, ,

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Б.А.Самокиш

LR- И QR- АЛГОРИФМЫ.

Геометрическая теория.

Санкт-Петербург

2021

УДК 517.942.8

Р е ц е н з е н т ы: докт. физ.мат. наук, проф.Ю.К.Демьянович (СПбГУ),

канд. физ. мат. наук, доцент ИТМО В.В.Залипаев (Морское Инженерное Бюро, СПб)

Рекомендовано к печати Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 Математика и механика Протокол 06/01-03-15 от 24.12.2020 г.

Самокиш Б.А.

LR- и QR-алгорифмы. Геометрическая теория — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, —13 с.

Указанные алгорифмы рассматриваются с точки зрения итераций крыловских подпространств. При определенных условиях доказывается сходимость. Указаны известные приемы, делающие их эффективными.

Библиогр. 3 назв.

Рассмотрим последовательность итераций матрицей A произвольного вектора X. Будем считать, что существует базис из собственных векторов. Разложим по этому базису вектор X и его итерации:

$$X = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 + ...$$

$$A^n X = \gamma_1 \lambda_1^n u_1 + \gamma_2 \lambda_2^n u_2 + \gamma_3 \lambda_3^n u_3 + ...$$

Имеем сумму геометрических прогрессий, в которой преобладает та , модуль знаменателя которой наибольший, скажем λ_1, и при больших n будет $A^n X \approx \gamma_1 \lambda_1^n u_1$, то-есть с точностью до скалярного множителя итерации приближенно совпадают с собственным вектором, отвечающим наибольшему по модулю собственному числу. Говорим, что итерации сходятся по направлению к собственному вектору. Для сходимости в полном смысле этого слова надо итерации еще нормировать.

Алгорифм степенного метода, основной вариант:

Имеем X_n . Находим $\tilde{X}_{n+1} = AX_n$ полагаем

$$X_{n+1} = \frac{\tilde{X}_{n+1}}{\left\{\tilde{X}_{n+1}\right\}_1}.$$

где $\left\{\tilde{X}_{n+1}\right\}_1$ первая компонента (может быть любая)

Часто встречается рекомендация делить не на компоненту, а на норму, Заметим, что тогда вместо сходимости будем иметь осцилляцию, если $\lambda_1 < 0$.

Утверждение. Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_k|, k > 2$. Пусть коэффициент γ_1 в разложении X_0 по собственным векторам не равен нулю. Тогда степенной метод сходится со скоростью геометрической прогрессии:

$$X_n = \frac{u_1}{u_{11}} + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right),$$

причем $\left\{\tilde{X}_{n+1}\right\}_1 \to \lambda_1$.

Действительно,

$$X_n = \frac{A^n X}{\{A^n X\}_1} = \frac{\gamma_1 \lambda_1^n u_1 + O\left(|\lambda_2|^n\right)}{\gamma_1 \lambda_1^n u_{11} + O\left(|\lambda_2|^n\right)} = \frac{u_1}{u_{11}} + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right).$$

Не будем здесь разбирать ситуации , возникающие при нарушении условия $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

В таком виде этот метод имеет два недостатка:

(а) он позволяет находить лишь одно собственное число;

(б) сходимость его проблематична: ее может не быть, а если есть, она может быть медленной.

Эти недостатки отчасти преодолеваются в обратном степенном методе со сдвигом. Обратным степенным методом называется степенной метод, примененный к обратной матрице. Если еще подвергнуть матрицу сдвигу, т.е. взять матрицу $A - tE$, собственные числа которой равны $\lambda_A - t$, то можно получить сходимость к любому собственному числу. Вместо умножения на обратную матрицу можно решать систему уравнений.

Обратный степенной метод со сдвигом.

Задаемся константой сдвига t. Пусть найден X_n. Тогда вектор $\tilde{X}_{n+1}$ находится из системы

$$(A - tE)\,\tilde{X}_{n+1} = X_n,$$

затем нормируется:

$$X_{n+1} = \frac{\tilde{X}_{n+1}}{\left\{\tilde{X}_{n+1}\right\}_1}.$$

Так как матрица системы одна и та же на всех шагах, то по трудоемкости он почти таков, как и основной вариант. Метод, очевидно, сходится к собственному вектору, принадлежащему числу λ_k такому, что $|\lambda_k - t|^{-1}$ максимально среди $j \neq k$, т.е. ближайшему к t. Метод сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|\lambda_k - t| \,/\, |\lambda_i - t|$, где λ_i следующее по близости собственное число – тем быстрее, чем ближе t к λ_i.

Это обстоятельство наводит на мысль использовать в качестве константы сдвига наилучшее известное приближенное значение собственного числа - которое получим из первой компоненты вектора $\tilde{X}_{n+1}$ - приближенного собственного числа матрицы $(A - t_n E)^{-1}$.

Обратный степенной метод с переменным сдвигом.

Пусть найдены X_n, t_n. Вектор $\tilde{X}_{n+1}$ находится из системы

$$(A - t_n E)\,\tilde{X}_{n+1} = X_n,$$

и тогда

$$\mu_{n+1} = \left\{\tilde{X}_{n+1}\right\}_1,$$

$$X_{n+1} = \mu_{n+1}^{-1}\tilde{X}_{n+1},$$

$$t_{n+1} = t_n + \mu_{n+1}^{-1}.$$

Метод сходится чрезвычайно быстро – если сходится, а для этого нужно хорошее начальное приближение. К сожалению, нет надежного экономичного алгорифма, чтобы указать начальные приближения для всех собственных чисел, так что обратный степенной метод сам по себе не порождает метода решения полной прблемы собственных значений.

Вернемся к основному варианту. Причина медленной сходимости - близость по модулю другого собственного числа. Способов борьбы может быть два: исключить эту другую компоненту или, наоборот, присоединить ее, т.е. следить уже за двумерным подпространством. Но тогда быстроте сходимости может помешать третье собственное число и т.д. Радикальный выход состоит в том , чтобы включить в процесс все подпространства.

Посмотрим еще раз внимательнее на разложение итерированного вектора:

$$A^n X = \gamma_1 \lambda_1^n u_1 + \gamma_2 \lambda_2^n u_2 + \gamma_3 \lambda_3^n u_3 + ...$$

Зададим себе вопрос: к чему стремятся итерации, так сказать, в двумерном приближении, т.е. каково то неподвижное двумерное подпространство, к которому приближаются итерации? Трехмерное? k-мерное? Ответ ясен: собственное подпространство, натянутое на собственные векторы, принадлежащие наибольшим собственным числам. Строго говоря, это будет так, если выполнено

Основное предположение: собственные числа различны по модулю и отличны от нуля.

Тогда занумеруем их по убыванию модуля:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > ... > |\lambda_s| > 0.$$

Определение. Флаг в R_s - последовательность вложенных подпространств всех размерностей.

Всякий занумерованный базис естественным оброазом порождает флаг. Мы скажем, что он есть базис флага. Флаг, порожденный собственным базисом, занумерованным по убыванию собственных чисел, назовем старшим собственным флагом.

Будем теперь итерировать линейно независимый набор векторов $X^{(1)}, X^{(2)}, ...X^{(s)}$ - исходный базис:

$$X_n^{(i)} = A^n X^{(i)}, i = 1, ...s.$$

Векторы $X_1^{(1)}, X_2^{(2)}, ...X_k^{(s)}$ - линейно независимые, так как матрица A обратима - составят базис подпространства, которое назовем k-мерное n-ое итерированное подпространство и обозначим $L_n^{(k)}$. Эти подпространства определят n-ый итерированный флаг.

Что означает сходимость подпространств? Разумеется, в множестве всех подпространств одной размерности можно ввести метрику, которая определит сходимость. Мы поступим проще.

Определение. Говорим, что переменное подпространство P_n сходится к подпространству P, разумеется, той же размерности, если в каждом P_n указан базис, сходящийся к базису в P.

Теорема 1. При основном предположении и некоторых условиях невырождения n-ый итерированный флаг сходится к старшему собственному флагу.

То-есть каждое подпространство $L_n^{(k)}$ сходится к старшему k- мерному собственному подпространству P_k.

Сам итерированный базис не годится для доказательства теоремы, ибо все его векторы вырождаются в старший собственный вектор. Для доказательства построим базис, который назовем "первый сходящийся базис". Для этого в системе равенств

$$X_n^{(1)} = A^n X^{(1)} = \gamma_{11}\lambda_1^n u_1 + \gamma_{12}\lambda_2^n u_2 + \gamma_{13}\lambda_3^n u_3 + ...,$$

$$X_n^{(2)} = A^n X^{(2)} = \gamma_{21}\lambda_1^n u_1 + \gamma_{22}\lambda_2^n u_2 + \gamma_{23}\lambda_3^n u_3 + ...,$$

$$X_n^{(3)} = A^n X^{(3)} = \gamma_{31}\lambda_1^n u_1 + \gamma_{32}\lambda_2^n u_2 + \gamma_{33}\lambda_3^n u_3 + ...,$$

$$......$$

которые можно рассматривать как систему уравнений с матрицей $\{\gamma_{ik}\}$ и неизвестными $\lambda_k^n u_k$, проведем прямой ход исключения в естественном порядке:

добавим первое уравнение ко всем следующим, домножая на такой множитель,чтобы исключить первое неизвестное;

затем добавим второе равенство ко всем следующим с таким множителем, чтобы исключить второе неизвестное,

и так далее.

Построение возможно при условии, что в матрице $\{\gamma_{ik}\}$ осуществим прямой ход исключения в естественном порядке, т.е. когда миноры , окаймляющие головной элемент, отличны от нуля. Это и будут упомянутые условия невырождения.

В результате получим векторы

$$\tilde{Y}_n^{(1)} = A^n X^{(1)} = \gamma_{11}\lambda_1^n u_1 + \gamma_{12}\lambda_2^n u_2 + \dots$$

$$\tilde{Y}_n^{(i)} = \gamma_{ii}^{'}\lambda_i^n u_i + \gamma_{i,i+1}^{'}\lambda_2^n u_{i+1} + \dots$$

которые составляют базис n-го итерированного флага, поскольку каждый вектор комбинировался с предыдущими.

Векторы

$$Y_n^{(i)} = \lambda_i^{-n} \tilde{Y}_n^{(i)} = \gamma_{ii}^{'} u_i + \gamma_{i,i+1}^{'} \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right)^n u_{i+1} + \dots$$

составляют сходящийся базис итерированного флага.

С какой скоростью при этом сходится k-мерное итерированное подпространство? Ответ такой: со скоростью, наименьшей для векторов базиса этого подпространства, т.е. как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = max \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \right|$, $i \leq k$. Эта оценка, однако, не точна. Чтобы выяснить истинную скорость сходимости, построим второй сходящийся базис. Это уже будет не базис флага, а, собственно, набор базисов, отдельно для каждого подпространства.

Для этого в прямом ходе исключения остановимся на k-ом этапе, после исключения k-го неизвестного, и проведем обратный ход:

используя k-ое уравнение, исключим k-ое неизвестное в предыдущих уравнениях, для чего добавим k-ое уравнение , умножив на подходящий множитель, к каждому из предыдущих;

затем так же исключим $k-1$-ое неизвестное из уравнений, предшествующих $(k-1)$-му,

и т. д.

Можно еще проще пояснить этот процесс. Выпишем разложение первых k итераций:

$$X_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} \lambda_j^n u_j + O\left(|\lambda_{k+1}|^n\right).$$

Подберем k наборов множителей по k штук β_{li} таких, что $\sum_i \beta_{li}\gamma_{ij} = \delta_{lj}$, умножим их на векторы $X_n^{(i)}$ и просуммируем. И умножим еще на λ_i^{-n}. Получим векторы:

$$Y_n^{(l)} = \lambda_l^{-n} \sum_{i=1}^{k} \beta_{li} X_n^{(i)} = u_l + O\left(\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|^n\right).$$

Множители β_{li} образуют матрицу, обратную к матрице $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{k}$. Существование этих обратных матриц при всех k и есть условие невырождения. Теперь векторы $Y_n^{(l)}$ образуют второй сходящийся базис, очевидно тот же самый. Скорость сходимости k-мерного подпространства $O\left(\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|^n\right)$.

Чтобы построить численно такой базис, надо знать собственные векторы матрицы, но это как раз та задача, которую мы решаем. Сходящийся базис флага можно построить, искусственно раздвигая и нормируя векторы базиса.

Базис вида

$$(1, *, *, ...*)$$

$$(0, 1, *, ...*)$$

$$...$$

$$(0, 0, 0, ...1)$$

- k-ый вектор имеет нули в позициях $1, ...k-1$, 1 в k-ой – называется ступенчатым. Базис всякого флага может быть (вообще говоря!) перестроен в ступенчатый базис того же флага тем же методом исключения:

начиная с $k = 1$, добавляя k-ый вектор к следующим, аннулируем в них к-ую компоненту, затем нормируем на первую ненулевую компоненту.

В частности, построим ступенчатый базис n-го итерированного флага.

Теорема 2. При основном предположении и определенных условиях невырождения ступенчатый базис итерированного флага сходится.

Будем отыскивать индивидуально k-ый вектор ступенчатого базиса, разлагая его по второму сходящемуся базису. Для отыскания коэффициентов разложения - их k штук - приравняем первые k компонент. Матрицу системы составят первые k компонент векторов сходящегося базиса, а правые части постоянны: нули и единица. Эта матрица сходится, со скоростью $O\left(\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|^n\right)$. Допустим, что предельная матрица невырождена. Правые части уравнений постоянны: нули и единица. Коэффициенты сходятся и векторы ступенчатого базиса тоже сходятся, k-ый вектор со скоростью $O\left(\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|^n\right)$.

Другой способ раздвижки - ортогонализация и нормировка. Однако здесь уже о сходимости говорить не приходится: уже первый вектор может сходиться , а может осциллировать

Лемма о факторизации.

А. Всякая неособенная матрица может быть, вообще говоря, - т.е с точностью до некоторых условий невырождения

-разложена в произведение левой треугольной с единичной диагональю на правую треугольную. Это разложение если возможно, то единственно.

В. Всякая неособенная матрица может быть разложена в произведение ортогональной на правую треугольную. Это разложение всегда возможно, но не единственно.

Доказательство. А. Матричное равенство.

$$A = LR$$

распишем по столбцам:

$$A^{(k)} = r_{k1}L^{(1)} + ...r_{k-1,k}L^{(k-1)} + r_{kk}L^{(k)}.$$

При $k = 1$ полагаем $r_{11} = a_{11}$, - если она не ноль $L^{(1)} = r_{11}^{-1}A^{(1)}$. Пусть $L^{(j)}, r_{ij}$ найдены для $j < k$. Приравнивая последовательно компоненты с номерами $1, ...k-1$ слева и справа, учитывая , что в $L^{(k)}$ на этих местах должны стоять нули, найдем последовательно $r_{k1}, ...r_{k,k-1}$. Теперь вектор $r_{kk}L^{(k)}$ известен. Полагаем r_{kk} равным его k-ой компоненте - если она не нуль - и делим на нее остальные.

В. К столбцам A применяем процесс ортогонализации Грама - Шмидта. Опять равенство $A = QR$ распишем по столбцам:

$$A^{(k)} = r_{1k}Q^{(1)} + ...r_{k-1,k}Q^{(k-1)} + r_{kk}Q^{(k)}.$$

При $k = 1$ полагаем $r_{11} = \pm \left\|A^{(1)}\right\|$. Пусть $Q^{(j)}$ найдены, как и r_{ij}, до $j = k-1$ включительно.Полагаем $r_{jk} = \left(A^{(k)}, Q^{(j)}\right)$. Вектор $r_{kk}Q^{(k)}$ известен. В качестве r_{kk} берем его норму, со знаком плюс или минус, и нормируя, находим $Q^{(k)}$. .

Алгорифмы. Дана матрица A. собственные числа и векторы которой требуется вычислить.

Треугольный степенной метод. Выбираем произвольно неособенную матрицу C_0, Умножаем слева на A и разлагаем по лемме, А:

$$AC_0 = C_1 R_1.$$

Когда C_{n-1}, R_{n-1} найдены, матрицы C_n, R_n находятся из разложения

$$AC_{n-1} = C_n R_n.$$

C_n левая треугольная с единичной диагональю, R_n правая треугольная.

Ортогональный степенной метод. Выбираем произвольно матрицу P_0 - неособенную - умножаем слева на A и разлагаем по лемме, B. :

$$AP_0 = P_1 R_1.$$

Когда найдем P_{n-1}, R_{n-1}, следующие P_n, R_n находим из равенства

$$AP_{n-1} = P_n R_n.$$

P_n. ортогональная, R_n правая треугольная.

LR-алгорифм. Матрицу A разлагаем

$$A = L_1 R_1.$$

L_1 левая треугольная с единичной диагональю, R_1 правая треугольная Перемножаем в обратном порядке и разлагаем так же:

$$R_1 L_1 = L_2 R_2.$$

Вообще , когда вычислены L_{n-1}, R_{n-1}, перемножаем их в обратном порядке и разлагаем так же:

$$R_{n-1}L_{n-1} = L_n R_n.$$

QR -алгорифм. Совершенно аналогично, только разложения ортогонально- треугольные:

$$A = Q_1 R_1,\ R_{n-1}Q_{n-1} = Q_n R_n.$$

Теорема 3. При основном предположении, если треугольный степенной метод осуществился, то матрицы метода сходятся:

$$\lim\ C_n = C^*, \lim\ R_n = R^*.$$

При этом последний элемент матрицы R_n сходится со скоростью $O\left(\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}\right|^n\right)$.

Собственные числа матрицы A располагаются на диагонали матрицы R^*.

Теорема прямо вытекает из теоремы 2, ибо в матрице L_n стоит по столбцам ступенчатый базис итерированного флага.

Что этот базис ступенчатый - ясно из вида матрицы L_n. Пусть столбцы L_n образуют базис n-го флага. При умножении на A каждый столбец умножается на A и переходит в итерированное подпространство той же размерности для следующего n. При разложении каждый столбец комбинируется с предыдущими и остается в том же подпространстве. Ступенчатый базис сходится, согласно теореме 3, так что $\lim L_n = L^*$ существует.

. Переходя к пределу в итерационной формуле, найдем:

$$\lim R_n = \lim C_n^{-1} A C_{n-1} = C^{*-1} A C^* = R^*$$

так что матрица R^* подобна A и ее собственные числа - диагональные элементы - суть собственные числа A.

Из матричного равенства

$$AC_{n-1} = C_n R_n$$

возьмем последний столбец:

$$A^{(s)} = y_n + r_{ss}^{(n)} L_n^{(s)},$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{s-1} r_{js}^{(n)} L_n^{(j)}, L_n^{(s)} = e_s = (0, 0, ..., 1) \, .$$

Вектор y_n находится в подпространстве $L_n^{(s-1)}$. Разложим его по второму сходящемуся базису. Коэфициенты будем находить, приравнивая первые $s-1$ компонент. Коэфициенты системы уравнений - компоненты векторов базиса - сходятся со скоростью, $O\left(\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}\right|^n\right)$, а правые части постоянны. Значит и вектор y_n сходится с такой же скоростью, а с ним и число $r_{ss}^{(n)}$ - вектор $L^s = e_s = (1, 0....0)$ постоянен.

В ортогональном степенном методе столбцы матрицы образуют ортонормированный базис итерированного флага. Здесь уже нельзя рассчитывать на сходимость матриц. Мы наперед не знаем такое правило присвоения знаков, чтобы векторы ортонормированного базиса сходились. Что же сходится?

Покажем, что матрица $P_n' A P_n$ сходится по форме к правой треугольной. Это означает, что ее элементы ниже главной диагонали стремятся к нулю.

Рассмотрим элемент $\left\{P_n^{'}AP_n\right\}_{ik} = \left(AP_n^{(k)}, P_n^{(i)}\right)$ при $i > k$. Вектор $P_n^{(k)}$ принадлежит n-ому подпространству $L_n^{(k)}$ размерности k, к которому $P_n^{(i)}$ ортогонален, а вектор $AP_n^{(k)}$ - подпространству $L_{n+1}^{(k)}$, которое отличается от предыдущего на величину $O\left(\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right|^n\right)$, и значит $\left(AP_n^{(k)}, P_n^{(i)}\right) \to 0$ с такой же скоростью. Диагональные элементы матрицы $P_n^{'}AP_n$ в силу теоремы Бауэра - Файка близки к ее собственным числам, которые равны собственным числам A в силу подобия.

Алгорифм LR тесно связан с треугольным степенным методом. Именно, матрицы $C_n = L_1L_2...L_n$ суть матрицы треугольного степенного метода, начатого с $C_0 = E$.

Действительно, если $AC_{n-1} = AL_1L_2...L_{n-1}$, то $AC_n = AL_1L_2...L_{n-1}L_n = L_1L_2...L_{n-1}R_nL_n = L_1L_2...L_nL_{n+1}R_{n+1} = C_{n+1}R_{n+1}$.

Точно так же QR-алгорифм связан с ортогональным степенным методом: матрицы $P_n = Q_1Q_2...Q_n$, R суть матрицы ортогонального степенного метода, начатого с $P_0 = E$.

Замечательно, что матрицу $P_n^{'}AP_n$ специально вычислять не надо: она появляется в процессе в виде матрицы R_nQ_n.

Алгорифм LR так относится к треугольрому степенному методу, как QR-алгорифм к ортогональному степенному - такая, можно сказать, пропорция.

Однако в таком виде, как они здесь описаны, алгорифмы эти неудобны для применения. Во-первых, они весьма громоздки: каждое разложение матрицы на множители требует $O\left(s^3\right)$ арифметических операций. Во-вторых, сходимость остается проблематичной. Эффективными они становятся после усовершенствований, касающихся числа действий и скорости сходимости.

Алгорифм LR обладает таким свойством: если матрица A трехдиагональна, то сомножители L, R также трехдиагональные, и будучи треугольными, являются на самом деле двухдиагональными Тогда матрица RL также будет трехдиагональной. При этом разложение требует $O(s)$ арифметических дейсвий. Покажем это. Рассмотрим опять соотношение для столбцов в формуле

$$A^{(k)} = r_{k1}L^{(1)} + ...r_{k-1,k}L^{(k-1)} + r_{kk}L^{(k)}.$$

В столбцах $A^{(k)}, L^{(k)}$ все элементы в позициях от 1 до $k-2$ нули. Последовательно убеждаемся, что $r_{k1} = ... = r_{k,k-2} = 0$. Элемент $r_{k,k-1} \neq 0.$, если $a_{k,k-1} \neq 0$. Итак, матрица R двухдиагональная. В столбце $L^{(k)}$ элементы в позициях ниже $k+1$-ой будут нулями, ибо они нули в A_k и L_j, $j < k$. Итак, матрица L тоже двухдиагональная. Ясно, что RL трехдиагональная.

С QR-алгорифмом дело обстоит сложнее. Пусть в матрице A равны нулю элементы, стоящие ниже побочной диагонали. Говорят тогда, что матрица имеет верхнюю форму Хессенберга. При разложении k-ый столбец комбинируется с предыдущими столбцами, в которых также на этих местах нули, так что Q имеет форму Хессенберга. При умножении на R справа каждая строчка комбинируется со следующими, где стоят нули там, где в ней стоят нули. Матрица RQ также хессенбергова. Если при этом A симметрична, то она трехдиагональная, и матрица , RQ,которая симметричеа, тоже будет трехдиагональноц. Так что QR-алгорифм сохраняет форму Хессенберга, а в случае симметрии и трехдиагональную.

Привести матрицу к трехдиагональному виду, если она симметрична, можно известной процедурой Гивенса. Несимметричную матрицу этот процесс приводит к форме Хессенберга. Однако и несимметричную матрицу можно привести к трехдиагональному виду, например с помощью так называемого биортогонального алгорифма (несимметричный процесс Ланцоша).

Можно также привести несимметричную матрицу к трехдиагональному виду с помощью некоего процесса исключения. Исключения удобно описывать элементарными матрицами. Элементарной матрицей исключения назовем матрицу, отличающуюся от едитничной только в одной позиции (i, k) , $i \neq k$, где стоит число α. Умножение на такую матрицу справа состоит в прибавлении к k-му столбцу i–го, умноженного на α . Обратная матрица осуществляет обратную операцию: вместо α в ней стоит $-\alpha$. Умножение слева есть прибавлени к i–ой строке k–ой с множителем α.

Возьмем теперь произвольную матрицу. Прибавляя вторую строку к следующим с соотвествующими множителями, получим нули в первом столбце в позициях ниже второй. Чтобы преобразование стало подобным, умножим справа на обратную матрицу: к второму столбцу прибавим следующие с противоположными множителями. Далее получим нули в первой строке, для чего второй столбец с нужными множителями добавим к следующим – и для сохранения подобия вторую строку к следующим с противоположными множителями. Теперь матрица в первой строке и первом столбце имеет нужны вид. Далее аналогично поступаем с подматрицей порядка $s-1$ без первых строки и столбца и т.д.

Теперь вспомним, что последний элемент (правый нижний) матрицы R_n в алгорифме LR и мтрицы R_nQ_n в алгорифме QR сходится к λ_s и при этом со скоростью $O\left(\left|\frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}}\right|^n\right)$. Как в оброатном степенном методе с переменными сдвигами, сходимость можно ускорить с помощью сдвигов. Разложению тогда подвергается сдвинутая матрица:

$$R_{n-1}L_{n-1} - t_nE = L_nR_n.$$

Сдвиг по Рэлею: в качестве константы сдвига берем последний элемент матрицы R_{n-1}, в QR-алгорифме соответственно $R_{n-1}Q_{n-1}$.

Сдвиг по Улкинсону: берем собственное число подматрицы второго порядка, стоящей в двух последних строчках и столбцах той же матрицы. Если они вещественны, естественно брать меньшее. Если комплексны, сдвиг требует комплексных вычислений, что неудобно. Результат выполнения сдвигов на оба корня будет вещественным. Существует способ получить этот результат без перехода к комплексной арифметике.

Вычисление текущего (наименьшего) собственного значения заканчивается, когда очередной сдвиг равен нулю. Тогда в матрице, соответственно, последняя строчка нулевая. Отбросим ее, а также последний столбец. Оставшаяся матрица, порядка $s-1$, , содержит остальные собственные числа. Дальнейшие вычисления проводим с этой матрицей, снова понижаем порядок и так до конца.

Литература:

1. Б.Парлетт. Симметричная проблема собственных значений. М. Мир, 1983.

2. Х. Икрамов. Несимметричная проблема собственных зна-

чений. Наука,1991.
3. Дж. Голуб, Ч. Ван-Лоун. Матричные вычисления. Мир, 1999.