

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Физический факультет

Кафедра общей физики 1

Медведев Алексей Геннадьевич

Выпускная квалификационная работа

Стабилизация конденсата Бозе-Эйнштейна в потенциалах произвольной формы

Уровень образования: Магистратура

Направление 03.04.01. «Прикладные математика и физика»

Основная образовательная программа ВМ.5510. «Прикладные физика и математика»

Научный руководитель:

к. ф.-м. наук, доцент СПбГУ

Иванов Денис Анатольевич.

Рецензент:

профессор, доктор ф.-м. наук,

профессор СПбПУ

Соколов Игорь Михайлович.

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

Глава 1. Введение.	3
Глава 2. Уравнение Гросса-Питаевского.	7
Глава 3. Процедура измерения.	10
Глава 4. Математическая модель управляемого БЭК.	13
4.1. Получение волновых функций основного состояния.	13
4.2. Вывод линеаризованного уравнения для управляемого БЭК.	15
4.3 Вывод нелинейного уравнения эволюции.	20
Глава 5. Результаты численного моделирования.	23
5.1. Моделирование линеаризованной задачи.	23
5.2. Численное моделирования нелинейного уравнения эволюции.	31
Глава 6. Заключение.	36
Приложение А.	37
Приложение Б.	39
Приложение В.	41
Используемая литература.	42

Глава 1. Введение.

История Бозе-Эйнштейновского конденсата берет свое начало в 1924 году, когда в журнале *Zeitschrift für Physik* вышла статья Шатъендраната Бозе [1], в которой он разработал метод вывода излучения абсолютно черного тела без какой-либо ссылки на классическую физику. И в 1925 году, на основе метода, описанного Бозе, Эйнштейн теоретически предсказал существование Конденсата Бозе — Эйнштейна [2]. Как итог, появилась концепция бозе-газа, описывающая статистическое распределение тождественных частиц с целочисленным спином, бозонов. Одним из выводов теории бозе-газа является существование фазового перехода при конечной, хотя и очень малой, температуре, при которой макроскопическая часть атомов собирается в основном состоянии. Этот переход получил название конденсации Бозе-Эйнштейна.

Однако долгое время БЭК атомов оставался сугубо теоретической материей, потому что на практике не существовало инструментов, способных продемонстрировать его в лаборатории. Первым крупным шагом на пути реализации конденсата Бозе-Эйнштейна можно считать появление лазерного охлаждения в 1975 году, когда вышла статья Хэнша и Шавлова [3], где давалось теоретическое описание того, как можно с помощью лазерного света довести ансамбль атомов до температур, порядка сотен микрокельвинов. Идея метода заключалась в следующем: тщательно подбирая лазерный свет с красной отстройкой относительно конкретно выбранного атомного перехода можно добиться поглощения из-за эффекта Доплера. Испущенный затем фотон обладает большей энергией, чем поглощенный. Избыток берется из кинетической энергии атомов, что приводит к охлаждению ансамбля.

Примерно тогда же, Демельт и Вайнленд, независимо от Хэнша и Шавлова пришли к пониманию того, что лазерное излучение позволяет понижать энергию захваченных ионов, и процесс лазерного (доплеровского) охлаждения был впервые показан на захваченных электрическими полями ионах [4]. Ограничением охлаждения в данном случае является тот факт, что из-за кулоновского взаимодействия, нельзя одновременно охлаждать слишком большое произвольное количество частиц в некотором заранее заданном объеме.

И в 1985 Стивен Чу со своей группой впервые продемонстрировали экспериментальную реализацию трехмерного лазерного охлаждения методом резонансного излучения [5]. Они использовали три пары ортогональных друг

другу встречно-распространяющихся лазерных пучков, которые и охлаждали облако атомов натрия в конфигурации, названной оптической патокой.

Примерно параллельно с ними, Меткальф и Филлипс продемонстрировали захват нейтральных атомов с помощью квадрупольного магнитного поля [6]. В данной работе была впервые продемонстрирована магнитооптическая ловушка (МОЛ), которая является объединением оптической патоки и магнитного захвата.

В нашей стране вопросы механического действия света на атомы также активно изучались. В 1986 году Миногин В.Г. и Летохов В.С. в своей книге [7] изложили теорию движения частиц под действием давления резонансного лазерного излучения и рассмотрели применения резонансного светового давления в экспериментальной физике. В их работе даны основные соотношения для радиационной силы, действующей на атомные частицы в поле резонансного излучения, и рассмотрены особенности светового давления для полей различной пространственно-временной структуры.

В 1997 за вклад в теоретическое описание и экспериментальную реализацию лазерного охлаждения, Стивен Чу, Клод Коэн-Таннуджи и Уильям Филлипс получили Нобелевскую премию по физике [8].

Возвращаясь к БЭК, одного лазерного охлаждения для достижения состояния конденсата Бозе-Эйнштейна, оказалось недостаточно. БЭК основана на слабозаимодействующих частицах, однако в данном случае есть трудность, возникающая из-за того, что повторное поглощение и испускание фотонов не позволяет достигнуть в МОЛ температур, необходимых для перехода в квантово-вырожденный режим.

Однако эта проблема решалась тем, что атомы помещали в специальные магнитные ловушки, в которых нет повторного поглощения света, и для охлаждения облака атомов после использования лазерного охлаждения применяли метод испарительного охлаждения. Согласно этому методу, следует удалять из ловушки наиболее «горячие» атомы, тогда оставшиеся в ней атомы, могут повторно термализоваться при меньшей температуре. В 1995 году были впервые был использован данный метод охлаждения, его применили на атомах рубидия и натрия, и за эти первые экспериментальные реализации Бозе-Эйнштейновских конденсатов в 2001 году Эрик Корнелл, Карл Виман и Вольфганг Кеттерле получили Нобелевскую премию по физике [9].

Для управления самыми разными динамическими системами с успехом используют обратную связь [10]. Управление с обратной связью является очень полезным инструментом в случаях, когда необходимо изменять динамику, не только для классических [11], но и для квантовых систем [12]. Было множество теоретических предложений [13]-[23] и несколько экспериментальных реализаций [24]-[28] квантового управления с обратной связью в оптике и атомной физике.

Однако у управления квантовыми системами с обратной связью есть принципиальное отличие от управления классическими системами, которое заключается в неизбежности обратного воздействия измерения [29]. Этот эффект необходимо учитывать при разработке алгоритмов квантового управления с обратной связью, но в большинстве случаев этот квантовый эффект не создает серьезных ограничений на возможность проведения управления с обратной связью [30].

Недавно метод обратной связи был предложен в качестве инструмента для управления фазовыми переходами в квантовых системах [31] и, в частности, в системах многих тел [23], [32]. Также удалось экспериментально продемонстрировать возможность управления атомной самоорганизацией, используя метод обратной связи [33]. Таким образом, был представлен новый класс фазовых переходов с обратной связью (ФПОС), эти фазовые переходы могут обладать некоторыми свойствами, выходящими за рамки диссипативных фазовых переходов в открытых системах.

Кроме того, концепция ФПОС была применена к системе, основанной на брэгговском рассеянии света от конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК) [10]. Здесь система с активной обратной связью обеспечивает гораздо более высокую степень контроля над распределением атомов по сравнению с системами без обратной связи. Такая улучшенная управляемость может помочь в квантовых симуляциях, основанных на ультрахолодных квантовых газах.

Стоит отметить, что подобный механизм самоорганизации был исследован для атомов, соединенных с оптической полостью [34]-[47]. Также были предложения по усилению самоорганизации полости путем применения некогерентной [48],[49] и когерентной [50],[51] обратной связи.

Однако несмотря на это, остается еще множество вопросов, нераскрытых в опубликованных ранее работах, и количество публикаций на тему конденсата Бозе-Эйнштейна продолжает неуклонно расти.

В связи с этим задачи управления конденсатом, стабилизации конденсата в заданных состояниях и перевод конденсата из одного состояния в другое, являются очень актуальными. Из алгоритмов обратной связи в технике широко применяются так называемые PID-регуляторы [52]. То есть алгоритмы, использующие для управления величину измеряемого сигнала, производную этой величины и ее интеграл с различными весами. Обычно, подбором параметров PID-регулятора удается получить необходимые режимы управления. Задачей данной работы является выяснение принципиальной возможности стабилизации конденсата в основном состоянии потенциала сложной формы с помощью PID-алгоритма.

Глава 2. Уравнение Гросса-Питаевского.

Основным уравнением, описывающим Бозе-Эйнштейновский конденсат в квазиклассическом приближении, является уравнение Гросса-Питаевского, которое было получено независимо друг от друга Е.П. Гроссом [53] и Л.П. Питаевским [54] в 1961 году. Рассмотрим вывод уравнения Гросс-Питаевского. Ввиду того, что невзаимодействующий Бозе-газ является слишком идеализированной системой, которая сильно зависит от граничных условий и часто приводит к крайне не физическим результатам [53], необходимо сразу ввести взаимодействие между частицами. Тогда гамильтониан такой системы в случае одномерного газа имеет представленный ниже вид:

$$\hat{H} = \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\psi} + \frac{1}{2} \int V(|x - x'|) \hat{\psi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{\psi}_1 \hat{\psi} dx' \right] dx, \quad (2.1)$$

$$[\hat{\psi}(x'), \hat{\psi}^+(x)] = \delta(x - x'), \quad (2.2)$$

здесь $\hat{\psi}$ – оператор поля, удовлетворяющий стандартным коммутационным соотношениям для Бозе-частиц.

В качестве взаимодействия между атомами взяты слабые парные отталкивания. Также пусть рассматриваемый потенциал – короткодействующий, а также газ достаточно разреженный, то есть $l \ll r_0$, где l – диапазон действия потенциала, а r_0 – расстояние между частицами и энергия частиц мала. В таком случае, оператор взаимодействия между частицами является точечным, то есть

$$V(x - x') = 2g\delta(x - x'), \quad (2.3)$$

где $g(x, t)$ – константа взаимодействия. Тогда гамильтониан примет следующий вид:

$$\hat{H} = \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\psi} + g \hat{\psi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{\psi} \hat{\psi} \right] dx. \quad (2.4)$$

Перейдем в представление Гейзенберга. Тогда при переходе от представления Шредингера к представлению Гейзенберга произвольный самосопряженный оператор \hat{A} изменится следующим образом:

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}, \quad (2.5)$$

тогда дифференцированием по времени выражения (2.5) можно получить уравнение Гейзенберга вида:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H]. \quad (2.6)$$

Отсюда, заменив в выражении (2.6) произвольный оператор на введенный ранее, согласно выражению (2.2), оператор поля, для гамильтониана (2.4) получаем выражение ниже:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\psi} + g \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi}, \quad (2.7)$$

Теперь получим уравнение Гросса-Питаевского. Оператор поля можно представить в следующем виде:

$$\hat{\psi} = \psi_0 + \delta\hat{\psi}, \quad (2.8)$$

где ψ_0 – неоператорная волновая функция конденсата, а $\delta\hat{\psi}$ – малая операторная поправка к ней такая, что $\psi_0 \gg \langle \delta\psi \rangle$. Для когерентного состояния, малой операторной поправкой можно пренебречь и тогда подставляя (2.8) в (2.7) и объединяя члены нулевого порядка, получаем:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_0 + g |\psi_0|^2 \psi_0. \quad (2.9)$$

Это и есть уравнение Гросс-Питаевского. Однако в более общем виде, если не пренебрегать малой поправкой и написать уравнение для нее – получим более общую квантовомеханическую теорию Боголюбова

Теперь учтем, что волновая функция имеет следующий вид зависимости от времени в стационарном состоянии $\psi_0 \sim e^{-i\mu t}$, где μ – химический потенциал атома. Тогда:

$$-i\mu \tilde{\psi}_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\psi}_0 + g |\tilde{\psi}_0|^2 \tilde{\psi}_0 = 0. \quad (2.10)$$

Хотя уравнение (2.9) является уравнением движения для конденсата Бозе-Эйнштейна и может правильно описывать динамику конденсата, однако, в этом уравнении не хватает еще одного слагаемого. Все дело в том, что в таком виде уравнение было получено еще задолго до того, как удалось наблюдать первый БЭК. Получить атомарный БЭК оказалось возможным только в специально созданных ловушках, которые оказались способны удовлетворить двум необходимым условиям получения конденсата: обеспечить очень низкую температуру и одновременно относительно высокую плотность охлажденных атомов. Соответственно, в уравнении (2.9), как и в уравнении (2.10) не хватает слагаемого, описывающего потенциал ловушки, в котором находится конденсат. Таким образом, учитывая все вышесказанное, уравнения (2.9) и (2.10) примут вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V_{ext} \psi + g \psi^* \psi \psi, \quad (2.11)$$

$$-\mu \widetilde{\psi}_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \widetilde{\psi}_0 + V_{ext} \widetilde{\psi}_0 + g |\widetilde{\psi}_0|^2 \widetilde{\psi}_0 = 0, \quad (2.12)$$

где V_{ext} – удерживающий потенциал ловушки.

Глава 3. Процедура измерения.

Важной составляющей схемы управления является процедура измерения плотности конденсата. Так что теперь обсудим вопрос реализации измерения плотности конденсата. Так как измерять систему предполагается непрерывно, то необходимо минимизировать обратное воздействие измерения. Значит для измерения нужно использовать нерезонансный свет и помещать атомы в резонатор для увеличения взаимодействия. Обсудим основные этапы описания взаимодействия ансамбля 2-х уровневых атомов с полями оптических резонаторов следуя работе [55]. Рассмотрим следующий одночастичный гамильтониан:

$$H^{(1)} = H_a^{(1)} + H_R^{(1)} + H_{Int}^{(1)}, \quad (3.1)$$

$$H_a^{(1)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_e(x)\sigma^+\sigma^- + V_g(x)\sigma^-\sigma^+ - \hbar\Delta_a\sigma^+\sigma^- - i\hbar h(x)(\sigma^+ - \sigma^-), \quad (3.2)$$

$$H_R^{(1)} = -\hbar\Delta_c a^+ a - i\hbar\eta(a - a^+), \quad (3.3)$$

$$H_{Int}^{(1)} = -i\hbar g(x)(\sigma^+ a - \sigma^- a^+). \quad (3.4)$$

Здесь $h(x)$ обозначает модовую функцию поля поперечной накачки, $g(x)$ — обозначает модовую функцию резонатора, а оператор поля a описывает уничтожение фотона резонатора с частотой ω_c . $V_e(x)$ и $V_g(x)$ являются внешними потенциалами захвата для атома в возбужденном и в основном состояниях, соответственно, $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$, $\Delta_a = \omega_p - \omega_{eg}$, — обозначает отстройку частоты резонатора и частоты атомного перехода от частоты поля накачки.

H_a моделирует свободную эволюцию атомной переменной. Во вторично квантованном виде ее можно записать следующим образом:

$$H_a = \int d^3x [\Psi_g^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_g(x) \right) \Psi_g(x) + \Psi_e^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \hbar\Delta_a + V_e(x) \right) \Psi_e(x)], \quad (3.5)$$

где $\Psi_g(x)$ и $\Psi_e(x)$ обозначают операторы атомного поля для уничтожения атома в точке x в основном состоянии и возбужденном состоянии соответственно. Они подчиняются обычным коммутационным соотношениям для бозонных полей.

Используя гамильтониан (3.4), получим уравнения Гейзенберга для операторов поля. Начнем с оператора для возбужденного состояния:

$$\dot{\Psi}_e(x) = i \left[\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{V_e(x)}{\hbar} + \Delta_a \right] \Psi_e(x) - (g(x)a + h(x))\Psi_g(x). \quad (3.6)$$

Первый член соответствует свободной эволюции атомного состояния, тогда как второй член описывает поглощение фотона резонатора или фотона накачки вместе с уничтожением атома основного состояния. Аналогично, уравнение для оператора основного состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_g(x) = i \left[\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{V_g(x)}{\hbar} - \frac{U}{\hbar} \Psi_g^+(x)\Psi_g(x) \right] \Psi_g(x) + \\ + (g(x)a^+ + h(x))\Psi_e(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Наконец, уравнение Гейзенберга для оператора резонаторного поля задается формулой:

$$\dot{a} = i\Delta_c a + \eta + \int d^3x g(x)\Psi_g^+(x)\Psi_e(x). \quad (3.8)$$

Опять же, первый член соответствует эволюции свободного поля, второй описывает возможную продольную накачку, а третий — изменения поля резонатора за счет рассеяния света на атомах.

Как уже упоминалось, нужно минимизировать нагрев ансамбля за счет спонтанного излучения и обеспечить слабое возбуждение атомов. Это достигается использованием больших отстроек. В этом пределе можно адиабатически исключить возбужденные состояния из динамики рассматриваемой системы. Для больших отстроек атомной накачки Δ_a можно пренебречь кинетической энергией и потенциалом захвата в (3.6). Пренебрегая также производной оператора поля атомов в возбужденном состоянии, можно получить:

$$\Psi_e(x, t) = -\frac{i}{\Delta_a} [h(x) + g(x)a(t)]\Psi_g(x, t). \quad (3.9)$$

Подставляя это выражение в (3.7) и (3.8) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_g(x) = i \left[\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{V_g(x)}{\hbar} - \frac{U}{\hbar} \Psi_g^+(x)\Psi_g(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Delta_a} (h^2(x) + h(x)g(x)(a^+ + a) + g^2(x)a^+a) \right] \Psi_g, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\dot{a} = \eta + i \left[\Delta_c - \frac{1}{\Delta_a} \int d^3x g^2(x) \Psi_g^+(x) \Psi_g(x) \right] a - \frac{i}{\Delta_a} \int d^3x h(x) \Psi_g^+(x) \Psi_g(x), \quad (3.11)$$

где модовая функция линейного резонатора $g(x) = \cos(kx)$. Из уравнения (3.10) видно, что, измеряя, например, квадратуру поля резонатора можно определить Фурье-компоненту плотности атомов с пространственной частотой k . Если взять множество резонаторов под разными углами к оси конденсата, как показано на рисунке 1, то можно определить набор Фурье-компонент и по ним восстановить плотность. Представленное описание является лишь концепцией слабовозмущающего измерения плотности конденсата. Вопросы практической реализации такого измерения требуют детальной проработки и здесь не затрагиваются.

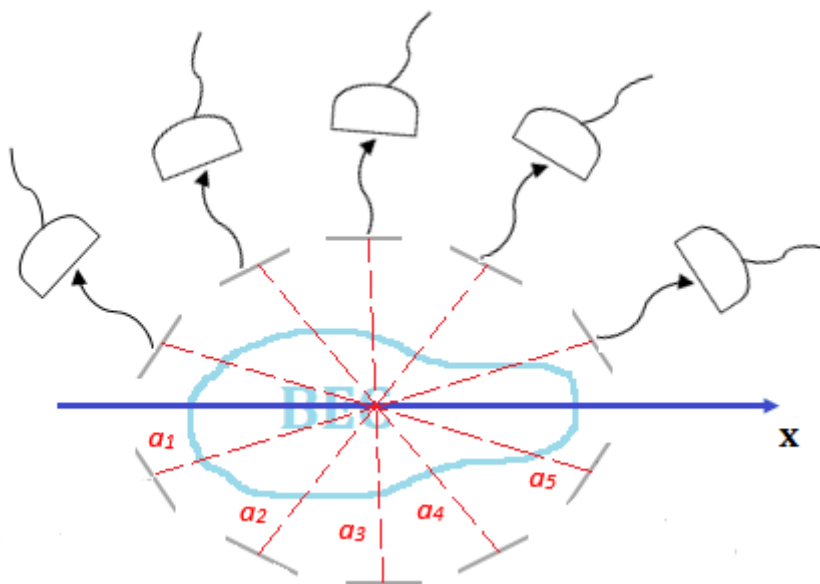


Рис. 1. Схема детектирования Бозе-Эйнштейновского конденсата.

Глава 4. Математическая модель управляемого БЭК.

Для решение поставленной задачи, необходимо будет численно решать систему дифференциальных уравнений, основанных на уравнении Гросса-Питаевского, с правильно подобранными параметрами. Далее будет последовательно показано, как находятся волновые функции основного состояния и получаются уравнения эволюции.

4.1. Получение волновых функций основного состояния.

Для того, чтобы численно найти волновые функции основного состояния предлагается воспользоваться методом распространения в мнимом времени (Imaginary time propagation method) [56]. Так как практически не существует таких систем, для которых можно найти волновую функцию основного состояния прямой диагонализацией гамильтониана, то можно применить вот такой трюк, который позволяет получить с произвольной точностью аппроксимацию волновой функции основного состояния. Основная идея этого метода заключается в том, чтобы подставить вместо реального времени – мнимое время в уравнении Гросса-Питаевского. Соответственно, полученная таким образом эволюция в мнимом времени приводит к экспоненциальному затуханию всех состояний, но основное состояние затухает сильно медленнее, чем остальные. В качестве начального состояния может быть выбрана произвольная функция, удовлетворяющая стандартным квантово-механическим требованиям для волновых функций, и таким образом можно будет вычислить приближение к фактическому основному состоянию [57].

Рассмотрим более подробно данный метод в случае временного уравнения Гросса-Питаевского. Для начала запишем само уравнение в явном виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V_{ext} \psi + g \psi^* \psi \psi. \quad (4.1.1)$$

Теперь, произведем замену реального времени на мнимое:

$$\tau = it, \quad (4.1.2)$$

тогда имеем:

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - V_{ext} \psi - g \psi^* \psi \psi. \quad (4.1.3)$$

Для того, чтобы наглядно продемонстрировать работу метода, представим волновую функцию ψ как сумму собственных функций нелинейного гамильтониана, где каждой собственной функции ψ_i соответствует некоторая энергия E_i :

$$\psi = \sum_i c_i \cdot \psi_i. \quad (4.1.4)$$

Тогда для каждой собственной функции уравнение Гросса-Питаевского в мнимом времени примет вид:

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_i - V_{ext} \psi_i - g \psi^* \psi \psi_i = -E_i \psi_i, \quad (4.1.5)$$

Решение этих эволюционных уравнений легко находится и имеет следующий вид:

$$\psi_i(\tau) = e^{-E_i \frac{i\tau}{\hbar}} \psi_i(0) \rightarrow 0. \quad (4.1.6)$$

Можно заметить, что при распространении вперед в мнимом времени все собственные функции затухают экспоненциально, а сама скорость затухания пропорциональна энергии состояния. И как можно увидеть из формулы ниже, все состояния, отличные от основного состояния с наименьшей энергией, а значит и скоростью затухания, будут вымирать экспоненциально быстро даже по сравнению с тем, как затухает основное состояние:

$$\frac{\psi_i(\tau)}{\psi_0(\tau)} \sim e^{-(E_i - E_0)\tau}. \quad (4.1.7)$$

Подставим полученное решение для собственных функций в формулу (4.1.4):

$$\psi = \sum_i c_i \cdot \psi_i(\tau) = \sum_i e^{-E_i \tau} \cdot c_i \cdot \psi_i(0). \quad (4.1.8)$$

Теперь, если устремить мнимое время к бесконечности и рассмотреть соответствующий предел, то можно увидеть, что в результате эволюции волновая функция становится все более и более "сонаправленной" с волновой функцией основного состояния. Наглядно это демонстрируется рассмотрением предела:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle c_0 \cdot \psi_0(\tau) | c_0 \cdot \psi_0(\tau) \rangle}{\langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{c_0^2 e^{-2E_0 \tau}}{c_0^2 e^{-2E_0 \tau} + \sum_{i=1} c_0^2 \cdot e^{-2E_i \tau}} = 1. \quad (4.1.9)$$

Поэтому, начиная с абсолютно любой волновой функции ψ в пределе большого мнимого времени, волновая функция станет пропорциональна волновой функции основного состояния с очень хорошей точностью:

$$\psi = c_0 e^{-H\tau} \cdot \psi_0(0) + O(e^{-(E_1 - E_0)\tau}). \quad (4.1.10)$$

Восстанавливая нормировку волновой функции в ходе эволюции, можно точно вычислить волновую функцию основного состояния, если перекрытие c_0

между нашей начальной волновой функцией и волновой функцией основного состояния не равно нулю:

$$\psi_0(0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle}}. \quad (4.1.11)$$

4.2. Вывод линеаризованного уравнения для управляемого БЭК.

Поиск решения сформулированной выше задачи управления ансамблем атомов было решено начать с анализа устойчивости модифицированного управлением уравнения Гросс-Питаевского. Под устойчивостью далее мы будем понимать устойчивость по Ляпунову. Смысл проверки на устойчивость заключается в том, чтобы установить, возможно ли хотя бы теоретически, стабилизировать ансамбль частиц в основном состоянии некоторого заранее выбранного потенциала за счёт управления. В виду многократно возрастающей сложности проверки устойчивости для нелинейных систем, анализ будет проводиться для линеаризованных уравнений [58]. Таким образом, анализ будет справедлив лишь для малых отклонений от стационарного решения. Наиболее очевидный подход к анализу устойчивости уравнения в частных производных — это дискретизация по пространственным переменным и сведение к задаче анализа устойчивости системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В линейном приближении анализ устойчивости сведётся к анализу спектра матрицы Якоби. Если найти все собственные значения этой матрицы, то в случае, если все вещественные части этих собственных значений будут отрицательными, анализируемое решение будет устойчиво [59]. Соответственно, задача сводится к поиску таких параметров динамической системы, для которых получающаяся система уравнений будет соответствовать критерию выше.

Итак, в качестве отправной точки используем уравнение (2.11). Только теперь рассматриваем динамику ансамбля частиц в окрестности основного состояния в некотором произвольном потенциале, форма которого изменяется со временем в соответствии с выбранным алгоритмом управления.

Теперь исходим из двух предположений. Первое, что потенциалом конденсата можно локально управлять с помощью механизма обратной связи. Т.е. значение потенциала можно представить в виде $\tilde{V}_{ext}(x, t) = V_0(x) + \delta V(x, t)$, где функция управления δV не обязательно локальна во времени. Второе, это упомянутое ранее условие, что волновая функция конденсата лишь немного отклоняется от основного состояния в потенциале $V_0 - \psi_0$, то есть $\psi =$

$= (\psi_0 + \delta\psi)e^{-i\mu t/\hbar}$, где $|\psi_0| \gg |\delta\psi|$. Однако, поскольку управление строится на измерении отклонения плотности БЭК от желаемого основного состояния, оно обязательно имеет порядок $\delta\psi$.

Поскольку уравнение Гросса-Питаевского является нелинейным уравнением в частных производных, необходимо провести его линеаризацию. Учитывая предположения выше, получаем:

$$i\hbar \frac{\partial[(\psi_0 + \delta\psi)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}]}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_0 + \delta\psi)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} + (V_0 + \delta V)(\psi_0 + \delta\psi)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} + g|\psi_0 + \delta\psi|^2(\psi_0 + \delta\psi)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}. \quad (4.2.1)$$

Посчитаем отдельно левую часть. Производная по времени от первого множителя будет отлична от нуля только для малой добавки, так как ψ_0 – волновая функция основного состояния и от времени не зависит. Следовательно,

$$i\hbar \frac{\partial[(\psi_0 + \delta\psi)e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}]}{\partial t} = (i\hbar\dot{\delta\psi} + \mu(\psi_0 + \delta\psi))e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}}. \quad (4.2.2)$$

Для правой части получим:

$$\begin{aligned} \text{П. ч.} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta\psi + V_0\psi_0 + \delta V\psi_0 + (V_0 + \delta V)\delta\psi + \\ & + g|\psi_0|^2\psi_0 + g(\psi_0\delta\psi_0^* + \psi_0^*\delta\psi_0 + |\delta\psi|^2)\psi_0 + \\ & + g|\psi_0 + \delta\psi|^2\delta\psi. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Используя стационарное уравнение Гросса-Питаевского для основной части потенциала и пренебрегая слагаемыми высших порядков по малой добавке, получим:

$$i\hbar\dot{\delta\psi} = -\mu\delta\psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta\psi + V_0\delta\psi + \delta V\psi_0 + g(\psi_0^2\delta\psi^* + |\psi_0|^2\delta\psi) + g|\psi_0|^2\delta\psi. \quad (4.2.4)$$

Для упрощения дальнейшего численного анализа динамики возмущений введем атомарные квадратуры следующим образом:

$$X_0 = \frac{\psi_0 + \psi_0^*}{2}, \quad (4.2.5)$$

$$Y_0 = \frac{\psi_0 - \psi_0^*}{2i}, \quad (4.2.6)$$

$$\delta X = \frac{\delta\psi + \delta\psi^*}{2}, \quad (4.2.7)$$

$$\delta Y = \frac{\delta\psi - \delta\psi^*}{2i}. \quad (4.2.8)$$

После замены переменных выражение (4.2.4) преобразуется, и примет вид, представленный ниже:

$$\begin{aligned} i\hbar(\delta\dot{X} + i\delta\dot{Y}) = & -\mu(\delta X + i\delta Y) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta X + i\delta Y) + V_0(\delta X + i\delta Y) + \\ & + \delta V(X_0 + iY_0) + g(\psi_0^2(\delta X - i\delta Y) + |\psi_0|^2(\delta X + i\delta Y)) + \\ & + g|\psi_0|^2(\delta X + i\delta Y). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Теперь можно разделить комплексное уравнение на систему из двух вещественных уравнений:

$$\begin{cases} \delta\dot{X} = \frac{1}{\hbar} \left(-\mu\delta Y - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + V_0\delta Y + \delta V Y_0 + \right. \\ \quad \left. + g(X_0^2 + 3Y_0^2)\delta Y + 2gX_0Y_0\delta X \right), \\ \delta\dot{Y} = \frac{1}{\hbar} \left(\mu\delta X + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X - V_0\delta X - \delta V X_0 - \right. \\ \quad \left. - g(3X_0^2 + Y_0^2)\delta X - 2gX_0Y_0\delta Y \right). \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Для удобства, зададим фазу ψ_0 так, что $Y_0 = 0$. Тогда система упростится и примет вид:

$$\begin{cases} \delta\dot{X} = \frac{1}{\hbar} \left(-\mu\delta Y - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + V_0\delta Y + gX_0^2\delta Y \right), \\ \delta\dot{Y} = \frac{1}{\hbar} \left(\mu\delta X + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X - V_0\delta X - \delta V X_0 - 3gX_0^2\delta X \right). \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Теперь стоит обсудить δV . Эту величину будем называть управлением, δV будет определяться на основе изменения плотности атомов.

В качестве управления возьмем наиболее общий – пропорционально-интегрально-дифференцирующий (PID) регулятор [52]. Влияние отдельных составляющих для рассматриваемой задачи будет изучаться позже. В случае такого регулятора, управление δV примет следующий вид:

$$\delta V = K_p \delta n(x, t) + K_i \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{t_0}} \delta n(x, \tau) d\tau + K_d \delta \dot{n}(x, t), \quad (4.2.12)$$

где K_p, K_i, K_d – это коэффициенты при пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулятора соответственно, τ – время

отклика цепи обратной связи, $\delta n(x, t) = 2(X_0 \delta X + Y_0 \delta Y)$. Тогда учитывая, что $Y_0 = 0$, имеем $\delta n(x, t) = 2X_0 \delta X$, следовательно, $\delta \dot{n}(x, t) = 2X_0 \delta \dot{X}$.

В таком случае выражение (4.2.12) можно переписать в виде:

$$\delta V = 2K_p X_0 \delta X + K_i \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{t_0}} 2X_0 \delta X d\tau + 2K_d X_0 \delta \dot{X}, \quad (4.2.13)$$

где введем отдельное обозначение для интеграла, как

$$\delta I = \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{t_0}} 2\delta X d\tau. \quad (4.2.14)$$

Теперь в системе уравнений появляется третье уравнение для величины δI , а сама система после всех преобразований выше примет вид:

$$\begin{cases} \delta \dot{X} = \frac{1}{\hbar} \left(-\mu \delta Y - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + V_0 \delta Y + g X_0^2 \delta Y \right), \\ \delta \dot{Y} = \frac{1}{\hbar} \left(\mu \delta X + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X - V_0 \delta X - \right. \\ \left. - X_0 (2K_p X_0 \delta X + X_0 K_i \delta I + 2K_d X_0 \delta \dot{X}) - 3g X_0^2 \delta X \right), \\ \delta \dot{I} = 2X_0 \delta X - \frac{\delta I}{\tau}. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$A = \frac{1}{\hbar} (-\mu + V_0). \quad (4.2.16)$$

Кроме того, для сокращения записи временно перестанем записывать третье уравнение системы (4.2.15) и перенесем все слагаемые с производной по времени в левую часть. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} \delta \dot{X} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + (A + g X_0^2) \delta Y, \\ \delta \dot{Y} + \frac{1}{\hbar} 2K_d X_0^2 \delta \dot{X} = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X - (A + 3g X_0^2) \delta X - \\ - \frac{1}{\hbar} X_0 (2K_p X_0 \delta X + K_i X_0 \delta I). \end{cases} \quad (4.2.17)$$

Заменяя производную квадратуры во втором уравнении на выражение из первого уравнения, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{X} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + (A + gX_0^2) \delta Y, \\ \delta\dot{Y} + \frac{1}{\hbar} 2K_d X_0^2 \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + (A + gX_0^2) \delta Y \right) = \\ = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X - (A + 3gX_0^2) \delta X - \frac{1}{\hbar} X_0 (2K_p X_0 \delta X + X_0 K_i \delta I) \end{array} \right. \quad (4.2.18)$$

Проводимый анализ не предполагает исследования классического предела, поэтому воспользуемся системой единиц с $\hbar = 1$. Тогда производим обратную замену (4.2.16), перегруппировываем слагаемые и получаем итоговый результат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{X} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + (-\mu + V_0 + gX_0^2) \delta Y, \\ \delta\dot{Y} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta X + (\mu - V_0 - 3gX_0^2 - 2K_p X_0^2) \delta X + \frac{K_d X_0^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta Y + \\ + (2K_d X_0^2 (\mu - V_0) - 2K_d X_0^4 g) \delta Y - X_0^2 K_i \delta I, \\ \delta\dot{I} = 2X_0 \delta X - \frac{\delta I}{\tau}. \end{array} \right. \quad (4.2.19)$$

Итак, окончательный вид система связанных уравнений примет после проведения процедуры дискретизации. Она будет проводится с помощью метода конечных разностей, в таком случае вместо $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$ получим $(\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1})/2d$, где d – длина шага по координатной сетке. Тогда,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{X}_i = -\mu \delta Y_i - \frac{1}{4md} (\delta Y_{i+1} - 2\delta Y_i + \delta Y_{i-1}) + V_0 \delta Y_i + gX_0^2 \delta Y_i, \\ \delta\dot{Y}_i = \frac{1}{4md} (\delta X_{i+1} - 2\delta X_i + \delta X_{i-1}) + (\mu - V_0 - 3gX_0^2 - 2K_p X_0^2) \delta X_i + \\ + \frac{K_d X_0^2}{4md} (\delta Y_{i+1} - 2\delta Y_i + \delta Y_{i-1}) + \\ + (2K_d X_0^2 (\mu - V_0) - 2K_d X_0^4 g) \delta Y_i - X_0^2 K_i \delta I_i, \\ \delta\dot{I}_i = 2X_0 \delta X - \frac{\delta I_i}{\tau}. \end{array} \right. \quad (4.2.20)$$

Финальное действие, это запись получившейся системы уравнений в матричной форме для того, чтобы применить к ней критерий проверки устойчивости решения линейной системы дифференциальных уравнений. Тогда в левой части получим вектор из производных по времени от всех приращений, имеющий вид: $\begin{pmatrix} \delta\dot{X} \\ \delta\dot{Y} \\ \delta\dot{I} \end{pmatrix}$, а в правой части получим аналогичный вектор из самих

приращений, соответственно $\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta I \end{pmatrix}$. Тогда коэффициентами

пропорциональности между этими двумя векторами выступит искомая матрица из слагаемых системы уравнений (4.2.23). Очевидно, что размерность каждого из приращений одинакова, примем ее равной N , тогда размерность матрицы будет равна $(3N \times 3N)$. О выборе величины N более подробно будет рассказано далее.

4.3 Вывод нелинейного уравнения эволюции.

Получим также полные нелинейные уравнения для численного исследования динамики управляемой системы. Вывод формул для описания нелинейной динамики в целом аналогичен случаю получения линеаризованных уравнений, однако, эти уравнения будут более общими. В качестве стартовой точки возьмем полученное ранее уравнение (2.11), только под V_0 теперь будем понимать потенциал, в котором требуется добиться стационарного состояния для конденсата, а δV – дополнительный управляемый потенциал, переводящий конденсат в стационарное состояние потенциала V_0 . Как и ранее, используем систему единиц, где $\hbar = 1$. Тогда динамическое уравнение Гросс-Питаевского перейдет в следующую систему уравнений для медленно меняющихся квадратур, связанных с волновой функцией конденсата следующим образом $\Psi = (X + iY) \exp(-i\mu t)$:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\mu Y - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y + V_0 Y + \delta V Y + g(X^2 + Y^2) Y, \\ \dot{Y} = \mu X + \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X - V_0 X - \delta V X - g(X^2 + Y^2) X. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Теперь введем управление в рассматриваемую модель. Уравнение для управления в общем аналогично уравнению в линейном приближении кроме того, что динамическая модель подразумевает переход из стационарного состояния одного потенциала в стационарное состояние другого потенциала, поэтому в этом уравнении разность между желаемым конечным состоянием и текущим распределением плотности не обязательно мала. Тогда выражение для дополнительного потенциала δV , названного управлением, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta V &= K_p(n - n_0) + K_i I + K_d \frac{d}{dt}(n - n_0) = \\ &= K_p(n - n_0) + K_i I + 2K_d(X\dot{X} + Y\dot{Y}), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где

$$I = \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} (n(t') - n_0) dt', \quad (4.3.3)$$

Для упрощения записи введем нелинейный потенциал:

$$\widetilde{V}_0 = -\mu - K_p(X_0^2 + Y_0^2) + V_0 + (g + K_p)(X^2 + Y^2) + K_i I, \quad (4.3.4)$$

Как и ранее, в решаемую систему надо добавить уравнение для переменной \dot{I} . В таком случае, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = \widetilde{V}_0 Y - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y + 2K_d(X\dot{X} + Y\dot{Y})Y, \\ \dot{Y} = -\widetilde{V}_0 X + \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X - 2K_d(X\dot{X} + Y\dot{Y})X, \\ \dot{I} = -\frac{I}{\tau} + (n - n_0). \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Временно перестанем записывать третье уравнение системы (4.3.5) и сосредоточимся на преобразовании первых двух уравнений. Тогда в первых двух уравнениях перенесем слагаемые с производными по времени в левую часть:

$$\begin{cases} \dot{X}(1 - 2K_dXY) - 2K_dY^2\dot{Y} = \widetilde{V}_0 Y - \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y, \\ \dot{Y}(1 + 2K_dXY) + 2K_dX^2\dot{X} = -\widetilde{V}_0 X + \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X. \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Решим теперь полученную систему уравнений относительно производных. После несложной алгебры получим следующие эволюционные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{X} = \widetilde{V}_0 Y - \frac{1 + 2K_dXY}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y + \frac{K_dY^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X, \\ \dot{Y} = -\widetilde{V}_0 X + \frac{(1 - 2K_dXY)}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{K_dX^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y. \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Дополним третьим уравнением систему из (4.3.5) и после обратной замены согласно выражению (4.3.4), получим окончательную систему, описывающую нелинейную динамику управляемого БЭК.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = (-K_p(X_0^2 + Y_0^2) - \mu + V_0 + (g + K_p)(X^2 + Y^2) + K_i I)Y - \\ \quad - \frac{1 + 2K_dXY}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y + \frac{K_d Y^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X, \\ \dot{Y} = -(-K_p(X_0^2 + Y_0^2) - \mu + V_0 + (g + K_p)(X^2 + Y^2) + K_i I)X + \\ \quad + \frac{(1 - 2K_dXY)}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{K_d X^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y, \\ \dot{I} = -\frac{I}{\tau} + (n - n_0). \end{array} \right. \quad (4.3.8)$$

Далее после конечно-разностной дискретизации пространственной производной эта система решается численно.

Глава 5. Результаты численного моделирования.

Перейдем к обсуждению технических деталей и результатов численного моделирования. Все численное решение математической модели управляемого БЭК производится с помощью языка программирования Julia.

Для нахождения волновых функций основного состояния с использованием метода распространения в мнимом времени используется пакет QuantumOptics.jl (непосредственно код, решающий эту задачу, можно найти в Приложении А). В результате пространственной дискретизации в расчетной области вводилась сетка из 256 узлов. Это значение было выбрано как результат компромисса. Оно обеспечивает достаточную гладкость представления решения и вместе с тем позволяет выполнить расчет на имевшемся в распоряжении персональном компьютере с оперативной памятью 8 Гб.

Для поиска собственных чисел в линеаризованной задаче в ходе численного решения использовался пакет LinearAlgebra.jl (код этого моделирования можно увидеть в Приложении Б). Поскольку размерность матрицы для выбранной сетки $3 \cdot 256 \times 3 \cdot 256$ довольно умеренная для современных компьютеров, для решения задачи на собственные значения использовался, основанный на QR разложении метод из библиотеки LAPACK. Этот метод позволяет найти все собственные значения матрицы.

Система из 768 дифференциальных уравнений нелинейной задачи решается с помощью пакета DifferentialEquations.jl. (код, моделирующий эту систему, можно найти в Приложении В). Особенностью данного пакета является возможность автоматического выбора метода решения. В частности, алгоритм может определить является ли система уравнений жесткой и использовать соответствующий численный метод. Графики, представляющие итоговые результаты строились в языке программирования Python с использованием библиотеки Matplotlib.

5.1. Моделирование линеаризованной задачи.

Перейдем к численному моделированию. Для параметров потенциала для анализа устойчивости выберем следующие значения $\omega_2 = 0.05$, $\omega_4 = 0.001$, $g = 1000$. Для численного решения использовались единицы с $m=1$. Первой моделируется линеаризованная задача для того, чтобы определить значения переменных управления, при которых возможно наблюдать устойчивость в линеаризованной задаче.

В качестве первого приближения рассматривался самый простой подход, который заключается в попытке перебора всех возможных значений переменных PID-регулятора, чтобы найти наилучшие значения переменных, при которых достигаются как можно меньшие отрицательные значения вещественных частей собственных чисел.

Ввиду ограничений вычислительной мощности используемого персонального компьютера, слишком большие диапазоны значений всех переменных взять не удастся, поэтому в моделировании анализировались случаи с целочисленными значениями переменных от 0 до 10 включительно (для параметра τ от 1 до 10). Однако в ходе такого исследования, даже для самых лучших параметров из указанного диапазона, несмотря на то что все действительные части для таких случаев отрицательны, их абсолютные значения отличаются от нуля примерно на порядок ошибки, поэтому строго говорить об устойчивости для представленных параметров нельзя. Кроме того, в ходе моделирования по представленному выше подходу, выяснилось, что при столь малых различиях между значениями переменных (в диапазоне от 0 до 10) значение действительных частей собственных чисел меняется незначительно, поэтому в дальнейшем анализ линеаризованной задачи будет проводиться следующим образом: для каждого из трех компонентов PID-регулятора по отдельности при нулевых значениях остальных компонентов, будет анализироваться полученный спектр матрицы.

Изучим влияние пропорциональной части регулятора, положив K_i и K_d равными нулю. Заранее очевидно, что одна только пропорциональная часть не сможет обеспечить устойчивость. Простой анализ указывает на то, что пропорциональная часть лишь перенормирует константу взаимодействия в уравнении Гросса-Питаевского. Численные решения задачи на собственные значения дискретной линеаризованной системы, представленные на рисунке 2

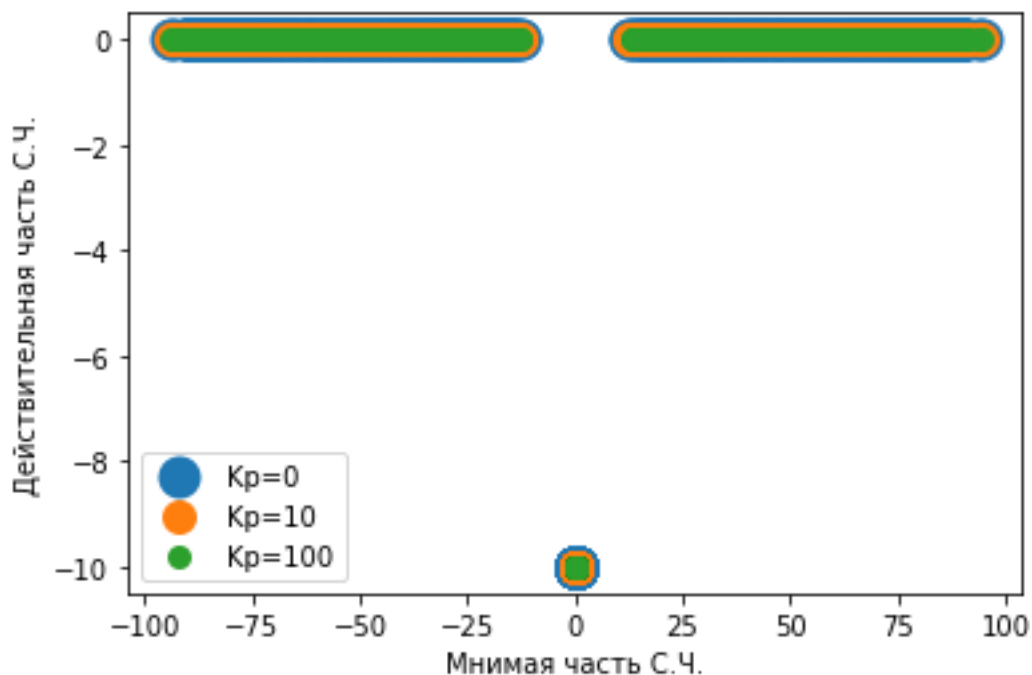


Рис.2. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от пропорциональной компоненты PID-регулятора при $K_p = 0$ (синим цветом), $K_p = 10$ (оранжевый), $K_p = 100$ (зеленый). Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

для случаев $K_p = 0$, $K_p = 10$, $K_p = 100$, практически совпадают. Действительная часть большего числа собственных чисел в этих случаях принимают очень малые положительные значения (учитывая ошибки округления их можно считать нулями). Существенно отрицательными оказываются действительные части только тех С.Ч., мнимая часть которых очень мала, то есть отвечающие низкочастотным колебаниям. Таким образом, введение пропорционального управления, как ожидалось, не обеспечивает устойчивости. Отрицательные значения K_p приводят к тому же результату с похожими значениями собственных чисел, что видно на рисунке 3.

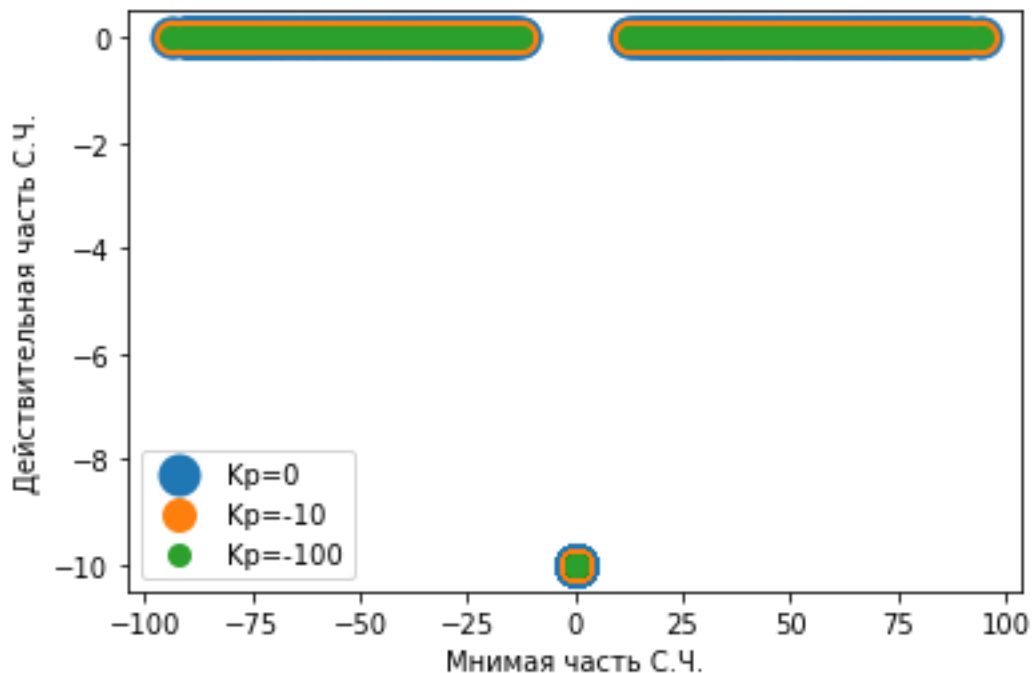


Рис. 3. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от пропорциональной компоненты PID-регулятора при $K_p = 0$ (синим цветом), $K_p = -10$ (оранжевый), $K_p = -100$ (зеленый). Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

Рассмотрим теперь отдельно влияние дифференциального управления. На рисунке 4 представлены действительные части собственных чисел динамической системы для $K_d = 10$, $K_d = 100$ и $K_d = 500$. Остальные компоненты PID-регулятора равны нулю.

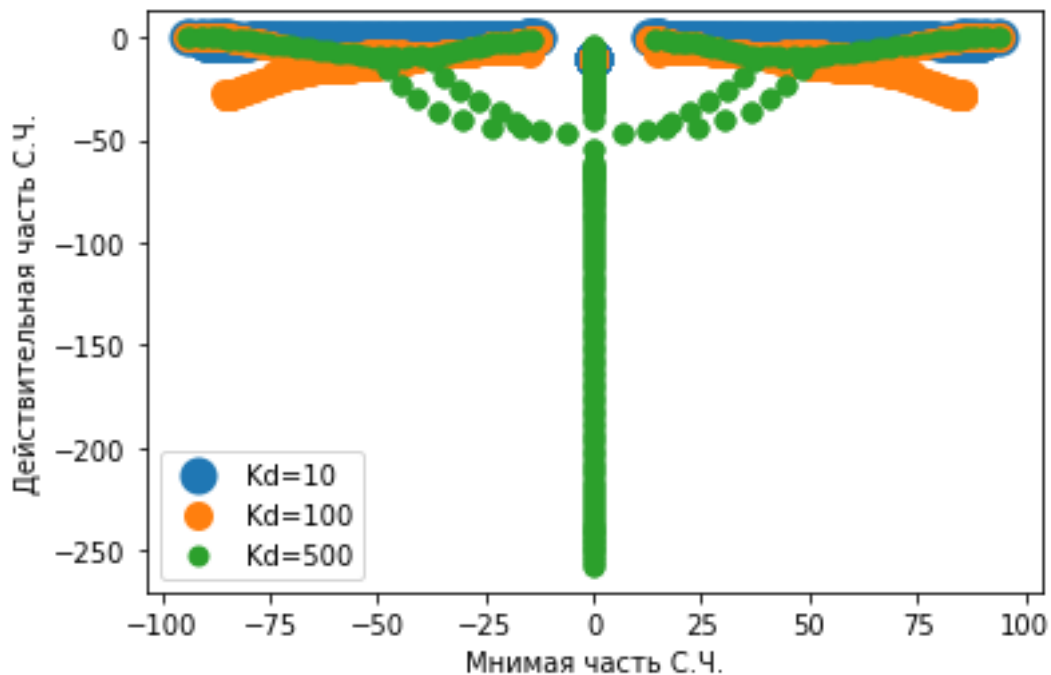


Рис. 4. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от дифференциальной компоненты PID-регулятора при $K_d = 10$ (синим цветом), $K_d = 100$ (оранжевый), $K_d = 500$ (зеленый).

Во всех этих случаях все собственные числа имеют отрицательные действительные части. Максимальные действительные части довольно близки к нулю, но отличаются от нуля на величину, превосходящую ошибку округления. При этом, чем больше значение дифференциальной компоненты, тем меньше получаются значения вещественных частей собственных чисел. Для представленных величин разница примерно на один порядок для соседних значений K_d . Для $K_d = 500$ максимальное значение действительной части собственных чисел равно примерно $-3 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, дифференциальное управление, играя роль вязкости, позволяет обеспечить требуемую устойчивость. Обратим внимание на то, что дифференциальное управление наиболее эффективно подавляет возмущения с частотами в средней части спектра, в то время как очень низкочастотные и самые высокочастотные демпфируются наименее эффективно.

Рассмотрим отрицательные значения K_d .

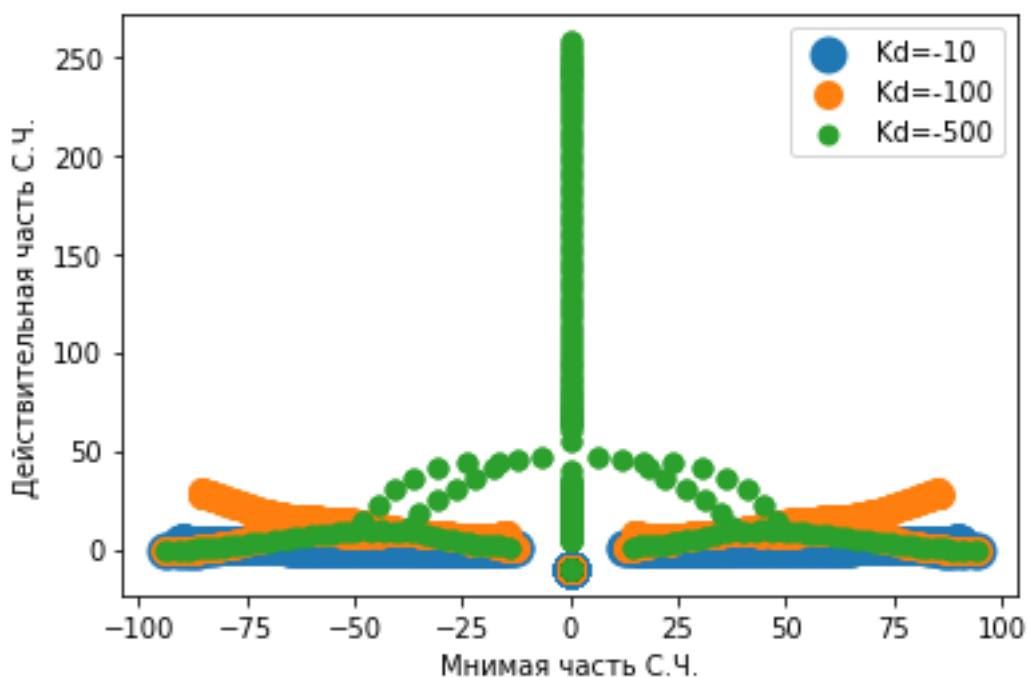


Рис. 5. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от дифференциальной компоненты PID-регулятора при $K_d = -10$ (синим цветом), $K_d = -100$ (оранжевый), $K_d = -500$ (зеленый).

Они приводят к качественно обратной картине. Возникают собственные числа с положительной действительной частью и, соответственно, делают динамическую систему неустойчивой.

Изучим теперь влияние интегрального управления, положив K_p и K_d равными нулю. Для интегрального управления помимо величины обратной связи K_i определен параметр τ – время интегрирования. Характерные времена эволюции системы зависят от разных параметров, а значит универсального масштаба для τ не существует. В ходе численного моделирования были испробованы различные значения и ниже приводятся результаты для трех характерных значений при $\tau = 1$ (рисунок 6), $\tau = 10$ (рисунок 7), и $\tau = 100$ (рисунок 8).

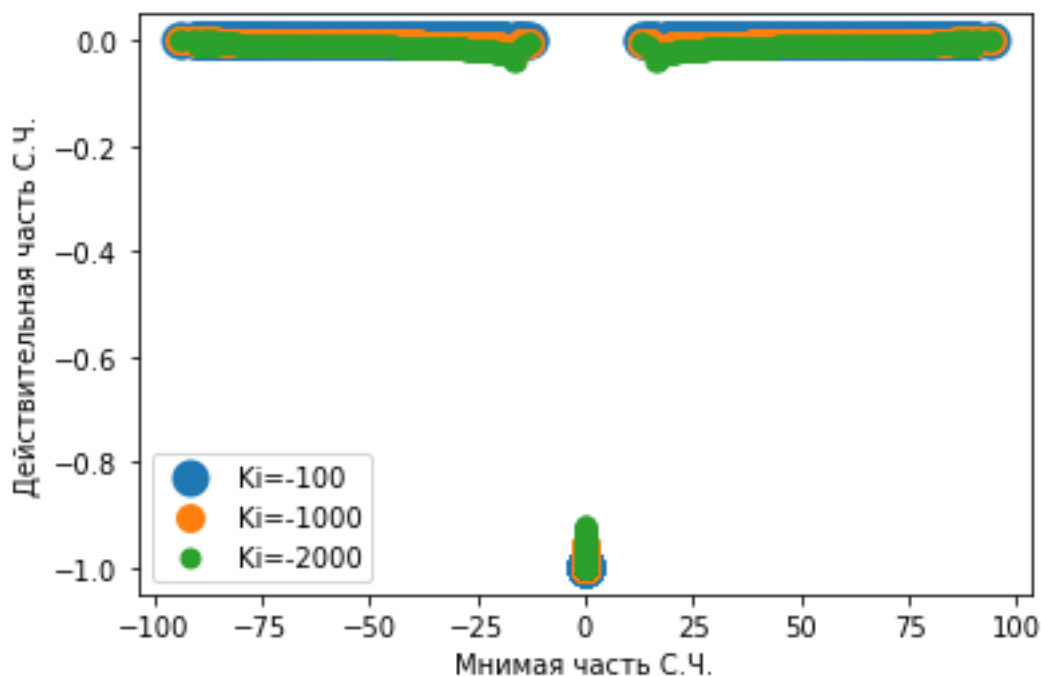


Рис. 6. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от интегральной компоненты PID-регулятора при $K_i = -100$ (синим цветом), $K_i = -1000$ (оранжевый), $K_i = -2000$ (зеленый) для случая $\tau = 1$. Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

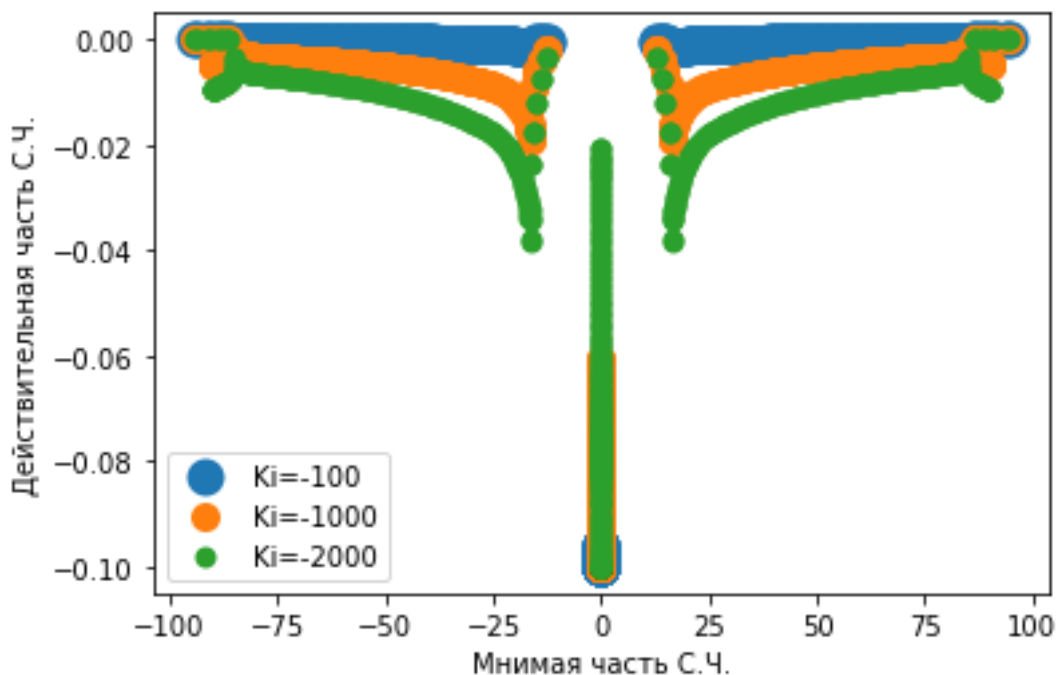


Рис. 7. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от интегральной компоненты PID-регулятора при $K_i = -100$ (синим цветом), $K_i = -1000$ (оранжевый), $K_i = -2000$ (зеленый) для случая $\tau = 10$. Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

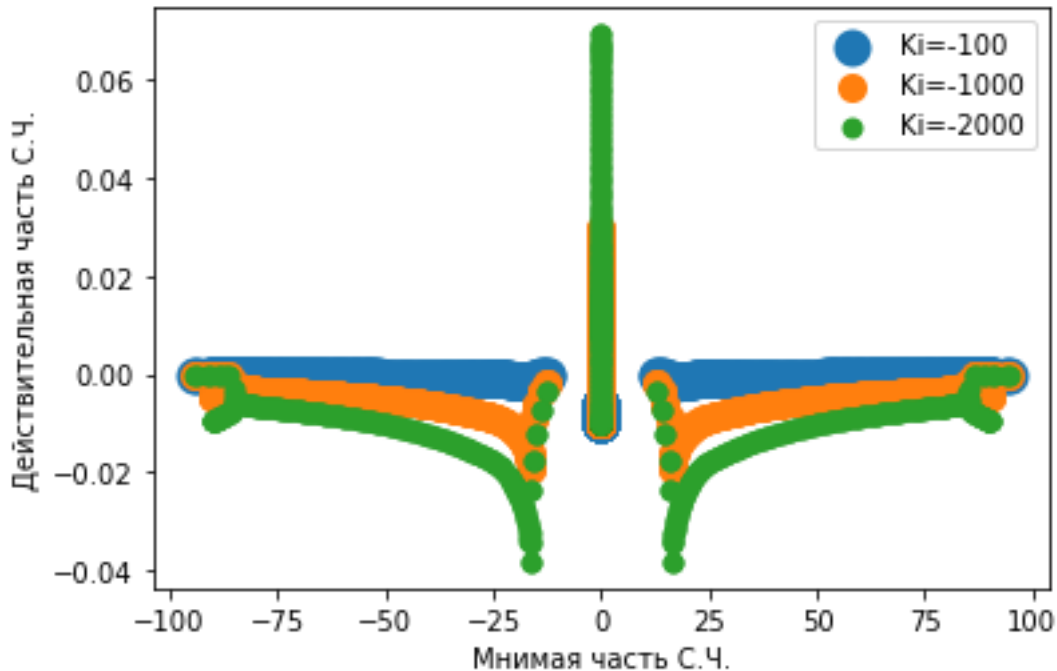


Рис. 8. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от интегральной компоненты PID-регулятора при $K_i = -100$ (синим цветом), $K_i = -1000$ (оранжевый), $K_i = -2000$ (зеленый) для случая $\tau = 100$. Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

Полученные для $\tau = 1$ и $\tau = 10$ значения вещественной части собственных чисел, оказались отрицательными для всех представленных K_i , то есть система может быть стабилизирована и при одном только интегральном управлении, при этом значения собственных чисел оказываются очень близки при таких временах интегрирования. Однако, при увеличении абсолютного значения τ и K_i устойчивость может нарушаться для низкочастотных возмущений. Для значения $\tau = 100$, как видно из рисунка 8, спектр динамической системы указывает на нарушение устойчивости уже для значения $K_i = -1000$. Система с $K_i = -100$ остается устойчивой. При положительных значениях K_i система теряет устойчивость для любой величины времени интегрирования, что показано на рисунке 9.

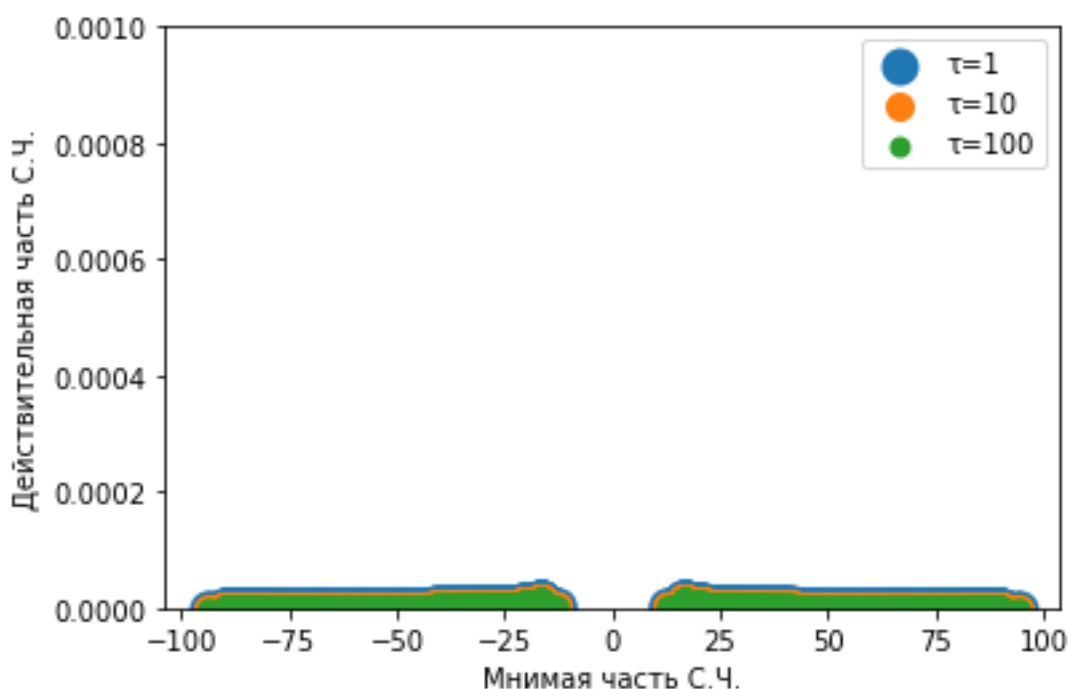


Рис. 9. Зависимость спектра матрицы линеаризованной задачи от времени интегрирования τ при $\tau = 1$ (синим цветом), $\tau = 10$ (оранжевый), $\tau = 100$ (зеленый) для случая $K_i = 1$. На графике отображены только точки с действительной частью С. Ч. больше нуля. Разная толщина точек – только для того, чтобы различать случаи между собой.

Несмотря на то, что интегральное управление позволяет стабилизировать систему, собственные числа, с максимальной действительной частью даже в лучших случаях оказываются гораздо ближе к нулю, чем для лучших случаев дифференциального управления. Таким образом, дифференциальное управление должно оказаться эффективнее.

5.2. Численное моделирование нелинейного уравнения эволюции.

Теперь исследуем возможности глобальной устойчивости основного состояния управляемого конденсата. Рассмотрим результаты нелинейной эволюции начального состояния весьма далекого от основного состояния в выбранном двухъямном потенциале в случаях интегрального и дифференциального управлений, так как пропорциональное управление не обеспечивает стабилизацию в линеаризованной задаче.

Сначала посмотрим на результаты дифференциального управления, K_p и K_i равны нулю. На рисунке 10 показаны начальное распределение плотности БЭК ($t = 0$), состояние, достигаемое посредством управления ($t = 35$) и основное состояние в двухъямном потенциале, которое должно быть результатом управления при $K_d = 500$.

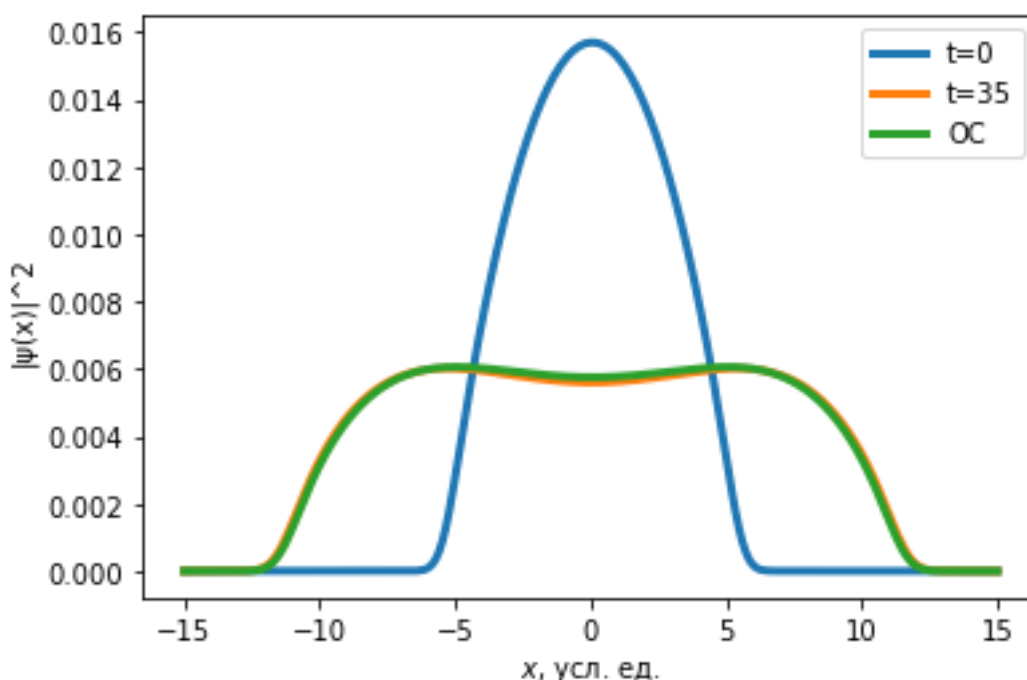


Рис. 10. Проверка глобальной устойчивости в случае дифференциального управления (синим цветом показано начальное распределение, оранжевым – получаемое, а зеленым – искомое основное состояние).

Видно, что нормированное распределение плотности в $t = 35$ практически идеально совпадает с распределением, соответствующим основному состоянию. Таким образом, PID-управление способно обеспечить не только локальную устойчивость основного состояния в двухъямном потенциале, но и стабилизировать это состояние при весьма существенном начальном отклонении.

Сравним этот результат с результатом работы интегрального управления для тех же параметров потенциала и того же значения константы взаимодействия при $K_p = K_d = 0$. На рисунке 11 результаты приведены для $K_i = -1000$ и $\tau = 1$.

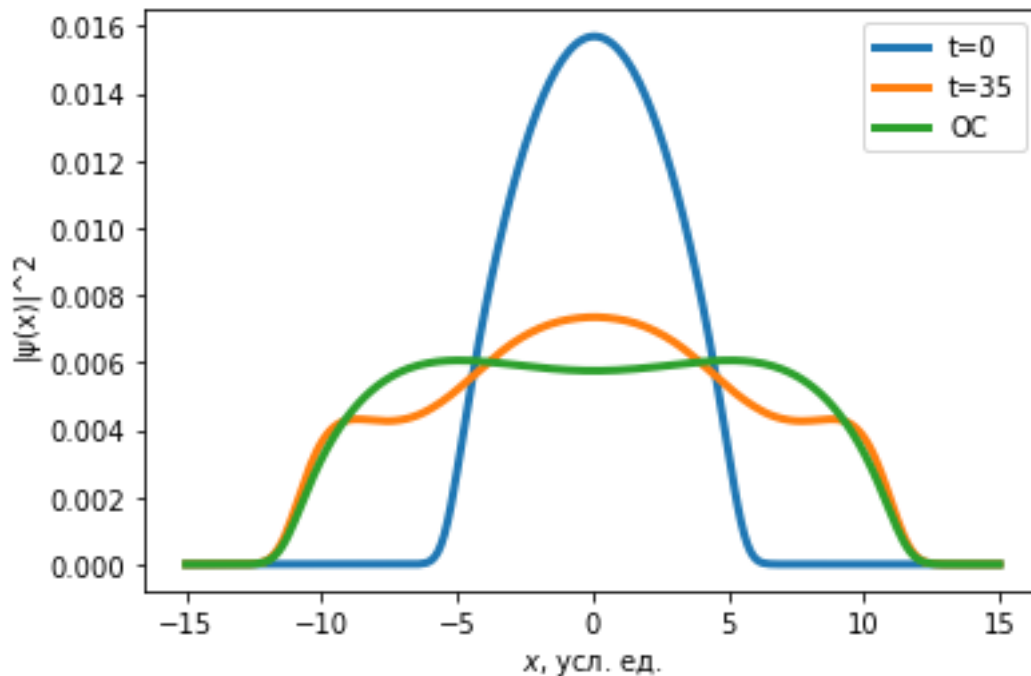


Рис. 11. Проверка глобальной устойчивости в случае дифференциального управления (синим цветом показано начальное распределение, оранжевым – получаемое, а зеленым – искомое основное состояние).

Видно, что конечное состояние весьма близко к требуемому, но демонстрирует пространственные осцилляции.

Проверим эффективность управления для некоторых других значений параметров потенциала и константы взаимодействия. Рассмотрим случаи: 1) $\omega_2 = 0.05$, $\omega_4 = 0.001$, $g = 10$ (те же параметры потенциала, что и ранее, но другая константа взаимодействия) и 2) $\omega_2 = 1.0$, $\omega_4 = 0.01$, $g = 1000$.

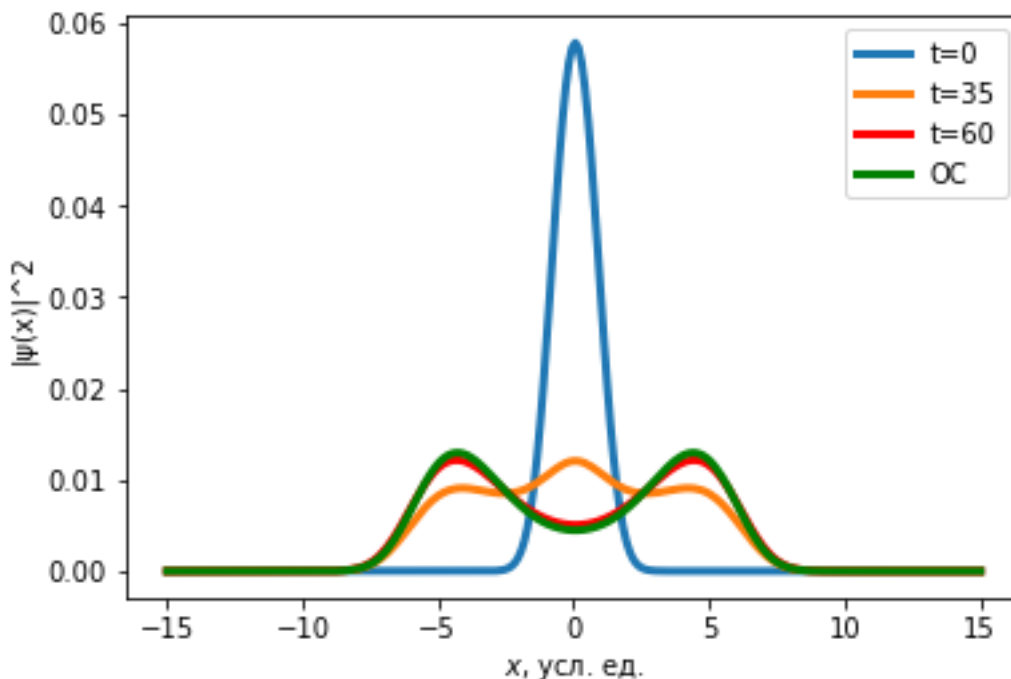


Рис. 12. Проверка глобальной устойчивости в случае дифференциального управления со следующими параметрами: $\omega_2 = 0.05$, $\omega_4 = 0.001$, $g = 10$ (синим цветом показано начальное распределение, оранжевым – получаемое при $t=35$, зеленым – искомое основное состояние, а красным – получаемое при $t=60$).

По графику видно, что уменьшение константы взаимодействия привело к тому, что достичь стабилизации становится сложнее. Однако, как можно заметить на рисунке 12, если увеличить время моделирования, то и в этом случае удастся добиться практически полного совпадения распределения управляемого конденсата с распределением основного состояния заданного потенциала.

На рисунке 13 показаны распределения для второго варианта параметров задачи. Здесь минимумы потенциала существенно разнесены, но константа взаимодействия такая же как на рисунке 10.

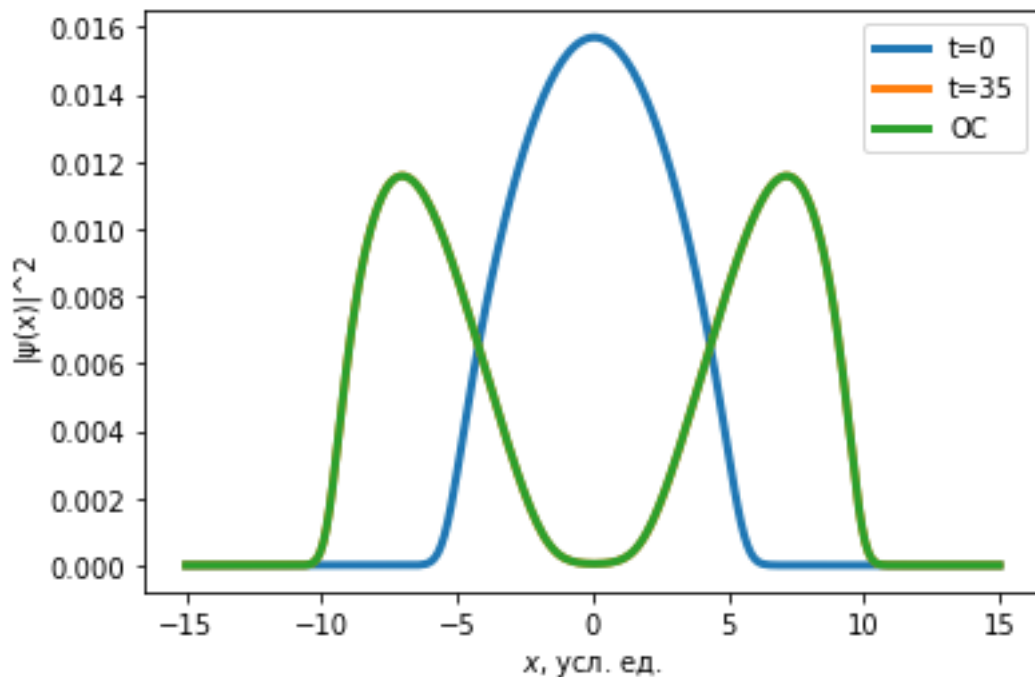


Рис. 13. Проверка глобальной устойчивости в случае дифференциального управления со следующими параметрами: $\omega_2 = 1.0$, $\omega_4 = 0.01$, $g = 1000$ (синим цветом показано начальное распределение, оранжевым – получаемое, а зеленым – искомое основное состояние).

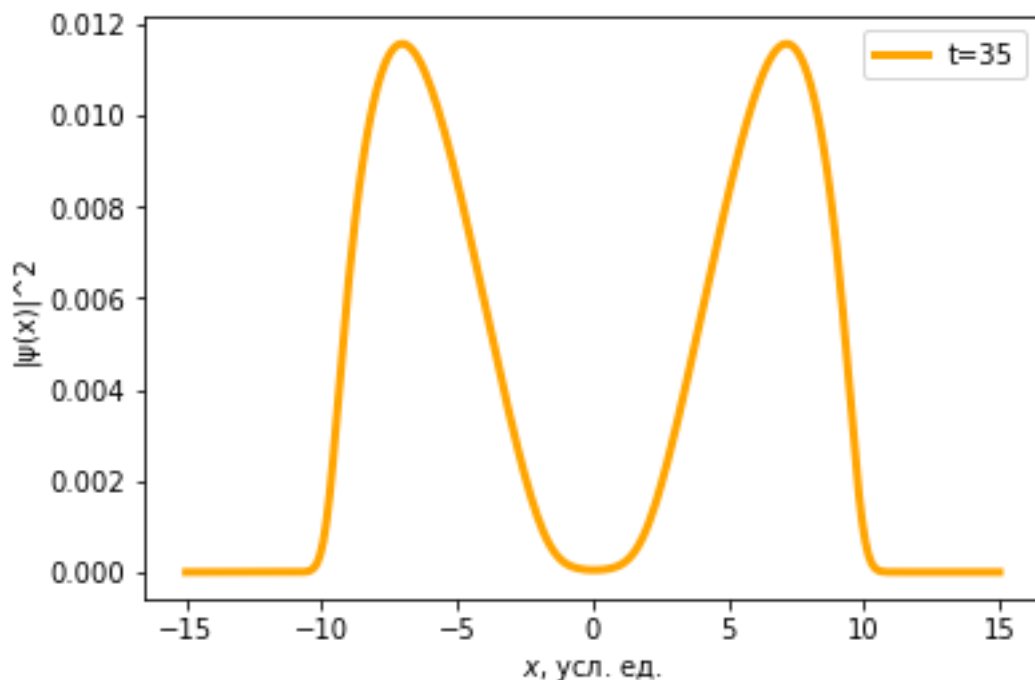


Рис. 14. Проверка глобальной устойчивости в случае дифференциального управления со следующими параметрами: $\omega_2 = 1.0$, $\omega_4 = 0.01$, $g = 1000$. (оранжевым показано получаемое состояние).

Как видно из рисунка 13, даже если достаточно сильно изменить параметры двухъямного потенциала, однако оставить константу взаимодействия большой, то глобальная стабилизация все равно достигается. В зависимости от параметров потенциала, приемлемое совпадение распределения с распределением плотности основного состояния достигается за разное время.

Глава 6. Заключение.

Цель данной работы – установить принципиальную возможность стабилизации конденсата в основном состоянии потенциала сложной формы с помощью обратной связи. Для ответа на этот вопрос была построена математическая модель управляемого посредством PID-регулятора БЭК. Модель основана на модификации уравнения Гросса-Питаевского.

В качестве первого приближения в работе была исследована более простая линеаризованная задача, которая должна была установить теоретическую возможность стабилизации конденсата в основном состоянии заранее выбранного конкретного потенциала ловушки при малых возмущениях относительно основного состояния волновой функции. В данной работе показано, что при правильно подобранных параметрах PID-регулятора можно добиться требуемой стабилизации. В ходе численного моделирования выяснилось, что наибольший эффект на стабилизацию оказывает дифференциальный компонент PID-регулятора. Однако интегральный компонент также позволяет, пусть заметно хуже, стабилизировать конденсат в заданном потенциале, в то время как пропорциональный компонент не оказывает практически никакого влияния на стабилизацию.

Далее, была получена и численно исследована нелинейная дискретизированная система уравнений. Это позволило проверить возможность глобальной стабилизации Бозе-Эйнштейновского конденсата в основном состоянии заранее выбранного потенциала ловушки при любых возмущениях относительно волновой функции основного состояния. Также эту задачу можно понимать, как перевод конденсата из основного состояния одного произвольного потенциала ловушки в основное состояние любого другого потенциала. Было показано, что использование параметров PID-регулятора, найденных при анализе линеаризованной задачи в нелинейной системе, подтверждает теоретическую возможность стабилизации конденсата Бозе-Эйнштейна в основном состоянии потенциала ловушки сложной формы с высокой точностью. Таким образом, PID-регулятор представляет собой перспективный алгоритм управления атомарным конденсатом Бозе-Эйнштейна.

Приложение А

```

using QuantumOptics

ω4 = 0.05; # for dw potential
ω2 = 1.0; # for dw potential
m = 1; # mass of an atom
r = 15 # size of the space

# position Basis
nx=256;
bx = PositionBasis(-r, r, nx); # position basis size nx

# momentum Basis
bpx = MomentumBasis(bx);

# position operators in position space
x = position(bx); # position operator

# momentum operators in momentum space
Px = momentum(bpx)

# composite bases
compbx = bx
compbp = bpx

# FFT
Txp = transform(compbx, compbp)
Tpx = transform(compbp, compbx)

#kinetic Energy
Hkin = Px^2/2m # kinetic energy in momentum space
Hkin_FFT = LazyProduct(Txp, Hkin, Tpx) # lazy tensor for the split-step method

# harmonic potential
Hhar = 0.5*ω0*x^2

# double-well potential
Hdw = 0.5*(-ω2*x^2 + ω4*x^4)

#initial state
p1 = 0
σx = 3

φin = gaussianstate(bx, 0, p1, σx)
normalize!(φin);

```

```

dx = 2r/nx
g = 1000. # interaction strength
Hg = diagonaloperator(bx, Ket(bx).data) #  $\propto |\psi|^2$ 

H_tot_h = -1im*LazySum(Hkin_FFT, Hg, Hhar) # imaginary time evolution
H_tot_dw = -1im*LazySum(Hkin_FFT, Hg, Hdw) # imaginary time evolution

function Hgp_h(t,  $\psi$ ) # Update state-dependent term in H
    normalize!( $\psi$ ) # <- the wavefunction will be always normalized to 1
    #H_tot_h.operators[2].data.nzval .= g*abs2.( $\psi$ .data)/(dx^2) # we need to update the second term in the Hamiltonian
    H_tot_h.operators[2].data.nzval .= g*abs2.( $\psi$ .data)/1
    return H_tot_h
end #dx -> либо первая, либо нулевая степень

function Hgp_dw(t,  $\psi$ ) # Update state-dependent term in H
    normalize!( $\psi$ ) # <- the wavefunction will be always normalized to 1
    #H_tot_dw.operators[2].data.nzval .= g*abs2.( $\psi$ .data)/(dx^2) # we need to update the second term in the Hamiltonian
    H_tot_dw.operators[2].data.nzval .= g*abs2.( $\psi$ .data)/1
    return H_tot_dw
end

# imaginary time evolution
T = [0:0.42:8;]
tout,  $\psi$ h = timeevolution.schroedinger_dynamic(T,  $\psi$ in, Hgp_h)
tout,  $\psi$ dw = timeevolution.schroedinger_dynamic(T,  $\psi$ in, Hgp_dw)

# this should be the ground state
 $\varphi$ h =  $\psi$ h[end];
 $\varphi$ dw =  $\psi$ dw[end];

```

Приложение Б

```
function  $\delta(i,j,k)$ 
    if i == j-k
        return 1
    else
        return 0
    end
end
```

#construct the evolution matrix with feedback

```
function matrixA(Kp,Ki,Kd, $\tau$ )
    A11 = zeros((nx, nx))
    A12 = zeros((nx, nx))
    A13 = zeros((nx, nx))
    A21 = zeros((nx, nx))
    A22 = zeros((nx, nx))
    A23 = zeros((nx, nx))
    A31 = zeros((nx, nx))
    A32 = zeros((nx, nx))
    A33 = zeros((nx, nx))

    for i in 1:nx
        for j in 1:nx
            A12[i,j] = (- $\mu$  + g* $\varphi_r[i]^2$ )* $\delta(i,j,0)$  + Hdw.data[i,j] - (1/(4m*dx^2))*( $\delta(i,j,1)$  - 2* $\delta(i,j,0)$  +  $\delta(i,j,-1)$ )
        end
    end

    for i in 1:nx
        for j in 1:nx
            A21[i,j] = ( $\mu$  - 3g* $\varphi_r[i]^2$  - 2Kp* $\varphi_r[i]^2$ )* $\delta(i,j,0)$  - Hdw.data[i,j] + (1/(4m*dx^2))*( $\delta(i,j,1)$  - 2* $\delta(i,j,0)$  +  $\delta(i,j,-1)$ )
        end
    end

    for i in 1:nx
        for j in 1:nx
            A22[i,j] = 2Kd* $\varphi_r[i]^2$ * $\delta(i,j,0)$ *( $\mu$ -Hdw.data[i,j]-g* $\varphi_r[i]^2$ ) + (Kd* $\varphi_r[i]^2$ /(4m*dx^2))*( $\delta(i,j,1)$  - 2* $\delta(i,j,0)$ +  $\delta(i,j,-1)$ )
        end
    end
end
```

```

for i in 1:nx
    for j in 1:nx
        A23[i,j] = -φ_r[i]^2*Ki*δ(i,j,θ)
    end
end

for i in 1:nx
    for j in 1:nx
        A31[i,j] = 2φ_r[i]*δ(i,j,θ)
    end
end

for i in 1:nx
    for j in 1:nx
        A33[i,j] = -δ(i,j,θ)/τ
    end
end

Top = hcat(A11,A12,A13)
Mid = hcat(A21,A22,A23)
Bot = hcat(A31,A32,A33)

A = vcat(Top,Mid,Bot);
end

ev = eigvals(matrixA(n,k,l,m))

```


Приложение В.

```
using DifferentialEquations
```

```
function fnew!(du,u,p,t)
    x = u[1:nx]
    y = u[nx+1:2nx]
    z = u[2nx+1:3nx]
    Kp = 0; Kd = 0; γ = Kd; Ki = 0; τ = 0.1

    for i in 2:nx-1
        du[i] = -(1+2γ*x[i]*y[i])*(y[i-1] - 2y[i] + y[i+1])/(2m*dx^2) + (-μ+Hdw.data[i,i])*y[i] + g*(x[i]^2+y[i]^2)*y[i] +
        γ*y[i]^2*(x[i-1] - 2x[i] + x[i+1])/(m*dx^2) + Ki*z[i]*y[i] + Kp*(x[i]^2 + y[i]^2 - abs(φdw.data[i])^2)
        du[i+nx] = (1-2γ*x[i]*y[i])*(x[i-1] - 2x[i] + x[i+1])/(2m*dx^2) - (-μ+Hdw.data[i,i])*x[i] - g*(x[i]^2+y[i]^2)*x[i] +
        γ*x[i]^2*(y[i-1] - 2y[i] + y[i+1])/(m*dx^2) - Ki*z[i]*x[i] - Kp*(x[i]^2 + y[i]^2 - abs(φdw.data[i])^2)
        du[i+2nx] = -z[i]/τ + x[i]^2 + y[i]^2 - abs(φdw.data[i])^2
    end
    du[1] = -(1+2γ*x[1]*y[1])*(y[2] - 2y[1])/(2m*dx^2) + Hdw.data[1,1]*y[1] + g*(x[1]^2+y[1]^2)*y[1] +
    γ*y[1]^2*(x[2] - 2x[1])/(m*dx^2) + Ki*z[1]*y[1] + Kp*(x[1]^2 + y[1]^2 - abs(φdw.data[1])^2)
    du[nx] = -(1+2γ*x[nx]*y[nx])*(y[nx-1] - 2y[nx])/(2m*dx^2) + Hdw.data[nx,nx]*y[nx] + g*(x[nx]^2+y[nx]^2)*y[nx] +
    γ*y[nx]^2*(x[nx-1] - 2x[nx])/(m*dx^2) + Ki*z[nx]*y[nx] + Kp*(x[nx]^2 + y[nx]^2 - abs(φdw.data[nx])^2)
    du[1+nx] = (1-2γ*x[1]*y[1])*(x[2] - 2x[1])/(2m*dx^2) - Hdw.data[1,1]*x[1] - g*(x[1]^2+y[1]^2)*x[1] +
    γ*x[1]^2*(y[2] - 2y[1])/(m*dx^2) - Ki*z[1]*x[1] - Kp*(x[1]^2 + y[1]^2 - abs(φdw.data[1])^2)
    du[2nx] = (1-2γ*x[nx]*y[nx])*(x[nx-1] - 2x[nx])/(2m*dx^2) - Hdw.data[nx,nx]*x[nx] - g*(x[nx]^2+y[nx]^2)*x[nx] +
    γ*x[nx]^2*(y[nx-1] - 2y[nx])/(m*dx^2) - Ki*z[nx]*x[nx] - Kp*(x[nx]^2 + y[nx]^2 - abs(φdw.data[nx])^2)
    du[2nx+1] = -z[1]/τ + x[1]^2 + y[1]^2 - abs(φdw.data[1])^2
    du[3nx] = -z[nx]/τ + x[nx]^2 + y[nx]^2 - abs(φdw.data[nx])^2
    nothing
end
```

```
u0 = zeros(3*nx)
δ1= 1
φinit = (1-δ1)φdw + δ1*φh
normalize!(φinit)
u0[1:nx] = real.(φinit.data)
tspan = (0.0,35.0)
prob = ODEProblem(fnew!,u0,tspan)
sol = solve(prob, save_everystep=false,alg_hints=:stiff, reltol=1e-11, abstol=1e-11);
solution1=sol.u[end][1:nx].^2 .+ sol.u[end][1+nx:2nx].^2 # this should be the ground state
```

Используемая литература

- [1] Bose S Z., Phys. 26 178 (1924)
- [2] Einstein A Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 3 18 (1925)
- [3] Hänsch T, Schawlow A Opt. Commun. 13 68 (1975)
- [4] Wineland D, Dehmelt H Bull. Am. Phys. Soc. 20 637 (1975)
- [5] Steven Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, Alex Cable, and A. Ashkin
Phys. Rev. Lett. **55**, 48 – Published 1 July 1985
- [6] Phillips W, Prodan J, Metcalf H, in Laser Spectroscopy VI (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 40, Eds H P Weber, W Luthy) (Berlin: Springer-Verlag, 1983) p. 162
- [7] Миногин В.Г., Летохов В.С. “Давление лазерного излучения на атомы”, М.: Наука, 1986. - 224 с
- [8] С. Чу, К.Н. Коэн-Тануджи, У.Д. Филлипс «Развитие методов охлаждения и пленения атомов с помощью лазерного света. Нобелевские лекции по физике — 1997» 169 271 (1999)
- [9] Корнелл Э А, Виман К Э, Кеттерле В "Нобелевские лекции по физике — 2001" УФН **173** 1319 (2003)
- [10] Ivanov, D.A., Ivanova, T.Y., Caballero-Benitez, S.F. *et al.* Cavityless self-organization of ultracold atoms due to the feedback-induced phase transition. *Sci Rep* **10**, 10550 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41598-020-67280-3>
- [11] Bechhoefer, J. Feedback for physicists: A tutorial essay on control. *Rev. Mod. Phys.* 77, 783, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.783>, (2005).
- [12] Wiseman, H. & Milburn, G. Quantum measurement and control (Cambridge University Press, 2014).
- [13] Raizen, M. et al. Stochastic cooling of atoms using lasers. *Phys. Rev. A* 58, 4757, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.4757>, (1998).
- [14] Ivanov, D., Wallentowitz, S. & Walmsley, I. Quantum limits of stochastic cooling of a bosonic gas. *Phys. Rev. A* 67, 061401, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.061401>, (2003).
- [15] Averbukh, I. & Prior, Y. Laser cooling in an optical shaker. *Phys. Rev. Lett.* 94, 153002, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.153002>, (2005).

- [16] Mancini, S., Vitali, D. & Tombesi, P. Stochastic phase-space localization for a single trapped particle. *Phys. Rev. A* 61, 053404, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.053404>, (2000).
- [17] Steck, D., Jacobs, K., Mabuchi, H., Bhattacharya, T. & Habib, S. Quantum feedback control of atomic motion in an optical cavity., *Phys. Rev. Lett.* 92, 223004, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.223004>, (2004).
- [18] Horoshko, D. & Kilin, S. Direct detection feedback for preserving quantum coherence in an open cavity. *Phys. Rev. Lett.* 78, 840, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.840>, (1997).
- [19] Szigeti, S. S., Hush, M. R., Carvalho, A. R. R. & Hope, J. J. Continuous measurement feedback control of a bose-einstein condensate using phase-contrast imaging. *Phys. Rev. A* 80, 013614, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.013614>, (2009).
- [20] Szigeti, S. S., Hush, M. R., Carvalho, A. R. R. & Hope, J. J. Feedback control of an interacting bose-einstein condensate using phase-contrast imaging. *Phys. Rev. A* 82, 043632, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.043632>, (2010).
- [21] Hush, M. R., Szigeti, S. S., Carvalho, A. R. R. & Hope, J. J. Controlling spontaneous-emission noise in measurement-based feedback cooling of a bose–einstein condensate. *N. J. Phys.* 15, 113060, <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/11/113060>, (2013).
- [22] Reiner, J. E., Smith, W. P., Orozco, L. A., Wiseman, H. M. & Gambetta, J. Quantum feedback in a weakly driven cavity qed system. *Phys. Rev. A* 70, 023819, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.023819>, (2004).
- [23] Mazzucchi, G., Caballero-Benitez, S., Ivanov, D. & Mekhov, I. Quantum optical feedback control for creating strong correlations in many-body systems. *Optica* 3, 1213, <https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.001213>, (2016).
- [24] Maunz, P. et al. Cavity cooling of a single atom. *Nature* 428, 50, <https://doi.org/10.1038/nature02387>, (2004).
- [25] Koch, M. et al. Feedback cooling of a single neutral atom. *Phys. Rev. Lett.* 105, 173003, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.173003>, (2010).
- [26] Morrow, N., Dutta, S. & Raithel, G. Feedback control of atomic motion in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.* 88, 093003, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.093003>, (2002).
- [27] Bushev, P. et al. Feedback cooling of a single trapped ion. *Phys. Rev. Lett.* 96, 043003, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.043003>, (2006).

- [28] Bohnet, J. G., Chen, Z., Weiner, J. M., Cox, K. C. & Tompson, J. K. Relaxation oscillations, stability, and cavity feedback in a superradiant raman laser. *Phys. Rev. Lett.* 109, 253602, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.253602>, (2012).
- [29] Belavkin, V. P. On the theory of controlling observable quantum systems. *Autom. Remote. Control.* 44, 178 (1983).
- [30] Doherty, A. C., Habib, S., Jacobs, K., Mabuchi, H. & Tan, S. M. Quantum feedback control and classical control theory. *Phys. Rev. A* 62, 012105, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.012105> (2000).
- [31] Ivanov, D., Ivanova, T., Caballero-Benitez, S. & Mekhov, I. Feedback-induced quantum phase transitions using weak measurements. *Phys. Rev. Lett.* 124, 010603, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.010603>, (2020).
- [32] Mazzucchi, G., Kozlowski, W., Caballero-Benitez, S. F., Elliott, T. J. & Mekhov, I. B. Quantum measurement-induced dynamics of many-body ultracold bosonic and fermionic systems in optical lattices. *Phys. Rev. A* 93, 023632, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.023632>, (2016).
- [33] Kroeger, K. et al. Continuous feedback on a quantum gas coupled to an optical cavity. *New Journal of Physics* 22, 033020, <https://doi.org/10.1088/13672630/ab73cc>, (2020).
- [34] Nagy, D., Szirmai, G. & Domokos, P. Self-organization of a bose-einstein condensate in an optical cavity. *Eur. Phys. J. D.* 48, 127, <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00074-6>, (2008).
- [35] Nagy, D., Szirmai, G. & Domokos, P. Cavity optomechanics with a trapped, interacting bose-einstein condensate. *Eur. Phys. J. D.* 67,124, <https://doi.org/10.1140/epjd/e2013-40142-2>, (2013).
- [36] Piazza, F. & Ritsch, H. Self-ordered limit cycles, chaos, and phase slippage with a superfuid inside an optical resonator. *Phys. Rev. Lett.* 115, 163601, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.163601>, (2015).
- [37] Bonifacio, R., DeSalvo, L., Narducci, L. & D'Angelo, E. Exponential gain and self-bunching in a collective atomic recoil laser. *Phys. Rev. A* 50, 1716, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.50.1716>, (1994).
- [38] Moore, M. & Meystre, P. Teory of superradiant scattering of laser light from bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* 83, 5202, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.5202>, (1999).

- [39] Piovella, N., Bonifacio, R., McNeil, B. & Robb, G. Superradiant light scattering and grating formation in cold atomic vapours. *Opt. Comm.* 187, 165, [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(00\)01106-8](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(00)01106-8), (2001).
- [40] Klinder, J., Kessler, H., Bakhtiari, M., Torwart, M. & Hemmerich, A. Observation of a superradiant mott insulator in the dicke-hubbard model. *Phys. Rev. Lett.* 115, 230403, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.230403>, (2015).
- [41] Landig, R. et al. Quantum phases from competing short- and long-range interactions in an optical lattice. *Nature* 532, 476, <https://doi.org/10.1038/nature17409>, (2016).
- [42] Leonard, J., Morales, A., Zupancic, P., Donner, T. & Esslinger, T. Monitoring and manipulating higgs and goldstone modes in a supersolid quantum gas. *Science* 358, 1415, <https://doi.org/10.1126/science.aan2608>, (2017).
- [43] Leonard, J., Morales, A., Zupancic, P., Esslinger, T. & Donner, T. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry. *Nature* 543, 87, <https://doi.org/10.1038/nature21067>, (2017).
- [44] Kollár, A. et al. Supermode-density-wave-polariton condensation with a bose-einstein condensate in a multimode cavity. *Nat. Commun.* 8, 14386, <https://doi.org/10.1038/ncomms14386>, (2017).
- [45] Schuster, S. C., Wolf, P., Schmidt, D., Slama, S. & Zimmermann, C. Pinning transition of bose-einstein condensates in optical ring resonators. *Phys. Rev. Lett.* 121, 223601, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.223601>, (2018).
- [46] Lee, M. D. & Ruostekoski, J. Classical stochastic measurement trajectories: Bosonic atomic gases in an optical cavity and quantum measurement backaction. *Phys. Rev. A* 90, 023628, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.023628>, (2014).
- [47] Fernández-Vidal, S., De Chiara, G., Larson, J. & Morigi, G. Quantum ground state of self-organized atomic crystals in optical resonators. *Phys. Rev. A* 81, 043407, <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.043407>, (2010).
- [48] Ivanov, D. & Ivanova, T. Feedback-enhanced self-organization of atoms in an optical cavity. *JETP Lett.* 100, 481, <https://doi.org/10.1134/S0021364014190060>, (2014).
- [49] Ivanov, D. & Ivanova, T. Feasibility of a feedback control of atomic self-organization in an optical cavity. *JETP* 121, 179, <https://doi.org/10.1134/S1063776115080051>, (2015).

- [50] Grimsmo, A. L., Parkins, A. S. & Skagerstam, B.-S. Rapid steady-state convergence for quantum systems using time-delayed feedback control. *N. J. Phys.* 16, 065004, <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/6/065004>, (2014).
- [51] Kopylov, W., Emary, C., Schöll, E. & Brandes, T. Time-delayed feedback control of the dicke–hepp–lieb superradiant quantum phase transition. *N. J. Phys.* 17, 013040, <https://doi.org/10.1088/1367-2630/17/1/013040>, (2015).
- [52] Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimum settings for automatic controllers. // *Transactions of the ASME*, Vol.64. pp. 759-768, 1942.
- [53] Eugene P. Gross; Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *J. Math. Phys.* 1 February 1963; 4 (2): 195–207.
- [54] L.P. Pitaevskii; Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas. *JETP*, Vol. 13, No. 2, (August 1961), p. 451
- [55] Maschler, C., Mekhov, I. & Ritsch, H. Ultracold atoms in optical lattices generated by quantized light fields. *Eur. Phys. J. D* **46**, 545–560 (2008).
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00016-4>
- [56] Magnus, W. (1954) *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7, 649-67.
- [57] P. Behroozi, Analytical Imaginary Time Propagation at a Single Point, Stanford University, March 24, 2008.
- [58] Lewis J. Challenge to Control. A collective view // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1988. Vol. AC-32. N 2. P. 1187–1195.
- [59] Г. А. Леонов, М. М. Шумафов. Методы стабилизации линейных управляемых систем, Издательство Санкт-Петербургского университета, 2005, 421 с.