{31}$ . Затем шаг за шагом находятся остальные параметры: из уравнения (7) выражается  $p_1$ , из (12) –  $\beta_{32}$ , из (15) –  $\beta_{31}$ , из подсистемы (11), (13) –  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{32}$ , из (14) –  $\beta_{34}$ , из (16) –  $\beta_{33}$ , из (17) –  $\beta_{21}$ , а из (18) –  $\beta_{22}$ . Решение уравнений может быть получено с использованием современных пакетов компьютерной алгебры, например, с помощью Symbolic Toolbox пакета MATLAB. Выражения для компонент решения не приводятся в силу их громоздкости.

## 2.2. Случай автономного уравнения.

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Система для условий порядка в случае автономного уравнения имеет вид:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_2\beta_{21} + p_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = 1/2,$$

$$p_2\beta_{21}^2 + p_3(\beta_{31} + \beta_{32})^2 = 1/3, \quad p_2\beta_{21}^3 + p_3(\beta_{31} + \beta_{32})^3 = 1/4,$$

$$p_2\beta_{22} + p_3(\beta_{21}\beta_{32} + \beta_{33} + \beta_{34}) = 1/6,$$

$$p_3(\beta_{21}\beta_{34} + \beta_{22}\beta_{32}) = 1/24,$$

$$p_2\beta_{21}\beta_{22} + p_3(\beta_{21}\beta_{32}((1/2)\beta_{21} + \beta_{31} + \beta_{32}) + (\beta_{31} + \beta_{32})(\beta_{33} + \beta_{34})) = 1/6.$$

Аналогично случаю неавтономного уравнения выбираются входные параметры  $\beta_{31}$ ,  $\beta_{32}$  и выражаются остальные параметры системы.

### 2.3. Функция устойчивости и выбор оптимальных параметров

В настоящей работе предлагается подход, при котором параметры будут выбираться таким образом, чтобы площадь области устойчивости метода оказалась наибольшей. Задача о поиске оптимальных параметров ставится следующим образом — пусть известно множество, которому принадлежат значения параметров, предполагается, что это множество является параллелепипедом. Пределы изменения параметров метода  $\underline{a}_n$  и  $\bar{a}_n$  можно определить в ходе вычислительных экспериментов. Оптимальным набором параметров будет считаться тот, при котором площадь области устойчивости является наибольшей. При этом имеется определенная сложность — неизвестен вид аналитической зависимости площади  $S$  от параметров. Можно вычислять только ее значения при заданных параметрах. Поэтому для поиска наибольшего значения можно применять только методы не использующие производные.

При расчетах использовался метод простейшего случайного поиска. Его суть заключается в том, что в области изменения параметров  $[\underline{a}_n; \bar{a}_n]$  задается произвольная последовательность точек

$$\xi_n = (\bar{a}_n - \underline{a}_n)\gamma_n + \underline{a}_n, \quad (19)$$

где  $\gamma_n$  — равномерно распределенная случайная величина на отрезке  $[0; 1]$ . В каждой из этих точек вычисляется значение функции  $S(a_n)$  и находится точка  $a_{n_0}$ , в которой  $S(a_{n_0}) = \max S(a_n)$  [5]. Для поиска наибольшего значения написана программа в среде MATLAB, случайная величина  $\gamma_n$  в (19) задается с помощью функции  $rand()$ . Данный метод был выбран, так как он простой в реализации, применяем в пространствах любой размерности, и потому что область, которой принадлежат значения параметров (параллелепипед), хорошо подходит для его применения.

Рассматривается задача о нахождении оптимального параметра трехэтапного метода. Для сравнения приводятся выражения для функции устойчивости обычного метода и метода повышенного порядка точности.

1. Функция устойчивости обычного метода:

$$\mathcal{R} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^3.$$

2. Функция устойчивости метода повышенного порядка точности:

$$\mathcal{R} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + p_3\beta_{34}\beta_{22}z^5. \quad (20)$$

Как можно видеть, у функции устойчивости (20) есть слагаемое, которое зависит от параметров, то есть за счет выбора параметров можно влиять на площадь области устойчивости методов повышенного порядка точности.

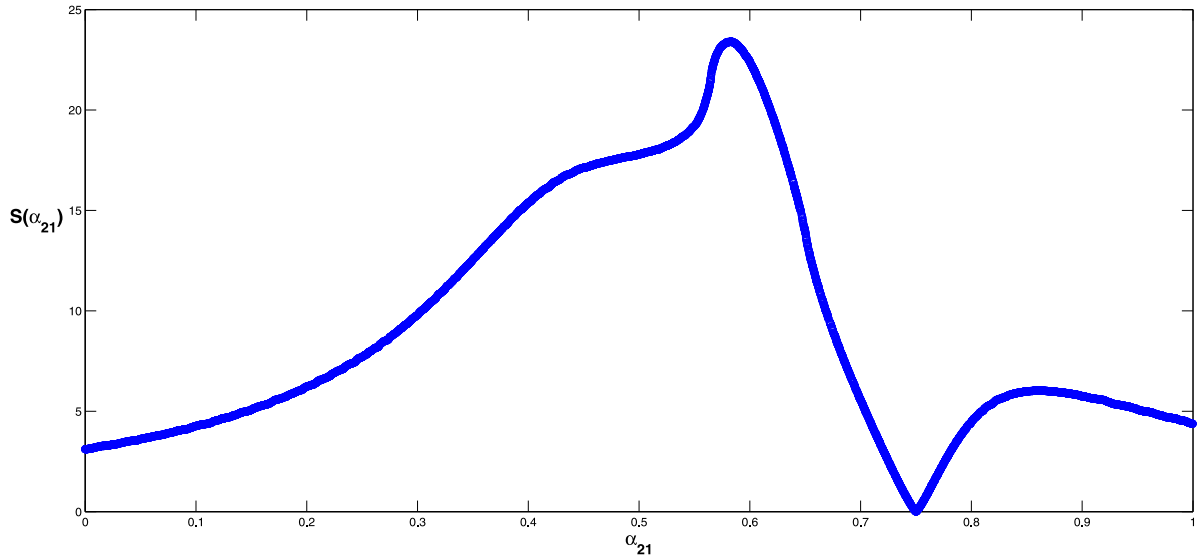


Рис. 1. График зависимости площади области устойчивости от значения параметра  $\alpha_{21}$

На рис. 1 представлен график зависимости площади области устойчивости от параметра. Для случая неавтономного уравнения площадь будет иметь наибольшее значение при  $\alpha_{21} = 0,582543$ . Для случая автономного уравнения оптимальные параметры равны:  $\beta_{31} = 0,655354$ ,  $\beta_{32} = 0,472121$ .



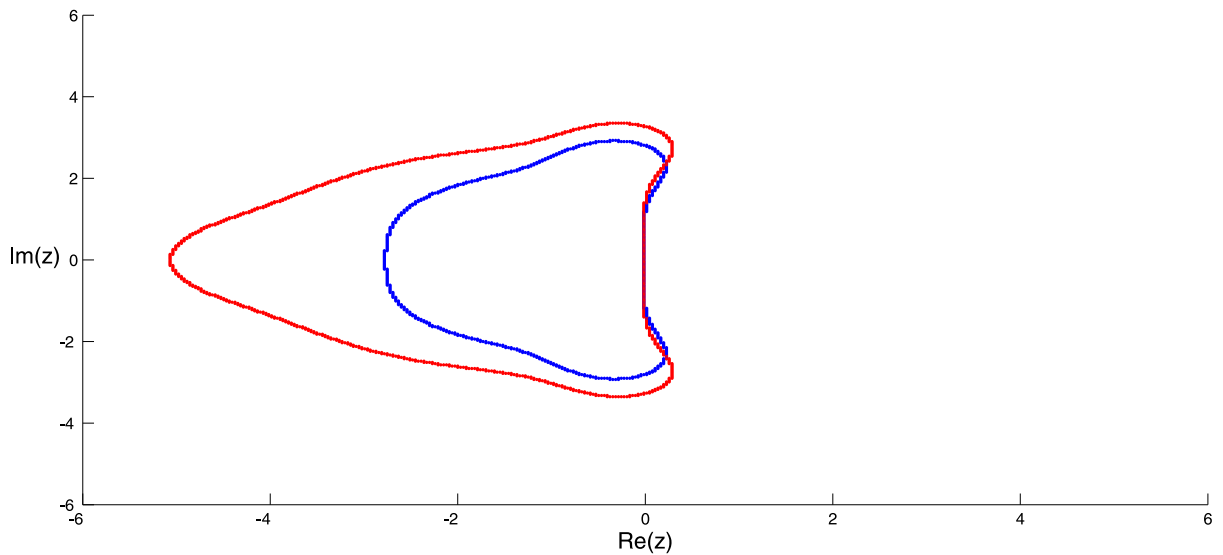


Рис. 2. Границы областей устойчивости методов 4 порядка. Красная кривая — трехэтапный метод повышенного порядка точности при оптимальном значении  $\alpha_{21}$ , синяя кривая — четырехэтапный метод Рунге – Кутты

На рис. 2 для сравнения представлены границы областей устойчивости трехэтапного метода 4 порядка и обычного метода Рунге – Кутты 4 порядка с 4 этапами. Как можно видеть, площадь области устойчивости трехэтапного метода повышенного порядка больше, чем площадь области устойчивости обычного четырехэтапного метода.

На рис. 3 для сравнения представлены границы областей устойчивости трехэтапного метода повышенного порядка для случая неавтономного и автономного уравнений. Площади областей устойчивости оказываются практически равными, поэтому поскольку метод для неавтономного уравнения определяется всего одним параметром, а метод для автономного — двумя, то нет смысла отдельно рассматривать случай автономного уравнения, как это обычно делают в литературе.

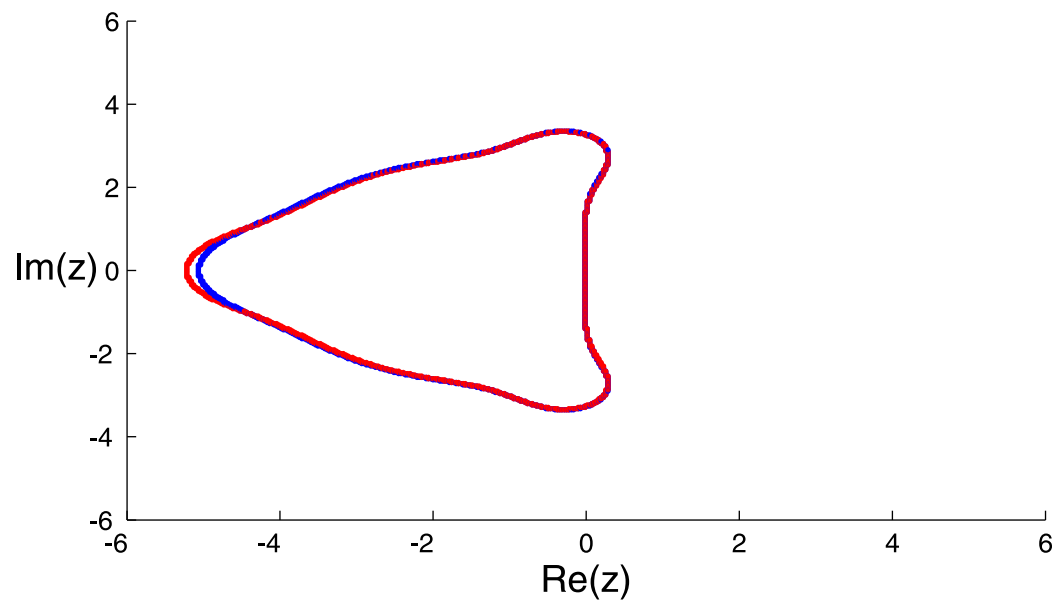


Рис. 3. Границы областей устойчивости трехэтапных методов повышенного порядка при оптимальных параметрах. Красная кривая — метод для неавтономного уравнения, синяя кривая — метод для автономного уравнения

### Глава 3. Решение тестовых задач.

Сравнение трехэтапных методов с оптимальными параметрами с обычным методом Рунге – Кутты четвертого порядка и трехэтапными методами с неоптимальными параметрами проводилось при решении двух задач Коши, аналитические решения которых известны [3].

Задача 1.

$$\dot{y} = -y, \quad y(0) = 1, \quad y(t) = e^{-t}.$$

Задача 2.

$$\dot{y} = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{80}, \quad y(0) = 1, \quad y(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-\frac{t}{4}}}.$$

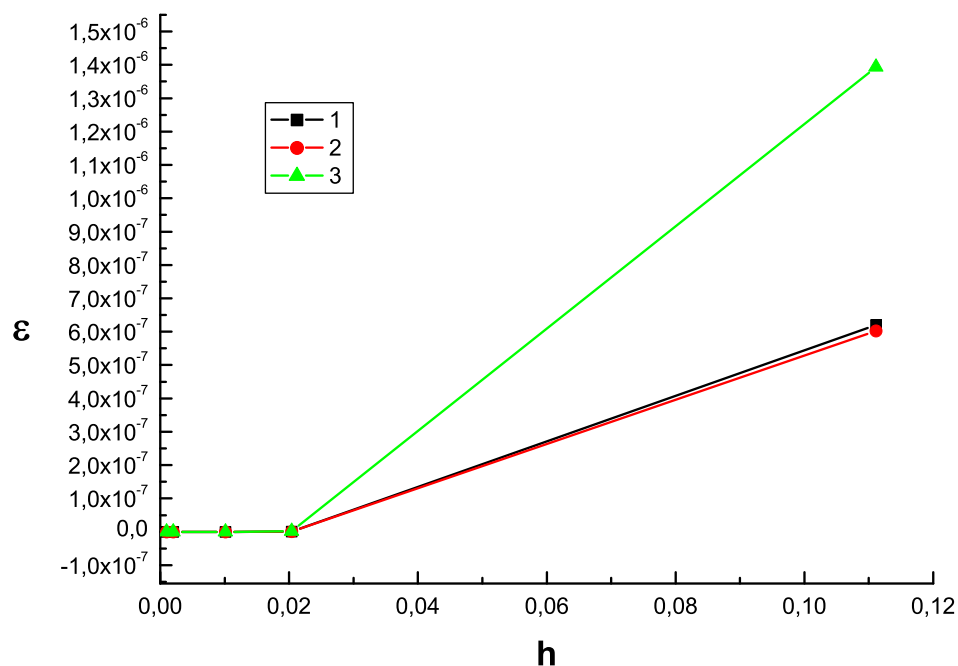


Рис. 4. Графики относительной погрешности: 1 – метод повышенного порядка для неавтономного уравнения; 2 – метод повышенного порядка для автономного уравнения; 3 – обычный метод Рунге – Кутты 4 порядка.

На рис. 4 представлены графики относительных погрешностей трехэтапных методов 4 порядка и обычного метода Рунге – Кутты четвертого порядка. Как можно видеть, трехэтапные методы при решении задачи 1 позволили получить более точный результат.

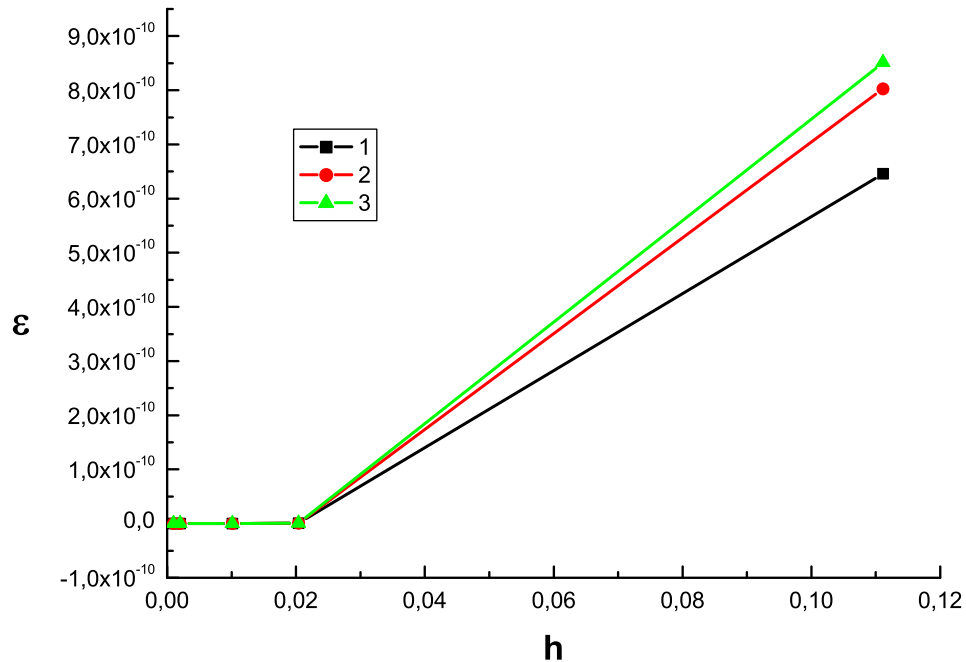


Рис. 5. Графики относительной погрешности: 1 – метод повышенного порядка для неавтономного уравнения; 2 – метод повышенного порядка для автономного уравнения; 3 – обычный метод Рунге – Кутты 4 порядка.

При решении задачи 2 (рис. 5) оказалось, что трехэтапные методы при оптимальных значениях параметров вновь являются более точными.

Методы тестировались и при применении метода прямых к решению задач для уравнений в частных производных [6]. Метод основан на том, что уравнение дискретизуется только по одной из переменных. Для рассмотренных задач — это пространственная переменная.

Рассматривается задача для линейного уравнения переноса с нулевым гра-

ничным условием и кусочно-постоянным начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in (0; 10], \quad x \in (0; 10], \quad a > 0,$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 1, & x \in (1; 2] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Для дискретизации производной по  $x$  на равномерной сетке используется левая разностная производная. Таким образом, поставленная задача сводится к задаче Коши для линейной системы. Сетка по пространству имеет вид:  $x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = \frac{10}{N}$ .

$$u_i(t) \approx u(t, x_i),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i) \approx \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h},$$

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{a}{h}u_1, \quad \frac{du_i}{dt} = \frac{a}{h}(u_{i-1} - u_i), \quad i = \overline{2, N},$$

$$u_i(0) = f(x_i).$$

В ходе численных расчетов на различных сетках подбиралось приближенное значение параметра Куранта, определяющее границу площади области устойчивости. Рассматривался случай оптимального значения параметра и значений, представленных в статье.

	$\alpha_{21} = 1/3$	$\alpha_{21} = 1/2$	$\alpha_{21} = 1$	$\alpha_{21} = \alpha_{21opt}$
N=100	0.7645	1.048	0.4794	1.179
N=250	0.7994	1.031	0.3315	1.318
N=500	0.7965	1.026	0.5300	1.308

Таблица 2. Значение параметра Куранта  $\gamma = a\tau/h$  при разных значениях параметра метода

Как можно видеть из табл. 2, на всех сетках наибольшее значение параметра Куранта характерно для метода с оптимальным значением параметра. Что говорит о том, что при таком параметре можно использовать больший шаг по времени и метод является более экономичным.

Рассматривалась и задача для уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями и заданным начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0; \pi],$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(0, x) = 2 \sin(x).$$

Для дискретизации производной по  $x$  на равномерной сетке используется вторая разностная производная. Сетка по пространству задается таким образом:  $x_i = ih$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $h = \frac{\pi}{N}$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}(t)}{h^2},$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{a^2}{h^2}(u_2 - 2u_1),$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{a^2}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$\frac{du_{N-1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}(-2u_{N-1} + u_{N-2}).$$

	$\alpha_{21} = 1/3$	$\alpha_{21} = 1/2$	$\alpha_{21} = 1$	$\alpha_{21} = \alpha_{21opt}$
N=100	0.4122	0.5429	0.2759	1.130
N=250	0.4066	0.5393	0.2743	1.132
N=500	0.4102	0.5311	0.2735	1.134

Таблица 3. Значение параметра Куранта  $\gamma = a^2\tau/h^2$  при разных значениях параметра метода

На всех сетках также наибольшее значение параметра Куранта характерно для метода с оптимальным значением параметра (табл. 3).

Еще одной рассмотренной задачей была задача была задача для уравнения Бюргерса с нулевыми граничными условиями и заданным начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0; 11],$$

$$u(t, 0) = u, \quad (t, 11) = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} 1, & x \in (5; 6], \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Для дискретизации производной по  $x$  на равномерной сетке используются левая и вторая разностные производные. Сетка по пространству задается таким образом:  $x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{11}{N}$ .

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{a}{h}u_2 + \frac{\mu}{h^2}(u_3 - 2u_2),$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{h}(u_i - u_{i-1}) + \frac{\mu}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad i = \overline{3, N-2},$$

$$\frac{du_{N-1}}{dt} = -\frac{a}{h}u_{N-1} + \frac{a}{h}u_{N-2} + \frac{\mu}{h^2}(-2u_{N-1} + u_{N-2}).$$

	$\alpha_{21} = 1/3$	$\alpha_{21} = 1/2$	$\alpha_{21} = 1$	$\alpha_{21} = \alpha_{21opt}$
N=100	0.3904	0.5127	0.2609	1.073
N=250	0.4020	0.5258	0.2690	1.103
N=500	0.4073	0.5318	0.2726	1.113
N=1000	0.4004	0.5373	0.2718	1.122

Таблица 4. Значение параметра Куранта  $\gamma = \mu\tau/h^2$  при разных значениях параметра метода

Как можно видеть из таблицы 4, на всех сетках также наибольшее значение параметра Куранта характерно для метода с оптимальным значением параметра.

## Заключение

Основные результаты проведенной работы:

1. Построены явные методы Рунге – Кутты повышенного порядка точности для случаев 2 и 3 этапов.
2. Определены оптимальные параметры трехэтапного метода для автономного и неавтономного уравнений.
3. При решении тестовых задач проведено сравнение методов повышенного порядка точности и обычных методов Рунге – Кутты.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. При построении методов нет смысла рассматривать случай автономного уравнения.
2. При решении задач показано, что предложенный подход действительно позволяет улучшать устойчивость методов.



## Список литературы

1. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: МГУ, 1990. 336 с.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
3. Goeken D., Johnson O. Runge–Kutta with higher order derivative approximations // Applied Numerical Mathematics. 2000. **34**. P. 207 – 208.
4. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 523 с.
4. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциально-алгебраические и жесткие задачи. М.: Мир, 1999. 688 с.
5. Соболев И. М. Численные методы Монте–Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
6. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.