, ,

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б.А. Самокиш

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Элементы теории. Методы численного решения. Задачи.

Санкт-Петербург

2021

УДК 517.942.8

Р е ц е н з е н т ы: докт. физ.-мат. наук, проф.Ю.К. Демьянович (СПбГУ),

канд. физ.-мат. наук, доцент В.В. Залипаев (Морское Инженерное Бюро, СПб)

Рекомендовано к печати Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 Математика и механика Протокол 06/01-03-15 от 24.12.2020 г.

Самокиш Б.А.

Интегральные уравнения первого рода —СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, —18 с.

В предлагаемом пособии изложены злементы теории некорректных задач, метод регуляризации,указаны методы решения регуляризованных уравнений. Приведен набор задач для решения на вычислительном практикуме. Пособие предназначается для использования в вычислительном практикуме.

Библиогр. 3 назв.

Интегральное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

относится к классу так называекмых некорректных задач. Понятие некорректной задачи ввел в науку в начале XX века французский математик Жак Адамар. Он заметил, что к традиционным требованиям однозначной разрешимости математической задачи естественно добавлять требование устойчивости по отношению к возмущению данных задачи, то-есть непрерывной зависимости решения от данных задачи. Адамар предложил называть это свойство корректностью и построил пример некорректной задачи: задача Коши для уравнения Лапласа. По идее Адамара, некорректные задачи следует исключить из рассмотрения. Однако с течением времени такие задачи стали упорно появляться в разных областях прикладного знания и возникла необходимость их осмысления и разрабюотки методов их решения. В нашей стране этими вопросами занимался А.Н. Тихонов с учениками.

Мы будем рассматривать линейные задачи: решение линейного уравнения в (нормированном) линейном пространстве. Задача решения линейного уравнения

$$Au = f$$

называется корректной,если:

а) задача имеет единственное решение при любой правой части (из определенного пространства)

б) это решение устойчиво по отношению к возмущению правой части: изменение решения сколь угодно мало, если достаточно мало изменение правой части.

Существенно и характерно для некорректности нарушение второго требования. Оно означает, при выполнении первого , что обратный оператор существует. но не является ограниченным.

Итак, пусть оператор A таков, что уравнение $Au = f$ имеет единственное решение Тогда обратный оператор A^{-1} определен на области значений оператора A. Некорректность состоит в том, что обратный оператор A^{-1} не всюду определен и неограничен.

Простейшая модель – диагональный оператор. В пространстве $l_2\left[1,\infty\right]$ квадратично суммируемых последовательностей $c = \{c_n\}_1^\infty$ с нормой $\|c\| = \sqrt{\sum c_n^2}$ рассмотрим оператор покоординатного умножения на числа d_n:

$$Ac = \{d_n c_n\}\,.$$

Оператор A ограничен, если d_n ограничены. ОператорA имеет обратный, если $d_n \neq 0$. Пусть $d_n \to 0$, тогда уравнение с оператором A некорректно. Действительно, для $f = \{f_n\}$ элемент $A^{-1}f$ не существует, если ряд $\sum d_n^{-2} f_n^2$ расходится, притом что ряд $\sum f_n^2$ сходится. Такие последовательности, очевидно, всегда найдутся, если $d_n \to 0$. Далее, для $f_n^{'} = f_n$, $n \neq n_0$, $f_{n_0}^{'} = f_{n_0} + \epsilon$ норма возмущения $\left|d_{n_0}^{-1}\epsilon\right|$ сколь угодно велика, поскольку $d_n^{-1} \to \infty$.

Этот пример есть изоморфная модель интегрального уравнения с полным симметричным ядром. Пусть ядро $K\left(x,t\right) = K\left(t,x\right)$ полно: если $\int_a^b K\left(x,t\right)u\left(t\right)dt = 0$, то $u\left(x\right) = 0$. Тогда, как известно из теории интегральных уравнений, существует последовательность чисел λ_n, называемых характеристическими, и функций $\phi_n\left(x\right)$, которые можно считать ортонормированными, таких, что $\lambda_n \int_a^b K\left(x,t\right)\phi_n\left(t\right)dt = \phi_n\left(x\right)$; λ_n^{-1} - собственные числа, $\phi_n\left(t\right)$ собственные функции оператора K. Множество $\{\lambda_n\}$имеет единсвенную предельную точку ∞. Система $\phi_n\left(x\right)$ полна в L_2 и всякая функция из L_2 разлагается по ней в ряд:

$$u\left(x\right) = \sum c_n \phi_n\left(x\right).$$

Действие оператора K на вектор $u(x)$ опсывается формулой:

$$Ku(x) = \sum \lambda_n^{-1} c_n \phi_n(x).$$

K - диагональный оператор в базисе $\{\phi_n(x)\}$.

Осмыслению некорректных задач помогает следующая теорема А. Н. Тихонова:

Теорема об условной корректности. Пусть непрерывный оператор A таков, что $Au = 0$ лишь при $u = 0$. Тогда обратный оператор, который существует на области значений A, непрерывен на образе каждого компакта.

Доказательство. Пусть M компакт в U, $N = AM$. Возьмем $f_n \in N, f_n \to f$. Найдутся u_n такие, что $A^{-1} f_n = u_n$ т.е. $Au_n = f_n$, причем однозначно. Так как u_n лежат в компакте M, то можно выделить частичную сходящуюся последовательность. Все такие последовательности имеют один предел. Действительно, если бы $u_n^{'} \to u^{'}, u_n^{''} \to u^{''}, u^{'} \neq u^{''}$ то по непрерывности $Au_n^{'} \to Au^{'} = f$, $Au_n^{''} \to Au^{''} = f$, что невозможно.

Пусть уравнение

$$Au = f$$

имеет при данной правой части решение. Приходится считаться с тем, что, как правило. правая часть нам известна лишь приближенно: вместо f нам дано некоторое $f_\delta, \|f - f_\delta\| \leq \delta$. Дело в том, что если для корректной задачи малое возмущение правой части лишь вызовет малое возмущение решения, то для некорректной задачи сколь угодно малое возмущение правой части может вывести ее из области значений оператора. Уравнение с правой частью f_δ вообще говоря, не имеет решения. Поэтому поставим себе более скромную задачу: найти приближенное решение, близкое в том смысле, что невязка $\|Au - f_\delta\|$ мала. Здесь однако, мы сталкиваемся с тем, что сделать невязку сколь угодно малой можно лишь ценой неограниченного роста приближенного решения.

Утверждение. Если f не принадлежит области значений оператора, т.е. уравнение не имеет решения, то $\|u\| \to \infty$, когда $\|Au - f\| \to 0$.

Это утверждение докажем на примере модельной задачи. Пусть $f = \{f_n\} \notin R_A$, $b_n = d_n^{-1} f_n$,тогда ряд $\sum b_n^2$ расходится. Для произвольного $B > 0$ найдем N такое, что $\sum_1^N d_n^{-2} f_n^2 > (2B)^2$. Обозначим $D_N = \max \left| d_n^{-1} \right|, n \geq N$, и пусть $f^{(N)}$ есть срезка: $f_n^{(N)} = f_n$ для $n \leq N$ $f_N^{(N)} = 0$ для $n > N$. Если $\|Ac - f\| < \delta$, то $\left\| c^{(N)} - b^{(N)} \right\| < D_N \left\| Ac^{(N)} - f^{(N)} \right\| \leq D_N \|Ac - f\| < D_N \delta$. Тогда $\|c\| \geq \left\| c^{(N)} \right\| \geq \left\| b^{(N)} \right\| - \left\| c^{(N)} - b^{(N)} \right\| \geq 2B - d_N \delta \geq B$, если $D_N \delta < B$.

С другой стороны, если на u нет никаких ограничений,то для данного u всегда можно подобрать такое $u^{'}$, что

$\left\| Au^{'} - f_\delta \right\| < \|Au - f_\delta\|$. Естественно поэтому наложить на приближенное решение априорное ограничение.

Определение. Квазирешением на (ограниченном) множестве T назовем элемент u такой, что $\|Au - f_\delta\| = min$ при условии $u \in T$.

Наиболеее естественно в качестве T брать шар $\|u\| \leq C$. Следует ожидать, из изложенных выше соображений, что минимум достигается на границе шара. Таким образом, приходим к задаче на минимум функционала $\|Au - f_\delta\|$ при условии $\|u\| = C$. Задача на условный экстремум по методу Лагранжа приводится к задаче на минимум функционала

$$F_\alpha(u) = \alpha \|u\|^2 + \|Au - f_\delta\|^2 .$$

Мы пришли к тому, что называется методом регуляризации. Функционал $\alpha \|u\|^2$ называется регуляризующим, конкретно этот функционал - слабым регуляризатором. Если основное пространство гильбертово, то функционал $F_\alpha(u)$ запишется так:

$$\alpha (u, u) + (Au - f_\delta, Au - f_\delta) =$$

$$= \left(\left(\alpha I + A^* A\right) u, u\right) - 2\left(A^* f_\delta, u\right) + \left(f_\delta, f_\delta\right),$$

то-есть как энергетический функционал для оператора $\alpha I + A^* A$, и вариационный принцип для ограниченного оператора приводит к линейному уравнению

$$R_\alpha u = \alpha u + A^* A u = A^* f_\delta.$$

Регуляризованный оператор является положительно определенным, и уравнение однозначно разрешимо.

Если мы хотим, имея в виду теорему Тихонова, компактности приближенных решений, то при отыскании квазирешения следует взять вместо шара компактное множество. Введем функционал $\Omega\left(u\right)$ с областью определения D_Ω плотной в U такой, что всякое множество, на котором $\Omega\left(u\right) < C$, компактно. Квазирешением тогда будет называться элемент, дающий минимум $\|Au - f_\delta\|$ при условии, что u принадлежит компактному множеству $\Omega\left(u\right) < C$.

Регуляризованный функционал будет таким:

$$\alpha\Omega\left(u\right) + \|Au - f_\delta\|^2.$$

В гильбертовом пространстве функционал $\Omega\left(u\right)$ может быть задан как квадрат энергетической нормы для некоторого неограниченного оператора L, симметричного и положительно определенного:

$$\Omega = \left(Lu, u\right).$$

Вариационный принцип приводит тогда к уравнению

$$R_\alpha u = \alpha L u + A^* A u = A^* f_\delta.$$

Если сам оператор оказался симметричным и положительным: то можно регуляризовать не квадрат невязки, а энергетический функционал оператора $\left(Au, u\right) - 2\left(u, f_\delta\right)$.

Регуляризованное уравнение будет таким:

$$\alpha u + Au = f_\delta.$$

При определенном выборе α и при $\delta \to 0$ можно ожидать сходимости регуляризованного приближенного решения к точному, если оно существует.

Теорема 2. Пусть $\Omega(u)$ функционал, определенный на плотном в U множестве D_Ω такой, что $\Omega(u) > 0$ и всякое множество, на котором $\Omega(u) < C$, компактно. Пусть оператор A имеет обратный на своей области значений. Пусть точное решение u^* уравнения существует и принадлежит D_Ω. Тогда при $\alpha \to 0$, $\delta^2/\alpha \le \gamma < +\infty$ элемент u_α, доставляющий минимум функционалу

$$F_\alpha = \alpha\Omega(u) + \|Au - f_\delta\|^2,$$

сходится к u^*.

Докажем это.

1) Все u_α лежат в компактном множестве. Действительно:

$$\Omega(u_\alpha) \le \alpha^{-1}\left(\alpha\Omega(u_\alpha) + \|Au_\alpha - f_\delta\|^2\right) = \alpha^{-1}F_\alpha(u_\alpha)$$

$$\le \alpha^{-1}F_\alpha(u^*) = \alpha^{-1}\left(\alpha\Omega(u^*) + \|Au_\alpha - f_\delta\|^2\right)$$

$$\le \Omega(u_*) + \alpha^{-1}\delta^2 \le \Omega(u^*) + \gamma = const.$$

2) $Au_\alpha \to f$. Действительно:

$$\|Au_\alpha - f\| \le \|Au_\alpha - f_\delta\| + \|f - f_\delta\|.$$

Здесь

$$\|Au_\alpha - f_\delta\|^2 \le \alpha\Omega(u^*) + \|Au^* - f_\delta\|^2 = F_\alpha(u^*) \le F_\alpha(u_\alpha) = \alpha\Omega(u^*) \to 0,$$

и

$$\|f - f_\delta\| \le \delta \to 0.$$

Отсюда по теореме 1 заключаем, что $u_\alpha \to u^*$.

Теорема неприменима в случае слабого регуляризатора. Однако, если пространство гильбертово, то, пользуясь слабой компактностью шара в гильбертовом пространстве, можно доказать сходимость слабо регуляризованного решения.

Докажем предварительно два факта относительно слабой сходимости в гильбертовом пространстве:

1) Если $x_n \to 0$ слабо, то норма предела всякой сходящейся подпоследовательности не больше предела последовательности норм;

2) Если $x_n \to x$ слабо и $\|\lim x_n\| = \lim \|x_n\|$, то $x_n \to x$ сильно.

Напишем:

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\,(x_n, x)\,,$$

при этом $\|x\|^2 - 2\,(x_n, x) \to -\,\|x\|^2$. Отсюда: если существует $\lim \|x_n\|^2$ то он $\geq \|x\|^2$. Если, сверх того, $\lim \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. то $\|x_n - x\|^2 = 0$.

Если основное пространство гильбертово, то сходимость имеет место, но при более сильном условии $\delta^2/\alpha \to 0$.

Как в теореме 2, докажем, что u_α находятся в слабо компактном множестве. Имеем:

$$\begin{aligned}\|u_\alpha\|^2 &\leq \alpha^{-1}\left(\alpha\,\|u_\alpha\|^2 + \|Au_\alpha - f_\delta\|^2\right)\\ &\leq \alpha^{-1}\left(\alpha\,\|u^*\|^2 + \|f - f_\delta\|^2\right)\\ &\leq \|u^*\|^2 + \delta^2/\alpha \to \|u^*\|^2\,.\end{aligned}$$

Всякий частичный предел нормы не превосходит нормы предела, а по свойству 1) наоборот, значит они равны и u_α сходятся сильно.

Приведем некоторые соображения относительно выбора параметра α. Возьмем сначала слабый регуляризатор и симметричный положительный оператор. Регуляризация энергетического функционала приводит к уравнению:

$$\alpha u + Au = f_\delta.$$

Ошибку представим так:

$$u_\alpha - u^* = (\alpha I + A)^{-1} f_\delta - (\alpha I + A)^{-1} f + (\alpha I + A)^{-1} f - u^*$$
$$= (\alpha I + A)^{-1} (f_\delta - f) + \alpha (\alpha I + A)^{-1} u^*.$$

Оценим норму обратного оператора

$$\left\| (\alpha I + A)^{-1} \right\|^2 = \sup \frac{\left((\alpha I + A)^{-1} f, (\alpha I + A)^{-1} f \right)}{(f, f)} =$$

$$= \sup \frac{(u, u)}{((\alpha I + A) u, (\alpha I + A) u)} = \alpha^{-2},$$

так как вектор Au, поскольку A некорректный оператор, может быть сколь угодно мал, и тогда

$$\|u_\alpha - u^*\| \leq \delta/\alpha + \alpha \left\| (\alpha I + A)^{-1} u^* \right\|.$$

Второй член стремится к нулю при для всякого конкретного u^*. Однако общей оценки дать нельзя: норма оператора во втором члене равна единице. Но предположим, что $u^* \in R_A$, т.е. $u^* = Av$, тогда

$$\|u_\alpha - u^*\| \leq \delta/\alpha + \alpha \left\| (\alpha I + A)^{-1} A \right\| \|v\| \leq \delta/\alpha + \alpha \|v\|.$$

При выборе $\alpha = c_1 \delta^{1/2}$ получаем оценку $\|u_\alpha - u^*\| \leq c_2 \delta^{1/2}$.

В общем случае

$$u_\alpha - u^* = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* (f_\delta - f) + \alpha (\alpha I + A^* A)^{-1} u^*,$$

,

$$\left\|(\alpha I + A^*A)^{-1} A^*\right\|^2 = \left\|A (\alpha I + A^*A)^{-1}\right\|^2 =$$

$$= \sup \frac{\left(A (\alpha I + A^*A)^{-1} f, A (\alpha I + A^*A)^{-1} f\right)}{(f.f)}$$

$$= \sup \frac{(Tu, u)}{((\alpha I + T) u, (\alpha I + T) u)}$$

$$= \sup \frac{(Tu, u)}{((\alpha I - T) u, (\alpha I - T) u) + 4\alpha (Tf, f)} \leq 1/4\alpha,$$

причем равенство достигается, когда α есть собственное число оператора $T = A^*A$, а они сколь угодно малы. Имеем тогда оценку:

$$\|u_\alpha - u^*\| \leq \delta/2\sqrt{\alpha} + \alpha \left\|(\alpha I + A^*A)^{-1} u^*\right\|.$$

Снова для второго члена возможна лишь оценка $\|u^*\|$, хотя для всякого конкретного u^* он стремится к нулю. Однако если $u^* = A^*v$, то

$$\alpha \left\|(\alpha I + A^*A)^{-1} u^*\right\| \leq \alpha \left\|(\alpha I + A^*A)^{-1}\right\| \|u^*\| \leq 1/2\sqrt{\alpha} \|u^*\|.$$

Взяв $\alpha = c_1\delta$ получим оценку $\|u_\alpha - u^*\| \leq c_2\delta^{1/2}$.

Если же $u^* = A^*Av$, то

$$\alpha \left\|(\alpha I + A^*A)^{-1} u^*\right\| \leq \alpha \left\|(\alpha I + A^*A)^{-1} A^*A\right\| \|v\| \leq \alpha,$$

и тогда

$$\|u_\alpha - u^*\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \alpha \|v\|.$$

Оптимальный выбор $\alpha = c_1\delta^{2/3}$, оценка $\|u_\alpha - u^*\| \leq c_2\delta^{2/3}$.

Обратимся теперь к интегральным уравнениям. Уравнение I рода

$$\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt = f(x)$$

является, как мы видели, задачей некорректной. Ядро $K(x,t)$ будем преполагать вещественным и непрерывным, основное пространство $L_2[a,b]$. Сопряженный оператор есть интегральный оператор с транспонированным ядром. Метод слабой регуляризации приводит к интегральному уравнению 2-го рода:

$$\alpha u(x) + \int_a^b T(x,t)\,u(t)\,dt = f_1(x),$$

$$T(x,t) = \int_a^b K(\xi,x)\,K(\xi,t)\,d\xi,\, f_1(x) = \int_a^b K(\xi,x)\,f(\xi)\,d\xi,$$

к которому можно применять обычные численные методы.

Для сильной регуляризации можно взять, например,

$$\Omega(u) = \int_a^b \left(u'^2 + u^2\right) dt = \|u\|^2_{W_2^1},$$

приходим к интегродифференциальному уравнению с граничными условиями

$$\alpha\left(-u''(x) + u(x)\right) + \int_a^b T(x,t)\,u(t)\,dt = f_1(x),$$

$$u'(a) = u'(b) = 0,$$

или даже

$$\Omega(u) = \int_a^b \left(u^{(p)2} + u^2\right) dt = \|u\|^2_{W_p^1}.$$

Вариационный принцип приводит к интегродифференциальному уравнению

$$\alpha\left((-1)^p\ \frac{d^{2p}u}{dx^{2p}}+u\right)+\int_a^b T\left(x,t\right)u\left(t\right)dt=f_1\left(x\right)$$

с граничными условиями 2-го рода:

$$u^{(j)}\left(a\right)=u^{(j)}\left(b\right)=0, j=p,...2p-1.$$

Численные методы можно применять к вариационной задаче - это метод Ритца - или к интегральному уравнению, например метод коллокаций или метод квадратур. В методе Ритца при выборе координатной системы следует позаботиться , во-первых, о хороших аппроксимативных свойствах, во-вторых, о достаточно хорошей обусловленности координатной системы. Например, в пространстве полиномов заданной степени, обладающем хорошими свойствами аппроксимации, система целых степеней $\left\{x^k\right\}, k=0,...n$ чрезвычайно плохо обусловлена: для отрезка $[0,1]$ число обусловленности растет примерно как $\left(\sqrt{2}+1\right)^{4n}$. Можно взять в качестве координатной системы полиномы, ортогональные в каком-нибудь смысле: например, полиномы Лежандра, Чебышева 1-го или 2-го рода и т.п. Укажем еще, что узловые полиномы лагранжевой интерполяции по корням полинома, ортогонального с некоторым весом, ортогональны с этим весом. То же следует сказать о выборе координатных функций в методе коллокаций. Этот метод существенно проще метода Ритца, ибо кратность вычисляемых интегралов на единицу меньше.

Метод квадратур. Следует взять достаточно сильную квадратурную формулу, например формулу Симпсона или Гаусса. Воспользуемся случаем,, чтобы привести надежный алгорифм вычисления коэффициентов и узлов Гаусса. Коэффициенты, когда известны узды, вычисляются по формуле

$$A_k=\frac{2}{\left(1-x_k^2\right)P_n'^2\left(x_k\right)}.$$

Узлы x_k, т.е. корни полинома Лежандра, следует находить по методу Ньютона. Возникают два вопроса: как вычислять значения полинома Лежандра и его производной и какие брать начальные приближения. Значения полиномов Лежандра следует вычислять по рекуррентной формуле:

$$(n+1)\,P_{n+1}\,(x) = (2n+1)\,xP_n\,(x) - nP_{n-1}\,(x)\,,$$

$$P_0\,(x) = 1, P_1\,(x) = x,$$

разумеется, не степенные разложения, а непосредственно числа $P_n\,(x)$ для конкретного x. Запишем эту формулу так:

$$(n+1)\,(P_{n+1} - xP_n\,(x)) = n\,(xP_n\,(x) - P_{n-1}\,(x))\,.$$

Известно, что

$$P_n\,(1) = 1, P_n\,(-1) = (-1)^n\,,$$

хотя бы из этой самой формулы индуктивно. Тогда видно, что полином, стоящий справа и слева, делится на x^2-1. В частном оказывается производная:

$$(n+1)\,(P_{n+1}\,(x) - xP_n\,(x)) = n\,(xP_n\,(x) - P_{n-1}\,(x))$$
$$= \left(x^2-1\right) P_n^{'}\,(x)\,.$$

Отсюда получаем пару рекуррентных формул для последовательного вычисления $P_n, P_n^{'}$:

$$(n+1)\,(P_{n+1}\,(x) - xP_n\,(x)) = \left(x^2-1\right) P_n^{'}\,(x)\,,$$

$$(n+1)\,(xP_{n+1}\,(x) - xP_n\,(x)) = \left(x^2-1\right) P_{n+1}^{'}\,(x)\,.$$

По известным $P_n\,(x)\,, P_n^{'}\,(x)$: из первого равенства находим $P_{n+1}\,(x)$, затем из второго $P_{n+1}^{'}\,(x)$, начиная с

$$P_0\,(x) = 1, P_0^{'}\,(x) = 0.$$

А можно, разумеется, сначала вычислить по первой рекуррентной формуле $P_n(x)$, а затем только $P_n'(x)$.

Начальное приближение можно найти, приравнивая нулю главный член асимптотики полинома Лежандра:

$$P_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left((n+1/2)\,\theta\ - \pi/4\right).$$

Число

$$\xi_n^{(n)} = \cos\frac{4k-1}{4n+2}\pi, k = 1, \dots n$$

принимаем за начальное приближение для k-го корня n-го полинома. Метод Ньютона сходится при всех n и k.

Поставим вопрос: какова должна быть погрешность аппроксимации численного метода, чтобы полностью использовать точность, которую допускает регуляризация. Так как для нормы оператора, обратного к приближенному, нельзя ожидать оценки, лучшей, чем α^{-1}, то для ошибки численного метода ориентировочная оценка $\alpha^{-1}\epsilon$, где ϵ - погрешность аппроксимации. Эта величина совпадает по порядку с - погрешность замены f на f_δ ,так что нет причины добиваться приаппроксимации точности большей чем $O(\delta)$.

Желательно при этом чтобы матрица системы линейных уравнений, если она симметрична, была положительно определенной, с той же константой, хотя бы по порядку.

В методе Ритца приближенный оператор, рассматриваемый в пространстве приближеных решений - линейных комбинаций базисных функций - автоматически будет положительно определенным с той же константой. Матрица системы уравнений относительно коэфициентов будет симметричной, оценка снизу квалратичной формы зависит от выбора координатной системы. Она должна быть хорошо обусловленнной, в идеале ортонормированной.

В методе квадратур, когда используется квдратурная формула с положительными коэфициентами:

$$\int_a^b \phi(t)\,dt \approx \sum A_k \phi(t_k)$$

матрица системы $\alpha E + TA$, $T = \{T(t_i, t_k)\}, A = diag\{A_k\}$, симметризуема:

$$A^{1/2}(\alpha E + TA)A^{-1/2} = \alpha E + A^{1/2} T A^{1/2}$$

а эта последняя положительно определена с константой α.

Или, если угодно, матрица системы симметрична и положительно определена в эвклидовом пространстве со скалярным произведением, порожденным квадратурной формулой.

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{n} A_k u(t_k) v(t_k)$$

Сложнее обстоит дело в методе коллокаций. Матрица системы

$$\left\{\phi_k(t_i) + \int_a^b K(t_i, t)(t_i)\phi_k(t)\,dt\right\}$$

октровенно несимметрична. Умножим i уравнение на $\phi_l(t_i)$ и просуммируем , получим матрицу

$$\sum_i A_i \phi_l(t_i)\phi_k(t_i) + \sum_i A_i \phi_l(t_i) \int_a^b K(t_i, t)\phi_k(t)\,dt,$$

которая приближенно симметризуема, подобно матрице метода квадратур, с точностью до квалратурной погрешности. Первый член есть симметричная и положительно определенная матрица, однако константа положительной определенности зависит не только от координатной системы, но и от выбора узлов коллокации

Литература:

1. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Наука, 1979.

2. В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. Вычислительные методы высшей математики, т.2. Минск, 1975.

3. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. Наука, 1987.

ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НА ПРАКТИКУМЕ. Указаны ядро и правая часть. Отрезок интегрирования всюду [0,1].

№	K(x,t)	f(x)
1.	$\frac{1}{2+x+t}$	$\frac{1}{1+x}\ln\frac{2(x+2)}{x+3}$
2.	$\frac{1}{2+x+t}$	$\frac{1}{(1+x)^2}\ln\frac{x+3}{2(x+2)}+\frac{1}{2(x+1)}$
3.	$\frac{1}{1+xt}$	$\frac{1}{1+x}\ln\frac{2}{1+x}$
4.	$\frac{1}{2+xt}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{2-x}+\frac{x}{(2-x)^2}\ln\frac{x+2}{4}$
5.	$\frac{1}{(3/2+x+t)^2}$	$\frac{1}{1+x}\ln\frac{3(2x+3)}{2x+5}-\frac{\ln 2}{x+3/2}-\frac{\ln 3/2}{x+5/2}$
6.	$\frac{1}{(1+(x+1)(t+1))^2}$	$\ln\frac{2(x+2)}{2x+3}-\frac{\ln 2}{(x+1)(2x+3)}$
7.	$\ln(2+x+t)$	$\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+3)+\frac{1}{1+x}\ln\frac{2(x+2)}{x+3}$
8.	$\ln(2+xt)$	$\frac{1}{2}\frac{2+x}{2-x}\ln\frac{4}{2+x}$
9.	$\frac{1}{3+x+t}$	$2\left(\sqrt{2}-1\right)-2\sqrt{x+2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{x+2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$
10.	$\frac{1}{1+x+t}$	$2\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2-x}\left(2\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}+\ln\frac{2+x}{1+x}\right)$
11.	$\frac{1}{2+x+t}$	$\frac{2}{\sqrt{x+1}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$
12.	$\frac{1}{1+x+t}$	$\frac{1}{\sqrt{2-x}}\left(\ln\frac{2+x}{1+x}+2\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}\right)$
13.	$\frac{1}{(2+x+t)^2}$	$\frac{1}{x+1}\ln\frac{2(x+2)}{x+3}-\frac{\ln 2}{x+3}$
14.	$\frac{1}{(1+(x+1)(t+1))^2}$	$\frac{1}{x+1}\left(\ln\frac{2(x+2)}{x+3}-\frac{\ln 2}{2x+3}\right)$
15.	$\frac{1}{\sqrt{1+x+t}}$	$\frac{2}{\sqrt{2-x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\right)$
16.	$\frac{1}{\sqrt{2+x+t}}$	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}\left(2\ln\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{1+x}}+\ln 2\right)$
17.	$\frac{1}{\sqrt{1+x+t}}$	$4\sqrt{2-x}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\right)$ $+4(\ln 2-1)\sqrt{2+x}+(4-2\ln 3)\sqrt{1+x}$
18.	$\frac{1}{\sqrt{2+x+t}}$	$(2\ln 2-4)\sqrt{3+x}+4\sqrt{2+x}$ $-2\ln 2\sqrt{1+x}+4\sqrt{1+x}\ln\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}$

19.	$\frac{1}{(2+x+t)^2}$	$\frac{1}{2+x}-\frac{\sqrt{2}}{3+x}$ $+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$
20.	$\frac{1}{(1+x+t)^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\ln\frac{2+x}{1+x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}$
21.	$\sqrt{2+xt}$	$2\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2}\right)+\ln 2\sqrt{2-x}$ $+2\sqrt{2-x}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$
22.	$\frac{1}{\sqrt{2+xt}}$	$\frac{1}{\sqrt{2-x}}\left(\ln 2+2\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right)$
23.	$\sqrt{1+x+t}$	$\frac{\sqrt{1+x}}{3}-\frac{\sqrt{2+x}}{4}$ $+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}\right)$
24.	$\sqrt{2+x+t}$	$\sqrt{x+2}-\frac{\sqrt{x+3}}{2}$ $+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\left(\frac{\ln 2}{2}+\ln\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{1+x}}\right)$
25.	$\sqrt{2+xt}$	$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2+x}}{2}+\frac{\ln 2}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x}}+\frac{x}{\sqrt{2-x}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$
26.	$\ln(3+x+t)$	$2\sqrt{2}\ln(4+x)-2\ln(3+x)-4\left(\sqrt{2}-1\right)$ $+2\sqrt{2+x}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{2+x}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2+x}}\right)$
27.	$\ln(1+x+t)$	$4\ln(x+2)-2\sqrt{3}\ln(x+1)-4\left(2-\sqrt{3}\right)$ $-2\sqrt{2-x}\ln\frac{2+x}{1+x}-4\sqrt{2-x}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}$
28.	$\sqrt{2+x+t}$	$2\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2+x}\right)$ $+\sqrt{1+x}\left(2\ln\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{1+x}}+\ln 2\right)$
‘29.	$\sqrt{1+x+t}$	$2\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{1+x}\right)$ $-2\sqrt{2-x}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1+x}}\right)$
30.	$\ln(1+(x+1)(t+1))$	$2\sqrt{2}\ln(2x+3)-2\ln(x+2)-4\left(\sqrt{2}-1\right)$ $+\frac{4}{\sqrt{x+1}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2(x+1)}-\operatorname{arctg}\sqrt{+1}\right)$
31.	$\frac{1}{2+x+t}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{\ln 2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\ln\frac{z+3}{x+2}$
32.	$\frac{1}{(2+x+t)^2}$	$\frac{1}{2+x}-\frac{2\sqrt{2}}{3+x}+3\left(\sqrt{2}-1\right)$ $-3\sqrt{x+1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

33.	$\sqrt{1+xt}$	$\sqrt{1+x}-1+\sqrt{1-x/2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x/2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x/2}}+\frac{\ln 2}{2}\right)$
34.	$\sqrt{1+(x+1)(t+1)}$	$2\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}\right)$ $-2\sqrt{2x+1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x+3}{2x+1}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}\right)$
35.	$\frac{1}{(2+x+t)^2}$	$\frac{1}{x+2}-\frac{2\sqrt{2}}{x+3}+3\left(\sqrt{2}-1\right)$ $-3\sqrt{x+1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2(x+1)}-\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\right)$
36.	$\frac{1}{(1+x+t)^2}$	$\frac{1}{x+2}-\frac{2\sqrt{2}}{x+3}+3\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\sqrt{2-x}\ln\frac{2+x}{1+x}$ $+3\sqrt{2-x}\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2-x}}{2+\sqrt{2-x}}$
37.	$\ln(1+x+t)$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}\ln(x+3)-\frac{2}{3}\ln(x+2)+\frac{4}{9}\sqrt{2}-\frac{8}{9}+\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)x$ $-\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$
38.	$\frac{1}{(2+x+t)^2}$	$\frac{1}{(1+x)^2}\ln\frac{2(2+x)}{x+3}-\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
39.	$\frac{1}{\sqrt{1+x+t}}$	$2\sqrt{1+x/2}-\sqrt{1+x}-x\left(\frac{\ln 2}{2}+\ln\frac{\sqrt{1+x/2}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$
40.	$\sqrt{1+x+t}$	$2\sqrt{1+x/2}-\sqrt{1+x}+x\left(\frac{\ln 2}{2}-\ln\frac{\sqrt{1+x/2}+1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$

Решения интегральных уравнений 1-40.

1.	$\frac{1}{x+1}$	11.	$\sqrt{x+1}$	21.	$\frac{1}{x+1}$	31.	$\frac{1}{(x+1)^2}$
2.	$\frac{1}{(x+1)^2}$	12.	$\frac{1}{\sqrt{x+3}}$	22.	$\frac{1}{x+1}$	32.	$\frac{1}{(x+1)^{3/2}}$
3.	$\frac{1}{x+1}$	13.	$\ln{(x+1)}$	23.	$\frac{1}{(x+3)^2}$	33.	$\frac{1}{2x+1}$
4.	$\frac{1}{(1+x)^2}$	14.	$\ln{(x+1)}$	24	$\frac{1}{(x+1)^2}$	34	$\frac{1}{x+3}$
5.	$\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$	15.	$\frac{1}{x+3}$	25.	$\frac{1}{(x+1)^2}$	35.	$\sqrt{x+1}$
6.	$\ln{(x+1)}$	16.	$\frac{1}{x+1}$	26	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	36	$\sqrt{x+3}$
7.	$\frac{1}{(x+1)^2}$	17.	$\ln{(x+3)}$	27	$\frac{1}{\sqrt{x+3}}$	37.	$\sqrt{x+1}$
8.	$\frac{1}{(x+1)^2}$	18.	$\ln{(x+1)}$	28	$\frac{1}{x+1}$	38	$\frac{1}{x+1}$
9.	$\sqrt{x+1}$	19.	$\sqrt{x+1}$	29.	$\frac{1}{x+3}$	39	$\sqrt{x+1}$
10.	$\sqrt{x+3}$	20.	$\sqrt{x+3}$	30.	$\frac{1}{x+1}$	40.	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$