Отзыв научного руководителя
на выпускную квалификационную работу «Распределение чисел Кармайкла специального вида» студента 4 курса бакалавриата 01.03.01 Математика Дорохина Александра Игоревича

Выпускная квалификационная работа А. И. Дорохина посвящена исследованию вопроса о (не)существовании чисел Кармайкла специального вида, а именно, вида $k \cdot 2^n + 1$ при фиксированном k. Сами числа Кармайкла являются весьма популярным объектом исследования в различных задачах вычислительной теории чисел (задачи факторизации, проверки на простоту и т.п.). Несмотря на более чем столетнюю их историю, интерес к числам Кармайкла сохраняется до настоящег времени.

Отправной точкой для проведённого исследования стали два относительно недавних результата

(1) Множество тех нечётных k, для которых есть хотя бы одно число Кармайкла вида $k \cdot 2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, имеет асимптотическую плотность 0 (W. Banks, C. Finch,F. Luca, C. Pomerance, P. Stănică, 2015).

(2) Для всякого нечётного k множество чисел Кармайкла вида $k \cdot 2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, конечно. Более того существует эффективно вычислимая верхняя оценка на n, зависящая только от k (J. Cilleruelo, F. Luca, A. Pizarro-Madariaga, 2016).

Однако если мы хотим указать *конкретные* значения k, для которых множество чисел Кармайкла вида $k \cdot 2^n + 1$ пусто, указанные выше результаты оказываются не слишком полезны. Например, хотя второй из упомянутых результатов и даёт потенциальную возможность выяснить путем конечного перебора, если ли для данного k числа Кармайкла вида $k \cdot 2^n + 1$, приведённая в нём верхняя оценка настолько велика, что вряд ли имеет практическое применение. Известные частные случаи, для которых удавалось получить ответ, обычно требовали отдельного рассмотрения, и для каждого случая приходилось изобретать свой метод.

Перед А. И. Дорохиным была поставлена задача построить, по возможности явно, примеры k, для которых нет чисел Кармайкла вида $k \cdot 2^n + 1$. С этой задачей Александр Игоревич блестяще справился. Поскольку с ростом числа делителей k сложность исследования существенно возрастает, естественно ограничиться тем случаем, когда количество делителей k мало. В этом направлении А. И. Дорохиным получены два результата, которые и составили основу выпускной работы.

Во-первых, указана явная арифметическая прогрессия (со взаимно простыми разностью и начальным членом), такая, что для всякого *простого* q из этой прогрессии, ни одно из чисел $3q \cdot 2^n + 1$ не является числом Кармайкла.

Во-вторых, показано, что не существует чисел Кармайкла вида $49 \cdot 2^n + 1$, $121 \cdot 2^n + 1$, $169 \cdot 2^n + 1$ (в этих случаях k — квадрат простого числа).

Доказательства потребовали как применения довольно изощренной техники, так и привлечения компьютерных вычислений. С обеими задачами Александр Игоревич успешно справился. Насколько мне известно, основные результаты работы являются новыми и не встречались ранее в литературе. Все они снабжены подробными и довольно аккуратными доказательствами.

Работа выполнена полностью самостоятельно. Моя роль как научного руководителя состояла во введении в область вычислительной теории чисел и в постановке общей задачи. Всю последующую работу, включающую, в том числе, формулировку окончательных результатов, построение общей схемы доказательства и проведение подробного доказательства, Александр Игоревич выполнил самостоятельно.

Сам результат после некоторой доработки вполне может быть рекомендован к публикации в каком-либо издании, специализирующемся в области теории чисел (например, в журнале Integers).

Считаю, что выпускная квалификационная работа Александра Игоревича Дорохина достойна оценки «**отлично**», а автор заслуживает присвоения степени бакалавра.

05 июня 2023 г.

Научный руководитель
профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел СПбГУ,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
М. А. Всемирнов