

Санкт-Петербургский государственный университет

РЕЙТЕР Михаил Алексеевич

Выпускная квалификационная работа

**РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО
РОСТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ: ВОЗНИКНОВЕНИЕ
ИНДУЦИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:
доцент, кафедра Физики высоких энергий и элементарных частиц, к.ф.-м.н., **Какин П. И.**

Рецензент:
научный сотрудник, ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, к.ф.-м.н., **Лебедев Н. М.**

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Введение	3
2	Теоретическая часть	5
2.1	Задача стохастической динамики	5
2.2	Квантовополевая переформулировка - MSR формализм	5
2.3	Производящий функционал корреляционных функций	7
2.4	Размерный анализ	8
2.5	Регуляризация, ренормировка	9
2.6	Уравнение ренормгруппы	10
2.7	Уравнение скейлинга, критические размерности	11
3	Практическая часть	13
3.1	Постановка задачи	13
3.2	Квантовополевая переформулировка	14
3.3	Канонические размерности, анализ контрчленов	15
3.4	Нахождение ренормировочных констант	17
3.5	КПЗ + НС, локальный случай	23
3.5.1	β - функции и аномальные размерности	23
3.5.2	Неподвижные точки, области устойчивости, критические размерности	24
3.6	КПЗ + НС, общий случай	26
3.6.1	β - функции и аномальные размерности	26
3.6.2	Неподвижные точки, области устойчивости, критические размерности	26
4	Заключение	31
	Список литературы	32

1 Введение

"Кинетическое огрубление" – феномен, согласно которому при стохастическом росте различных флуктуирующих поверхностей эти самые поверхности становятся со временем все более "шероховатыми" [1]. Примеры физических систем, для которых характерно подобное поведение, включают в себя динамику распространения фронтов дыма, раковых опухолей, бактериальных колоний, распространение холеры и других эпидемий [2]. Таким образом, актуальным представляется изучение различных процессов роста и моделей, предложенных для их описания. Одной из таких моделей является модель Кардара – Паризи – Занга (КПЗ), изначально предложенная для объяснения универсального скейлингового поведения в различных физических системах [3]. Модель КПЗ, исследованию которой посвящена данная работа, описывается нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением с гауссовым случайным шумом, дельта–скоррелированным во времени и пространстве. Поскольку это уравнение получается из чрезвычайно общих соображений, оно описывает широкий класс процессов роста в разнообразных физических системах [3]. Кроме того, модель КПЗ представляет собой простейший пример модели неравновесного критического поведения.

Одним из самых эффективных методов изучения критического поведения является теоретико – полевая ренормализационная группа (РГ) [4]. Различные типы критического поведения характеризуются инфракрасно – (ИК–) притягивающими точками уравнений ренормгруппы. Однако для модели КПЗ (в пределах теории возмущений) таким точкам отвечает нефизическая область параметров [3]. По этой причине возникает интерес в изучении различных модификаций КПЗ, включающих в себя рассмотрение другого типа шума в корреляторе, включении взаимодействия с полем скорости, и т.д.

В настоящей работе рассмотрен "замороженный" (не зависящий от времени) случайный шум, предложенный в [5] для моделирования процесса эрозии ландшафта. Известно, что включение подобного типа шума существенно; например, при РГ – анализе изменяется логарифмическая размерность [6] - [8].

Кроме того, интересно включить в рассмотрение движение окружающей среды. Привлекательно изучать турбулентное движение, поскольку турбулентность сама по себе является важным стохастическим процессом. Для моделирования движения среды можно воспользоваться синтетическим ансамблем, например, ансамблем Казанцева – Крейчнана (КК) [9]. При изучении такой модификации был обнаружен [10] новый эффект – возникновение контрчлена нового типа, пропорционального квадрату поля скорости ("индуцированная нелинейность").

Важно рассматривать более сложные и реалистичные модели. Внешнее поле скорости в данной работе описывается стохастическим уравнением Навье–Стокса (НС) с двумя раз-

личными вкладами в коррелятор случайной внешней силы: локальным вкладом (белый случайный шум, на физическом уровне отвечающий макроскопическому "встряхиванию" системы как единого целого [11]) и нелокальным степенным вкладом (турбулентная жидкость). При этом рассматриваются две отдельные задачи: локальный случай с одним вкладом в коррелятор случайной силы, и общий случай с обоими вкладами.

Описанные задачи исследуются с помощью метода теоретико – полевой ренормализационной группы (см. Главу 2). Исходная стохастическая задача с общим коррелятором случайной силы переформулируется на теоретико – полевом языке; для нее проводится размерный анализ, определяются расходящиеся функции Грина (см. Пункты 3.1–3.3). Устанавливается наличие явления "индуцированной нелинейности". Вычисление ренормировочных констант также проводится для общего случая (см. Пункты 3.4). Затем локальный и общий случаи рассматриваются отдельно в Пунктах 3.5 и 3.6 соответственно. Для построенных теорий поля находятся ИК – притягивающие точки и определяются критические размерности (параметры, описывающие асимптотическое поведение корреляционных функций). Все вычисления проводятся в ведущем порядке теории возмущений в рамках разложения по $\varepsilon = 4 - d$ и y – параметру в нелокальном вкладе в коррелятор шума случайной силы уравнения Навье–Стокса.

2 Теоретическая часть

2.1 Задача стохастической динамики

Сформулируем стандартную задачу стохастической динамики [4]:

$$\partial_t \varphi(x) = U(\varphi, x) + f(x), \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ набор полей, зависящих от d -мерной координаты \mathbf{x} и времени t . Обозначим $x = \{\mathbf{x}, t\}$.

$U(\varphi, x)$ – заданный t – локальный (т. е. зависящий лишь от полей φ и их производных в один момент времени t) функционал, не содержащий производных φ по времени. Слагаемое $f(x)$ отвечает произвольной реализации случайного шума с нулевым средним $\langle f(x) \rangle = 0$ и заданной корреляционной функцией

$$\langle f(x)f(x') \rangle = D(x, x'). \quad (2)$$

Тут и далее $\langle \dots \rangle$ – усреднение по ансамблю случайных полей, что на функциональном языке означает:

$$\langle \dots \rangle = c \int Df \dots \exp[-fD^{-1}f/2], \quad (3)$$

с нормировочным коэффициентом $c = (\int Df \exp[-fD^{-1}f/2])^{-1}$; подразумеваются все необходимые интегрирования по аргументам полей. Задача (1), (2) рассматривается на всей оси t с заданной (нулевой) асимптотикой при $t \rightarrow -\infty$, а также при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ в любой плоскости $t = const$.

Решением уравнения (1) является величина $\hat{\varphi}(x, f)$, зависящая от реализации случайной величины f . Нас будут интересовать корреляционные функции поля φ :

$$\langle \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \rangle. \quad (4)$$

В дальнейшем будем опускать значок $\hat{}$ в подобных выражениях.

2.2 Квантовополевая переформулировка - MSR формализм

В данной секции описан метод, позволяющий представить исходную задачу в виде квантовой теории поля (MSR - формализм, см. [4], [12]).

Производящий функционал для корреляционных функций (4) может быть получен усреднением по f выражения $G(a, f) = \exp(a\hat{\varphi})$:

$$G(a) = \frac{\int Df \exp[-fD^{-1}f/2 + a\hat{\varphi}]}{\int Df \exp[-fD^{-1}f/2]}. \quad (5)$$

Тут $a(x)$ - источник (набор источников). Любые корреляционные функции могут быть получены взятием вариационной производной по соответствующим источникам, например, для теории с одним полем φ :

$$\langle \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') \rangle = \frac{\delta^2 G(a)}{\delta a(x)\delta a(x')} \Big|_{a=0}. \quad (6)$$

Рассмотрим следующее тождество

$$\exp(a\hat{\varphi}) = \int D\varphi \delta(\varphi - \hat{\varphi}) \exp(a\varphi), \quad (7)$$

с функциональной δ - функцией. Из эквивалентности равенств

$$\varphi = \hat{\varphi} \Leftrightarrow Q(\varphi, f) \equiv -\partial_t \varphi + U(\varphi) + f \quad (8)$$

следует

$$\delta(\varphi - \hat{\varphi}) = \det M \delta[Q(\varphi, f)], \quad M = M(x, y) \equiv \delta Q(x)/\delta \varphi(y). \quad (9)$$

Представим δ - функцию интегралом по вспомогательному полю (набору полей) φ' :

$$\delta[Q(\varphi, f)] = \int D\varphi' \exp[\varphi' Q(\varphi, f)], \quad (10)$$

суммирование по набору полей φ' подразумевается. Эта формула - бесконечномерный аналог преобразования Фурье от единицы (с учетом линейной замены в функциональном интеграле $\varphi' \rightarrow i\varphi'$). Тогда производящий функционал перепишется в виде:

$$G(a) = \int Df D\varphi D\varphi' \det M \exp \left[-\frac{1}{2} f D^{-1} f + a\varphi + \varphi' (-\partial_t \varphi + U(\varphi) + f) \right]. \quad (11)$$

После взятия интеграла по f :

$$G(a) = \int D\varphi D\varphi' \det M \exp \left[\frac{1}{2} \varphi' D \varphi' + \varphi' (-\partial_t \varphi + U(\varphi) + a\varphi) \right]. \quad (12)$$

В общем случае функционал $U(\varphi, x)$ состоит из линейной по полям и их производным части $L\varphi$, нелинейного вклада $V(\varphi)$, и неслучайной силы η :

$$U(\varphi) = L\varphi + V(\varphi) + \eta. \quad (13)$$

Перепишем уравнение (1) в интегральной форме:

$$\varphi = \Delta_{12} f + \eta + V(\varphi), \quad \Delta_{12} \equiv (\partial_t - L)^{-1}, \quad (14)$$

где $\Delta_{12}(x, x')$ обладает свойством запаздывания - она равна нулю при $t < t'$, в аргументах $x \equiv t, \mathbf{x}$ и $x' \equiv t', \mathbf{x}'$. Тогда

$$M = M_0 + M_1, \quad M_0 \equiv \partial_t + L = -\Delta_{12}^{-1}, \quad M_1 \equiv \delta V(\varphi)/\delta \varphi, \quad (15)$$

и по формуле определителя произведения

$$\det M = \det M_0 \det[1 - \Delta_{12} M_1]. \quad (16)$$

Первый множитель не зависит от полей, и поэтому является несущественной константой. Для второго имеем

$$\ln \det[1 - \Delta_{12}M_1] = -\text{tr}[\Delta_{12}M_1 + \Delta_{12}M_1\Delta_{12}M_1/2 + \dots]. \quad (17)$$

В правой части (17) первое слагаемое – единственный отличный от нуля вклад. На диаграмном языке слагаемым, начиная со второго, отвечают вклады, содержащие замкнутые циклы с запаздывающей линией Δ_{12} , которые занулятся. Рассмотрим выражение $\int dx dx' \Delta_{12}(x, x')M_1(x', x)$. Из-за t – локальности подынтегральное выражение пропорционально $\delta(t - t')$, значит, у $\Delta_{12}(x, x')$ будут совпадающие времена. Это неопределенная величина, так как Δ_{12} содержит разрывную функцию $\theta(t - t')$. Принимается следующее соглашение [4]:

$$\theta(t - t')|_{t=t'} = 0. \quad (18)$$

Тогда определитель M в (12) становится несущественной константой, которую можно отбросить. Таким образом, стохастическая задача (1), (13) эквивалентна квантовой теории поля с удвоенным числом полей $\Phi = \{\varphi, \varphi'\}$ и действием

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \int dx dt dx' dt' \varphi'(\mathbf{x}, t) D(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \varphi(\mathbf{x}', t') + \int dx \int dt [\varphi'(\mathbf{x}, t) - \partial_t \varphi(\mathbf{x}, t) + L\varphi(\mathbf{x}, t) + V(\varphi, \mathbf{x}, t)]. \quad (19)$$

В дальнейшем интегралы в выражениях, относящихся к действию, будут опущены:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \varphi' D \varphi' + \varphi' - \partial_t \varphi + L\varphi + V(\varphi). \quad (20)$$

2.3 Производящий функционал корреляционных функций

Эквивалентность означает, что корреляционные функции исходной теории являются функциями Грина полученной квантовополевой модели. Определим производящий функционал

$$G(A) = c \int D\varphi D\varphi' e^{S(\varphi, \varphi') + A\Phi}, \quad (21)$$

где $A = \{a, a'\}$ – набор источников, c выбирается из условия $G(0) = 1$. Все функции Грина могут быть получены взятием вариационной производной, например для G_2 имеем:

$$G_2(x, x') = \langle \varphi(x) \varphi'(x') \rangle = \frac{\delta^2 G(A)}{\delta a(x) \delta a'(x')} \Big|_{A=0} = \int D\Phi \varphi(x) \varphi'(x') e^{S(\Phi)}. \quad (22)$$

Для проведения вычислений в рамках теории возмущений необходимо выделить квадратичную часть $S_0(\varphi, \varphi')$ действия (20):

$$S(\varphi, \varphi') = S_0(\varphi, \varphi') + \varphi' V(\varphi) \quad (23)$$

Несложно убедиться, что $S_0 = -\frac{1}{2}(\Phi)^T K \Phi$, где K – матрица операторов:

$$S_0(\Phi) = -\frac{1}{2}(\varphi' \varphi) \begin{pmatrix} -D & \partial_t - L \\ (\partial_t - L)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Пропагаторами в теории без взаимодействия ($V(\phi) = 0$) будут являться элементы обратной матрицы $\Delta = K^{-1}$, а именно:

$$\Delta = K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\partial_t - L)^{-1T} \\ (\partial_t - L)^{-1} & (\partial_t - L)^{-1}D(\partial_t - L)^{-1T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi' \varphi' \rangle_0 & \langle \varphi' \varphi \rangle_0 \\ \langle \varphi \varphi' \rangle_0 & \langle \varphi \varphi \rangle_0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Тут введено обозначение $\langle \dots \rangle_0$ для пропагаторов свободной теории. Если $V(\varphi) \neq 0$, функции Грина вычисляются с помощью теории возмущений. Выражение в правой части производящего функционала (21) раскладывается по константам связи - коэффициентам при нелинейностях $V(\varphi)$ (в исследуемых в рамках данной работы задачах потенциал $V(\varphi)$ представляется полиномом по полям и их производным), и к каждому члену разложения применяется теорема Вика. Получаемые выражения можно удобно записать на диаграммном языке с помощью правил Фейнмана - парным корреляторам $\langle \dots \rangle_0$ сопоставляются линии, а нелинейной части действия - вершины. Для уменьшения количества вычислений удобно рассматривать связные/1-неприводимые функции Грина. Их диаграммное представление содержит только связные (их графы связные)/1-неприводимые (их графы остаются связными при удалении любой линии) диаграммы. Определим производящие функционалы для соответствующих функций Грина $W(A)/\Gamma(\alpha)$:

$$W(A) = \ln G(A), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= W(A(\alpha)) - \alpha A, \\ \alpha &= \frac{\delta W(A)}{\delta A}. \end{aligned} \quad (27)$$

2.4 Размерный анализ

Оказывается, что отдельные диаграммы (соответствующие им выражения) расходятся. В рамках данной работы все диаграммы считаются в импульсно-частотном представлении. Мы будем иметь дело с ультрафиолетовыми (УФ-) расходимостями - соответствующие интегралы будут расходиться в области больших импульсов. Для определения расходящихся функций Грина применяется анализ канонических размерностей [4]. В рассматриваемых задачах любая физическая величина F может быть представлена в виде:

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}, \quad (28)$$

где T, L - масштабы времени и длины; d_F^ω, d_F^k - канонические размерности. Последние могут быть получены из требования безразмерности действия и очевидных нормировочных условий:

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1. \quad (29)$$

Полная каноническая размерность физической величины F определяется как $d_F = d_F^\omega + 2d_F^k$ [4]. Рассмотрим 1-неприводимую функцию Грина некой теории, имеющий набор полей Φ . Для нее

$$d_\Gamma = d + 2 - d_\varphi N_\varphi - d_{\varphi'} N_{\varphi'}. \quad (30)$$

В этом выражении N_i - число полей в корреляторе, соответствующем рассматриваемой функции Грина G . Логарифмической размерностью называется такая пространственная размерность d^* , в которой все константы связи безразмерны. Нетрудно показать, что необходимым условием для наличия расходимости является $\delta = d_\Gamma \geq 0$ при $d = d^*$. Величина δ называется формальным индексом расходимости. Если какое-то поле (например, h) входит в действие исключительно в виде пространственной производной, в соответствующих интегралах будет выделяться лишняя степень импульса – расходимость улучшится. Тогда критерий наличия расходимости – положительный реальный индекс $\delta' = \delta - N_h$: $\delta' \geq 0$.

2.5 Регуляризация, ренормировка

Для сокращения возникающих УФ расходимостей необходимо применить процедуру ренормировки – добавить в действие дополнительные расходящиеся слагаемые. В логарифмической размерности d^* теория является ренормируемой – содержащей расходимости только в конечном числе функций Грина. При $d < d^*$ теория супер-ренормируема – содержит конечное число расходимостей в конечном числе функций Грина. При $d > d^*$ теория неренормируема. Первым шагом процедуры ренормировки является выбор регуляризации. В задачах стохастической динамики наиболее часто используют размерную регуляризацию – теория рассматривается в пространстве размерности $d = d^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ [4]. Получаемые выражения при этом аналитически продолжают в область нецелых d . Снятию регуляризации отвечает предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. В размерной регуляризации расходимости будут иметь вид полюсов по ε .

Ренормировка эквивалентна замене переменных – переходу от затравочных переменных (обозначаются индексом (0)) к ренормированным (R). Для зарядов имеем:

$$g_0 = Z_g \mu^\varepsilon g, \quad (31)$$

где μ - ренормировочная масса - вспомогательный параметр, в рамках размерной регуляризации обеспечивающий безразмерность зарядов, по которым производится разложение в рамках теории возмущений. Функции $Z(\varepsilon, \mu, \{g\})$ ($\{g\}$ - полный набор зарядов) называются константами перенормировки. для прочих параметров и полей –

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= Z_\varphi \varphi, \\ e_0 &= Z_e e. \end{aligned} \quad (32)$$

При описанной замене перед некоторыми слагаемыми в действии появляются коэффициенты, являющиеся произведением ренормировочных констант. Введем обозначения Z_i для таких коэффициентов, $i = 1, \dots, k$ (k – число расходящихся функций Грина в модели):

$$Z_i = \prod_i \prod_j Z_{e_i} Z_{g_j}. \quad (33)$$

Константы с числовым индексом вычисляются непосредственно по теории возмущений. Соответствующие интегралы в общем виде будут иметь как УФ – расходящуюся часть (в виде полюсов по ε), так и УФ – конечную. В данной работе используется схема MS (minimal subtraction) – в итоговые выражения для Z_i войдут только полюсные вклады. Константы ренормировки представимы в виде

$$Z_a(g, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{na}(g) \varepsilon^{-n}, \quad (34)$$

где разложение коэффициентов A_{na} в ряд по g начинается с g^n , а сами коэффициенты ищутся по теории возмущений.

2.6 Уравнение ренормгруппы

Введем обозначение для полного набора $\{e\}$ параметров теории. Рассмотрим дифференциальный оператор, отвечающий взятию производной по ренормировочной массе при фиксированных затравочных параметрах:

$$\tilde{D}_\mu = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{e_0}. \quad (35)$$

Запишем связь между ренормированной и затравочной функцией Грина:

$$\Gamma_n(\{g_0\}, \{\varkappa_0\}, \dots) = \prod_i Z_{\varphi_i}^{-N_{\varphi_i}} \Gamma_{nR}(\{g\}, \{\varkappa\}, \mu, \dots). \quad (36)$$

В последнем выражении полный набор дополнительных параметров теории (параметров, не являющихся зарядами), обозначен как $\{\varkappa\}$. Мультииндекс n обозначает набор полей $\{N_{\varphi_i}\}$. Действуя оператором (35) на функцию (36), можно получить следующее соотношение [4]:

$$(D_\mu + \sum_g (\tilde{D}_\mu g) \partial_g + \sum_\varkappa (\tilde{D}_\mu \varkappa) \partial_\varkappa - \sum_i N_{\varphi_i} \gamma_{\varphi_i}) \Gamma_{nR}(\{g\}, \varkappa, \mu, \dots) = 0. \quad (37)$$

Определим β - функции и аномальные размерности γ для произвольной величины F :

$$\begin{aligned} \beta_F &= \tilde{D}_\mu F, \\ \gamma_F &= \tilde{D}_\mu \ln Z_F. \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда выражение (37) переписывается в виде уравнения ренормгруппы:

$$(D_\mu + \sum_g \beta_g \partial_g - \sum_\varkappa \gamma_\varkappa D_\varkappa - \sum_i N_{\varphi_i} \gamma_{\varphi_i}) \Gamma_{nR} = 0. \quad (39)$$

Отметим, что существуют точные (во всех порядках) формулы

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu \varkappa &= -\varkappa \gamma_\varkappa, \\ \beta_g &= -g(\varepsilon + \gamma_g), \end{aligned} \quad (40)$$

которые получаются логарифмированием соотношений (31), (32), и действием на полученные выражения оператором \tilde{D}_μ .

Можно записать уравнение, аналогичное (39), для производящего функционала Γ_R [4]:

$$(\tilde{D}_\mu - \gamma_\varphi D_\alpha) \Gamma_R(\alpha, e, \mu) = 0, \quad (41)$$

где D_α - функциональная операция

$$D_\alpha = \int dx \alpha(x) \frac{\delta}{\delta \alpha(x)}. \quad (42)$$

Под уравнением ренормгруппы в дальнейшем будет пониматься выражение (39). Оказывается возможным получить асимптотику функций Грина в ИК области (при малых частотах/волновых числах, причем "малость" определяется через сравнение с единицей безразмерной величины, составленной из частоты/волнового числа и параметров модели) через уравнения ренормгруппы. Назовем "неподвижными" точками такие значения параметров $\{g^*\}$, которые являются корнями системы бета-функций:

$$\beta_k(g^*) = 0 \quad \forall k. \quad (43)$$

Неподвижная точка является ИК - притягивающей, если собственные числа матрицы $\Omega_{ij}(g) = \partial_i \beta_j(g)$ в ней имеют положительную действительную часть. С учетом подстановки $g \rightarrow g^*$ уравнение ренормгруппы превратится в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\left(D_\mu - \sum_{\varkappa} \gamma_{\varkappa}^* D_{\varkappa} - \sum_i N_{\varphi_i} \gamma_{\varphi_i} \right) \Gamma_{nR} = 0, \quad (44)$$

где введено обозначение для аномальных размерностей в притягивающих точках $\gamma_{\varkappa}^* = \gamma_{\varkappa}(g^*)$.

2.7 Уравнение скейлинга, критические размерности

Предположение о масштабной инвариантности позволяет свести (44) к уравнению скейлинга. Рассмотрим модель с одним параметром \varkappa , имеющим канонические размерности $d_{\varkappa}^\omega = 1$, $d_{\varkappa}^k = -2$. Ограничимся рассмотрением парного коррелятора двух полей $\langle \varphi \varphi \rangle$. Запишем уравнения масштабной инвариантности:

$$\begin{aligned} \left(\sum_i d_i^k D_i - 2d_\varphi^k \right) \langle \varphi \varphi \rangle &= 0, \\ \left(\sum_i d_i^\omega D_i - 2d_\varphi^\omega \right) \langle \varphi \varphi \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Тут $d_\varphi = d_{\varphi_0}$, так как ренормировочные коэффициенты зависят только от безразмерных параметров. Можно скомбинировать уравнения (44) и (45), чтобы исключить слагаемые, фиксированные в асимптотике, например, D_μ :

$$((2 - \gamma_{\varkappa}^*) D_\omega + D_k - 2(d_\varphi^\omega (2 - \gamma_{\varkappa}^*) + \gamma_\varphi^* + d_\varphi^k)) \langle \varphi \varphi \rangle = 0. \quad (46)$$

Введем обозначения $\Delta_\omega = (2 - \gamma_z^*)$, $\Delta_k = 1$, $\Delta_\varphi = d_\varphi^\omega(2 - \gamma_z^*) + \gamma_\varphi^* + d_\varphi^k$:

$$(\Delta_\omega D_\omega + \Delta_k D_k - 2\Delta_\varphi)\langle\varphi\varphi\rangle = 0. \quad (47)$$

Формула (47) называется уравнением скейлинга, а по сути является уравнением Эйлера для обобщенно-однородных функций [4]. Коэффициенты этого уравнения Δ_i называются критическими размерностями. Решения (47) удовлетворяют свойству обобщенной однородности:

$$\langle\varphi\varphi\rangle(k, \omega) = |k|^{\Delta_w/\Delta_k} F\left(\frac{\omega}{|k|^{\Delta_\omega/\Delta_k}}\right), \quad (48)$$

где F - некоторая скейлинговая функция. Нахождение критических размерностей позволяет получать обширную информацию о поведении системы в ИК области. Например, в координатном представлении (в пределе больших $x = |\mathbf{x}|$, t):

$$\langle\varphi(t, \mathbf{x}) \varphi(0, \mathbf{0})\rangle \simeq r^{-2\Delta_\varphi} F(t/r^{\Delta_\omega}). \quad (49)$$

Если из каких-нибудь соображений известно, что для структурных функций выполняется соотношение

$$S_n(t, r) = \langle[\varphi(t, \mathbf{x}) - \varphi(0, \mathbf{0})]^n\rangle \simeq r^{n\chi} F_n(rt^z), \quad (50)$$

с некоторыми коэффициентами χ и z и некой скейлинговой функцией $F_n(\cdot)$, оказывается возможным вычислить эти коэффициенты для определенного класса моделей. В левой части (50) записаны выражения, зависящие от парных корреляторов $\langle\varphi^s(x)\varphi^q(0)\rangle$ - составных операторов соответствующих полей. Ренормировка подобных объектов требует дополнительного (иногда весьма сложного) анализа. Однако если удастся показать, что операторы φ^n не ренормируются, их критические размерности даются выражением $\Delta_{\varphi^n} = n\Delta_\varphi$, и тогда:

$$\chi = -\Delta_\varphi, \quad z = \Delta_\omega. \quad (51)$$

3 Практическая часть

3.1 Постановка задачи

Уравнение КПЗ — одна из простейших полуфеноменологических моделей кинетического огрубления. Последнее характеризуется ростом (по мере эволюции системы) "шероховатости" — функционала от формы поверхности вида

$$w \propto (\langle h^2(t) \rangle - \langle h(t) \rangle^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (52)$$

В формуле (52) угловые скобки подразумевают взятие среднего значения по всей рассматриваемой поверхности, h — случайное поле высоты. Сама модель представляет собой нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение на функцию высоты $h(t, \mathbf{x})$. Помимо случайной силы, в модели представлено слагаемое, линейное по h , включающее в себя силы, аналогичные "поверхностному натяжению". Скорость роста предполагается латеральной (ортогональной к поверхности) и изотропной, следствием чего является наличие в уравнении произвольной функции от градиента поля h . Удерживая лишь ведущий член разложения, можно получить уравнение КПЗ:

$$\partial_t h = \varkappa_0 \partial^2 h + \frac{\lambda_0}{2} (\partial h)^2 + f. \quad (53)$$

Тут введены обозначения $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, \mathbf{x} — d -мерная координата, $i = 1, \dots, d$; $\partial^2 = \partial_i \partial_i$, $(\partial h)^2 = (\partial_i h)(\partial_i h)$, существенно, что коэффициент поверхностного натяжения $\varkappa_0 > 0$. Случайный шум f полагается "замороженным" и описывается парным коррелятором вида

$$\langle f(x)f(x') \rangle = D_0 \delta^{(d)}(x - x'), \quad (54)$$

где $D_0 > 0$ — амплитудный множитель. Удобным оказывается положить $D_0 = 1$, это можно сделать без потери общности — осуществив замену переменных. Следует отметить, что замороженный случайный шум нарушает Галилееву симметрию.

Поле скоростей описывается стохастическим уравнением Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости:

$$\nabla_t v_i = \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i P + F_i, \quad (55)$$

где P — давление, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, F — случайная сила. Скорость распространения турбулентных возмущений обычно гораздо меньше скорости звука, поэтому эффективной моделью является уравнение Навье-Стокса именно для несжимаемой жидкости.

Случайная сила F имеет нулевое среднее значение и парный коррелятор вида

$$\langle F_i(t, \mathbf{x}) F_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) d_f(k) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}, \quad (56)$$

$P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ — ортогональный проектор, $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число, $d_f(k)$ — функция накачки. На физическом уровне она отвечает добавлению энергии в систему; явный

выбор зависимости $d_f(k)$ обеспечивается компромиссом между физикой (вклад от малых значений волновых чисел k должен быть наиболее существенным), и применимостью процедуры перенормировки (она диктует степенной вид зависимости $D \propto k^{4-d-y}$) [11], где d – пространственная размерность, y – дополнительный параметр с физическим значением $y = 4$. Кроме того, можно рассмотреть включение локального шума (коэффициенты D_0, D'_0 положительны):

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-y} + D'_0. \quad (57)$$

Добавление последнего на физическом уровне эквивалентно встряхиванию "резервуара" с жидкостью (из-за наличия моды $k = 0$, [11]). Полученная расширенная модель позволяет рассматривать как турбулентную жидкость, так и жидкость, находящуюся в тепловом равновесии.

Влияние турбулентной среды описано "минимальной" заменой производной по времени на Лагранжеву (Галилеево ковариантную):

$$\nabla_t h = \partial_t h + (v_i \partial_i) h, \quad (58)$$

Однако, как мы вскоре увидим, в настоящей модели эта замена не является самодостаточной. Помимо того, что наличие внешнего поля скорости приводит к возникновению нового слагаемого, сама производная должна быть модифицирована добавлением новой константы связи.

3.2 Квантовополевая переформулировка

Следуя схеме, описанной в (2.2), можно записать действие, эквивалентное описанной стохастической задаче (53), (54), (55), (56), (57), (58):

$$S_h(\Phi) = \frac{1}{2} h' h' + h' \{ -\partial_t h - v_i \partial_i h + \varkappa_0 \partial^2 h + \frac{1}{2} \lambda_0 (\partial_i h \partial_i h) \} + v'_i \{ -\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + \nu_0 \partial^2 v_i \} + \frac{1}{2} v'_i D_F v'_i. \quad (59)$$

Все переменные в данной формуле являются затравочными, даже если не имеют явно значка "0". Сформулируем правила Фейнмана. Из квадратичной части действия получим пропагаторы:

$$\begin{array}{cccc} \langle hh \rangle_0 & \langle hh' \rangle_0 & \langle v_i v_j \rangle_0 & \langle v_i v'_j \rangle_0 \\ \hline \frac{2\pi\delta(\omega)}{\varkappa_0^2 k^4} & \frac{1}{-i\omega + \varkappa_0 k^2} & \frac{d_F(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} P_{ij}(k) & \frac{1}{-i\omega + \nu_0 k^2} P_{ij}(k) \end{array}$$

В выражения для $\langle vv \rangle_0$ и $\langle vv' \rangle_0$ входят ортогональные проекторы – это следствие того, что обратный оператор ищется на подпространстве поперечных ($\partial_i v_i = 0$) полей скорости.

По нелинейной части действия ищутся вершины. Нахождение вершинных множителей эквивалентно взятию функциональной производной от действия, поэтому всем вершинам, содержащим поле скорости v , соответствуют ортогональные проекторы, истинный вид вершинных множителей приведен в квадратных скобках:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad k \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad k \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad k \end{array} \\
 (i)^2 \lambda p_i k_i & i \alpha k_j & \sigma \delta_{ij} \\
 & [i \alpha k_i P_{ij}(p)] & [\sigma \delta_{ab} P_{ai}(k) P_{bj}(p)]
 \end{array}$$

При непосредственных вычислениях соответствующие проекторы будут сворачиваться с проекторами пропагаторов (по тождеству $P_{ij}(k)P_{js}(k) = P_{is}(k)$), в дальнейшем для краткости "вершинные" проекторы будут опущены, и будут использоваться множители, приведенные без квадратных скобок.

3.3 Канонические размерности, анализ контрчленов

Следуя рецепту из 2.4, найдем канонические размерности параметров теории:

F	k	ω	h	h'	v	v'	\varkappa_0	λ_0	ν_0	D_0	D'_0	σ_0	α_0	μ
d_F^ω	0	1	-1	1	1	-1	1	2	1	3	3	-2	0	0
d_F^k	1	0	$d/2$	$d/2$	-1	$d+1$	-2	$-2-d/2$	-2	$y-6$	$-d-2$	$2+d/2$	0	1
d_F	1	2	$-2+d/2$	$2+d/2$	1	$d-1$	0	$2-d/2$	0	y	$4-d$	$-2+d/2$	0	1

В таблице выше μ - ренормировочная масса, смысл параметров σ_0 , α_0 будет разъяснен в конце данного параграфа. Из размерных соображений выберем константы связи:

$$\alpha_0, \quad g_0 = D_0/\nu_0^3 \quad (g'_0 = D'_0/\nu_0^3), \quad u_0 = \varkappa_0/\nu_0, \quad w_0 = \lambda_0/\varkappa_0^2, \quad z_0 = \sigma_0 \varkappa_0^2. \quad (60)$$

Из приведенной таблицы можно видеть, что логарифмическая размерность теории $d = 4$. Запишем формулу (30) для формального и определим реальный индекс расходимости:

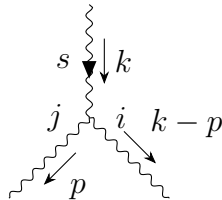
$$\begin{aligned}
 \delta &= 6 - 4N_{h'} - N_v - 3N_{v'} \\
 \delta' &= 6 - 4N_{h'} - N_v - 4N_{v'} - N_h.
 \end{aligned} \quad (61)$$

Реальный индекс расходимости меньше формального; это связано с тем, что действие зависит от пространственных производных полей v' и h . Чтобы определить расходящиеся функции Грина, необходимо выяснить, для каких наборов чисел $(N_h, N_{h'}, N_v, N_{v'})$ выполняется условие $\delta' \geq 0$. Расходящиеся функции Грина, совместно с потенциальными контрчленами, приведены в таблице ниже.

	Γ	δ'_Γ	δ_Γ	Возможные контрчлены
1	$\langle v' \rangle$	2	3	$\partial^2 \partial v', \partial_i \partial v'$
2	$\langle v' v \rangle$	1	2	$v'_j \partial^2 v_j$
3	$\langle v' v v \rangle$	0	1	$v'_j (v \partial) v_j$
4	$\langle v' h \rangle$	1	3	$(\partial_i v'_j) \partial_i \partial_j h$
5	$\langle v' v h \rangle$	0	2	$(\partial_j v'_i) v_j (\partial_i h), (\partial_j v'_i) v_i (\partial_j h)$
6	$\langle v' h h \rangle$	0	3	$(\partial_j v'_i) (\partial_i h) (\partial_j h)$
7	$\langle h' \rangle$	2	2	$\partial^2 h', \partial_i h'$
8	$\langle h' v \rangle$	1	1	$(\partial_i h') v_i$
9	$\langle h' v v \rangle$	0	0	$h' v^2$
10	$\langle h' h \rangle$	1	2	$h' \partial^2 h$
11	$\langle h' v h \rangle$	0	1	$h' (v \partial) h$
12	$\langle h' h h \rangle$	0	2	$h' (\partial h)^2$
13	$\langle h' h' \rangle$	$2 - d$	$4 - d$	$h' h'$

Исключены функции Грина, не содержащие полей h' и v' , так как для них все диаграммы дадут нуль из-за наличия замкнутого цикла запаздывающих пропагаторов. Контрчлены типа 1, 7 ответственны за изменение среднего значения соответствующих полей, и могут быть устранены изменением среднего значения случайного шума, см. [6]. Отдельно стоит рассмотреть $\langle h' h' \rangle$. Несмотря на отрицательный реальный индекс $\delta = \delta' = -2$, из всех диаграмм соответствующего коррелятора выделится δ – функция от внешней частоты, и функция Грина становится ИК – расходящейся (логарифмически). Слагаемые вида 2, 3, 10, 11, 12, 13 уже присутствуют в действии, 4 – тождественный нуль, так как жидкость несжимаема. Можно показать, что не существует диаграмм, отвечающим вкладом 5, 6. За счет интегрирования по частям и условия несжимаемости вклад 8 – тоже тождественный нуль.

Таким образом, модель становится ренормируемой при добавлении в нее дополнительного контрчлена, пропорционального квадрату поля скорости. Снабдим соответствующее слагаемое новой константой связи σ_0 и добавим его в действие. Конечно, новому контрчлену отвечает новая вершина с вершинным множителем:



$$i(k_j \delta_{is} + k_i \delta_{sj}) [i(k_b \delta_{ca} + k_c \delta_{ab}) P_{as}(-k) P_{bj}(p) P_{ci}(k-p)]$$

Произведем замену переменных, соответствующую переходу от исходного действия к ре-

нормированному:

$$S_h(\Phi) = Z_1 \frac{1}{2} h' h' + h' \{ -\partial_t h - Z_2 \alpha_0 v_i \partial_i h + Z_3 \varkappa_0 \partial^2 h + Z_4 \frac{1}{2} \lambda_0 (\partial_i h \partial_i h) \} + \\ + Z_5 \frac{1}{2} \sigma_0 h' v_i v_i + v'_i \{ -\partial_t v_i - v_j \partial_j v_i + Z_6 \nu_0 \partial^2 v_i \} + \frac{1}{2} v'_i D_F v'_i \quad (62)$$

Из размерных соотношений, чтобы корректно связать скалярное поле и поле скорости, необходимо ввести новый параметр α_0 как множитель в ковариантной производной скалярного поля.

Приведем соотношение между затравочными зарядами и ренормированными:

$$\alpha = Z_\alpha \alpha, \quad g = Z_g \mu^y g, \quad g' = Z_{g'} \mu^\varepsilon g', \\ u_0 = Z_u u, \quad w_0 = Z_w \mu^{\varepsilon/2} w, \quad z_0 = Z_z \mu^{-\varepsilon/2} z. \quad (63)$$

3.4 Нахождение ренормировочных констант

Будем находить константы по порядку - от Z_1 к Z_6 . В вычислениях, связанных с интегрированиями по волновым числам, будут использоваться следующие формулы:

$$\int \frac{k_i k_j}{k^{a+2}} d\mathbf{k} = \frac{\delta_{ij}}{d} \int \frac{1}{k^a} d\mathbf{k}, \quad (64)$$

$$\int_{k>m} \frac{1}{k^a} d\mathbf{k} = S_d \frac{m^{d-a}}{a-d}, \quad (65)$$

где $a > d$, S_d - площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве, $S_d = (2\pi)^d / \Gamma(d/2)$. Здесь и далее m - параметр ИК регуляризации.

Для каждой конкретной расходящейся функции Грина нужно выписать все расходящиеся вклады в приближении одной петли. диаграмное представление $\langle h' h' \rangle_{1\text{-непр}}$ в таком состоит из единственного вклада:

$$\langle h' h' \rangle_{1\text{-непр}} = 2\pi \delta(\Omega) + \frac{1}{2} \rightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \leftarrow, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0.$$

По правилам Фейнмана такой диаграмме соответствует выражение:

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{j} \text{---} \\ \text{---} \xleftarrow{p} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \xleftarrow{p-k} \text{---} \end{array} = \Delta_1 = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\pi\delta(\omega)}{\varkappa_0^2 k^4} \frac{2\pi\delta(\Omega-\omega)}{\varkappa_0^2 (p-k)^4} \lambda^2 (-k)_i (k-p)_i k_j (p-k)_j.$$

Так как формальный индекс расходимости $\delta = 0$, необходимо выделить слагаемые, пропорциональные нулевой степени внешнего импульса - "отобрать" полюсные части. Видно, что

для этого достаточно положить внешний импульс p равным нулю. Интеграл по частотам берется тривиально, по импульсам – с помощью формул (64), (65). Введено обозначение $\hat{f} = f S_d / (2\pi)^d$:

$$\Delta_1 = \delta(\Omega) \frac{2\pi\lambda_0^2}{(2\pi)^d \varkappa_0^4} \int d\mathbf{k} \frac{(-k)_i k_i k_j (-k)_j}{k^8} = \delta(\Omega) \frac{2\pi\lambda_0^2}{(2\pi)^d \varkappa_0^4} S_d \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = 2\pi\delta(\Omega) w_0 \hat{w}_0 \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (66)$$

Все константы Z_i зависят от ренормированных переменных, при расчете однопетлевых вкладов параметры подставляются в "нулевом" порядке теории возмущений, $\varkappa_0 \rightarrow \varkappa$, $g_0 \rightarrow \mu^\varepsilon g$, $w_0 \rightarrow \mu^\varepsilon w$. Например, для Z_3 :

$$\langle h'h' \rangle_{1\text{-непр}} = 2\pi\delta(\Omega) \left\{ Z_1 + w_0 \hat{w}_0 \left(\frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \quad (67)$$

Для конечности левой части при $(\varepsilon, y) \rightarrow 0$, $((\frac{\mu}{m})^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon) - \text{УФ} - \text{конечная величина})$, константа Z_1 должна быть выбрана в виде

$$Z_1 = 1 - \frac{w\hat{w}}{2\varepsilon}. \quad (68)$$

В аналогичных выражениях далее будут возникать множители $(\frac{\mu}{m})^\varepsilon$, $(\frac{\mu}{m})^y$, каждый из которых в конечном итоге может быть опущен исходя из аналогичных рассуждений.

Для $\langle h'hv_j \rangle$ диаграмное представление:

$$\langle h'hv_j \rangle_{1\text{-непр}} = i\alpha_0 q_j + \text{[диаграммы]} + \text{[диаграммы]}, \quad \delta = 1, \delta' = 0.$$

Пронумеруем все диаграммы в (3.4) цифрами, начиная с единицы, и будем обозначать соответствующие вклады как Δ_i . Вычислим Δ_1 :

$$\text{[Diagram with momenta } p+q, p-k, k+q, k, q, m, p, b \text{]} = \Delta_1.$$

Для удобства тут (и в аналогичных выражениях ниже) приведем отдельно вычисления при $D_0 = 0$ и $D'_0 = 0$ в определении (57) (то есть отдельно для локального случая $D_0 = 0$ и отдельно для нелокального $D'_0 = 0$; при этом ответы для общего случая складываются

из ответов для этих двух частных случаев). Введем обозначение $\bar{S}_d = S_d/(2\pi)^d$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i\omega + \varkappa_0(k+q)^2} \frac{1}{i\omega + \varkappa_0(p-k)^2} \frac{d_F(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \times \\ & \times P_{km}(k) \sigma_0 \delta_{mb} i^2 \lambda_0(k+q, p-k) i \alpha_0 q_k = \\ & \frac{1}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} i q_b D_0 \sigma_0 \lambda_0 \alpha_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-y}}{y} \quad (d_F(k) = D_0 k^{4-d-y}), \\ & \frac{1}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} i q_b D'_0 \sigma_0 \lambda_0 \alpha_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (d_F(k) = D'_0). \end{aligned} \quad (69)$$

Интеграл по частотам берется по вычетам, формулы для вычисления интегралов по волновым числам приведены в начале данного параграфа. Оказывается, что вклады с Δ_2 по Δ_5 , вернее, расходящихся их части, равны нулю – при непосредственном их вычислении возникают выражения, содержащие свертку $k_n P_{nm}(k) = 0$. Для Δ_7 :

$$= \Delta_7 = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\pi\delta(\omega)}{\varkappa_0^2 k^4} \frac{\lambda_0^2 \alpha_0 (p+q-k)_i k_i q_k k_b (p-k)_k}{(i\omega + \varkappa_0(p+q-k)^2)(i\omega + \varkappa_0(p-k)^2)},$$

$$\Delta_7 = \frac{i\lambda_0^2 \alpha_0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{2\pi}{\varkappa_0^2 k^4} \frac{(-k)_i k_i q_k k_b (-k)_k}{(\varkappa_0 k^2)^2} = i q_b w_0 \hat{w}_0 \alpha_0 \frac{1}{d} \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (70)$$

Аналогично вычисляются оставшиеся диаграммы $\Delta_6 = \Delta_8 = -\Delta_7$. Найдём константу ренормировки в локальном случае:

$$Z_2 = 1 - \left(\frac{1}{2u(1+u)} \hat{g}' z w \left(1 - \frac{1}{d}\right) - w \hat{w} \frac{1}{d} \right) \frac{1}{\varepsilon}, \quad (71)$$

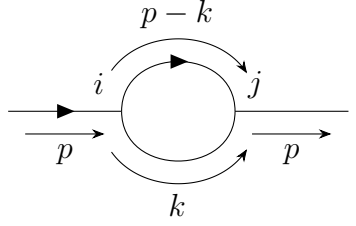
и при учете двух вкладов:

$$Z'_2 = 1 - \frac{1}{2u(1+u)} (\hat{g} + \hat{g}') z w \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{1}{y} + \hat{w} w \frac{1}{d\varepsilon}. \quad (72)$$

В данной главе ренормировочные константы для разных случаев обозначены по-разному (со штрихом для общего случая, без штриха для локального). В последующих главах соответствующее обозначение будет опущено, поскольку из контекста будет понятно, о чем идет речь.

Для константы Z_3 имеем:

$$\langle h'h \rangle_{1\text{-непр}} = i\omega - \varkappa_0 p^2 + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---}, \quad \delta = 2, \delta' = 1,$$

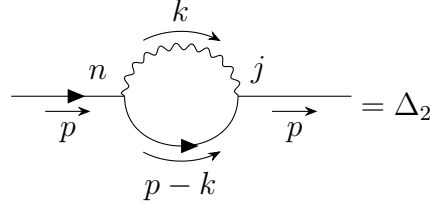


$$= \Delta_1 = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\pi\delta(\omega)}{\varkappa_0^2 k^4} \frac{\lambda_0^2(i)^4}{i\omega + \varkappa_0(p-k)^2} (p-k)_i k_j p_j (-k)_j. \quad (73)$$

Для выделения соответствующей степени импульса необходимо разложить в ряд знаменатель (73):

$$\Delta_1 = -\frac{\lambda_0^2 p_j}{(2\pi)^d \varkappa_0^3} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^6} (p_i - k_i) \left(1 + \frac{2p_s k_s}{k^2} + O(p^2)\right) = \hat{w}_0 w_0 \varkappa_0 p^2 \frac{1}{d} \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon}. \quad (74)$$

Для Δ_2 :



$$= \Delta_2$$

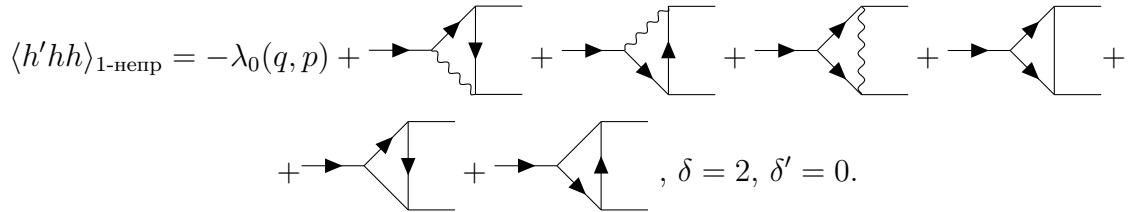
$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d_F(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} P_{jn}(k) \frac{1}{-i\omega + \varkappa_0(p-k)^2} i\alpha_0(p-k)_n i\alpha_0 p_j = \\ &= -\frac{\pi\alpha_0^2}{\nu_0(\nu_0 + \varkappa_0)} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d_F(k)}{k^4} \left(p^2 - \frac{(p, k)^2}{k^2}\right) : \\ &= -\frac{1}{2\nu_0(\nu_0 + \varkappa_0)} p^2 \alpha_0^2 D_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-y}}{y} \quad (d_F(k) = D_0 k^{4-d-y}), \\ &= -\frac{1}{2\nu_0(\nu_0 + \varkappa_0)} p^2 \alpha_0^2 D'_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (d_F(k) = D'_0). \end{aligned} \quad (75)$$

Тогда

$$Z_3 = 1 + \left(\hat{w}w \frac{1}{d} - \frac{1}{2u(1+u)} \alpha^2 \hat{g}' \left(1 - \frac{1}{d}\right)\right) \frac{1}{\varepsilon}, \quad (76)$$

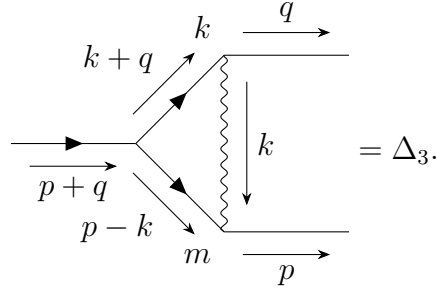
$$Z'_3 = 1 + \hat{w}w \frac{1}{d\varepsilon} - \frac{1}{2u(1+u)} \alpha^2 (\hat{g} + \hat{g}') \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{1}{y}. \quad (77)$$

Рассмотрим вычисление диаграмм для Z_4 :



$$\langle h'hh \rangle_{1\text{-непр}} = -\lambda_0(q, p) + \dots + \dots, \quad \delta = 2, \delta' = 0.$$

Вклады Δ_1, Δ_2 равны нулю из-за слагаемых вида $(k-q, p+q)_m P_{mn}(k)(k+p)_n$. Последние являются полиномами степени ≥ 3 по внешним импульсам, что автоматически гарантирует УФ — конечность соответствующих выражений.



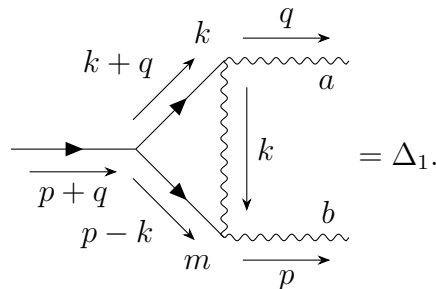
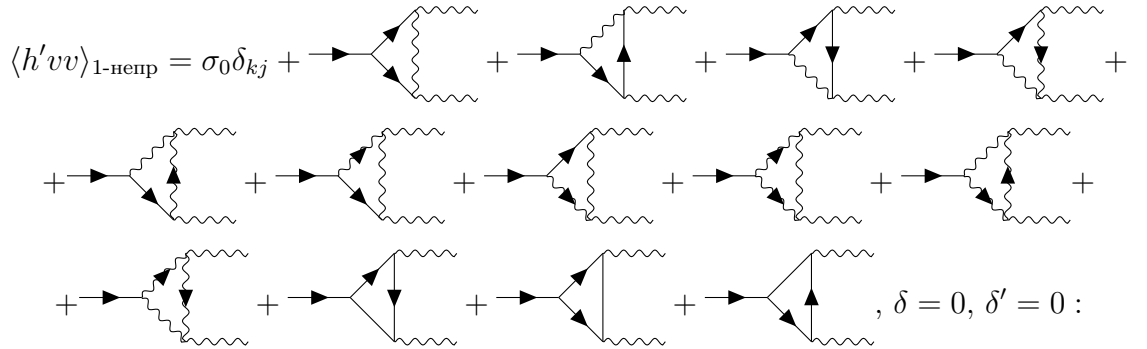
$$\begin{aligned} \Delta_3 = & \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i\omega + \varkappa_0(k+q)^2} \frac{1}{i\omega + \varkappa_0(p-k)^2} \frac{1}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \frac{d_F(k)}{\times} \\ & \times P_{km}(k) \lambda_0(k+q, p-k) i^4 \alpha_0 q_k \alpha_0 p_m : \\ & - \frac{1}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} (q, p) \lambda_0 \alpha_0^2 D_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-y}}{y} (d_F(k) = D_0 k^{4-d-y}), \\ & - \frac{1}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} (q, p) \lambda_0 \alpha_0^2 D'_0 \bar{S}_d \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} (d_F(k) = D'_0). \end{aligned} \quad (78)$$

Вклад Δ_4 технически вычисляется аналогично, $\Delta_4 = w_0 \hat{w}_0(q, p) \frac{\lambda_0 m^{-\varepsilon}}{d \varepsilon} = -\Delta_5 = \Delta_6$.
Таким образом,

$$Z_4 = 1 + \left(-\frac{1}{2u(1+u)} \hat{g}' \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{d}\right) + w \hat{w} \frac{1}{d} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (79)$$

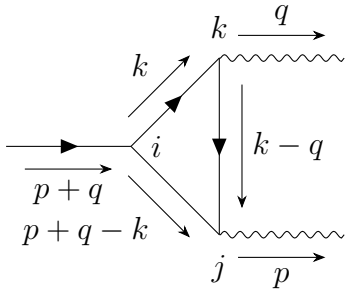
$$Z'_4 = 1 - \frac{1}{2u(1+u)} (\hat{g} + \hat{g}') \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{1}{y} + w \hat{w} \frac{1}{d} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (80)$$

Рассмотрим вычисление Z_5 .



$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{i\omega + \varkappa_0(k+q)^2} \frac{1}{-i\omega + \varkappa_0(p-k)^2} \frac{d_F(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} \times \\
&\quad \times P_{mk}(k)(i)^2 \lambda_0(k+q, p-k) \sigma_0^2 \delta_{ka} \delta_{mb} = \\
&= \frac{\pi \sigma_0^2 \lambda_0}{(2\pi)^{d+1} \nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} \int d\mathbf{k} \frac{1}{k^4} d_F(k) P_{ab}(k) : \\
&\quad \bar{S}_d D_0 \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \delta_{ab} \frac{m^{-y}}{y} (d_F(k) = D_0 k^{4-d-y}), \\
&\quad \bar{S}_d D'_0 \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{2\nu_0 \varkappa_0 (\nu_0 + \varkappa_0)} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \delta_{ab} \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} (d_F(k) = D'_0).
\end{aligned} \tag{81}$$

Вклады с Δ_2 по Δ_7 равны нулю – в каждом из соответствующих слагаемых возникнет свертка вектора с ортогональным проектором вида $k_i P_{ij}(k) = 0$. Сумма $\Delta_{8,9,10}$ – тождественный ноль. На физическом уровне это соответствует наличию Галлилеевой симметрии – можно записать аналог тождеств Уорда в случае преобразований Галилея, из которого будет следовать сокращение трех диаграмм. Прямое сокращение соответствующих вкладов может быть проверено прямым вычислением.



$$\Delta_{11} = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\pi \delta(\omega) \lambda_0 k_i (p+q-k)_i \alpha_0 (q-k)_a \alpha_0 (p+q-k)_b}{\varkappa_0^2 (p+q-k)^4 (i\omega + \varkappa_0(k-q)^2) (i\omega + \varkappa_0(k)^2)}.$$

Выделим нужную степень импульса:

$$\Delta_{11} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{\lambda_0 \alpha_0^2}{\varkappa_0^2 k^4} \frac{k_i (-k)_i}{\varkappa_0 (k)^2} \frac{k_a k_b}{\varkappa_0 (k)^2} = -\frac{\lambda_0 \alpha_0^2 \delta_{ab}}{(2\pi)^d \varkappa_0^4 d} S_d \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} = -\hat{w}_0 \alpha_0^2 \frac{\sigma_0}{z_0} \delta_{ab} \frac{1}{d} \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon}. \tag{82}$$

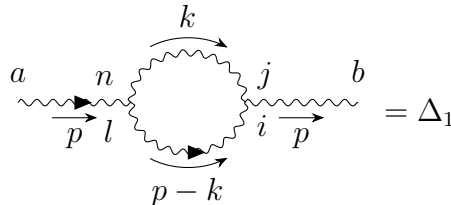
Вклады Δ_{12} , Δ_{13} технически вычисляются аналогично, $\Delta_{13} = -\Delta_{12} = \Delta_{11}$.

Просуммировав все Δ_i , получим:

$$Z_5 = 1 - (-\hat{w} \alpha^2 \frac{1}{z} \frac{1}{d} + \hat{g}' w z \frac{1}{2u(u+1)} (1 - \frac{1}{d})) \frac{1}{\varepsilon}, \tag{83}$$

$$Z'_5 = 1 + \hat{w} \alpha^2 \frac{1}{z} \frac{1}{d} \frac{1}{\varepsilon} - (\hat{g} + \hat{g}') w z \frac{1}{2u(u+1)} (1 - \frac{1}{d}) \frac{1}{y}. \tag{84}$$

Единственная диаграмма, дающая вклад в $\langle v'_i v_i \rangle_{1\text{-непр}}$:



$$= \Delta_1$$

Понятно, что Δ_1 имеет два знача, для непосредственного вычисления удобно произвести по ним свертку:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \Delta_1 &= \int \frac{d\omega d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d+1}} \frac{d_F(k)}{\omega^2 + \nu_0^2 k^4} P_{jn}(k) \frac{1}{-i\omega + \nu_0(p-k)^2} \times \\ &\times P_{li}(p-k) i((p-k)_b \delta_{ij} + (p-k)_j \delta_{ib}) i(p_l \delta_{an} + p_n \delta_{al}) P_{ab}(p) : \\ &- p^2 \bar{S}_d D_0 \frac{1}{\nu_0^2} \frac{1}{4} \frac{(d-1)^2}{d+2} \frac{m^{-y}}{y} (d_F(k) = D_0 k^{4-d-y}), \\ &- p^2 \bar{S}_d D'_0 \frac{1}{\nu_0^2} \frac{1}{4} \frac{(d-1)^2}{d+2} \frac{m^{-\varepsilon}}{\varepsilon} (d_F(k) = D'_0), \end{aligned} \quad (85)$$

откуда получаются выражения для Z_6 :

$$Z_6 = 1 - \hat{g}' \frac{1}{4} \frac{(d-1)}{d+2} \frac{1}{y}, \quad (86)$$

$$Z'_6 = 1 - (\hat{g} + \hat{g}') \frac{1}{4} \frac{(d-1)}{d+2} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (87)$$

Дальнейшее повествование будет разделено на два раздела - анализ модели с локальным вкладом в корреляторе случайной силы уравнения НС ($g = 0$), и анализ модели в общем случае ($g, g' \neq 0$).

3.5 КПЗ + НС, локальный случай

3.5.1 β - функции и аномальные размерности

Вычислим аномальные размерности. Для этого достаточно найти вычеты при полюсах по ε в выражениях (68), (71), (76), (79), (83), (86):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1}{\bar{S}_d} &= \frac{w^2}{2}, \\ \frac{\gamma_2}{\bar{S}_d} &= \frac{g'zw}{2u(1+u)} \left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{w^2}{d}, \\ \frac{\gamma_3}{\bar{S}_d} &= \frac{\gamma_4}{\bar{S}_d} = \frac{\alpha^2 g'}{2u(1+u)} \left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{w^2}{d}, \\ \frac{\gamma_5}{\bar{S}_d} &= \frac{g'wz}{2u(u+1)} \left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{w\alpha^2}{zd}, \\ \frac{\gamma_6}{\bar{S}_d} &= g' \frac{(d-1)}{4(d+2)}. \end{aligned} \quad (88)$$

Из соотношений между РГ - константами следует связь между аномальными размерностями. Например, $Z_a Z_b = Z_c \Rightarrow \gamma_a + \gamma_b = \gamma_c$. Тогда с учетом тривиальных алгебраических

преобразований:

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_\alpha}{\bar{S}_d} &= \frac{g'zw}{2u(1+u)}\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{w^2}{d}, \\
\frac{\gamma_{g'}}{\bar{S}_d} &= -g' \frac{3(d-1)}{4(d+2)}, \\
\frac{\gamma_u}{\bar{S}_d} &= \frac{\alpha^2 g'}{2u(1+u)}\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{w^2}{d} - g' \frac{(d-1)}{4(d+2)}, \\
\frac{\gamma_w}{\bar{S}_d} &= w^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{d}\right) - \frac{\alpha^2 g'}{2u(1+u)}\left(1 - \frac{1}{d}\right), \\
\frac{\gamma_z}{\bar{S}_d} &= \frac{g'}{2u(1+u)}\left(1 - \frac{1}{d}\right)(wz + 2\alpha^2) - w^2\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{d}\right) - \frac{w\alpha^2}{zd}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Непосредственно β - функции получаются с помощью тождества (40), ($d = 4$):

$$\begin{aligned}
\beta_\alpha &= -\alpha \bar{S}_d \left(\frac{3g'zw}{8u(1+u)} - \frac{w^2}{4} \right), \\
\beta_{g'} &= -g' \left(\varepsilon - \bar{S}_d g' \frac{3}{8} \right), \\
\beta_u &= -u \bar{S}_d \left(\frac{3\alpha^2 g'}{8u(1+u)} - \frac{w^2}{4} - \frac{3g'}{24} \right), \\
\beta_w &= -w \left(\frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}_d w^2 \frac{1}{2} - \bar{S}_d \frac{3\alpha^2 g'}{8u(1+u)} \right), \\
\beta_z &= -z \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}_d \frac{3g'}{8u(1+u)} (wz + 2\alpha^2) - \bar{S}_d w^2 \frac{3}{4} - \bar{S}_d \frac{w\alpha^2}{4z} \right).
\end{aligned} \tag{90}$$

Согласно параграфу 2.7, необходимо определить корни полученной системы (неподвижные точки), и найти соответствующие области устойчивости.

3.5.2 Неподвижные точки, области устойчивости, критические размерности

Корни системы β - функций приведены в таблице ниже:

α^*	g'^*	u^*	w^*	z^*	$\{\lambda_i\}$
$\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$i\sqrt{S/\varepsilon}u(u+1)/(2\sqrt{6})$	$\{1\}$
$-\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$i\sqrt{S/\varepsilon}u(u+1)/(2\sqrt{6})$	$\{1\}$
$\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-i\sqrt{S/\varepsilon}u(u+1)/(2\sqrt{6})$	$\{1\}$
$-\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-i\sqrt{S/\varepsilon}u(u+1)/(2\sqrt{6})$	$\{1\}$

$$\{1\} = \{0, \varepsilon, \varepsilon/3, (a-b)/c, (a+b)/c\}.$$

В последней графе обозначены собственные значения матрицы $\Omega_{ij} = \partial_i \beta_j$ в соответствующей неподвижной точке. Введены обозначения $a = \varepsilon u(3 + 4u)$, $b = \varepsilon \sqrt{17u^2 + 48u^3 + 32u^4}$, $c = 12u(u + 1)$. Множество точек с положительными значениями $\Re \lambda_i$ задается условием $\varepsilon > 0$. Тогда $\Re\{(a-b)/c\} > 0$, если $-0.75 < u^* < 0$. Для $\Re\{(a+b)/c\} > 0$ имеем $u^* < -1 \vee -0.75 < u^* < -0.5 \vee u^* > 0$. Таким образом, все неподвижные точки в таблице являются ИК - притягивающими одновременно при $\varepsilon > 0$, если $-0.75 < u^* < -0.5$.

Важно отметить, что z^* ведет себя как $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ для неподвижных точек в таблице; этот "парадокс" объясняется выбором констант связи в формуле (60). Действительно, достаточно перейти в систему зарядов, где вместо z вводится заряд zw , чтобы координаты неподвижных точек "исправились" (значения остальных координат при этом не изменятся). В таких переменных проблема не возникает, и мы имеем дело с обычным разложением по ε :

$$g^* = 8\varepsilon/3, \quad w^{*2} = -2\varepsilon/3, \quad \alpha^{*2} = u^*(u^* + 1)/6, \quad z^*w^* = -\alpha^{*2}. \quad (91)$$

Этот выбор зарядов отвечает ситуации, когда поля h и h' были растянуты таким образом, чтобы константа связи w стояла в амплитуде коррелятора (54), а не при нелинейности в уравнении (53).

Так как все найденные неподвижные точки описываются выражением (91), будем называть полученное множество неподвижных точек "кривой"; это гладкая кривая в пятимерном пространстве параметров. Она параметризуется значением заряда u^* и содержит ИК-притягивающий сегмент $\varepsilon > 0$, $-0.75 < u^* < -0.5$.

Рассмотрим другие системы зарядов (произведя замену и переписав β -функции) – такой подход иногда [13] способствует нахождению новых устойчивых точек, так как позволяет получить данные об областях, которым отвечают бесконечные (или нулевые) значения зарядов. Нами был рассмотрен широкий набор разных систем; среди них хорошей системой, дающей новые точки, оказалась только одна, получаемая переходом к переменным $k = 1/z$, $p = wz$:

α^*	g^*	u^*	p^*	k^*	$\{\lambda_i\}$
\forall	0	$\forall (\neq \{0, -1\})$	\forall	0	{1}
$\sqrt{u(u+1)}/3$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	0	0	{2}
$-\sqrt{u(u+1)}/3$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	0	0	{2}
$\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-u(u+1)/6$	$-i2\sqrt{6}\sqrt{\varepsilon/S}/(u(u+1))$	{3}
$\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-u(u+1)/6$	$i2\sqrt{6}\sqrt{\varepsilon/S}/(u(u+1))$	{3}
$-\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-u(u+1)/6$	$-i2\sqrt{6}\sqrt{\varepsilon/S}/(u(u+1))$	{3}
$-\sqrt{u(u+1)}/6$	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall (\neq \{0, -1\})$	$-u(u+1)/6$	$i2\sqrt{6}\sqrt{\varepsilon/S}/(u(u+1))$	{3}

$$\{1\} = \{0, 0, 0, -\varepsilon, -\varepsilon/2\},$$

$$\{2\} = \{0, -\varepsilon/3, \varepsilon/6, \varepsilon, \varepsilon(1+2u)/(3(1+u))\},$$

$$\{3\} = \{0, 0, 0, (a' - b')/c', (a' + b')/c'\}.$$

В таблице выше введены обозначения $a' = \varepsilon(1 + 3u + 2u^2)$, $b' = \varepsilon\sqrt{9 + 46u + 85u^2 + 68u^3 + 20u^4}$, $c' = 12(u + 1)^2$. Рассмотрение случая четырех последних корней приводит к условию на строгую положительность $\Re\{(a' - b')/c'\} > 0$ – это $\varepsilon > 0$ и $u^* \neq -0.5$. Для $\Re\{(a' + b')/c'\} > 0$ имеем (учитывая, что $\varepsilon > 0$) $-0.75 < u^* < -0.5$, что отвечает исходной системе (то есть идентично кривой (91)). Кроме

того, имеется "Гауссова" неподвижная точка $g^* = w^* = 0$, $z^* \rightarrow \infty$, которая является ИК - притягивающей при отрицательных значениях ε .

Теперь для каждого режима нужно вычислить критические размерности полей. Для этого достаточно воспользоваться готовыми формулами из Пункта 2.7. Для Гауссовой точки получаем:

$$\Delta_\omega = 2, \Delta_h = -\frac{\varepsilon}{2}, \Delta_v = 1, \Delta_{h'} = 4 - \frac{\varepsilon}{2}, \Delta_{v'} = 3 - \varepsilon. \quad (92)$$

Для нетривиальной точки (кривой (91)) в однопетлевом приближении имеем:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_h = 0, \Delta_v = 1 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_{h'} = 4 - \varepsilon, \Delta_{v'} = 3 - \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (93)$$

Важно отметить, что именно нетривиальная точка отвечает физически интересным случаям $d = 3$, $d = 2$.

3.6 КПЗ + НС, общий случай

3.6.1 β - функции и аномальные размерности

Аналогично локальному случаю вычисляются все аномальные размерности и β - функции, система последних имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta_\alpha &= -\alpha \bar{S}_d \left(\frac{3(g+g')zw}{8u(1+u)} - \frac{w^2}{4} \right) \\ \beta_g &= -g \left(y - \bar{S}_d (g+g') \frac{3}{8} \right) \\ \beta_{g'} &= -g' \left(\varepsilon - \bar{S}_d (g+g') \frac{3}{8} \right) \\ \beta_u &= -u \bar{S}_d \left(\frac{3\alpha^2(g+g')}{8u(1+u)} - \frac{w^2}{4} - (g+g') \frac{3}{24} \right) \\ \beta_w &= -w \left(\frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}_d \left(\frac{w^2}{2} - \frac{3\alpha^2(g+g')}{8u(1+u)} \right) \right) \\ \beta_z &= -z \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \bar{S}_d \frac{3(g+g')}{8u(1+u)} (wz + 2\alpha^2) - \bar{S}_d w^2 \frac{3}{4} - \bar{S}_d \frac{w\alpha^2}{4z} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

3.6.2 Неподвижные точки, области устойчивости, критические размерности

Корни полученной системы представлены ниже, для всех корней заряд u может принимать любые значения, кроме нуля и единицы:

α^*	g^*	g'^*	w^*	z^*	$\{\lambda_i\}$
$\sqrt{u(u+1)/6}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{1}
$\sqrt{u(u+1)/6}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{1}
$-\sqrt{u(u+1)/6}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{1}
$-\sqrt{u(u+1)/6}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{1}
$(3\varepsilon = 4y) 0$	$\frac{8y}{3S}$	0	$i\sqrt{\frac{4y}{3S}}$	$\frac{iu(u+1)\sqrt{S/y}}{\sqrt{12}}$	{2}
$(3\varepsilon = 4y) 0$	$\frac{8y}{3S}$	0	$-i\sqrt{\frac{4y}{3S}}$	$-\frac{iu(u+1)\sqrt{S/y}}{\sqrt{12}}$	{2}
$(3\varepsilon = 4y) \sqrt{u(u+1)/3}$	$\frac{8y}{3S}$	0	0	$\forall (\neq 0)$	{3}
$(3\varepsilon = 4y) -\sqrt{u(u+1)/3}$	$\frac{8y}{3S}$	0	0	$\forall (\neq 0)$	{3}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\}) \sqrt{\frac{u(u+1)(4y-3\varepsilon)}{6y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$i\sqrt{\frac{6\varepsilon-4y}{3S}}$	$iu(u+1) \frac{\sqrt{S(3\varepsilon-2y)}}{2y\sqrt{6}}$	{4}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\}) \sqrt{\frac{u(u+1)(4y-3\varepsilon)}{6y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$-i\sqrt{\frac{6\varepsilon-4y}{3S}}$	$-iu(u+1) \frac{\sqrt{S(3\varepsilon-2y)}}{2y\sqrt{6}}$	{4}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\}) -\sqrt{\frac{u(u+1)(4y-3\varepsilon)}{6y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$i\sqrt{\frac{6\varepsilon-4y}{3S}}$	$iu(u+1) \frac{\sqrt{S(3\varepsilon-2y)}}{2y\sqrt{6}}$	{4}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\}) -\sqrt{\frac{u(u+1)(4y-3\varepsilon)}{6y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$-i\sqrt{\frac{6\varepsilon-4y}{3S}}$	$-iu(u+1) \frac{\sqrt{S(3\varepsilon-2y)}}{2y\sqrt{6}}$	{4}
$(\varepsilon = y) \sqrt{u(u+1)/6}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{5}
$(\varepsilon = y) \sqrt{u(u+1)/6}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{5}
$(\varepsilon = y) -\sqrt{u(u+1)/6}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{5}
$(\varepsilon = y) -\sqrt{u(u+1)/6}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$-i\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3S}}$	$-\frac{iu(u+1)\sqrt{S/\varepsilon}}{2\sqrt{6}}$	{5}

$$\{1\} = \{0, \varepsilon, \varepsilon - y, \varepsilon/3, (a - b)/c, (a + b)/c\},$$

$$\{2\} = \{0, 0, -y/3, y, 4y/3, y/3\},$$

$$\{3\} = \{0, 0, -y/3, -y/3, y, \frac{yu(1+2u)}{3u(1+u)}\},$$

$$\{4\} = \{0, y, y - \varepsilon, x_1, x_2, x_3\}, \text{ где } x_1, x_2, x_3 - \text{ решения относительно } x:$$

$$54(1+u)x^3 + (-27\varepsilon(5+4u) + 18y(5+3u))x^2 + (27\varepsilon^2 - 12y^2(1+4u) - 9\varepsilon y(1-6u))x + (2u+1)y(2y-3\varepsilon)(3\varepsilon-4y) = 0,$$

$$\{5\} = \{0, 0, \varepsilon, \varepsilon/3, (a - b)/c, (a + b)/c\}.$$

Можно показать, что область устойчивости (в ИК случае) для точки, отвечающей набору собственных значений {4} – пустое множество. Это утверждение следует из рассмотрения аналитического решения соответствующего кубического полинома, и его анализа. Таким образом корни, соответствующие собственным значениям {2}, {3}, {4} не обладают собственной областью устойчивости.

Как и в локальном случае, для первого решения имеем область неподвижных точек, являющуюся гладкой кривой, с ИК притягивающим сегментом. Также актуальны замечания о ε в знаменателе z^* , приведенные в Пункте 3.5.2.

Дополнительные корни можно найти, перейдя к переменным $k = 1/z$, $p = wz$, $b = 1/u$:

α^*	g^*	g'^*	b^*	p^*	k^*	$\{\lambda_i\}$
\forall	0	0	$\forall(\neq -1)$	\forall	0	{1}
\forall	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	0	\forall	0	{2}
$\sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	0	0	{3}
$-\sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	0	0	{3}
$\sqrt{(1+b)/(6b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$-i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{S(1+b)}}$	{4}
$\sqrt{(1+b)/(6b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{S(1+b)}}$	{4}
$-\sqrt{(1+b)/(6b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$-i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{S(1+b)}}$	{4}
$-\sqrt{(1+b)/(6b^2)}$	0	$\frac{8\varepsilon}{3S}$	$\forall(\neq \{-1, 0\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{S(1+b)}}$	{4}
\forall	$\frac{8y}{3S}$	0	0	\forall	0	{5}
$(3\varepsilon = 4y) 0$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{3b^2}$	$i\frac{\sqrt{12yb^2}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{6}
$(3\varepsilon = 4y) 0$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{3b^2}$	$-i\frac{\sqrt{12yb^2}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{6}
$\sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	0	{7}
$-\sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	0	{7}
$(3\varepsilon = 4y) \frac{\sqrt{(1+b)\varepsilon}}{2b\sqrt{y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	\forall	{8}
$(3\varepsilon = 4y) -\frac{\sqrt{(1+b)\varepsilon}}{2b\sqrt{y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	\forall	{8}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\})$ $\sqrt{\frac{(1+b)(4y-3\varepsilon)}{6b^2y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$\frac{(1+b)(2y-3\varepsilon)}{6b^2y}$	$\frac{2\sqrt{6b^2y}}{(b+1)\sqrt{2y-3\varepsilon}\sqrt{S}}$	{9}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\})$ $\sqrt{\frac{(1+b)(4y-3\varepsilon)}{6b^2y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$\frac{(1+b)(2y-3\varepsilon)}{6b^2y}$	$-\frac{2\sqrt{6b^2y}}{(b+1)\sqrt{2y-3\varepsilon}\sqrt{S}}$	{9}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\})$ $-\sqrt{\frac{(1+b)(4y-3\varepsilon)}{6b^2y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$\frac{(1+b)(2y-3\varepsilon)}{6b^2y}$	$\frac{2\sqrt{6b^2y}}{(b+1)\sqrt{2y-3\varepsilon}\sqrt{S}}$	{9}
$(y \neq \{3\varepsilon/4, 3\varepsilon/2\})$ $-\sqrt{\frac{(1+b)(4y-3\varepsilon)}{6b^2y}}$	$\frac{8y}{3S}$	0	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$\frac{(1+b)(2y-3\varepsilon)}{6b^2y}$	$-\frac{2\sqrt{6b^2y}}{(b+1)\sqrt{2y-3\varepsilon}\sqrt{S}}$	{9}
$(\varepsilon = y) \forall$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	0	\forall	0	{10}
$(\varepsilon = y) \sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	0	{11}
$(\varepsilon = y) -\sqrt{(1+b)/(3b^2)}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	0	0	{11}
$(\varepsilon = y) \sqrt{\frac{(1+b)}{6b^2}}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{y}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{12}
$(\varepsilon = y) \sqrt{\frac{(1+b)}{6b^2}}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$-i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{y}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{12}
$(\varepsilon = y) -\sqrt{\frac{(1+b)}{6b^2}}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{y}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{12}
$(\varepsilon = y) -\sqrt{\frac{(1+b)}{6b^2}}$	\forall	$\frac{8\varepsilon}{3S} - g$	$\forall(\neq \{0, -1\})$	$-\frac{1+b}{6b^2}$	$-i\frac{2\sqrt{6b^2}\sqrt{y}}{(1+b)\sqrt{S}}$	{12}

$$\{1\} = \{0, 0, 0, -\varepsilon, -\varepsilon/2, -y\},$$

$$\{2\} = \{0, 0, -\varepsilon/2, -\varepsilon/3, \varepsilon, \varepsilon - y\},$$

$$\{3\} = \{0, -\varepsilon/3, \varepsilon/6, \varepsilon, \varepsilon - y, \frac{(2+b)\varepsilon}{3(1+b)}\},$$

$$\{4\} = \{0, \varepsilon/3, \varepsilon, \varepsilon - y, (a'' - b'')/c'', (a'' + b'')/c''\},$$

где $a'' = \varepsilon(4 + 7b + 3b^2)$, $b'' = \varepsilon\sqrt{32 + 112b + 145b^2 + 82b^3 + 17b^4}$, $c'' = 12(1 + b)^2$,

$$\{5\} = \{0, 0, -\varepsilon/2, y - \varepsilon, -y/3, y\},$$

$$\{6\} = \{0, 0, -y/3, y, y/3, 4y/3\},$$

$$\{7\} = \{0, (4y - 3\varepsilon)/6, -y/3, y - \varepsilon, y, \frac{(2+b)y}{3(1+b)}\},$$

$$\{8\} = \{0, 0, -y/3, -y/3, y, \frac{(2+b)y}{3(1+b)}\},$$

$$\{9\} = \{0, y, y - \varepsilon, x_1, x_2, x_3\}, \text{ } x_i \text{ - решения относительно } x:$$

$$(54 + 54b)x^3 - 18\varepsilon^2y - 9b\varepsilon^2y + 36\varepsilon y^2 + 18b\varepsilon y^2 - 16y^3 - 8by^3 + x^2(-108\varepsilon - 135b\varepsilon + 54y + 90by) + x(27b\varepsilon^2 + 54\varepsilon y - 9b\varepsilon y - 48y^2 - 12by^2) = 0,$$

$$\{10\} = \{0, 0, 0, -y/2, -y/3, y\},$$

$$\{11\} = \{0, 0, y/6, -y/3, y, \frac{(2+b)y}{3(1+b)}\},$$

$$\{12\} = \{0, 0, y/3, y, (a''' - b''')/c''', (a''' + b''')/c'''\},$$

где $a''' = y(4 + 7b + 3b^2)$, $b''' = y\sqrt{32 + 112b + 145b^2 + 82b^3 + 17b^4}$, $c''' = 12(1 + b)^2$.

В полученной системе нетривиальные области устойчивости присутствуют только для корней с собственными значениями $\{1\}$ (обозначим ее как FP_1), $\{4\}$ (FP_2), $\{12\}$ (FP_3). Их можно изобразить графически, на плоскости переменных (ε, y) :

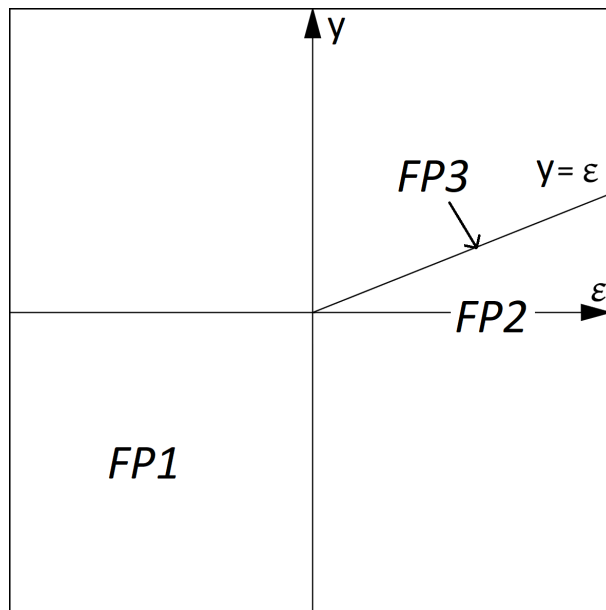


Рис. 1: Области устойчивости в зависимости от ε , y , и соответствующие им неподвижные точки

Стоит отметить, что область параметров $\varepsilon > 0$, $y > \varepsilon$ остается "пустой" в том смысле, что она не заполнена областями устойчивости каких-то неподвижных точек. Возможно, это является особенностью однопетлевого приближения.

Критические размерности для различных ИК – притягивающих точек в однопетлевом приближении:

FP1:

$$\Delta_\omega = 2, \Delta_h = -\frac{\varepsilon}{2}, \Delta_v = 1, \Delta_{h'} = 4 - \frac{\varepsilon}{2}, \Delta_{v'} = 3 - \varepsilon. \quad (95)$$

FP2:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_h = 0, \Delta_v = 1 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_{h'} = 4 - \varepsilon, \Delta_{v'} = 3 - \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (96)$$

FP3:

$$\Delta_\omega = 2 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_h = 0, \Delta_v = 1 - \frac{\varepsilon}{3}, \Delta_{h'} = 4 - \varepsilon, \Delta_{v'} = 3 - \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (97)$$

4 Заключение

В работе рассмотрена модель Кардара-Паризи-Занга (53) с "замороженным" случайным шумом (54) под влиянием случайного (в том числе и турбулентного) воздействия окружающей среды, описываемого стохастическим уравнением Навье–Стокса (55) со случайной силой (56). При этом изучалось два отдельных случая: локальный ($D'_0 = 0$ в (57)) и общий ($D'_0, D_0 \neq 0$). Сформулирована аналогичная исходной модели теории поля с логарифмической размерностью $d = 4$, показана ее перенормируемость при добавлении нового вклада (подтверждено явление "индуцированной нелинейности"), и включении дополнительного безразмерного параметра в ковариантную производную. В ведущем порядке теории возмущений найдены критические размерности, описывающие асимптотическое поведение корреляционных функций. Однопетлевые вычисления показывают, что уравнения ренорм-группы для соответствующих систем обнаруживают (в том числе) кривые неподвижных точек, содержащие ИК – притягивающие сегменты.

Несмотря на то, что некоторые координаты притягивающих точек на этих кривых являются мнимыми, и, на первый взгляд, не могут быть достигнуты РГ-поток (т.е. решением дифференциального уравнения РГ с вещественными начальными условиями), реальными параметрами разложения являются не сами константы связи, а их комбинации. Для ситуации с одним зарядом (например, в "чистой" модели Кардара-Паризи-Занга) отрицательная (интерпретируемая как нефизическая) фиксированная точка не может быть достигнута из положительных (физических) начальных условий, потому что поток РГ не может пересечь ноль (который является фиксированной точкой сам по себе). Для многозарядной модели, напротив, РГ – поток может войти в нефизическую область параметров, стартуя из физической. Интерпретация такой ситуации довольно тонкая и остается предметом споров; некоторые обсуждения и ссылки можно найти, например, в [14], [15].

Основные результаты представлены формулами (92), (93) в локальном и (95), (96), (97) в общем случае.

Список литературы

- [1] Krug, J.; Spohn, H. *Solids far from Equilibrium*; Godreche, C., Ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1990.
- [2] Halpin-Healy, T.; Zhang, Y.-C. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.* **1995**, *254*, 215.
- [3] Kardar, M.; Parisi, G.; Zhang, Y.-C. Dynamic Scaling of Growing Interfaces. *Phys. Rev. Lett.* **1986**, *56*, 889.
- [4] Vasiliev A.N. *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behaviour Theory and Stochastic Dynamics*; Chapman & Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA, 1998.
- [5] Caldarelli, G.; Giacometti, A.; Maritan, A.; Rodriguez-Iturbe, I.; Rinaldo, A. Randomly pinned landscape evolution. *Phys. Rev. E* **1997**, *55*, R4865(R).
- [6] Antonov, N.V.; Kakin, P.I.; Lebedev, N.M. Static Approach to Renormalization Group Analysis of Stochastic Models with Spatially Quenched Noise. *J. Stat. Phys.* **2020**, *178*, 392.
- [7] Antonov, N.V.; Kakin, P.I. Random interface growth in a random environment: Renormalization group analysis of a simple model. *Theor. Math. Phys.* **2015**, *185*, 1391.
- [8] Duclut, C.; Delamotte, B. Nonuniversality in the erosion of tilted landscapes. *Phys. Rev. E* **2017**, *96*, 012149.
- [9] Falkovich, G.; Gawędzki, K.; Vergassola, M. Particles and fields in fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.* **2001**, *73*, 913.
- [10] Kakin, P.I.; Reiter, M.A.; Tumakova, M.M.; Gulitskiy, N.M.; Antonov, N.V. Stirred Kardar-Parisi-Zhang Equation with Quenched Random Noise: Emergence of Induced Nonlinearity. *Universe* **2022**, *8*, 72.
- [11] Forster, D.; Nelson, D.R.; Stephen, M.J. Long-Time Tails and the Large-Eddy Behavior of a Randomly Stirred Fluid. *Phys. Rev. Lett.* **1976**, *36*, 867.
- [12] Martin P. C.; Siggia E. D.; Rose H.A. Statistical dynamics of classical systems. *Phys. Rev. A* **1973**, *8*, 423.
- [13] Antonov, N.V.; Gulitskiy, N.M.; Kakin, P.I.; Kochnev, G.E. Effects of Turbulent Environment on Self-Organized Critical Behavior: Isotropy vs. Anisotropy. *Universe* **2020**, *6*, 145.
- [14] Antonov, N.V.; Kostenko, M.M. Renormalization Group in the Problem of Active Scalar Advection. *J. Math. Sci.* **2021**, *257*, 425–441.

- [15] Antonov, N.V.; Kakin, P.I.; Lebedev, N.M. The Kardar-Parisi-Zhang model of a random kinetic growth: effects of a randomly moving medium. *J. Phys. A Math. Theor.* **2019**, *52*, 505002.