

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕШЕТНИКОВ Даниил Дмитриевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**Исследование радиального числа Лагерр-Гауссовых мод  
электромагнитного поля: физический смысл,  
применение в квантовой информатике**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.01 "Прикладные математика и физика"

Основная образовательная программа: ВМ.5510.2021 "Прикладные физика  
и математика"

Профиль: "Квантовая оптика и информатика"

Научный руководитель:  
доцент кафедры общей физики-1,  
к.ф.-м.н., Лосев Александр Сергеевич

Рецензент:  
ординарный доцент, ИТМО, к.ф.-м.н.,  
Трифанов Александр Игоревич

Санкт-Петербург  
2023

# Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Оператор радиального числа лагерр-гауссовых мод . . . . .	7
2.1	Существование оператора радиального числа . . . . .	7
2.2	Эрмитовость оператора радиального числа . . . . .	9
2.3	Оператор радиального числа и законы сохранения . . . . .	12
2.4	Каноническая пара для оператора радиального числа . . . . .	14
2.5	Физический смысл оператора радиального числа . . . . .	16
3	Исследование лагерр-гауссовых мод при помощи базиса полиномов Цернике . . . . .	17
3.1	Разложение произвольной лагерр-гауссовой моды по базису полиномов Цернике . . . . .	17
3.2	Анализ коэффициентов разложения . . . . .	22
4	Распространение лагерр-гауссовых мод в турбулентной среде . . . . .	26
5	Заключение . . . . .	33
	Приложение 1. Решение волнового уравнения в параксиальном при- ближении . . . . .	41
	Приложение 2. Математическое описание метода SSBPM . . . . .	44

# 1 Введение

Исследование пространственно структурированных пучков представляет интерес для широкого круга задач, включая микроскопию сверхвысокого разрешения [1], создание оптических ловушек [2], [3], а также задачи кодирования и передачи информации как в классическом [4], [5], так и в квантовом [6], [7] случаях. Ключевым препятствием к широкому использованию оптических информационных каналов связи в свободном пространстве остается искажение в турбулентной атмосфере передаваемых пространственных мод. С одной стороны, это связано с неизбежным дифракционным уширением пучка и следующей за этим деформацией поперечной пространственной структуры пучка, а с другой обусловлено влиянием случайных изменений показателя диэлектрической проницаемости среды в разных точках пространства на пути распространения лазерного пучка, и, как следствие, случайным процессом искажения волнового фронта. При этом, в силу случайности процесса, восстановление исходного волнового фронта методами адаптивной оптики и компьютерной коррекции представляется достаточно трудоемкой задачей, что не может не сказаться на быстродействии таких систем связи.

Однако в работах [8], [9] показано, что наличие закрученной структуры волнового фронта пучка (оптического вихря) положительно влияет на устойчивость такого пучка к турбулентности среды, в которой он распространяется. Благодаря этому свойству, в последние годы крайне сильно возрос прикладной интерес к использованию именно закрученного света для передачи информации в открытых оптических каналах связи. Тем не менее, на текущий момент по-прежнему остается нерешенным ряд проблем, влияющий на производительность таких информационных каналов связи. Одна из них заключается в особенности процедуры коррекции волнового фронта закрученного света. В работе [10] говорится, что коррекция только части волнового фронта, не содержащей оптический вихрь, приводит к заметному снижению эффективности коррекции фазы, искаженной турбулентными процессами. То есть появляется необходимость разработки специальных адаптивных элементов для закрученного света.

Еще одна проблема также связана с принципиальными различиями между плоским и закрученным волновыми фронтами. Описание явлений влияния турбулентной среды на волновой фронт пучка развивалось, начиная со второй половины XX века [11], [12]. Однако полученные модели плохо применимы для рассмотрения закрученного света [4]. В первую очередь это связано с тем, что описанные в работах [11], [12] модели турбулентности были разработаны для пучков с плоским волновым фронтом, в то время как для работы с пространственно структурированным светом требуется иной математический подход описания оптического канала, позволяющий учитывать влияние турбулентной среды на более сложные пространственные и фазовые профили пучков.

В качестве пространственно структурированных пучков могут использоваться гауссовы моды высших порядков: бессель-гауссовы, эрмит-гауссовы и лаггер-гауссовы пучки. Последние представляют особый интерес, так как с одной стороны являются инвариантными относительно распространения в свободной нетурбулентной атмосфере и преобразованиях в линзах [13], а с другой – являются одним из возможных представлений закрученного света – пучков с орбитальным угловым моментом (ОУМ), удобных для кодирования информации в открытых оптических каналах связи [14].

При математическом описании таких каналов связи требуется учитывать ошибки, связанные со случайными возмущениями среды, в которой оптический пучок распространяется. Так, например, широко известны работы, посвященные исследованию поведения пучков с ОУМ в турбулентной среде, а также влиянию турбулентности на их основные характеристики [15], [16]. Кроме того, как показано в работе [17], пучки с ОУМ оказываются более устойчивыми к флуктуациям направления распространения излучения (флуктуациям центра масс пучка).

Исходя из вышесказанного, становится ясна необходимость исследования способов улучшения устойчивости оптических пучков к турбулентности. И в этом смысле у лаггер-гауссовых мод есть еще одно важное преимущество – на структуру пучка влияет не только значение азимутального числа (ОУМ) пучка, но и второй параметр – радиальное число, определяющее в том числе пространственную структуру поперечного профиля пучка. Насколько нам известно, на данный момент в литературе присутствует несколько упоминаний о положительном влиянии наличия такой пространственной структуры на устойчивость пучка [9], однако пока не существует четкого обоснования этого явления. Более того, в подавляющем большинстве прикладных и теоретических исследований радиальное число кладется равным 0, что несколько затрудняет исследование влияния наличия дополнительной пространственной структуры пучка на его устойчивость. Управление устойчивостью распространения лаггер-гауссова пучка путем изменения радиального числа кажется наиболее эффективным способом улучшения существующих систем связи в открытом пространстве, поскольку практически не требует использования дополнительного оборудования. В данной работе мы планируем показать одно из возможных обоснований существования зависимости между наличием пространственной структуры пучка с ненулевым радиальным числом и устойчивостью таких пучков, путем исследования волнового фронта лаггер-гауссовых мод с разными значениями ОУМ и радиального числа.

Анализ волнового фронта таких пучков может быть проведен путем разложения по базису Цернике [18] и сравнения коэффициентов разложения до и после прохождения пучка через турбулентную среду. Полиномы Цернике часто используются для исследования искажений волнового фронта, возникающих из-за неидеальности оптических элементов [19]. Они удобны для представления волновых фронтов при численном моделировании оптических

систем, так как кроме того, что образуют устойчивый к погрешностям вычислений базис, обладают двумя важными особенностями: во-первых, их коэффициенты разложения характеризуют наличие классических aberrаций, во-вторых, они удобны с математической точки зрения как полиномы, обладающие круговой симметрией [20].

Отдельное внимание стоит уделить рассмотрению использования лаггерр-гауссовых мод в задачах квантовой информатики. В этом случае лаггерр-гауссова функция является функцией плотности вероятности в фазовом пространстве обнаружить фотон в некоторой точке пространства с некоторым значением проекции ОУМ. При этом значение ОУМ является основной дискретной величиной, определяющей состояние поля. Набор лаггерр-гауссовых мод, различающихся между собой по азимутальному числу, является бесконечным, но при этом полным и ортонормированным. Таким образом, возможен переход от кубитов к кудитам, то есть переход к алгебре векторов состояний, принадлежащих пространству более высокой размерности. Такая возможность позволяет расширить арсенал протоколов квантовых вычислений [21]. В этой связи становится понятным наличие широкого спектра работ теоретического и экспериментального характера, связанных с квантовым светом в виде лаггерр-гауссовых мод [22], [23].

На сегодняшний день предложено несколько способов генерировать пучки с различным значением  $\ell$  [33]. Однако в силу того, что азимутальное число является собственным значением оператора орбитального углового момента  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ , идентификация значения  $\ell$  при детектировании пучка остается вполне успешно разрешимой задачей только для ограниченного набора азимутальных чисел, по причине сложности детектирования состояний с большим значением ОУМ как для квантовых так и для классических оптических пучков. На этом фоне второе число, характеризующее лаггерр-гауссову функцию – радиальное число  $p$ , кажется несколько не востребованным. Что вполне объяснимо, так как его физический смысл не имеет такого же простого понимания, как  $\ell$  [23].

Работа построена следующим образом. Во втором разделе обсуждаются основные характеристики лаггерр-гауссовых мод, анализируется оператор радиального числа и обсуждаются некоторые особенности радиального числа как квантово-механической наблюдаемой. На основе этого анализа делаются предположения о возможном характере применения радиального числа в задачах квантовой информатики, а также обсуждаются некоторые ограничения, связанные с неполнотой существующей теории квантового радиального числа. В третьем и четвертом разделах обсуждаются свойства классических лазерных лаггерр-гауссовых пучков и особенности их распространение через турбулентную атмосферу. В частности, в третьем разделе показана возможная причина разного влияния турбулентной среды на лаггерр-гауссовы моды, различающиеся радиальными  $p$  и азимутальными  $\ell$  числами. Будет показана возможность разложения лаггерр-гауссовых мод по базису полиномов Церни-

ке и приведен основанный на этом разложении анализ устойчивости лаггер-гауссовых мод к распространению в турбулентной атмосфере. В четвертом разделе приводятся результаты численного моделирования распространения лаггер-гауссовых мод в турбулентной среде в качестве демонстрации корректности выводов, сделанных во втором разделе.

## 2 Оператор радиального числа лагерр-гауссовых мод

### 2.1 Существование оператора радиального числа

Лагерр-гауссова функция является решением волнового уравнения для вектора электрической напряженности  $\mathbf{E}$  в параксиальном приближении — когда основой нашего рассмотрения становится оптический пучок [приложение 1]. В параксиальном приближении изменение интенсивности поля в поперечной плоскости  $(x, y)$  при его распространении вдоль оси  $z$  очень мало по сравнению с продольной, то есть  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial u}{\partial z} \ll ku$ .

$$\nabla_t^2 E - 2ik \frac{\partial}{\partial z} E = 0, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число.

Запишем уравнение, описывающее распределение лагерр-гауссова пучка в пространстве в фиксированный момент времени [24]:

$$LG_{p,\ell}(r, \varphi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi (p + |\ell|)! \omega_z}} \frac{1}{\omega_z} \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega_z} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega_z^2} \right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_z^2}} \cdot e^{i\left(\ell\varphi + \frac{kr^2}{2R_z} - (2p + |\ell| + 1)\phi_g\right)}. \quad (2)$$

Здесь  $r, \varphi, z$  — координаты цилиндрической системы координат;  $\ell$  и  $p$  — азимутальное и радиальное числа, которые определяют поперечный профиль пучка,  $\omega_z$  — радиус пучка на расстоянии  $z$  от перетяжки [25] (рис. 1):

$$\omega_z = \sqrt{2 \frac{z^2 + z_R^2}{kz_R}}, \quad (3)$$

$z_R$  — длина Рэлея:

$$z_R = \frac{1}{2} k \omega_0^2, \quad (4)$$

$R_z$  — радиус кривизны пучка на расстоянии  $z$  от перетяжки:

$$R_z = z + \frac{k^2 \omega_0^4}{4z}, \quad (5)$$

$\phi_g$  — фаза Гуи:

$$\phi_g = \arctan \frac{2z}{k\omega_0^2}, \quad (6)$$

$L_p^\ell(x)$  — обобщенные полиномы Лагерра порядка  $p$  степени  $\ell$ , представленные по формуле Родрига [36]

$$L_p^{|\ell|}(x) = \frac{e^x x^{-|\ell|}}{p!} \cdot \frac{d^p}{dx^p} \left( e^{-x} x^{p+|\ell|} \right). \quad (7)$$

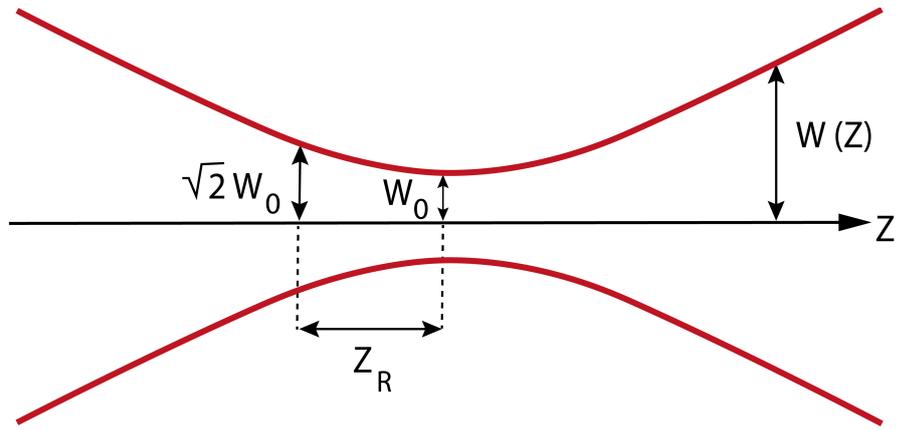


Рис. 1: Основные пространственные характеристики гауссовых пучков

Целое число  $l$  и целое неотрицательное  $p$  отвечают за вид поперечного пространственного профиля пучка (рис. 2), который представляет собой  $p+1$  концентрических светлых колец. Величина  $l$  задает число скачков фазы от  $0$  до  $2\pi$  при обороте вектора напряженности электрического поля на  $2\pi$  вокруг оси распространения.

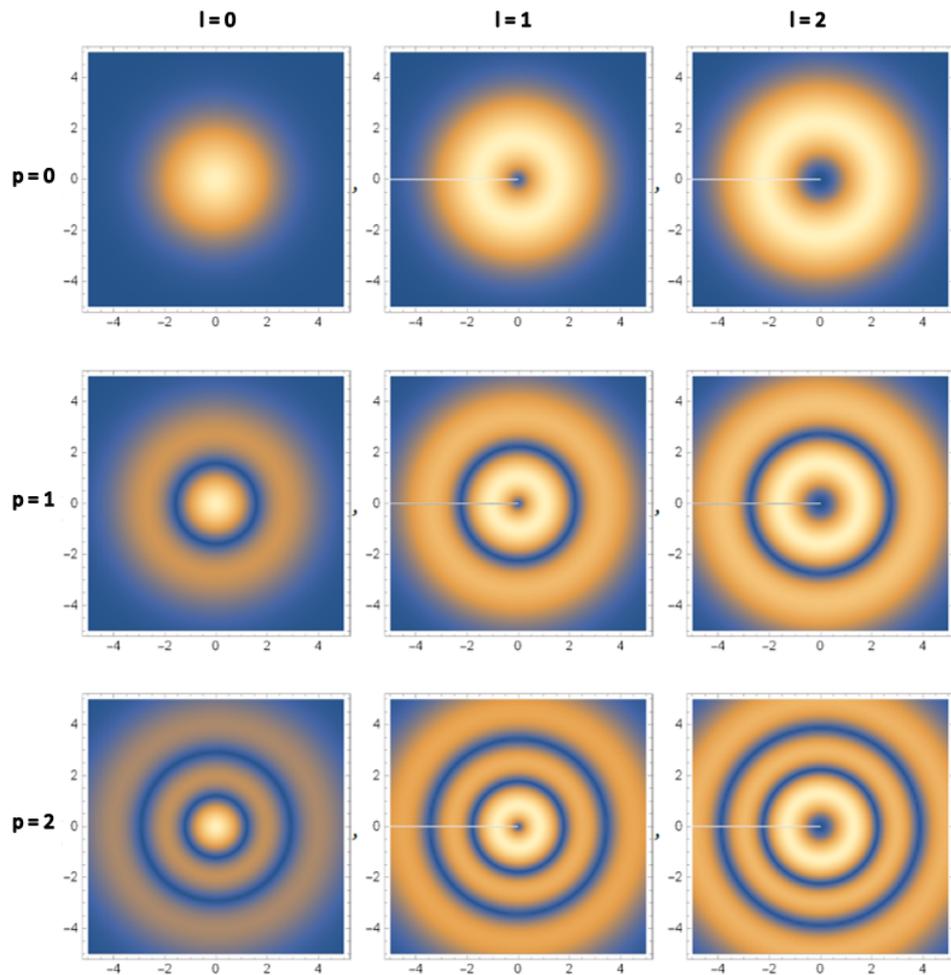


Рис. 2: Пространственное распределение интенсивности лагерр-гауссовых пучков в области перетяжки  $z = 0$ .

Число  $l$  обладает вполне определенным физическим смыслом — это величина орбитального углового момента (ОУМ) каждого фотона в лаггерр-гауссовой моде, если положить  $\hbar = 1$ . Радиальное число  $p$  в свою очередь не обладает такой наглядной аналогией.

В работах [26], [27] и [28] показано, что существует такой математический оператор, собственными функциями которого являются лаггерр-гауссовыми модами, а собственными числами — радиальные числа этих мод. Он может быть получен с использованием рекуррентных соотношений и свойства вычисления производной функции для полиномов Лагерра [29]:

$$\begin{aligned} pL_p^\ell(x) &= (\ell + 1 - x)L_{p-1}^{\ell+1}(x) - xL_{p-2}^{\ell+2}(x), \\ \frac{\partial}{\partial x}L_p^\ell(x) &= -L_{p-1}^{\ell+1}(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Спектральное уравнение для данного оператора имеет вид:

$$\hat{P}_z LG_{p,\ell}(r, \varphi, z) = p \cdot LG_{p,\ell}(r, \varphi, z), \quad (9)$$

а явный вид этого оператора можно записать так:

$$\hat{P}_z = -\frac{\omega_z^2}{8}\nabla_\perp^2 + \frac{iz}{k\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial r}r - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1\right) \quad (10)$$

Для ответа на вопрос о физическом смысле радиального числа нам необходимо проверить физические свойства данного оператора, а именно эрмитовость, коммутативность с гамильтонианом свободного поля и наличие канонически сопряженного оператора. Исследование этих свойств позволит нам с одной стороны сказать о применимости радиального числа к использованию в задачах квантовой и классической информационной оптики, а с другой - позволит сравнивать его с уже использующимися в таких задачах физическими характеристиками оптических пучков. Далее в этом разделе будем считать лаггерр-гауссову функцию волновой функцией фотона в пространстве квадратур, задающей плотность вероятности найти фотон в некоторой точке пространства с некоторым значением проекции ОУМ на ось  $z$ .

## 2.2 Эрмитовость оператора радиального числа

В первую очередь необходимо показать, что данный оператор является эрмитовым, то есть величина радиального числа есть квантово-механическая наблюдаемая. Вид оператора, представленный в предыдущем разделе, затрудняет более подробный его анализ. Приведем оператор радиального числа к новому виду.

Для начала учтем, что

$$\begin{aligned} \omega_z^2 &= \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right), \\ 2z_R &= k\omega_0^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\hat{P}_z &= -\frac{\omega_z^2}{8}\nabla_{\perp}^2 + \frac{iz}{k\omega_0^2}\frac{\partial}{\partial r}r - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1\right) = \\ &= -\frac{1}{8}\omega_0^2\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)\nabla_{\perp}^2 + \frac{iz}{2z_R}\frac{\partial}{\partial r}r + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\omega_0^2} - 1\right).\end{aligned}\quad (12)$$

Выполним замену переменных:

$$\begin{aligned}z^2 &\leftarrow \frac{1}{z_R^2}\frac{\hbar}{\omega}z^2, \\ \rho^2 &\leftarrow \frac{k}{z_R}\frac{\hbar}{\omega}r^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} &\leftarrow \frac{z_R\omega}{k}\frac{\partial^2}{\hbar\partial r^2}\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота электромагнитной волны,  $\hbar$  — постоянная Планка. Размерность множителей с учетом единичной массы  $\left[\frac{k\hbar}{z_R\omega}\right] = \left[\frac{\hbar}{z_R^2\omega}\right] = 1$ .

Тогда выражение (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}2\hat{P} &= -\frac{1}{4}\omega_0^2\left(1 + \frac{\omega}{\hbar}z^2\right)\frac{k}{z_R}\frac{\hbar}{\omega}\nabla_{\perp}^2 + i\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}z\frac{\partial}{\partial\rho}\rho + i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{z_R\omega}{k}\frac{\rho^2}{\hbar\omega_0^2} - 1 = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\omega}\left(1 + \frac{\omega}{\hbar}z^2\right)\nabla_{\perp}^2 + i\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}z\frac{\partial}{\partial\rho}\rho + i\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\rho^2 - 1.\end{aligned}\quad (14)$$

Также введем дополнительные операторы в новом координатном представлении с учетом замен (13):

$$\begin{aligned}\hat{p}_{\perp}^2 &= \hbar^2\nabla_{\perp}^2 \text{ — квадрат оператора поперечного импульса,} \\ \hat{p}_{\rho} &= -i\hbar\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho \text{ — оператор радиального импульса,}\end{aligned}\quad (15)$$

и учтем, что

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \text{ — оператор проекции ОУМ на ось } z. \quad (16)$$

В таком случае, оператор радиального числа  $\hat{P}_z$  принимает вид

$$2\hat{P}_z = -\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\omega}\nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}\rho^2 - 1 + \frac{\hat{L}_z}{\hbar} + \frac{1}{2}z^2\hat{p}_{\perp}^2 - z\rho\sqrt{\frac{\omega}{\hbar^3}}\hat{p}_{\rho}. \quad (17)$$

Три первых слагаемых можно преобразовать к виду оператора числа квазичастиц, если перейти к формализму вторичного квантования и ввести два вращающихся бозонных оператора:

$$\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y) \quad (18)$$

со стандартным коммутационным соотношением  $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{j,k}$ ,  $j, k \in \{+, -\}$ , где

$$\hat{a}_{x,y} = \frac{1}{2\hbar\omega} (\omega\hat{q}_{x,y} - i\hat{p}_{x,y}) \quad (19)$$

операторы уничтожения фотонов в пространственных модах  $x$  и  $y$ .

С использованием введенных вращающихся операторов можно определить соответствующие операторы числа вращающихся квазичастиц и проекции ОУМ на ось  $z$ :

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{n}_+ + \hat{n}_-, \\ \hat{L}_z &= \hbar\hat{\ell} = \hat{n}_+ - \hat{n}_-, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\hat{n}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm$  — оператор числа вращающихся по часовой и против часовой стрелки квазичастиц. Оператор радиального числа принимает итоговый вид:

$$\hat{P}_z = \frac{1}{2} (\hat{n} - \hat{\ell}) + \frac{1}{2} z^2 \hat{p}_\perp^2 - z\rho \sqrt{\frac{\omega}{\hbar^3}} \hat{p}_\rho \quad (21)$$

Покажем эрмитовость данного оператора в гильбертовом пространстве лаггерр-гауссовых мод. По определению, оператор  $\hat{A}$  является эрмитовым, если

$$\langle \hat{A}\psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \hat{A}^\dagger\psi_2 \rangle. \quad (22)$$

В рассматриваемом нами случае, функциями состояния  $|\psi\rangle$  являются лаггерр-гауссовы моды. Необходимо показать, что

$$\langle \hat{P}_z LG_{p_1, \ell_1}, LG_{p_2, \ell_2} \rangle = \langle LG_{p_1, \ell_1}, \hat{P}_z^\dagger LG_{p_2, \ell_2} \rangle. \quad (23)$$

Левая часть в форме скалярного произведения представляется в виде:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_z LG_{p_1, \ell_1}, LG_{p_2, \ell_2} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{P}_z LG_{p_1, \ell_1} \right)^* LG_{p_2, \ell_2} dV = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1 (LG_{p_1, \ell_1})^* LG_{p_2, \ell_2} dV = p_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (LG_{p_1, \ell_1})^* LG_{p_2, \ell_2} dV = \\ &= p_1 \cdot \delta_{p_1, p_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Покажем, что правая часть имеет аналогичный вид. Для этого необходимо провести операцию эрмитова сопряжения над оператором  $\hat{P}_z$  (21). Первые 2 слагаемых данного оператора являются эрмитовыми, поэтому при данной операции не изменятся. Необходимо показать, что оператор радиального импульса  $\hat{p}_\rho$  также является эрмитовым в произвольном гильбертовом пространстве с функциями состояния  $|\psi_1\rangle$  и  $|\psi_2\rangle$ , то есть

$$\langle \psi_1 | \hat{p}_\rho | \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 | \hat{p}_\rho | \psi_1 \rangle. \quad (25)$$

Запишем скалярное произведение в бра- и кет-нотации в интегральном представлении:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \hat{p}_\rho | \psi_2 \rangle &= \int d\vec{r} \langle \psi_1 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \hat{p}_\rho | \psi_2 \rangle = \int d\Omega \int \rho^2 d\rho \langle \psi_1 | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | \hat{p}_\rho | \psi_2 \rangle = \\
&= \int d\Omega \int \rho^2 d\rho \psi_1^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_2(\vec{r})) = \frac{\hbar}{i} \int d\Omega \int \rho d\rho \psi_1^*(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_2(\vec{r})) = \\
&= -\frac{\hbar}{i} \int d\Omega \int \rho d\rho \psi_2(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_1^*(\vec{r})),
\end{aligned} \tag{26}$$

где  $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$ ,  $d\vec{r} = \rho^2 d\rho d\Omega$ .

Пользуясь результатом (26), покажем правильность равенства (25):

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 | \hat{p}_\rho | \psi_2 \rangle^* &= \frac{\hbar}{i} \int d\Omega \int \rho d\rho \psi_2^*(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_1(\vec{r})) = \\
&= \frac{\hbar}{i} \int d\Omega \int \rho^2 d\rho \psi_2^*(\vec{r}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi_1(\vec{r})) = \langle \psi_2 | \hat{p}_\rho | \psi_1 \rangle
\end{aligned} \tag{27}$$

В таком случае, правая часть выражения (23) в форме скалярного произведения принимает вид

$$\begin{aligned}
\langle LG_{p_1, \ell_1}, \hat{P}_z^\dagger LG_{p_2, \ell_2} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (LG_{p_1, \ell_1})^* (\hat{P}_z)^\dagger LG_{p_2, \ell_2} dV = \\
\int_{-\infty}^{\infty} (LG_{p_1, \ell_1})^* p_2 \cdot LG_{p_2, \ell_2} dV &= p_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (LG_{p_1, \ell_1})^* LG_{p_2, \ell_2} dV = \\
&= p_2 \cdot \delta_{p_1, p_2},
\end{aligned} \tag{28}$$

что аналогично выражению (24), то есть оператор радиального числа действительно является эрмитовым.

### 2.3 Оператор радиального числа и законы сохранения

Для дальнейшего анализа оператора радиального числа необходимо обсудить вопросы сохранения средних значений наблюдаемых отдельных операторов, входящих в его состав, то есть необходимо выяснить, является ли величина радиального числа интегралом движения. В квантовой механике это эквивалентно следующему условию:

$$\frac{d\langle \hat{P}_z \rangle}{dt} = \frac{\partial \langle \hat{P}_z \rangle}{\partial t} + [\hat{H}, \hat{P}_z] \equiv 0, \tag{29}$$

где  $\hat{H}$  — оператор гамильтона для свободного поля.

Так как оператор  $\hat{P}_z$  не зависит в явном виде от времени, нам необходимо проверить равенство нулю коммутатора  $[\hat{H}, \hat{P}_z]$ . Наиболее удобным способом

проверки оказывается запись гамильтониана и оператора радиального числа в терминах  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  квадратур поля.

Сперва перепишем через квадратуры выражение для слагаемых оператора  $\hat{P}_z$ .  $X$  — квадратура  $q$ -переменной есть

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} \hat{X}_q, \quad (30)$$

откуда

$$q^2 = \frac{\hbar}{\omega} \hat{X}_q^2. \quad (31)$$

Аналогичным образом можно записать выражение для  $\hat{Y}$  — квадратуры  $\hat{q}$  - переменной:

$$p_q = \sqrt{\hbar\omega} \hat{Y}_q = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad (32)$$

откуда

$$\frac{\omega}{\hbar} \hat{Y}_q^2 = -\frac{\partial^2}{\partial q^2}. \quad (33)$$

В таком случае

$$-\nabla_{\perp}^2 = \frac{\omega}{\hbar} \left( \hat{Y}_x^2 + \hat{Y}_y^2 \right) = \frac{\omega}{\hbar} \hat{Y}_{\perp}^2. \quad (34)$$

Радиальный импульс можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\rho} &= -i\hbar \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho = -i\hbar \left( 1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) = \\ &= -i\hbar \frac{1}{\rho} \left( 1 + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} (1 + xp_x + yp_y), \end{aligned} \quad (35)$$

тогда

$$i \frac{\partial}{\partial \rho} = -1 - \hat{X}_x \hat{Y}_x - \hat{X}_y \hat{Y}_y. \quad (36)$$

Проекцию ОУМ на ось  $z$  можно записать, как

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} = xp_y - yp_x, \quad (37)$$

откуда

$$i \frac{\partial}{\partial \varphi} = \hat{X}_y \hat{Y}_x - \hat{X}_x \hat{Y}_y. \quad (38)$$

Наконец, итоговый вид оператора радиального числа  $\hat{P}_z$  в квадратурах поля будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\hat{P}_z &= \frac{1}{2} \left( \hat{Y}_{\perp}^2 + \hat{X}_{\perp}^2 - 2 \right) + \frac{1}{2} \hat{X}_z^2 \left( \hat{Y}_x^2 + \hat{Y}_y^2 \right) - \hat{X}_z \left( \hat{X}_x \hat{Y}_x + \hat{X}_y \hat{Y}_y + 1 \right) + \\ &+ \left( \hat{X}_y \hat{Y}_x - \hat{X}_x \hat{Y}_y \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Оператор гамильтона  $\hat{H}$  свободного поля, имеющего 3 степени свободы, записывается в терминах квадратур, как

$$\hat{H} = \hbar\omega \frac{1}{2} \left( \hat{X}_x^2 + \hat{X}_y^2 + \hat{X}_z^2 + \hat{Y}_x^2 + \hat{Y}_y^2 + \hat{Y}_z^2 \right) \quad (40)$$

1 и 4 слагаемые оператора радиального числа (39) коммутируют с гамильтонианом на ноль. Эти слагаемые соответствуют операторам числа квазичастиц в поперечной плоскости и проекции ОУМ на ось  $z$ , то есть данные величины являются интегралами движения, что позволяет говорить о том, что в области перетяжки среднее значение оператора радиального числа остается постоянным во времени.

Однако оставшиеся 2 слагаемых не коммутируют с Гамильтонианом, итоговое выражение для полной производной от среднего значения оператора  $\hat{P}_z$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{P}_z \rangle}{dt} = \frac{\omega}{2} \left\langle \left( \frac{1}{2} \left( \hat{Y}_\perp^2 + \hat{X}_\perp^2 - 2 \right) + \hat{X}_x^2 + \hat{X}_y^2 \right) \left( \hat{Y}_z - 1 \right) \hat{X}_z + \right. \\ \left. + \left( \hat{X}_x^2 + \hat{X}_y^2 \right) \hat{X}_z - \hat{X}_x \hat{Y}_x \hat{Y}_z - \hat{X}_y \hat{Y}_y \hat{Y}_z \right\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

На основании этого можно говорить о том, что радиальное число не является интегралом движения, и, хотя сохраняется в пространственной структуре пучка, поскольку не зависит от  $(r, \varphi, z)$ , среднее значение этой величины в фиксированной точке пространства изменяется со временем.

## 2.4 Каноническая пара для оператора радиального числа

Как мы выяснили выше, оператор радиального числа  $\hat{P}_z$  является эрмитовым в гильбертовом пространстве лаггерр-гауссовых мод, а значит, является физически наблюдаемой величиной. Из этого утверждения следует, что у данного оператора может быть канонически сопряженная пара. Наличие канонически сопряженного оператора позволит, с одной стороны, выявить дополнительные особенности распространения фотонов с волновой функцией в виде лаггерр-гауссовой моды, а с другой — более корректно определить процесс измерения радиального числа единичного фотона.

Поиск канонически сопряженного оператора довольно трудно осуществить основываясь исключительно на соображениях симметрии (как это можно сделать, к примеру, для операторов угла и ОУМ), поэтому мы пойдем следующим путем. Найдем функцию от операторов координат  $f(r, z)$ , удовлетворяющую следующему условию:

$$\left[ \hat{P}_z, f(r, z) \right] LG_{p,\ell}(r, \varphi = 0, z) = i \cdot LG_{p,\ell}(r, \varphi = 0, z). \quad (42)$$

Раскроем коммутатор и составим дифференциальное уравнение в частных производных, заменив оператор лапласа  $\nabla_{\perp}$  при помощи волнового уравнения в параксиальном приближении (68):

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{k\omega_0^2}{4} + \frac{z^2}{k\omega_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + i \left( \frac{z}{k\omega_0^2} \left( 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right] \times \\ & \times f(r, z) LG_{p,\ell}(r, \varphi = 0, z) - f(r, z) \hat{P}_z LG_{p,\ell}(r, \varphi = 0, z) = \\ & = i \cdot LG_{p,\ell}(r, \varphi = 0, z) \end{aligned} \quad (43)$$

В выражении (43) мы учли, что  $\varphi = 0$ , поэтому пренебрегли оператором проекции ОУМ на ось  $z$ . Далее воспользуемся спектральным уравнением для оператора радиального числа  $\hat{P}_z LG_{p,\ell}(r\varphi, z) = p \cdot LG_{p,\ell}(r\varphi, z)$ , а также опустим пробные лаггерр-гауссовы моды в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{k\omega_0^2}{4} + \frac{z^2}{k\omega_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + i \left( \frac{z}{k\omega_0^2} \left( 1 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right] \times \\ & \times f(r, z) - p \cdot f(r, z) = i \end{aligned} \quad (44)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (44) оказывается разрешимо, однако полный вид решения крайне труден для дальнейшего анализа. Поступим аналогично [27] и оставим в нем только слагаемые с частными производными по  $r$  и  $z$ , чтобы выделить часть решения, относящуюся к изменению канонически сопряженного оператора относительно пространственных операторов  $\hat{r}$  и  $\hat{z}$ :

$$i \left( \frac{k\omega_0^2}{4} + \frac{z^2}{k\omega_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} f(r, z) + i \frac{zr}{k\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial r} f(r, z) = i \quad (45)$$

Общее решение уравнения 45 представимо в виде:

$$\begin{aligned} f(r, z) &= -2 \arctan \frac{2z}{k\omega_0^2} + C_1 r \sqrt{k^2 \omega_0^4 + 4z^2} = \\ &= -2\phi_g + C_1 r \sqrt{z \cdot R_z}, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $\phi_g$  — фаза Гуи,  $R_z$  — радиус кривизны пучка,  $C_1$  — произвольная константа интегрирования.

Полученное решение представляет собой функцию, зависящую от двух ключевых характеристик гауссова пучка (рис. 1) - фазы Гуи и радиуса кривизны. Фазу Гуи часто определяют как "аномалию фокусировки" поскольку ее наличие в гауссовом пучке является следствием пространственного ограничения пучка в области перетяжки, где он проходит через фокус линзы. Можно сделать вывод, что оператор радиального индекса оказывается сопряжен с оператором фазы Гуи, что в своем роде аналогично канонически сопряженной паре амплитуда-фаза.

Однако данное утверждение сопровождается некоторыми проблемами. В частности, сложность в определении коммутационных соотношений между дискретными и непрерывными переменными, как правило, требует наложения дополнительных ограничений на один из операторов.

## 2.5 Физический смысл оператора радиального числа

Наконец, вернемся к вопросу о физическом смысле оператора радиального числа. Используем полученное выражение для явного вида оператора (21) рассмотрим его в области перетяжки, где обращаются в ноль 2 и 3 слагаемые, зависящие от  $z$ . В таком случае, можно записать следующее выражение

$$2\hat{P}_{z=0} = (\hat{n} - |\hat{\ell}|) = \begin{cases} \hat{n}_-, & \ell > 0 \\ \hat{n}_+, & \ell < 0 \\ \hat{n}_+ + \hat{n}_-, & \ell = 0. \end{cases} \quad (47)$$

Когда проекция ОУМ на ось  $z$  равна нулю, оператор радиального числа в точности равен сумме вращающихся по и против часовой стрелки квазичастиц в поперечной плоскости. Из выражения (20) видно, что при этом средние значения операторов  $\hat{n}_-$  и  $\hat{n}_+$  равны. Тогда можно установить некоторую взаимосвязь между количеством вращающихся квазичастиц по и против часовой стрелки, величиной и знаком проекции ОУМ.

Рассматривая первые две строчки системы в выражении (47) можно увидеть, что оператор радиального числа показывает число вращающихся квазичастиц в поперечной плоскости против направления вращения, соответствующего знаку проекции ОУМ на ось  $z$ . Также можно ввести парный ему оператор, определяющий число квазичастиц, вращающихся в направлении вращения пучка  $\hat{K}$ :

$$\begin{aligned} |\hat{\ell}| &= \hat{K} - \hat{P}_{z=0}, \\ \hat{n} &= \hat{K} + \hat{P}_{z=0}. \end{aligned} \quad (48)$$

Полученная пара операторов образует базис, альтернативный паре операторов  $\hat{n}$  и  $\hat{\ell}$ , позволяющий описывать свойства вращающихся квазичастиц в поперечной плоскости в области перетяжки в зависимости от значений проекции ОУМ и радиального числа. Процесс же детектирования радиального числа может быть сведен к измерению числа фотонов в пучке и значения проекции их ОУМ, откуда из выражения (48) могут быть найдены средние значения операторов  $\hat{P}_{z=0}$  и  $\hat{K}$ .

### 3 Исследование лаггерр-гауссовых мод при помощи базиса полиномов Цернике

Данный раздел посвящен изучению классических свойств лаггерр-гауссовых лазерных пучков с отличными от 0 значениями радиального числа. Мы обратим внимание на аспекты, связанные с устойчивостью распространения таких пучков через открытые оптические каналы связи, в частности, на влияние турбулентности среды в канале связи, а также изучению особенностей и аберраций волнового фронта различных лаггерр-гауссовых пучков. Мы рассмотрим возможность разложения произвольных лаггерр-гауссовых мод по модам Цернике, а также покажем, каким образом на коэффициенты разложения влияет изменение радиального числа лаггерр-гауссовых мод.

#### 3.1 Разложение произвольной лаггерр-гауссовой моды по базису полиномов Цернике

При распространении светового пучка через оптическую систему или свободное пространство неизбежно возникают волновые аберрации – отклонения реального волнового фронта от ожидаемого, которые необходимо уметь корректировать при анализе итогового изображения пучка. Чаще всего для подобных задач используют набор ортогональных в круге радиуса  $R$  полиномов Цернике (рис. 3):

$$Z_n^m(r, \phi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi R^2}} \cdot R_n^m(r) \cdot e^{im\phi}, \quad (49)$$

$$R_n^m(r) = \sum_{h=0}^{(n-m)/2} (-1)^h \frac{(n-h)!}{h!} \frac{1}{\left(\frac{n+m}{2} - h\right)! \left(\frac{n-m}{2} - h\right)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2h} \quad (50)$$

Каждый полином Цернике отвечает за свой тип волновых аберраций, при этом разные типы аберраций, представленные разложением по модам Цернике, оказывают независимое влияние на итоговое изображение [13]. Кроме этого, полиномы Цернике образуют устойчивый к погрешностям вычислений базис при численном моделировании работы оптических систем, поэтому их очень часто используют для представления волновых фронтов при проектировании различных оптических систем.

Поскольку лаггерр-гауссовы пучки активно используются в оптических каналах связи, необходимо понимать, каким образом искажается волновой фронт таких пучков при использовании в конкретной оптической системе или прохождении через турбулентную атмосферу. Разумеется, можно использовать для этого стандартные методы симуляции, такие как метод последовательных фазовых экранов [30] или метод преобразования Фурье с разделенным шагом [31], [32], однако использование хорошо известных полиномов

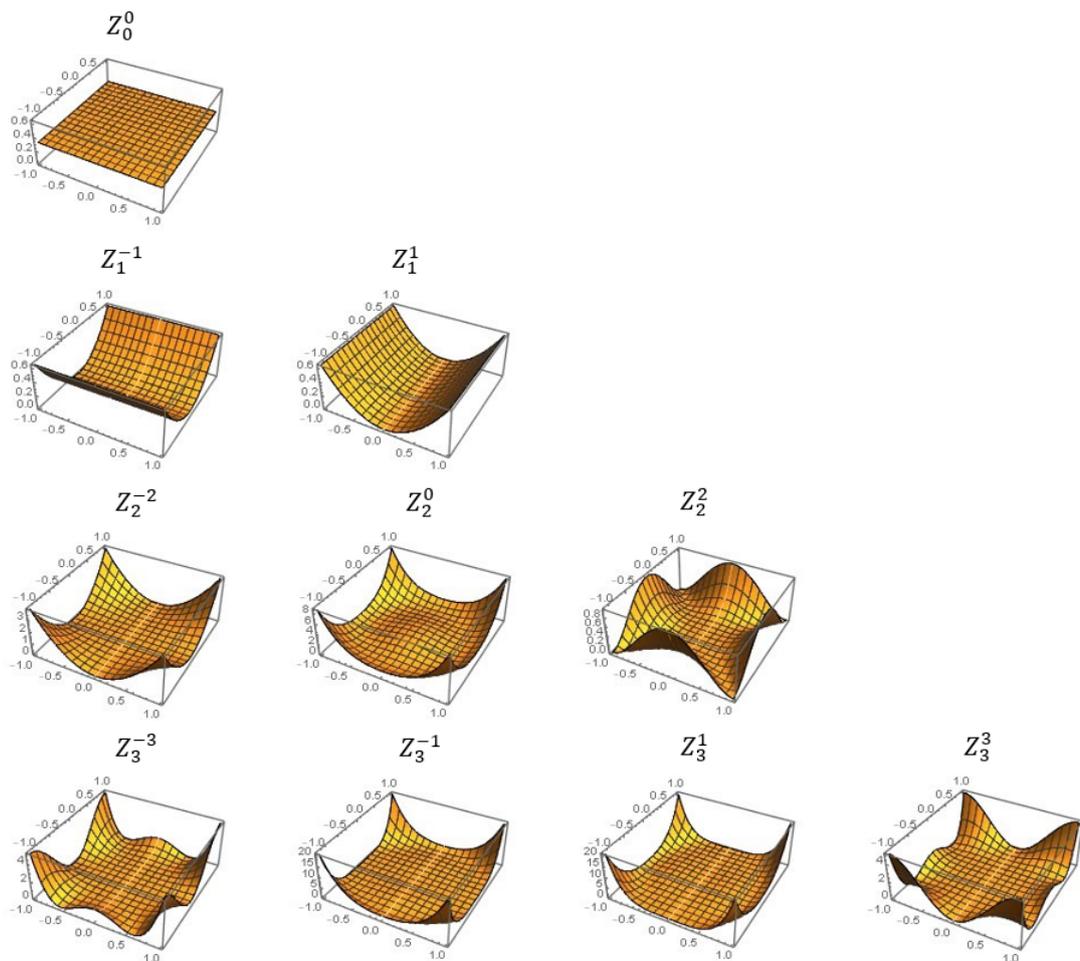


Рис. 3: Визуальное представление нескольких первых полиномов Цернике с различными значениями  $n$  и  $m$

Цернике позволяет оптимизировать процесс вычислений и дает возможность анализировать более сложные оптические схемы.

Кроме того, еще одной проблемой является влияние линз и зеркал в реальных оптических системах, предназначенных для плоского волнового фронта или гауссовых пучков. Поскольку волновой фронт пучков с ненулевым ОУМ принципиально отличается от плоского, распространение через такие оптические элементы существенно искажает пространственную структуру закрученных пучков, что приводит к росту ошибок при передаче информации.

Также для задач коммуникации через открытые оптические каналы представляет интерес вопрос о сложности физической реализации такого канала, в зависимости от выбора способа кодирования информации. При работе в дискретных переменных, лаггер-гауссовы моды дают возможность использовать для этих целей как радиальное число, так и азимутальное.

Произвольная напряженность электромагнитного поля  $E(r, \varphi)$  может быть разложена по полному набору ортогональных полиномов Цернике следую-

щим образом:

$$E(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{nm} Z_n^m(r, \phi), \quad (51)$$

где коэффициенты разложения  $C_{nm}$  вычисляются следующим образом:

$$C_{nm} = \int_0^R \int_0^{2\pi} E(r, \phi) Z_n^{m*}(r, \phi) r dr d\phi. \quad (52)$$

Поскольку для описания распространения пучка в свободном пространстве используется принцип Гюйгенса-Френеля, сводящийся к вычислению дифракционного интеграла Френеля, нам достаточно разложить по модам Цернике лаггерр-гауссову моду в области перетяжки, считая этот волновой фронт начальным. В области перетяжки лаггерр-гауссова мода может быть записана следующим образом:

$$LG_{p,\ell}(r, \varphi, z = 0) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi (p + |\ell|)! \omega_0}} \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega_0} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega_0^2} \right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} \cdot e^{i\ell\varphi}. \quad (53)$$

Найдем коэффициенты разложения  $C_{nm}^{p,\ell}$  начального волнового фронта лаггерр-гауссовой моды  $LG_{p,\ell}$  по модам Цернике. Проинтегрируем сначала угловую часть, разделив экспоненту в полиномах Цернике на косинусную и синусную составляющие:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell\varphi} \cdot \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2} d\varphi + i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\ell\varphi} \cdot \frac{e^{im\varphi} - e^{-im\varphi}}{2} d\varphi = 2\pi \cdot \delta_{\ell,m}, \quad (54)$$

поскольку в случае, когда  $\ell \neq m$  интегралы в (54) расходятся.

Проинтегрируем радиальную часть

$$\int_0^R \sqrt{\frac{2p!}{\pi (p + |\ell|)!}} \cdot R_n^m(r) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega_0} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega_0^2} \right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} r dr \quad (55)$$

Для этого сначала упростим вид выражения (50), заменив факториальные множители биномиальными коэффициентами:

$$\binom{g}{k} = \frac{g!}{k!(g-k)!} \quad (56)$$

Пусть

$$k = \frac{n-m}{2} - h, \quad (57)$$

тогда

$$\frac{n+m}{2} - h = g - k \rightarrow g = \frac{n+m}{2} - h + \frac{n-m}{2} - h = n - 2h \quad (58)$$

Получаем

$$R_n^m(r) = \sum_{h=0}^{(n-m)/2} (-1)^h \frac{(n-h)!}{h!(n-2h)!} \binom{n-2h}{\frac{n-m}{2}-h} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2h} \quad (59)$$

В свою очередь, первый множитель также может быть переписан через биномиальный коэффициент  $\binom{n-h}{h}$ . Итого, выражение для радиальных полиномов принимает вид

$$R_n^m(r) = \sum_{h=0}^{(n-m)/2} (-1)^h \binom{n-h}{h} \binom{n-2h}{\frac{n-m}{2}-h} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-2h}. \quad (60)$$

Также для взятия интеграла от радиальной части потребуется преобразовать лаггерр-гауссову моду в области перетяжки используя представление обобщенных полиномов лаггерра в виде конечной суммы полиномов младших степеней:

$$LG_{p,\ell}(r, \phi, z=0) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!} \frac{1}{\omega_0}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_0}\right)^{|\ell|} e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} e^{i\ell\phi} \cdot \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p+|\ell|}{p-i} \frac{\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)^i}{i!} \quad (61)$$

Также учтем, что полиномы Цернике должны быть ортогональны в окружности с радиусом, равным радиусу перетяжки пучка  $R = \omega_0$ . В таком случае интеграл от радиальной части равен

$$\begin{aligned} & \int_0^R \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}} \cdot R_n^m(r) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_0}\right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} r dr = \\ & = \sqrt{\frac{n+1}{\pi\omega_0^2}} \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \sum_{i=0}^p \sum_{h=0}^{(n-m)/2} (-1)^{h+i} \binom{p+|\ell|}{p-i} \binom{n-h}{h} \binom{n-2h}{\frac{n-m}{2}-h} \frac{1}{i!} \cdot \\ & \cdot \int_0^{\omega_0} \left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)^i \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_0}\right)^{|\ell|} e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} \left(\frac{r}{\omega_0}\right)^{n-2h} r dr \end{aligned} \quad (62)$$

Выполним замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2r^2}{\omega_0^2}, \\ dx &= \frac{4r dr}{\omega_0^2}, \\ [0, \omega_0] &\rightarrow [0, 2]. \end{aligned} \quad (63)$$

Тогда интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_0} \left( \frac{2r^2}{\omega_0^2} \right)^i \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega_0} \right)^{|\ell|} e^{-\frac{r^2}{\omega_0^2}} \left( \frac{r}{\omega_0} \right)^{n-2h} r dr = \\ & = \int_0^2 x^i x^{|\ell|/2} x^{n/2-h} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n/2-h} e^{-x/2} \frac{\omega_0^2}{4} dx \end{aligned} \quad (64)$$

Воспользуемся табличным интегралом [46]:

$$\int_0^u x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = \mu^{-\nu} \gamma(\nu, \mu \cdot u), \quad (65)$$

при условии  $Re(\nu) > 0$ .

Убедимся, что это условие выполняется. В нашем случае  $u = 2$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = i - h + 1 + \frac{1}{2}(n + |\ell|)$ . Положим минимально возможным  $i = 0$ , а  $h = \frac{n-m}{2}$  — максимально возможным. Тогда  $\nu = -\frac{n-m}{2} + \frac{n+|\ell|}{2} + 1 = \frac{|\ell|+m}{2} + 1 > 0$ , поскольку  $m = \ell$  из-за возникающего при интегрировании угловой части символа кронекера.

В таком случае для коэффициентов разложения имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} C_{nm}^{p,\ell} &= 2\pi \delta_{m,\ell} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{\pi \omega_0^2}} \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|\ell|)!}} \cdot \frac{1}{\omega_0} \sum_{i=0}^p \sum_{h=0}^{(n-m)/2} (-1)^{h+i} \binom{p+|\ell|}{p-i} \binom{n-h}{h} \cdot \\ & \cdot \binom{n-2h}{\frac{n-m}{2}-h} \frac{1}{i!} \frac{\omega_0^2}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^{n/2-h} \left( \frac{1}{2} \right)^{-i+h-\frac{1}{2}(n+|\ell|)} \gamma\left(i-h+1+\frac{1}{2}(n+|\ell|), 1\right) = \\ & = \delta_{m,\ell} \cdot \sqrt{\frac{(n+1)2p!}{(p+|\ell|)!}} \cdot \sum_{i=0}^p \sum_{h=0}^{(n-m)/2} \binom{p+|\ell|}{p-i} \binom{n-h}{h} \binom{n-2h}{\frac{n-m}{2}-h} \frac{1}{i!} \cdot \\ & \cdot 2^{|\ell|/2+i-1} \gamma\left(i-h+1+\frac{1}{2}(n+|\ell|), 1\right) \end{aligned} \quad (66)$$

С учетом символа кронекера  $\delta_{m,\ell}$  можно убрать суммирование по  $m$  в (51), поскольку коэффициенты при полиномах с  $m \neq \ell$  будут равняться нулю. Тогда опустим один из индексов в коэффициентах разложения  $C_{nm}^{p,\ell}$ , заменив  $m$  на  $\ell$  и убрав символ кронекера. Коэффициенты будут иметь вид

$$\begin{aligned} C_n^{p,\ell} &= \sqrt{\frac{(n+1)2p!}{(p+|\ell|)!}} \cdot \sum_{i=0}^p \sum_{h=0}^{(n-\ell)/2} \binom{p+|\ell|}{p-i} \binom{n-h}{h} \binom{n-2h}{\frac{n-\ell}{2}-h} \frac{1}{i!} \cdot \\ & \cdot 2^{|\ell|/2+i-1} \gamma\left(i-h+1+\frac{1}{2}(n+|\ell|), 1\right) \end{aligned} \quad (67)$$

## 3.2 Анализ коэффициентов разложения

Покажем значения нескольких первых коэффициентов разложения для мод  $LG_{0,0}$ ,  $LG_{0,\pm 1}$ ,  $LG_{1,\pm 1}$ ,  $LG_{5,\pm 1}$  и  $G_{5,\pm 5}$  чтобы понимать, каким образом на величину и тип aberrаций влияют радиальное и азимутальное числа (рис. 4, 5, 6).

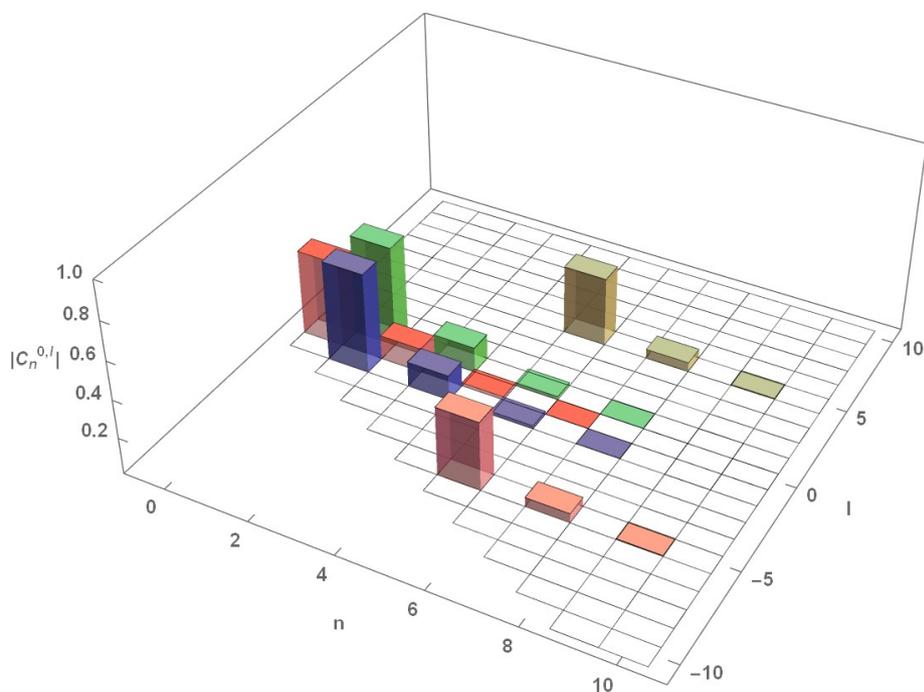


Рис. 4: Значения коэффициентов разложения в ряд по полиномам Цернике мод  $LG_{0,0}$ ,  $LG_{0,\pm 1}$ ,  $LG_{1,\pm 1}$ ,  $LG_{5,\pm 1}$  и  $G_{5,\pm 5}$ . Каждая столбчатая линия на изображении соответствует модулю коэффициента разложения  $C_n^{0,l}$  с фиксированным значением  $n$

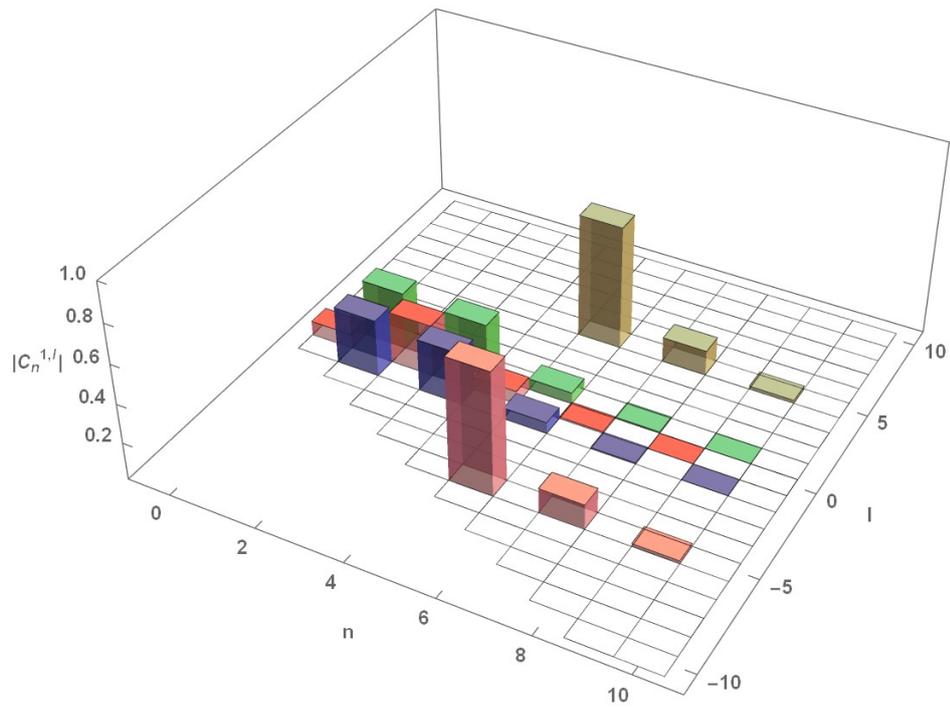


Рис. 5: Значения коэффициентов разложения в ряд по полиномам Цернике мод  $LG_{1,0}, LG_{1,\pm 1}, LG_{1,\pm 5}$ . Каждая столбчатая линия на изображении соответствует модулю коэффициента разложения  $C_n^{1,l}$  с фиксированным значением  $n$

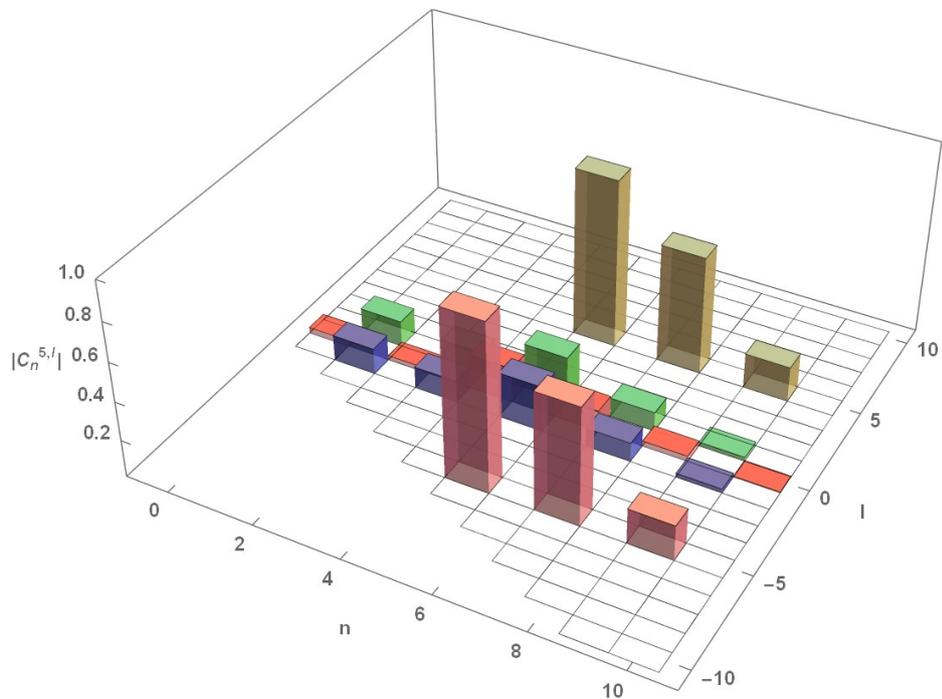


Рис. 6: Значения коэффициентов разложения в ряд по полиномам Цернике мод  $LG_{5,0}, LG_{5,\pm 1}, LG_{5,\pm 5}$ . Каждая столбчатая линия на изображении соответствует модулю коэффициента разложения  $C_n^{5,l}$  с фиксированным значением  $n$

Как видно из рис. 4,5,6, с ростом азимутального числа  $\ell$  значения коэффициентов  $C_n^{p,\ell}$  с  $n < \ell$  становятся равными нулю. Это говорит об исчезновении влияния на исходный волновой фронт aberrаций типа дефокусировка и дисторсия. При этом остается вклад aberrаций типа кома, астигматизм и сферических aberrаций высоких порядков. Кроме того, видно, что коэффициенты разложения при полиномах высоких порядков становятся меньше с ростом радиального числа  $p$  для лаггерр-гауссовых мод со значением азимутального числа  $\ell$  близким к нулю. Это свидетельствует о снижении вклада в итоговый волновой фронт полиномов, описывающих сложные пространственные профили, то есть волновой фронт становится ближе к плоскому. Таким образом, можно сказать, что для использования в оптических системах, настроенных под плоский волновой фронт, лучше всего подходит формат кодирования информации за счет изменения радиального числа лаггерр-гауссовых мод с азимутальным числом, близким к нулю. В этом смысле, можно вернуться к результатам работы Lavery и др., где говорится о проблемах при модельном описании распространения в турбулентной газовой среде пучков с волновым фронтом, отличным от плоского. Основываясь на наших результатах, можно говорить о том, что имеющиеся модели оптических каналов практически не требуют изменений при описании распространения лаггерр-гауссовых мод с отличным от нуля радиальным числом.

Продолжая разговор об устойчивости пространственно структурированных оптических пучков к турбулентности, необходимо упомянуть работу [13], в которой исследуется устойчивость волнового фронта при распространении в свободном пространстве посредством анализатора Цернике. Автор приходит к выводу, что в большей степени подвержены изменению при таком распространении коэффициенты при полиномах Цернике с совпадающими индексами, то есть  $Z_{00}$ ,  $Z_{11}$  и так далее. На рис. 7 показана зависимость коэффициентов разложения при таких полиномах Цернике  $Z_1^1$ ,  $Z_3^3$ ,  $Z_5^5$ .

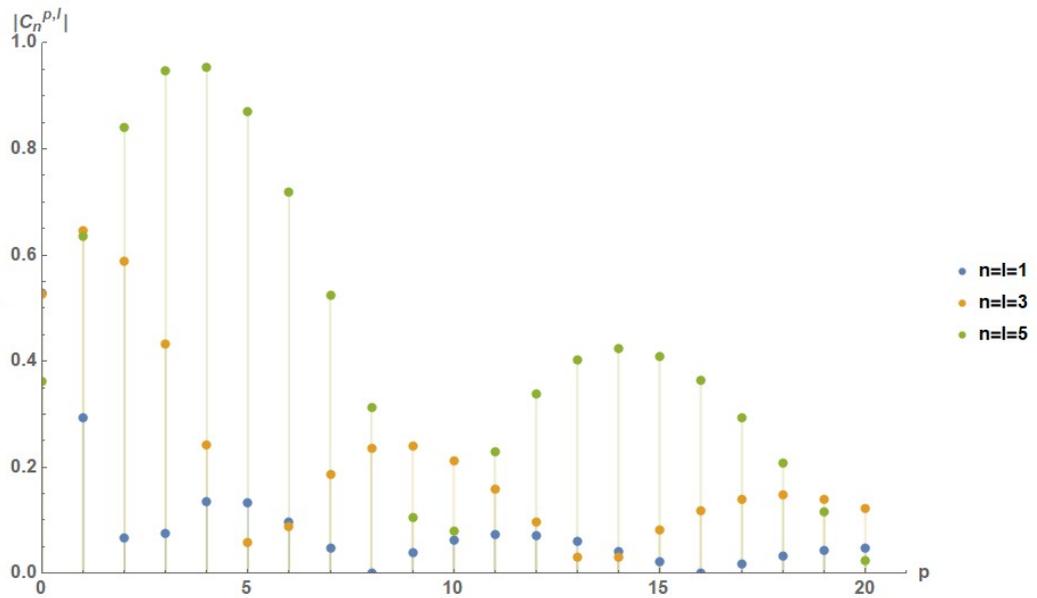


Рис. 7: Зависимость модуля значений коэффициентов разложения  $C_n^{p,l}$  при модах Цернике  $Z_1^1, Z_3^3, Z_5^5$

Если обратиться к рис. 7, видно, что для любой лаггерр-гауссовой моды с азимутальным числом  $\ell$  отличным от нуля, существует несколько значений радиального числа  $p$ , минимизирующих вклад полиномов Цернике с повторяющимся индексом. Подбор соответствующего радиального числа для лаггерр-гауссовых мод, различающихся азимутальным числом, способен улучшить их устойчивость к распространению в турбулентной среде.

## 4 Распространение лаггерр-гауссовых мод в турбулентной среде

В предыдущем разделе нами были сделаны выводы относительно устойчивости распространения лаггерр-гауссовых мод в турбулентной среде на основе исследования их разложения по базису полиномов Цернике. Мы показали, что при использовании радиального числа, отличного от нуля, лаггерр-гауссовы моды становятся более устойчивыми к турбулентности. В данном разделе мы продемонстрируем корректность наших предположений при помощи численного моделирования распространения таких пучков в среде с различной степенью турбулентности.

При использовании лаггерр-гауссовых пучков в атмосферных оптических каналах связи для передачи информации используется набор мод с различающимся значением ОУМ. В качестве одного из вариантов детектирования получаемого состояния можно использовать ССД камеру, показывающую результат интерференции полученного лаггерр-гауссова пучка с опорным плоским или гауссовым пучком. В случае интерференции лаггерр-гауссова пучка с гауссовым пучком на интерференционной картине наблюдается «вилка», размеры и форма которой зависят от величины ОУМ лаггерр-гауссовой моды (рис. 8):

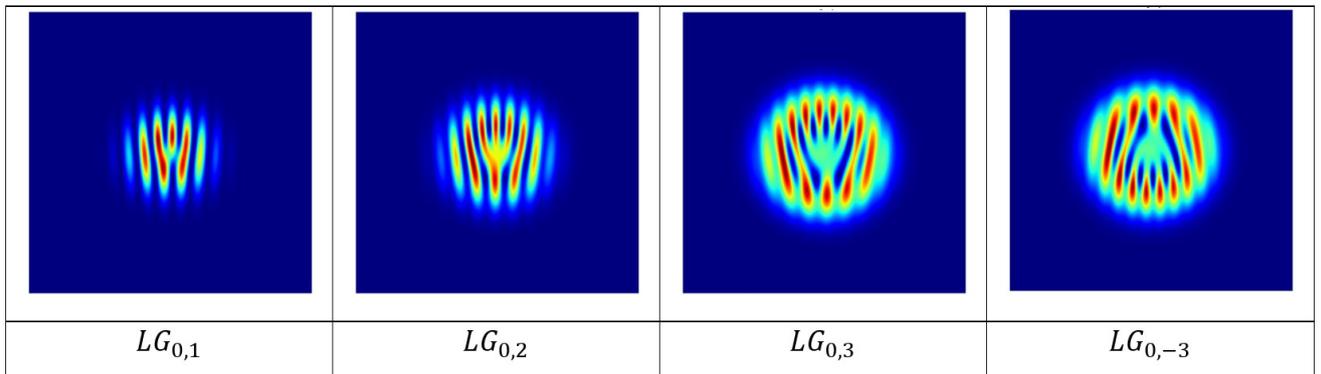


Рис. 8: Изображения интенсивности интерференционной картины разных лаггерр-гауссовых мод с опорным гауссовым пучком, где первый индекс — радиальное число  $p$ , второй — азимутальное  $\ell$

Однако у такого подхода существует негативный момент: в работах [37] [38] показано, что при распространении лаггерр-гауссовых пучков с ОУМ  $= \ell$  в турбулентной атмосфере, наблюдается распад центральной сингулярности на набор из  $|\ell|$  сингулярностей, расположенных на некоторой окружности ненулевого радиуса, соответствующих модам с  $\ell = \pm 1$ . Иными словами, на интерференционной картине будет наблюдаться не одна «вилка», соответствующая моде  $LG_{0,3}$ , а три «вилки», соответствующие моде  $LG_{0,1}$ . Данный негативный момент существенно усложняет задачу мультиплексирования для повышения информационной емкости оптического канала, поскольку стано-

вится невозможным различить на одной интерференционной картине вклад от мод с разным значением ОУМ. Более того, наличие данной особенности накладывает серьезные требования на размер апертуры CCD камеры регистрирующей аппаратуры, а также на ширину опорного пучка, который необходим для наблюдения интерференционной картины.

В свою очередь, использование лаггерр-гауссовых мод, различающихся радиальным числом лишено подобного недостатка: при распространении в турбулентной среде кольцевая структура сохраняется и все еще хорошо различима на интерференционной картине, что подтверждается результатами моделирования, о чем и пойдет речь далее.

Моделирование распространения пучка в турбулентной атмосфере велось при помощи метода распространения пучка с разбиением шага (Split Step BPM) [39] [40]. Этот метод одновременно позволяет рассматривать дифракцию пучка и эффекты неоднородной среды, вызванные турбулентностью [приложение 2].

Результаты моделирования интенсивности лаггерр-гауссова пучка и его интерференции с гауссовым пучком представлены на рис. 9.

	Турбулентность отсутствует		$r_0 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ (Слабая турбулентность)		$r_0 = 1.2 \cdot 10^{-4}$ (Средняя турбулентность)		$r_0 = 2.4 \cdot 10^{-4}$ (Сильная турбулентность)	
	Интенсивность пучка	Интерференционная картина	Интенсивность пучка	Интерференционная картина	Интенсивность пучка	Интерференционная картина	Интенсивность пучка	Интерференционная картина
$LG_{0,0}$								
$LG_{0,1}$								
$LG_{1,1}$								
$LG_{0,2}$								
$LG_{2,2}$								
$LG_{0,3}$								
$LG_{3,3}$								

Рис. 9: Сводная таблица результатов численного моделирования прохождения лаггерр-гауссовых мод  $LG_{0,0}$ ,  $LG_{0,1}$ ,  $LG_{1,1}$ ,  $LG_{0,2}$ ,  $LG_{2,2}$ ,  $LG_{0,3}$ ,  $LG_{3,3}$  через турбулентную газовую среду. Представлены изображения интенсивности прошедшего пучка и результат интерференции с опорным гауссовым пучком.

Как видно из рис.9, в случае средней и сильной степеней турбулентности, детектирование лагерр-гауссовых мод, различающихся азимутальным числом  $\ell$  становится довольно трудной задачей, требующей в том числе для решения применения техник адаптивной оптики. Аналогичные выводы представлены в работах [41] [42] [43], где анализируется перекрывание мод с разным ОУМ, распространяющихся в свободном пространстве. Таким образом, передача информации через оптический канал в свободном пространстве при помощи лагерр-гауссовых мод с различными значениями  $\ell$  без использования дополнительных систем коррекции волнового фронта становится крайне чувствительной как к качеству атмосферного канала, так и к расстоянию передачи сигнала.

И напротив, даже сильная турбулентная среда мало искажает радиальный кольцевой профиль лагерр-гауссовой моды. В этом смысле, кажется несколько более целесообразным использовать для дискретного амплитудного кодирования именно радиальное число  $p$ , поскольку в этом случае процесс детектирования полученной моды упрощается и сводится к простому подсчету числа колец на интерференционной картине или профиле интенсивности полученного пучка.

Наконец, покажем, что увеличение радиального числа  $p$  положительным образом сказывается и на устойчивости детектирования мод, различающихся азимутальным числом  $\ell$ . Для этого более детально рассмотрим профиль интенсивности и результат интерференции лагерр-гауссовых мод с азимутальным числом  $\ell = 3$  и радиальным числом  $p = 0, 1, 3$  до и после прохождения турбулентной среды с параметром Фрида  $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует средней силе турбулентности. На рис. 10, 11, 12 приведены результаты соответствующего моделирования.

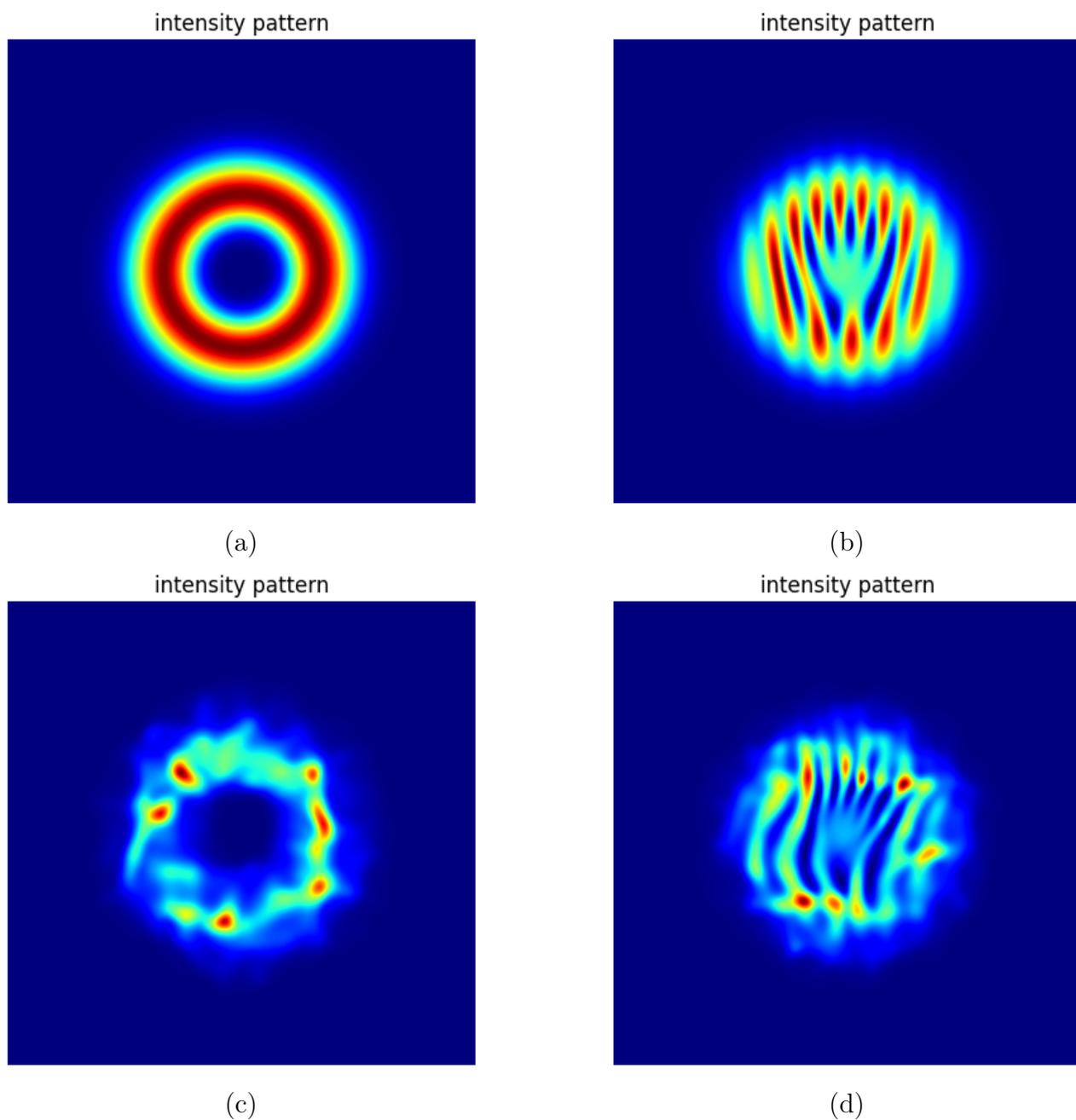


Рис. 10: Результат моделирования прохождения пучка  $LG_{0,3}$  через среду со средней турбулентностью: (a) профиль интенсивности пучка до прохождения; (b) результат интерференции с гауссовым пучком до прохождения; (c) профиль интенсивности пучка после прохождения; (d) результат интерференции с гауссовым пучком после прохождения

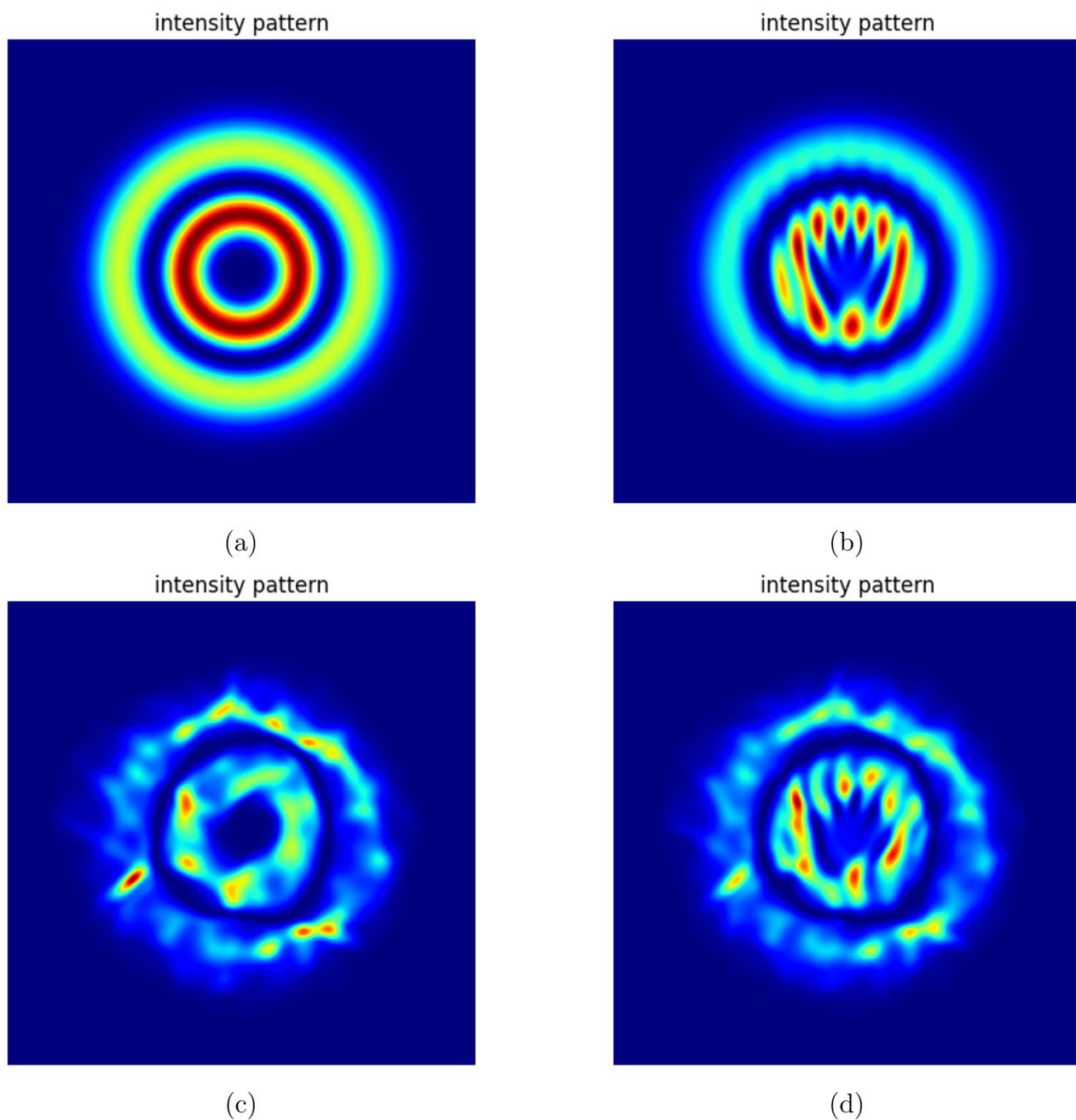


Рис. 11: Результат моделирования прохождения пучка  $LG_{1,3}$  через среду со средней турбулентностью: (a) профиль интенсивности пучка до прохождения; (b) результат интерференции с гауссовым пучком до прохождения; (c) профиль интенсивности пучка после прохождения; (d) результат интерференции с гауссовым пучком после прохождения

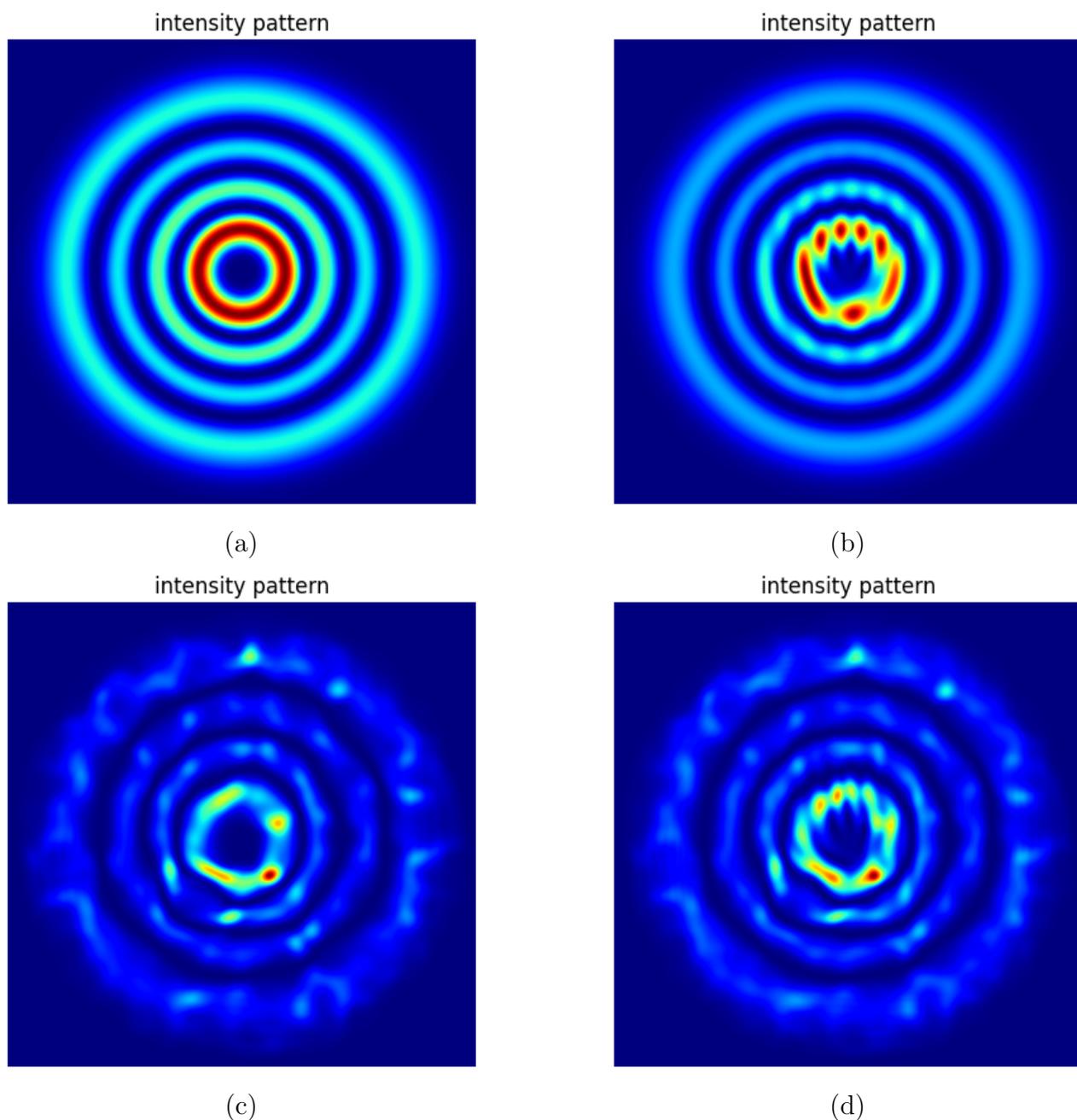


Рис. 12: Результат моделирования прохождения пучка  $LG_{3,3}$  через среду со средней турбулентностью: (a) профиль интенсивности пучка до прохождения; (b) результат интерференции с гауссовым пучком до прохождения; (c) профиль интенсивности пучка после прохождения; (d) результат интерференции с гауссовым пучком после прохождения

На рис. 10(d) видна характерная картина распада центральной области сингулярности на набор из 3 точек сингулярности: вместо одной вилки с 4 зубцами мы наблюдаем образование 3 вилок с двумя зубцами. При этом в случае, если одна из точек сингулярности окажется за апертурой регистрирующей CCD камеры, будет детектировано некорректное значение ОУМ прошедшего пучка. Однако, на рис. 11(d) и 12(d) можно видеть, что центральная область сингулярности становится более стабильной, при этом лучше

сохраняется и пространственная структура пучка (рис. 11(с) и 12(с)). Данные результаты моделирования подтверждают наши предположения относительно устойчивости пучка к турбулентности при использовании пучков со значением  $p$  отличным от нуля и показывает принципиальную возможность усовершенствования существующих систем связи в открытом пространстве, основанных на амплитудно-фазовом кодировании передаваемой информации при помощи значений ОУМ лаггерр-гауссовых мод лазерного пучка.

## 5 Заключение

В рамках данной дипломной работы решалось две задачи: с одной стороны изучались квантово-механические особенности радиального числа лаггерр-гауссовых мод, а с другой — исследовалось влияние радиального числа на устойчивость лаггерр-гауссовых мод при их распространении в турбулентной среде в рамках классической оптики. Полученные выводы о влиянии радиального числа на устойчивость были подтверждены в рамках компьютерного моделирования распространения лаггерр-гауссовых пучков через среды с разной степенью турбулентности.

В первой части работы было показано, что оператор радиального числа лаггерр-гауссовых мод действительно соответствует квантово-механической наблюдаемой величине, поскольку оператор, собственными функциями которого являются лаггерр-гауссовы моды, а собственными числами — радиальные числа, является эрмитовым в гильбертовом пространстве лаггерр-гауссовых мод. В общем случае, измерять значение радиального числа фотонов можно набирая статистику их пространственного распределения при помощи ССД камеры, однако мы показали, что возможен и несколько иной способ.

Анализируя выражение для данного оператора в области перетяжки  $z = 0$ , мы показали, что его можно свести при помощи аппарата вторичного квантования и перехода к новому базису вращающихся бозонных операторов к виду разности операторов числа вращающихся квазичастиц в поперечной плоскости и оператора проекции ОУМ на ось  $z$ . При этом, рассматривая выражение данного оператора в новом виде в зависимости от значения проекции ОУМ ( $\ell > 0$ ,  $\ell < 0$  или  $\ell = 0$ ), можно увидеть, что он характеризует полное число квазичастиц в поперечной плоскости, вращающихся против направления вращения пучка как целого, возникающего из-за наличия ненулевого ОУМ. В таком случае, детектирование данной квантово-механической наблюдаемой возможно при помощи измерения числа вращающихся в поперечной плоскости квазичастиц и их значения ОУМ.

Кроме этого, было показано, что оператор радиального числа лаггерр-гауссовых мод коммутирует с гамильтонианом свободного поля только в области перетяжки, а следовательно, в общем случае не является интегралом движения, то есть в фиксированной точке пространства среднее значение радиального числа фотонов меняется с течением времени. Также было начато построение канонически сопряженного к радиальному числу  $p$  оператора, при выводе которого мы ограничились только вкладом от членов, характеризующих изменение искомого оператора относительно операторов координат  $\hat{r}$  и  $\hat{z}$ . Однако, даже такое приближение позволило показать, что в канонически сопряженном операторе присутствуют вклады от фазы Гауи и радиуса кривизны пучка, обусловленные наличием пространственного ограничения пучка в области перетяжки.

Развитие исследования в этой области пока нельзя считать в достаточной

мере завершенным, поскольку несохранение во времени среднего значения оператора радиального числа не позволяет пока однозначно оценить поведение радиального квантового числа лаггерр-гауссовых мод вдали от области перетяжки и требует дополнительных исследований. Еще одним открытым вопросом пока остается изучение двух оставшихся слагаемых оператора радиального числа, появляющихся при удалении от области перетяжки. Однако сделанные на текущий момент выводы позволяют однозначно утверждать, что существует принципиальная возможность использования радиального квантового числа  $p$  в задачах квантового распределения ключа или квантовых оптических каналах связи в качестве дискретной переменной в пространстве алгебры векторов состояний большой размерности.

В заключительной части работы анализировалась устойчивость волнового фронта лаггерр-гауссовых лазерных пучков к случайным возмущениям турбулентной среды при помощи разложения по базису полиномов Цернике. Получено точное аналитическое решение для значений этих коэффициентов в области перетяжки. Далее было продемонстрировано поведение этих коэффициентов в зависимости от радиального  $p$  и азимутального  $\ell$  чисел рассматриваемой лаггерр-гауссовой моды. В частности, было подробно исследовано поведение коэффициентов разложения при полиномах Цернике с одинаковыми индексами  $n$  и  $m$ . Как было показано в работе [13], пучки, описываемые такими полиномами Цернике, наименее устойчивы при прохождении турбулентной среды. Как оказалось, для каждого коэффициента при полиномах с одинаковыми индексами и разными значениями азимутального числа  $\ell$  существует несколько значений радиального числа, при которых этот коэффициент практически обращается в 0, а следовательно, вклад подобных аберраций в итоговый волновой фронт пучка может быть сильно минимизирован.

Наконец, для подтверждения наших предположений относительно влияния радиального числа на устойчивость лаггерр-гауссовых мод к распространению в турбулентной среде была написана программа, позволяющая численно моделировать распространение таких пучков в турбулентной среде. С ее помощью исследовалось влияние турбулентной среды как на профиль интенсивности, так и на волновой фронт пучка, что можно продемонстрировать при помощи моделирования интерференционной картины лаггерр-гауссова пучка и опорного гауссова пучка. Моделирование велось в 3 режимах с разной силой турбулентности, в каждом из этих режимов было показано, что увеличение радиального числа, с одной стороны, положительным образом сказывается на повышении устойчивости сингулярности в центре пучка к случайным изменениям волнового фронта, а с другой — на сохранении пространственной структуры интенсивности пучка.

Подводя итог вышесказанному, выделим три ключевых результата проведенного исследования. Во-первых, было показано, что оператор радиального числа в области перетяжки можно выразить в виде разности операторов числа вращающихся в поперечной плоскости квазичастиц и оператора проекции

ОУМ. Более того, становится понятен физический смысл оператора радиального числа: он характеризует среднее число квазичастиц, вращающихся против направления вращения пучка. Во-вторых показана принципиальная возможность использования квантового радиального числа лаггерр-гауссовых мод в задачах квантовой информатики в качестве дискретной переменной при вычислениях и в протоколах квантового распределения ключа, где подразумевается использование малофотонного квантового света. В-третьих, исследование классических лазерных лаггерр-гауссовых мод показало, что с одной стороны пучки с отличным от нуля радиальным числом повышают устойчивость закрученного волнового фронта к случайным возмущениям, повышая точность детектирования пучков, различающихся ОУМ, а с другой — пространственно структурированные пучки, различающиеся радиальным числом, также могут быть успешно использованы для амплитудно-фазового кодирования информации в открытых оптических каналах связи.

# Литература

- [1] S. W. Hell, J. Wichmann, Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: Stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy. *Opt. Lett.* 19, 780–782 (1994).
- [2] M. P. MacDonald, L. Paterson, K. Volke-Sepulveda, J. Arlt, W. Sibbett, K. Dholakia, Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures. *Science* 296, 1101–1103 (2002).
- [3] A. Jesacher, S. Fürhapter, S. Bernet, M. Ritsch-Marte, Size selective trapping with optical “cogwheel” tweezers. *Opt. Express* 12, 4129–4135 (2004).
- [4] Lavery, M. P. J., Peuntinger, C., Günthner, K., Banzer, P., Elser, D., Boyd, R. W., Leuchs, G. Free-space propagation of high-dimensional structured optical fields in an urban environment. *Science Advances* (2017).
- [5] Doster, T., & Watnik, A. T. Laguerre–Gauss and Bessel–Gauss beams propagation through turbulence: analysis of channel efficiency. *Applied Optics*, 55(36), 10239 (2016).
- [6] Mohammad Mirhosseini et al. *New J. Phys.* 17 033033 (2015).
- [7] Wang, Ziqing & Malaney, Robert & Green, Jonathan. Detecting Orbital Angular Momentum of Light in Satellite-to-Ground Quantum Communications (2019).
- [8] Aksenov, Valerii & Pogutsa, Cheslav. Increase in laser beam resistance to random inhomogeneities of atmospheric permittivity with an optical vortex included in the beam structure. *Applied optics*. 51. 7262-7. 10.1364/AO.51.007262 (2012).
- [9] Aksenov, Valerii & Kolosov, Valeriy & Pogutsa, Ch. The influence of the vortex phase on the random wandering of a Laguerre-Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere: A numerical experiment. *Journal of Optics*. 15. 4007-. 10.1088/2040-8978/15/4/044007 (2013).
- [10] Aksenov, Valerii & Колосов, В.В & Tartakovsky, Valery & Фортес, Б.В. Оптические вихри в неоднородных средах. *Оптика атмосферы и океана*. 12. 952-958 (1999).

- [11] V. I. Tatarski, Wave Propagation in a Turbulent Medium (McGraw-Hill, 1961).
- [12] Andrews, L. C. An Analytical Model for the Refractive Index Power Spectrum and Its Application to Optical Scintillations in the Atmosphere. Journal of Modern Optics, 39(9), 1849–1853 (1992).
- [13] Khorin, Pavel. Analysis wavefront propagating in free space based on the Zernike polynomials and Gauss-Laguerre modes expansion. Journal of Physics: Conference Series. 1096. 012104. 10.1088/1742-6596/1096/1/012104 (2018).
- [14] Gibson, Graham M., Johannes Courtial, Miles J. Padgett, M. V. Vasnetsov, Valeriy A. Pas’ko, Stephen M. Barnett and Sonja Franke-Arnold. “Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum.” Optics express 12 22: 5448-56 (2004).
- [15] В. П. Аксенов, В. В. Дудоров, В. В. Колосов, “Особенности вихревых пучков, сформированных матрицей волоконных лазеров, и их распространение в турбулентной атмосфере”, Квантовая электроника, 46:8, 726–732 [Quantum Electron., 46:8 (2016), 726–732] (2016).
- [16] Аксенов, В. П., Канев, Ф. Ю., Куксенко, Д. С., Макенова, Н. А., & Хапаева, А. В. Регистрация параметров вихревого пучка в турбулентной атмосфере. Ч. 1. Использование градиентов волнового фронта. Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов, 323 (2), 177-180 (2013).
- [17] Аксенов В. П., Погуца Ч. Е. Влияние оптического вихря на случайные смещения Лагерра–Гауссова лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере. // Оптика атмосферы и океана. Т. 25. № 07. С. 561–565, (2012).
- [18] Kirilenko, Mikhail & Khorin, Pavel & Porfirev, Aleksey. Wavefront analysis based on Zernike polynomials. 66-75. 10.18287/1613-0073-2016-1638-66-75 (2016).
- [19] Wada, A., Ohtani, T., Miyamoto, Y., & Takeda, M. Propagation analysis of the Laguerre–Gaussian beam with astigmatism. Journal of the Optical Society of America A, 22(12), 2746 (2005).
- [20] Wünsche, A. Generalized Zernike or disc polynomials. Journal of Computational and Applied Mathematics, 174(1), 135–163 (2005).
- [21] Niu M.Y., Chuang I.L., and Shapiro J.H. “Qudit-Basis Universal Quantum Computation Using  $\chi^2$  Interactions”. Phys. Rev. Lett. V. 120. P. 160502, (2018)

- [22] Абрамочкин Е.Г., Волостников В.Г. “Спиральные пучки света”. УФН. Т. 174. С. 1273, (2004).
- [23] Pellatz N.P. “The orbital angular momentum of light”. Honor Thesis. Whitman College. P. 37, (2014).
- [24] Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989.- 664 с., ил.
- [25] Квантовое изображение / Под ред. М. И. Колобова; Перевод с англ. Т. Ю. Голубевой под ред. А. С. Чиркина. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 328 с.
- [26] Plick W.N., Krenn M. “Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams”. Phys. Rev. A. V. 92. P. 063841, (2015).
- [27] Plick W.N., Lapkiewicz R., Ramelow S., Zeilinger A. “The Forgotten Quantum Number: A short note on the radial modes of Laguerre-Gauss beams”. arXiv:1306.6517, (2013).
- [28] Karimi, Ebrahim & Boyd, Robert & de la Hoz, Pablo & Guise, H. & Rehacek, Jaroslav & Hradil, Zdenek & Leuchs, Gerd & Sanchez-Soto, L. Radial quantum number of Laguerre-Gauss modes. Physical Review A. 89. 062813. 10.1103/PhysRevA.89.063813 (2014).
- [29] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). "Orthogonal Polynomials." Ch. 22 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, pp. 771-802, (1972).
- [30] Xiao-li Yin, Can Xu, Ji Hao, Jing-jing Han, Xiang-jun Xin, Li Li, & Chong-xiu Yu. “Effects of atmosphere turbulence on the purity of light carrying orbital angular momentum employing Zernike Polynomials method”. 13th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOON), (2014).
- [31] Vincent, F., Mathieu, N., Robert, L., Nicolas, P., & Christophe, B. “Propagation modeling using the Split Step Fourier method: Ground boundary conditions analysis and acceleration by GPU”. 2014 International Radar Conference, (2014).
- [32] Burzler, J. M., Hughes, S., & Wherrett, B. S. “Split-step fourier methods applied to model nonlinear refractive effects in optically thick media”. Applied Physics B Laser and Optics, 62(4), 389–397, (1996).
- [33] Mirhosseini M., Maga-Loaiza O.S., Chen Ch., Rodenburg B., Malik M., Boyd R.W. “Rapid generation of light beams carrying orbital angular momentum”. Optics Express. V. 21. P. 30196, (2013).

- [34] Dongzhi, Fu & Zhou, Yiyu & Qi, Rui & Oliver, Stone & Wang, Yunlong & Hashemi Rafsanjani, Seyed Mohammad & Zhao, Jiapeng & Mirhosseini, Mohammad & Shi, Zhimin & Zhang, Pei & Boyd, Robert. Realization of a scalable Laguerre–Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter. *Optics Express*. 26. 33057. 10.1364/OE.26.033057 (2018).
- [35] Воляр, А.В. Сортировка пучков Лагерра–Гаусса по радиальному числу посредством моментов интенсивности / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. Т. 44, № 2. С. 155-166 (2020).
- [36] Koornwinder, Tom H.; Wong, Roderick S. C.; Koekoek, Roelof; Swarttouw, René F. "Orthogonal Polynomials in Olver, Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W. (eds.), NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-19225-5, MR 2723248 (2010).
- [37] Basistiy, I. V., Soskin, M. S., & Vasnetsov, M. V. Optical wavefront dislocations and their properties. *Optics Communications*, 119(5-6), 604–612 (1995).
- [38] Ricci, F., Löffler, W., & van Exter, M. P. Instability of higher-order optical vortices analyzed with a multi-pinhole interferometer. *Optics Express*, 20(20), 22961 (2012).
- [39] Yousef K. Chahine, Sarah A. Tedder, Brian E. Vyhnalek, and Adam C. Wroblewski "Beam propagation through atmospheric turbulence using an altitude-dependent structure profile with non-uniformly distributed phase screens Proc. SPIE 11272, Free-Space Laser Communications XXXII, 1127215 (2020).
- [40] Belmonte, A. Feasibility study for the simulation of beam propagation: consideration of coherent lidar performance. *Applied Optics*, 39(30), 5426 (2000).
- [41] Shengmei Zhao, Le Wang, Li Zou, Longyan Gong, Weiwen Cheng, Baoyu Zheng, Hanwu Chen. Both channel coding and wavefront correction on the turbulence mitigation of optical communications using orbital angular momentum multiplexing. *Optics Communications*, Volume 376, 92-98, 0030-4018 (2016).
- [42] Li, L., Zhang, R., Zhao, Z. et al. High-Capacity Free-Space Optical Communications Between a Ground Transmitter and a Ground Receiver via a UAV Using Multiplexing of Multiple Orbital-Angular-Momentum Beams. *Sci Rep* 7, 17427 (2017).

- [43] Torner, L., Torres, J. P., & Carrasco, S. Digital spiral imaging. *Optics Express*, 13(3), 873 (2005).
- [44] I. V. Basistiy, V. Y. Bazhenov, M. S. Soskin, and M. V. Vasnetsov, “Optics of light beams with screw dislocations,” *Opt. Commun.* 103, 422–428 (1993).
- [45] G. Molina-Terriza, J. Recolons, J. P. Torres, L. Torner, and E. M. Wright, “Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex,” *Phys. Rev. Lett.* 87, 023902 (2001).
- [46] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, переработанное при участии Ю.В. Геронимуса и М.Ю. Цейтлина. // М.: Гос. изд. Физ.-мат. лит. 1963. Стр. 331.

# Приложение 1. Решение волнового уравнения в параксиальном приближении

Решение волнового уравнения

$$\nabla\Psi = -k^2\Psi \quad (68)$$

будем искать в виде квазиплоских монохроматических волн

$$\Psi = u(x, y, z)e^{ikz}. \quad (69)$$

Мы считаем волны квазиплоскими, так как распределение интенсивности в поперечном профиле лазерного пучка неоднородно (мощность пучка сконцентрирована вблизи его оси). Медленно меняющаяся комплексная функция  $u(x, y, z)$  и определяет отличия лазерного пучка от плоской волны. Подставим (69) в (68):

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{ikz} = 0. \quad (70)$$

Пренебрегая второй производной  $u$  по  $z$  по сравнению с первой, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (71)$$

Полученное уравнение относится к уравнением параболического типа. Можно показать, что этому уравнению будет удовлетворять Гауссов пучок, амплитуда которого меняется в поперечной плоскости по Гауссову закону распределения случайной величины.

Поперечная зависимость функции  $u(x, y, z)$  должна сохранять свой вид в результате преобразований с помощью линз, зеркал, диафрагм и прочего. Данные оптические элементы совершают преобразование Фурье над функцией, описывающей поперечную структуру волны. Следовательно, требуется использовать функцию, Фурье образ которой есть сама исходная функция. Такой, например, является функция Гаусса  $e^{-x^2/q_0}$ , где  $q_0$  — некоторая положительная константа. Однако выбор решения в простейшей форме  $u(x, y, z) = V \cdot e^{-(x^2+y^2)/q_0}$  не удовлетворяет двум важным процессам:

- Изменение поперечного размера пучка (дифракционное расплывание) при его распространении вдоль оси  $z$ , поскольку  $q_0 = const$ ,
- Изменение амплитуды на оси пучка ( $x = y = 0$ ), поскольку  $V = const$ .

Будем искать амплитуду пучка  $u(x, y, z)$  в более общем виде

$$u(x, y, z) = a \cdot e^{ip(z)} \cdot e^{\frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)}. \quad (72)$$

Параметр  $p(z)$  — комплексный фазовый сдвиг при распространении света вдоль оси  $z$ , а  $q(z)$  — комплексный параметр пучка, определяющий гауссово распределение поля по координате  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $r$  — расстояние от оси. Также  $q(z)$  определяет кривизну волнового фронта.

Подставляя (72) в (71) получаем

$$2k \left( \frac{\partial p(z)}{\partial z} + \frac{i}{q(z)} \right) + \left( \frac{kr^2}{q(z)} \right) \left( 1 - \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right) = 0 \quad (73)$$

Полученное уравнение эквивалентно двум

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(z)}{\partial z} &= 1, \\ \frac{\partial p(z)}{\partial z} &= -\frac{i}{q} \end{aligned} \quad (74)$$

Проинтегрируем первое уравнение:

$$q(z) = z + q_0. \quad (75)$$

Используя пространственные зависимости параметров Гауссова пучка, предложенные Х. Когельником, можно записать комплексный параметр  $q$  через два действительных параметра  $R$  и  $w$ :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R_z} + i \frac{\lambda}{\pi w_z^2}, \quad (76)$$

где  $R$  — радиус кривизны волнового фронта, а  $w$  характеризует изменение поля в поперечной плоскости.

В области перетяжки ( $z = 0$ ) волновой фронт является плоским и комплексный параметр пучка равен

$$q = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda}, \quad (77)$$

где  $2w_0$  — минимальный диаметр пучка. Тогда

$$q = \frac{\pi w_0^2}{i\lambda} + z, \quad (78)$$

откуда подстановкой в (76) получаем

$$\begin{aligned} w_z^2 &= w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right), \\ R_z &= z \left( 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (79)$$

Наконец, подставим (78) в (74) и найдем выражение для  $p(z)$ :

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = -\frac{i}{q(z)} = -\frac{i}{z + i(\pi w_0^2/\lambda)},$$

$$i \cdot p(z) = \ln \left( 1 - i \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right) = \ln \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \right) - i \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (80)$$

Действительная часть  $p(z)$  представляет собой разность фаз  $\Phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)$  между гауссовым пучком и идеальной плоской волной, а мнимая часть — амплитудный множитель  $\frac{w_0}{w(z)}$ , который характеризует уменьшение интенсивности на оси из-за расширения пучка.

Подставим выражения (78), (80) и (72) в (69):

$$\Psi(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{ikz} e^{-i\Phi(z)} e^{-r^2 \left( \frac{1}{w_z^2} - \frac{ik}{2Rz} \right)}, \quad (81)$$

где

$$\Phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (82)$$

Такое решение волнового уравнения (71) не единственно. Другим решениям будут соответствовать оптические моды с пространственной структурой распределения интенсивности в поперечной плоскости пучка. В цилиндрической системе координат такое решение будет записываться в форме:

$$\Psi(r, \varphi, z) = g \left( \frac{r}{w(z)} \right) \cdot e^{i \left( p + \frac{k}{2q} r^2 + i\varphi \right)}. \quad (83)$$

Подставив это решение в волновое уравнение можно найти явный вид функции  $g \left( \frac{r}{w(z)} \right)$ :

$$g \left( \frac{r}{w(z)} \right) = \left( \sqrt{2} \frac{r}{w(z)} \right)^\ell \cdot L_p^\ell \left( 2 \frac{r^2}{w(z)^2} \right), \quad (84)$$

где  $L_p^\ell$  — обобщенный полином Лагерра с радиальным числом  $p$  и азимутальным числом  $\ell$ .

Наконец, итоговое описание мод, удовлетворяющих волновому уравнению в парааксиальном приближении представляется в виде:

$$\Psi(r, \varphi, z) = \frac{w_0}{w(z)} \left( \sqrt{2} \frac{r}{w(z)} \right)^\ell \cdot L_p^\ell \left( 2 \frac{r^2}{w(z)^2} \right) \cdot e^{i(kz - \Phi(z)) - r^2 \left( \frac{1}{w(z)^2} - \frac{ik}{2R} \right)} \cdot e^{i\ell\varphi}, \quad (85)$$

где

$$\Phi(z) = (2p + \ell + 1) \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (86)$$

## Приложение 2. Математическое описание метода SSBPM

Для увеличения точности использовался метод SSBPM второго порядка. Математически данный метод можно описать следующим образом. Рассмотрим эволюцию пучка с профилем, определяемым функцией  $E(x, y, z)$  между точками пространства  $z$  и  $z + \Delta z$ :

- Перейдем в  $k$ -пространство и учтем дифракцию пучка при распространении между точками  $z$  и  $z + \frac{\Delta z}{2}$ :

$$\tilde{E} \left( k_x, k_y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = \mathcal{F} [E(x, y, z)] \cdot e^{\frac{i(k_x^2 + k_y^2)(\frac{\Delta z}{2})}{2k_0}}, \quad (87)$$

где  $\mathcal{F}[\cdot]$  — операция преобразования Фурье, а  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число.

- Вернемся в физическое пространство и учтем случайные процессы взаимодействия с турбулентной средой посредством умножения профиля пучка на оператор  $e^{-i\hat{S}\Delta z}$ ,  $\hat{S} = \Delta n \cdot k_0$ :

$$E' \left( x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \tilde{E} \left( k_x, k_y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \cdot e^{-i\hat{S}\Delta z}. \quad (88)$$

- Наконец, учтем оставшуюся часть дифракционных эффектов:

$$\tilde{E} (x, y, z + \Delta z) = \mathcal{F} \left[ E' \left( x, y, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \cdot e^{\frac{i(k_x^2 + k_y^2)(\frac{\Delta z}{2})}{2k_0}}. \quad (89)$$

- Итоговое выражение для профиля поля в точке  $z + \Delta z$  получается посредством обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} E(x, y, z + \Delta z) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \tilde{E} (x, y, z + \Delta z) \right] = \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F} \left[ \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F} [E(x, y, z)] \cdot e^{\frac{i(k_x^2 + k_y^2)(\frac{\Delta z}{2})}{2k_0}} \right] \cdot e^{-i\hat{S}\Delta z} \right] \cdot e^{\frac{i(k_x^2 + k_y^2)(\frac{\Delta z}{2})}{2k_0}} \right]. \end{aligned} \quad (90)$$

Моделирование турбулентности производилось при помощи модифицированного спектра фон Кармана (MVKS) и метода тонких фазовых пластин (TPS), в рамках которых фазовый спектр мощности может быть записан, как

$$\Phi_p(k) = \frac{2L}{k_0 \omega_L^2} \cdot \frac{r_0^{\frac{5}{3}}}{(k^2 + k_0^2)^{\frac{11}{6}}} \cdot e^{-\frac{k^2}{k_m^2}}, \quad (91)$$

где  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  — пространственное волновое число,  $k_m$  — эмпирический параметр аппроксимации,  $\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L\lambda}{\pi\omega_0^2}\right)^2}$  — ширина пучка в конце расстояния распространения,  $r_0$  — параметр Фрида, в рамках нашего моделирования вычисляемый по формуле

$$r_0 = \frac{r_{model}}{\left(\lambda \frac{2\pi}{\Delta h}\right)^{\frac{5}{6}}}, \quad (92)$$

где  $r_{model}$  — подстроечный параметр моделирования,  $\Delta h$  — шаг моделирования на пространственной сетке.

Для моделирования распространения пучка в турбулентной среде были выбраны следующие параметры моделирования:

- длина волны  $\lambda = 632.8$  нм;
- размер пространственной сетки  $S = 11 \times 11$  мм<sup>2</sup>;
- сетка пикселей  $N = 1024 \times 1024$ ;
- ширина пучка в перетяжке  $\omega_0 = 1.5$  мм;
- параметр Фрида  $r_0 = [0.0012; 0.00012; 0.00024]$ , что соответствует слабой, средней и сильной турбулентностям;
- расстояние распространения  $L = 100$  м;
- число тонких фазовых экранов  $TPS = 10$ .