

# Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм\*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Фролов А. Н. Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 762–774.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.412>

Исследовано асимптотическое поведение вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, имеющих моменты порядка  $p > 2$ . Найдены зоны, в которых эти вероятности эквивалентны хвосту стандартного нормального закона. Ширина зоны выражается в терминах логарифма комбинаторного варианта дроби Ляпунова. Ранее аналогичные результаты были получены автором при выполнении условий Бернштейна и Линника. Для доказательства новых результатов использован метод усечений

*Ключевые слова:* вероятности больших уклонений, вероятности умеренных уклонений, комбинаторная центральная предельная теорема, комбинаторная сумма.

**1. Введение и результаты.** Пусть  $\{(X_{nij}), 1 \leq i, j \leq n, n = 2, 3, \dots\}$  — последовательность матриц независимых случайных величин с конечными моментами порядка  $p > 2$ . Пусть  $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \dots, \pi_n(n)), n = 2, 3, \dots\}$  — последовательность случайных перестановок чисел  $1, 2, \dots, n$ . Предположим, что  $\vec{\pi}_n$  имеет равномерное распределение на множестве всех перестановок  $1, 2, \dots, n$  и не зависит от  $(X_{nij})$  для любого  $n$ . Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_{ni\pi_n(i)}.$$

Сумма  $S_n$  называется комбинаторной суммой.

Исследование асимптотического поведения распределений нормализованных комбинаторных сумм ведется давно и представляет существенный интерес. В частности, для вырожденных  $X$ -ов комбинаторные суммы представляют собой ранговые статистики, наиболее известным представителем которых является коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Сначала были получены различные варианты комбинаторной центральной предельной теоремы (ЦПТ), а затем различные оценки в ней (равномерные и неравномерные). Подробнее с результатами в этом направлении можно познакомиться в работах [1, 2] и литературе из этих работ. Хорошо известно, что из оценок в ЦПТ можно получать результаты об умеренных уклонениях. Это достаточно простой способ, который однако не дает оптимальных результатов.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 23-21-00078.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

Первый результат о поведении больших уклонений комбинаторных сумм был получен автором в [1]. Там предполагалось, что  $X_{nij}$  удовлетворяют условию Бернштейна. Для доказательства использовался метод сопряженных распределений, применявшийся к одной нормализованной случайной величине  $S_n$ . Отметим, что в классической теории суммирования независимых случайных величин сопряженное распределение суммы совпадает с распределением суммы сопряженных величин. Такого свойства в случае комбинаторных сумм нет, что существенно затрудняет доказательство. Поэтому в [1] анализировалось поведение производящей функции моментов и ее логарифмических производных в некотором круге комплексной плоскости. Это позволило с нужной точностью оценить близость сопряженного и нормального распределений. В работе [2] с помощью метода усечений было исследовано асимптотическое поведение больших уклонений комбинаторных сумм для  $X_{nij}$ , удовлетворяющих условию Линника. Ослабление условия Бернштейна до условия Линника, естественно, сужает зону нормальной сходимости, но и в том, и в другом случае эта зона степенная (степень дисперсии  $S_n$ ). При логарифмической зоне большие уклонения принято называть умеренными. Первый результат об умеренных уклонениях комбинаторных сумм получен автором в работе [3] с использованием оценок в комбинаторной ЦПТ из [4]. В настоящей работе мы получим более общий результат с использованием метода усечений и результатов работы [1]. Мы покажем, что наши результаты оптимальны.

Если при всех  $n$  для любого  $i$  случайные величины  $X_{ni1}, \dots, X_{nin}$  одинаково распределены, то  $S_n$  будет суммой независимых случайных величин, не обязательно одинаково распределенных. Поэтому для анализа качества наших результатов мы обратимся к известным результатам об умеренных уклонениях из теории суммирования. Различные результаты об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений получены Линником [5], Нагаевым [6], Рубиным и Сетураманом [7], Нагаевым [8], Амосовой [9, 12], Михелем [10], Слестниковым [11, 15], Розовским [13, 18], Рыхликом [14], Фроловым [16, 17, 19] и другими авторами.

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_{nij} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}X_{nij} = 0 \quad \text{при всех } 1 \leq i, j \leq n \quad (1)$$

для любого  $n$ . В этом случае

$$\mathbf{E}S_n = 0, \quad \mathbf{D}S_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}X_{nij})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Таким образом, условие (1) обеспечивает центрированность комбинаторных сумм. Если  $\mathbf{D}S_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то главной частью асимптотики этой дисперсии будет нормированная сумма вторых моментов

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Поэтому в дальнейшем  $\{B_n\}$  будет использоваться в качестве нормирующей последовательности для  $S_n$ .

Положим

$$L_n = \frac{1}{nB_n^{p/2}} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad c_n = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^n \mathbf{E}X_{nij}^2 + \frac{1}{n} \max_j \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Далее мы будем предполагать, что  $B_n \rightarrow \infty$  и  $L_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из последнего соотношения, в частности, следует, что справедлива комбинаторная ЦПТ (см., например, [4]). Дробь  $L_n$  мы будем называть комбинаторной дробью Ляпунова.

Наш первый результат следующий.

**Теорема 1.** *Предположим, что для некоторого  $p > 3$  неравенства*

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq C\mathbf{E}|X_{nij}|^s \quad (2)$$

*выполняются для  $s = 1, 2, 3$ , всех  $1 \leq i, j \leq n$  и всех  $n \geq 2$ . Пусть для всех  $i, j$  и  $n$  таких, что  $\mathbf{P}(|X_{nij}| > 0) > 0$ , выполняются неравенства*

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \geq cn^{-1/2}B_n^{(3-p)/2}. \quad (3)$$

*Здесь  $c$  и  $C$  — абсолютные положительные постоянные.*

*Предположим, что  $\ln(1/L_n) = O(\ln B_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .*

*Пусть  $\{u_n\}$  — последовательность вещественных чисел такая, что  $u_n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n = u_n^2 - 2\ln(1/L_n) - (p-1)\ln \ln(1/L_n) \rightarrow -\infty$  и*

$$u_n^3 \sqrt{nc_n} = o(B_n) \quad (4)$$

*при  $n \rightarrow \infty$ .*

*Тогда выполняется соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n \geq u_n \sqrt{B_n}\right) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

*где  $\Phi(x)$  — стандартная нормальная функция распределения.*

Неравенство (2) является равномерным вариантом тривиальной оценки  $\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq C_{nij}\mathbf{E}|X_{nij}|^s$ , а замена его неравенством с  $C = C(n)$  приведет к сужению области изменения  $u_n$ . По неравенствам Ляпунова и (2) мы имеем  $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leq (\mathbf{E}|X_{nij}|^p)^{s/p} \leq (C\mathbf{E}|X_{nij}|^s)^{s/p}$ . Это дает  $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leq C^{s/(p-s)}$ . В частности,  $B_n \leq C^{2/(p-2)}n$  и  $c_n \leq C^{2/(p-2)}$ . Из условия (2) и определения  $L_n$  следует, что  $L_n \leq CB_n^{(2-p)/2}$ . Кроме того, в силу неравенств Ляпунова и Гёльдера

$$nB_n \leq \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}|X_{nij}|^p)^{2/p} \leq \left( \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p \right)^{2/p} n^{2(p-2)/p} = B_n L_n^{2/p} n^{2(p-1)/p}.$$

Значит,  $n^{(2-p)/2} \leq L_n$  и  $(p-2)\ln n \geq 2\ln(1/L_n) \geq (p-2)\ln B_n - 2\ln C$ . Таким образом, зона нормальной сходимости в теореме 1 имеет логарифмический порядок по  $n$ .

Отметим, что правая часть в неравенстве (3) стремится к нулю. Это условие выполнено, если абсолютные моменты порядка  $p$  отделены от нуля.

Хотя  $c_n$  ограничено, соотношение (4) является условием, если  $B_n$  мало по сравнению с  $n$ . Условие (4) выполнено, если  $B_n \geq n^{(1+\delta)/2}$  при некотором  $\delta > 0$ .

Условия (2) и (3) выполнены, например, если каждая из случайных величин  $X_{nij}$  может иметь одно из  $k$  заданных распределений. Если при этом для любого  $n$  число невырожденных в нуле случайных величин в матрице с номером  $n$  больше  $n^{(3+\delta)/2}$ , где  $\delta \in (0, 1)$ , то выполнено и условие (4).

Перейдем к случаю  $p \leq 3$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условий (2). Предположим, что для некоторого  $p \leq 3$ , всех  $1 \leq i, j \leq n$  и всех  $n \geq 2$  выполняются неравенства (2) для  $s = 1, 2$  и

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq C\mathbf{E}|X_{nij}|^3 I\{|X_{nij}| \leq \sqrt{B_n}\}. \quad (6)$$

Тогда выполняется соотношение (5).

Если при всех  $n$  для любого  $i$  случайные величины  $X_{ni1}, \dots, X_{nin}$  одинаково распределены (при этом они автоматически будут центрированы в силу условия (1)), то  $S_n$  будет суммой независимых случайных величин, а  $L_n$  будет обычной дробью Ляпунова. Известно (см., например, [17]), что в этом случае условие  $\lambda_n = u_n^2 - 2 \ln(1/L_n) - (p-1) \ln \ln(1/L_n) \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , определяющее ширину зоны нормальной сходимости, оптимально. Таким образом, в этой ситуации результаты теорем 1 и 2 оптимальны по ширине зоны.

В теореме 2 зона нормальной сходимости шире, чем в теореме 3 из [3], полученной с помощью оценки в комбинаторной ЦПТ из [4].

Можно отказаться от условия (2) в теоремах 1 и 2 за счет выбора другого уровня усечения в доказательстве. При этом зона нормальной сходимости сократится, а для  $p \leq 3$  мы получим результат хуже, чем теорема 3 из [3]. Это обусловлено тем, что остаточный член в комбинаторной ЦПТ имеет порядок  $L_n$ , а разность вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм усеченных и неусеченных случайных величин — порядок  $u_n^p L_n$ . Поэтому случай  $p \leq 3$  мы не рассматриваем. С другой стороны, в [3] результатов для  $p > 3$  нет. Для этого случая мы и сформулируем следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть  $p > 3$ ,  $\{u_n\}$  — последовательность вещественных чисел такая, что  $u_n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_n = u_n^2 - 2 \ln(1/L_n) + (p+1) \ln \ln(1/L_n) \rightarrow -\infty$ ,

$$u_n^3 \max_{i,j} \mathbf{E}|X_{nij}| = o(\sqrt{B_n}). \quad (7)$$

и выполнено соотношение (4) при  $n \rightarrow \infty$ .

Тогда выполняется соотношение (5).

**2. Доказательства.** Перейдем к доказательствам наших результатов.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2.** Положим  $y_n = u_n \sqrt{B_n} / \rho_n$ , где  $\rho_n = \min\{\ln u_n, e^{-\lambda_n/2p}\}$ . Ясно, что  $\rho_n \rightarrow \infty$  и  $\rho_n = o(u_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для всех  $1 \leq i, j \leq n$  и  $n$  положим

$$\begin{aligned} \bar{X}_{nij} &= X_{nij} I\{|X_{nij}| < y_n\}, & \tilde{X}_{nij} &= X_{nij} I\{|X_{nij}| \geq y_n\}, & \bar{a}_{nij} &= \mathbf{E}\bar{X}_{nij}, \\ \bar{a}_{ni.} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{a}_{nij}, & \bar{a}_{n.j} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{a}_{nij}, & \bar{a}_{n..} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{nij}, & \mu_{nij} &= \bar{a}_{ni.} + \bar{a}_{n.j} - \bar{a}_{n..}, \end{aligned}$$

$$Y_{nij} = \bar{X}_{nij} - \mu_{nij}, \quad T_n = \sum_{i=1}^n \bar{X}_{ni\pi_n(i)}, \quad R_n = \sum_{i=1}^n Y_{ni\pi_n(i)}, \quad \bar{B}_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}Y_{nij}^2.$$

Заметим, что  $\mu_{nij}$  выбрано так, чтобы выполнялось условие (1) с заменой  $X_{nij}$  на  $Y_{nij}$ . При этом  $\mathbf{E}R_n = 0$ , а  $\bar{B}_n$  — главная часть  $\mathbf{D}R_n$ .

Из соотношений  $\{S_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}\} \subset \{T_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{X_{ni\pi_n(i)} \neq \bar{X}_{ni\pi_n(i)}\}$  и  $\{T_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}\} \subset \{S_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{X_{ni\pi_n(i)} \neq \bar{X}_{ni\pi_n(i)}\}$  следует, что

$$|\mathbf{P}(S_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}) - \mathbf{P}(T_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n})| \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}(|X_{nij}| \geq y_n). \quad (8)$$

Покажем сначала, что выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(R_n \geq u_n \sqrt{\bar{B}_n}) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Для этого нам потребуется следующий результат из работы автора [1]. Для удобства мы его формулируем в терминах случайных величин  $Y_{nij}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\{M_n\}$  — неубывающая последовательность положительных постоянных такая, что для  $s = 1, 2, 3$  неравенства

$$|\mathbf{E}Y_{nij}^k| \leq Dk!M_n^{k-s}\mathbf{E}|Y_{nij}|^s \quad (10)$$

выполняются для всех  $k \geq s$ , всех  $1 \leq i, j \leq n$  и всех  $n \geq 2$ , где  $D$  — абсолютная положительная постоянная. Положим

$$\gamma_n = \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{B}_n}} \mathbf{E}|Y_{nij}|, \max_i \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{E}Y_{nij}^2}{\bar{B}_n}, \max_j \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{E}Y_{nij}^2}{\bar{B}_n}, \sum_{i,j=1}^n \frac{\mathbf{E}|Y_{nij}|^3}{\sqrt{n}\bar{B}_n^{3/2}} \right\}. \quad (11)$$

Тогда для любой последовательности вещественных чисел  $\{u_n\}$  такой, что  $u_n \rightarrow \infty$ ,  $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$  и  $u_n = o(\sqrt{\bar{B}_n}/M_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ , выполняется соотношение (9).

Для проверки условий теоремы 4 нам потребуются следующие две леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $y > e$ ,  $p > 3$ ,  $\mu \in (-1, 1)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a \in (0, 1)$  и  $a \leq (p-3)/2$ . Пусть  $X$  — случайная величина,  $\bar{X} = XI\{|X| < y\}$  и  $Y = \bar{X} - \mu$ . Предположим, что  $\mathbf{E}|Y|^p \leq \alpha \mathbf{E}|Y|^s$  при  $s = 1, 2, 3$  и  $|\mu| \leq y$ .

Тогда неравенства

$$|\mathbf{E}Y^k| \leq (3 + \alpha)k!M^{k-s}\mathbf{E}|Y|^s$$

выполнены для всех  $k > s$  при  $s = 1, 2, 3$ , где  $M = y/(a \ln y)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для всех  $z$  из круга  $|z| \leq ay^{-1} \ln y = 1/M < ae^{-1}$  и  $s = 1, 2, 3$  мы имеем

$$|\mathbf{E}Y^s e^{zY}| \leq \mathbf{E}|Y|^s e^{|z||Y|}.$$

Разобьем на две части область интегрирования в последнем интеграле. Для первой части мы получим

$$\mathbf{E}|Y|^s e^{|z||Y|} I\{|Y| < e\} \leq e^{|z|e} \mathbf{E}|Y|^s \leq e^a \mathbf{E}|Y|^s.$$

Для второй части, учитывая неравенства  $|Y| \leq y + |\mu| \leq 2y$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|Y|^s e^{|z||Y|} I\{|Y| \geq e\} &= \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{|Y|}{\ln|Y|} \ln|Y|} I\{|Y| \geq e\} \leq \\ &\leq \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{2y}{\ln(2y)} \ln|Y|} I\{|Y| \geq e\} \leq \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{2y}{\ln y} \ln|Y|} I\{|Y| \geq e\} \leq \\ &\leq \mathbf{E}|Y|^s e^{2a \ln|Y|} I\{|Y| \geq e\} \leq \mathbf{E}|Y|^{s+2a} \leq \mathbf{E}|Y|^p \leq \alpha \mathbf{E}|Y|^s. \end{aligned}$$

Следовательно, в круге  $|z| \leq 1/M$  для  $s = 1, 2, 3$  выполняется неравенство

$$|\mathbf{E}Y^s e^{zY}| \leq (3 + \alpha)\mathbf{E}|Y|^s.$$

Используя неравенство Коши для коэффициентов разложения аналитической функции  $\mathbf{E}Y^s e^{zY}$ , мы получаем требуемое.  $\square$

Отметим, что следующий результат справедлив при любом выборе  $y_n$ .

**Лемма 2.** Если выполнено условие (1) и  $p > 1$ , то для всех  $i, j$  и  $n$  выполняются неравенства

$$|\bar{a}_{ni.}| \leq \frac{y_n^{1-p}}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad |\bar{a}_{n.j}| \leq \frac{y_n^{1-p}}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad |\bar{a}_{n..}| \leq \frac{y_n^{1-p}}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p.$$

Если выполнено условие (1) и  $p > 2$ , то для всех  $n$  выполняется неравенство

$$|B_n - \bar{B}_n| \leq y_n^{2-p} B_n^{p/2} L_n + 14y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание условие (1), для всех  $i$  мы имеем

$$n|\bar{a}_{ni.}| = \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\bar{X}_{nij} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\tilde{X}_{nij} \right| \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}| I\{|X_{nij}| \geq y_n\} \leq y_n^{1-p} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p.$$

Аналогично мы получим второе и третье неравенства.

Оценим теперь  $|B_n - \bar{B}_n|$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} B_n - \bar{B}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}Y_{nij}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}(\bar{X}_{nij} - \mu_{nij})^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - 2\mu_{nij}\mathbf{E}\bar{X}_{nij} + \mu_{nij}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}\bar{a}_{nij} + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}\bar{a}_{nij} &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ni.}\bar{a}_{nij} + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{n.j}\bar{a}_{nij} - \frac{\bar{a}_{n..}}{n} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{nij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ni.}^2 + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{n.j}^2 - n\bar{a}_{n..}^2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}^2 \leq \frac{3}{n} \sum_{i,j=1}^n (\bar{a}_{ni.}^2 + \bar{a}_{n.j}^2 + \bar{a}_{n..}^2) = 3 \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ni.}^2 + 3 \sum_{j=1}^n \bar{a}_{n.j}^2 + 3n\bar{a}_{n..}^2.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$|B_n - \bar{B}_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} \tilde{X}_{nij}^2 + 5 \sum_{i=1}^n \bar{a}_{ni}^2 + 5 \sum_{j=1}^n \bar{a}_{n.j}^2 + 5n\bar{a}_{n..}^2.$$

Используя найденные выше оценки для  $|\bar{a}_{ni.}|$  и  $|\bar{a}_{n.j}|$ , мы получим

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ni.}^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |\bar{a}_{ni.}| \right)^2 \leq \left( \frac{y_n^{1-p}}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} |X_{nij}|^p \right)^2 = y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2$$

и, аналогично,  $\sum_{j=1}^n \bar{a}_{n.j}^2 \leq y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2$ . Кроме того, мы имеем

$$\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} \tilde{X}_{nij}^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} X_{nij}^2 I\{|X_{nij}| \geq y_n\} \leq y_n^{2-p} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} |X_{nij}|^p = y_n^{2-p} n B_n^{p/2} L_n.$$

Вместе с оценкой для  $|\bar{a}_{n..}|$  это нам дает

$$|B_n - \bar{B}_n| \leq y_n^{2-p} B_n^{p/2} L_n + \frac{5(2n+1)}{n} y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2.$$

Так как  $n \geq 2$ , это влечет требуемое неравенство.  $\square$

С помощью леммы 1 покажем, что условие (10) выполнено для  $Y_{nij}$  с  $M_n = y_n/(a \ln y_n)$ . Нам нужно доказать, что  $|\mu_{nij}| \leq y_n$  и  $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leq \alpha \mathbf{E}|Y_{nij}|^s$  при  $s = 1, 2, 3$ . При этом можно считать, что все  $X_{nij}$  не вырождены в нуле. Для вырожденных в нуле случайных величин условие (10) очевидно выполнено.

По лемме 2, определению  $c_n$  и условию (2) мы имеем

$$|\bar{a}_{ni.}| \leq C \frac{y_n^{1-p}}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} |X_{nij}|^2 \leq C c_n y_n^{1-p} \text{ для всех } i, \quad |\bar{a}_{n.j}| \leq C c_n y_n^{1-p} \text{ для всех } j,$$

$$|\bar{a}_{n..}| \leq C \frac{y_n^{1-p}}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E} |X_{nij}|^2 \leq C \frac{y_n^{1-p}}{n} \max_i \sum_{j=1}^n \mathbf{E} |X_{nij}|^2 \leq C c_n y_n^{1-p}.$$

Используя условие (4), мы получим

$$\begin{aligned} \max_{i,j} |\mu_{nij}| &\leq 3C c_n y_n^{1-p} = o(n^{-1/2} u_n^{-2-p} \rho_n^{p-1} B_n^{(3-p)/2}) = \\ &= o(u_n^{-1-p} n^{-1/2} B_n^{(3-p)/2}) = o(1) \end{aligned} \quad (12)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $p \geq 3$ , то последнее соотношение очевидно. Если  $p < 3$ , то, учитывая неравенство  $B_n \leq C^{2/(p-2)} n$ , мы получим  $n^{-1/2} B_n^{(3-p)/2} = O(n^{(2-p)/2}) = o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\max_{i,j} |\mu_{nij}| \leq y_n$  для всех достаточно больших  $n$ .

Из условий (2), (3) и соотношения (12) вытекает, что при  $p > 3$  для  $s = 1, 2, 3$  и всех  $i$  и  $j$  неравенства

$$|\mu_{nij}|^s \leq |\mu_{nij}| \leq 0.05 C^{-1} \mathbf{E} |X_{nij}|^p \leq 0.05 \mathbf{E} |X_{nij}|^s$$

выполнены для всех достаточно больших  $n$ . При  $p \leq 3$  последние неравенства справедливы для  $s = 1, 2$ , а при  $s = 3$  из условия (6) и неравенства  $\sqrt{B_n} \leq y_n$  следует, что

$$|\mu_{nij}|^3 \leq 0.05 \mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

Поэтому при  $p > 3$  для  $s = 1, 2, 3$  мы имеем

$$\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leq 2^{p-1}(\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^p + |\mu_{nij}|^p) \leq 2^{p-1}(\mathbf{E}|X_{nij}|^p + |\mu_{nij}|) \leq 2^{p-1}(C + 0.05)\mathbf{E}|X_{nij}|^s.$$

При  $p \leq 3$  вместо последнего неравенства для  $s = 3$  будет верно

$$\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leq 2^{p-1}(\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^p + |\mu_{nij}|^p) \leq 2^{p-1}(\mathbf{E}|X_{nij}|^p + |\mu_{nij}|) \leq 2^{p-1}(C + 0.05)\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

В последнем неравенстве мы использовали условие (6) и неравенство  $\sqrt{B_n} \leq y_n$ . Так как при  $p > 3$  для  $s = 1, 2, 3$  справедливы неравенства

$$\mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s = \mathbf{E}|X_{nij}|^s I\{|X_{nij}| \geq y_n\} \leq y_n^{s-p} \mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq y_n^{3-p} C \mathbf{E}|X_{nij}|^s \leq 0.05 \mathbf{E}|X_{nij}|^s,$$

мы имеем

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leq 3^{s-1}(\mathbf{E}|Y_{nij}|^s + \mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s + |\mu_{nij}|^s) \leq 9\mathbf{E}|Y_{nij}|^s + 0.9\mathbf{E}|X_{nij}|^s.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leq 90\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$  и  $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leq \alpha \mathbf{E}|Y_{nij}|^s$ , где  $\alpha = 2^{p-1}(C + 0.05)90$ . При  $p \leq 3$  приведенные оценки сохраняются для  $s = 1, 2$ . При  $s = 3$  мы имеем

$$\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3 \leq 4(\mathbf{E}|Y_{nij}|^3 + |\mu_{nij}|^3) \leq 4\mathbf{E}|Y_{nij}|^3 + 0.2\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3 \leq 5\mathbf{E}|Y_{nij}|^3$  и  $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leq \alpha \mathbf{E}|Y_{nij}|^s$ , где  $\alpha = 2^{p-1}(C + 0.05)90 + 5$ .

По лемме 1 условие (10) выполнено для  $Y_{nij}$  с  $M_n = y_n/a \ln y_n$ .

По лемме 2 мы имеем

$$|B_n - \bar{B}_n| \leq u_n^{2-p} \rho_n^{p-2} B_n L_n + 14u_n^{2-2p} \rho_n^{2p-2} B_n L_n^2 = o(B_n L_n^{2/3}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В частности,  $B_n \sim \bar{B}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажем теперь, что в условиях теорем 1 и 2 выполняются соотношения  $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$  и  $u_n = o(\sqrt{\bar{B}_n}/M_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Мы имеем

$$\frac{u_n M_n}{\sqrt{\bar{B}_n}} = O\left(\frac{u_n y_n}{\sqrt{\bar{B}_n} \ln y_n}\right) = O\left(\frac{u_n^2}{\rho_n (\frac{1}{2} \ln B_n + \ln u_n - \ln \rho_n)}\right) = O\left(\frac{\ln(1/L_n)}{\rho_n \ln B_n}\right) = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $n$  таких, что  $\gamma_n = \max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{B}_n}} \mathbf{E}|Y_{nij}|$ , мы получим

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n^3 \max_{i,j} \mathbf{E}|X_{nij}|}{\sqrt{\bar{B}_n}} + \frac{u_n^3 \max_{i,j} |\mu_{nij}|}{\sqrt{\bar{B}_n}} = o(1) + o(u_n^{3-2p} n^{-1/2} B_n^{(2-p)/2}) = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Здесь мы воспользовались (12). Для  $n$  таких, что  $\gamma_n$  совпадает со вторым или с третьим членом под максимумом в формуле (11), с учетом условия (4) и (12) выполняется соотношение

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} \leq 2 \frac{u_n^3 n c_n}{B_n \sqrt{n}} + 2 \frac{u_n^3 n (\max_{i,j} |\mu_{nij}|)^2}{B_n \sqrt{n}} = o(1) + o(u_n^{3-2p} n^{-3/2} B_n^{2-p}) = o(1) \quad (14)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $n$  таких, что  $\gamma_n$  совпадает с четвертым членом в максимуме из (11), при  $p \leq 3$ , используя (12), мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} &\leq 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{u_n^3 \mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}} + 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{u_n^3 |\mu_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}} \leq \\ &\leq 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{u_n^3 y_n^{3-p} \mathbf{E}|X_{nij}|^p}{nB_n^{3/2}} + 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{u_n^3 |\mu_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}} = \\ &= 4u_n^3 y_n^{3-p} B_n^{(p-3)/2} L_n + o(u_n^{-3p} n^{-1/2} B_n^{3(3-p)/2-3/2}) = 4u_n^{6-p} \rho_n^{3-p} L_n + o(1) = o(1) \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $p > 3$ , то нужно оценить снова сумму  $\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3$ . Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X_{nij}|^3 &= \mathbf{E}|X_{nij}|^3 I\{|X_{nij}| < \sqrt{y_n}\} + \mathbf{E}|X_{nij}|^3 I\{|X_{nij}| \geq \sqrt{y_n}\} \\ &\leq \sqrt{y_n} \mathbf{E}X_{nij}^2 + y_n^{(3-p)/2} \mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq (\sqrt{y_n} + C y_n^{(3-p)/2}) \mathbf{E}X_{nij}^2 \leq 2\sqrt{y_n} \mathbf{E}X_{nij}^2 \end{aligned}$$

при всех достаточно больших  $n$ . В этом случае

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} \leq 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{u_n^3 \mathbf{E}|X_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}} + o(1) = O\left(\frac{u_n^3 \sqrt{y_n}}{B_n^{1/2}}\right) + o(1) = o(1) \quad (15)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, по теореме 4 соотношение (9) выполнено.

По лемме 2 мы имеем

$$n|\bar{a}_{n..}| \leq \frac{y_n^{1-p}}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p = y_n^{1-p} B_n^{p/2} L_n = u_n^{1-p} \rho_n^{p-1} \sqrt{B_n} L_n = o(\sqrt{B_n} L_n^{2/3})$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Далее, мы имеем

$$\mathbf{P}(T_n \geq u_n \sqrt{B_n}) = \mathbf{P}(R_n + n\bar{a}_{n..} \geq u_n \sqrt{B_n}) = \mathbf{P}(R_n \geq v_n \sqrt{B_n}),$$

где

$$v_n = \frac{u_n \sqrt{B_n} - n\bar{a}_{n..}}{\sqrt{B_n}} = \frac{u_n \sqrt{\bar{B}_n + O(B_n L_n^{2/3})} + O(\sqrt{B_n} L_n^{2/3})}{\sqrt{B_n}} \sim u_n$$

при  $n \rightarrow \infty$ . В последнем равенстве мы использовали соотношение (13). Так как

$$\frac{v_n^2}{2} = \frac{u_n^2 (\bar{B}_n + O(B_n L_n^{2/3})) + O(u_n B_n L_n^{2/3})}{2\bar{B}_n} = \frac{u_n^2}{2} + o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , мы заключаем, что  $1 - \Phi(v_n) \sim 1 - \Phi(u_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Учитывая, что соотношение (9) выполнено также с заменой  $u_n$  на  $v_n$ , мы получим

$$\mathbf{P}(T_n \geq u_n \sqrt{B_n}) = \mathbf{P}(R_n \geq v_n \sqrt{B_n}) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теперь оценим правую часть (8). Мы имеем

$$r_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}(|X_{nij}| \geq y_n) \leq y_n^{-p} \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}|X_{nij}|^p \leq y_n^{-p} B_n^{p/2} L_n = u_n^{-p} \rho_n^p L_n.$$

Если  $u_n^2 \leq 2 \ln(1/L_n)$ , то

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leq L_n (\ln u_n)^p u_n^{1-p} e^{u_n^2/2} \leq (\ln \ln(2 \ln(1/L_n)))^p (2 \ln(1/L_n))^{(1-p)/2} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $2 \ln(1/L_n) \leq u_n^2 \leq 2 \ln(1/L_n) + (p-1) \ln \ln(1/L_n) + \lambda_n$ , то

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leq L_n \rho_n^p u_n^{1-p} e^{u_n^2/2} \leq (2 \ln(1/L_n))^{(1-p)/2} (\ln(1/L_n))^{(p-1)/2} e^{\lambda_n/2} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Здесь мы воспользовались тем, что  $\rho_n^p \leq e^{-\lambda_n/2}$  и  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$r_n = o((1 - \Phi(u_n))) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Из неравенства (8) и соотношения (16) следует, что

$$\mathbf{P}(S_n \geq u_n \sqrt{B_n}) = \mathbf{P}(T_n \geq u_n \sqrt{B_n}) + O(r_n) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны.  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.** Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Положим  $y_n = \sqrt{B_n}/(u_n \rho_n)$ , где  $\rho_n = \min\{\ln u_n, e^{-\lambda_n/2p}\}$ . Все остальные обозначения из доказательства теоремы 1 мы сохраняем.

Вместо леммы 1 мы воспользуемся тем, что

$$|\mathbf{E}Y_{nij}^k| \leq (y_n + |\mu_{nij}|)^{k-s} \mathbf{E}|Y_{nij}|^s$$

для всех  $k \geq s$ . По лемме 2 мы имеем

$$\max_{i,j} |\mu_{nij}| \leq c_n y_n^{-1} = o(n^{-1/2} u_n^{-2} B_n^{1/2} \varrho_n) = o(y_n). \quad (17)$$

Следовательно,  $|\mu_{nij}| \leq y_n$  при всех достаточно больших  $n$ . Поэтому условие (10) выполнено для  $Y_{nij}$  с  $M_n = 2y_n$ .

По лемме 2 мы получим оценку (13) и  $B_n \sim \bar{B}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажем, что  $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$  и  $u_n = o(\sqrt{\bar{B}_n}/M_n)$  при  $n \rightarrow \infty$  в условиях теоремы 3. Второе соотношение следует из того, что  $\sqrt{\bar{B}_n}/M_n = O(u_n \rho_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $n$  таких, что  $\gamma_n = \max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}} \mathbf{E}|Y_{nij}|$ , используя условие (7), мы получим

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n^3 \max_{i,j} \mathbf{E}|X_{nij}|}{\sqrt{B_n}} + \frac{u_n^3 \max_{i,j} |\mu_{nij}|}{\sqrt{B_n}} = o(1) + o(n^{-1/2} u_n \varrho_n) = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Для  $n$  таких, что  $\gamma_n$  совпадает со вторым или с третьим членом под максимумом в формуле (11), с учетом условия (4) и оценки (17) так же, как в (14), выполняется соотношение

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{u_n^3 n c_n}{B_n \sqrt{n}}\right) + o(n^{-3/2} u_n^{-1} \varrho_n^2) = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . В четвертом случае так же, как в оценке (15), мы получим

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{u_n^3 \sqrt{y_n}}{B_n^{1/2}}\right) + o(n^{-1/2} u_n^{-3} \varrho_n^3) = o(1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, по теореме 4 соотношение (9) выполнено.

Все остальные оценки доказательства теоремы 1 сохраняются за исключением оценки для  $r_n$ , которая станет такой:

$$r_n \leq u_n^p \rho_n^p L_n.$$

Так как  $u_n^2 \leq 2 \ln(1/L_n) - (p+1) \ln \ln(1/L_n) + \lambda_n$ , мы имеем

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leq L_n \rho_n^p u_n^{1+p} e^{u_n^2/2} \leq (2 \ln(1/L_n))^{(1+p)/2} (\ln(1/L_n))^{-(1+p)/2} e^{\lambda_n/2} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда мы получим (16).  $\square$

## Литература

1. Frolov A. N. On large deviations for combinatorial sums. *Journal of Statistical Planning and Inference* **217**, 24–32 (2022).
2. Фролов А. Н. О вероятностях больших уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 546–554 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308>
3. Фролов А. Н. О вероятностях умеренных уклонений комбинаторных сумм. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 1, 60–67 (2015).
4. Frolov A. N. 2014. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).
5. Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин I, II, III. *Теория вероятностей и ее применение* **1**, **6** (2), 145–163 (1961); **II**, **6** (4), 377–391 (1961); **III**, **7** (2), 121–134 (1962).
6. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применение* **10** (2), 231–254 (1965).
7. Rubin H., Sethuraman J. Probabilities of moderate deviations. *Sankhya. Ser. A* **27** (2–4), 325–346 (1965).
8. Нагаев А. В. Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера. *Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук* **6**, 17–22 (1969).
9. Амосова Н. Н. О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений. *Вестник Ленинградского университета* **13**, 5–14 (1972).
10. Michel R. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Ann. Probab.* **4** (1) 102–106 (1976).
11. Слостников А. Д. Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений. *Теория вероятности и ее применение* **23** (2) 340–357 (1978).
12. Амосова Н. Н. О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применение* **24** (4), 858–865 (1979).
13. Розовский Л. В. О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах. *Теория вероятности и ее применение* **26** (4) 847–857 (1981).
14. Rychlik Z. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Theor. Probab. App.* **28** (4), 646–652 (1983).
15. Слостников А. Д. Узкие зоны нормальной сходимости для сумм неодинаково распределенных случайных величин. *Теория вероятности и ее применение* **29** (3), 551–554 (1984).
16. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. *Statist. and Probab. Letters* **37**, 155–165 (1998).
17. Фролов А. Н. О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин. *Записки научных семинаров ПОМИ* **294**, 200–215 (2002).
18. Розовский Л. В. Суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями — умеренные уклонения и оценки в ЦПТ. *Записки научных семинаров ПОМИ* **311**, 242–259 (2004).

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.frolov@spbu.ru

## On asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums\*

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Frolov A. N. On asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 762–774. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.412> (In Russian)

We investigate an asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums of independent random variables having moments of order  $p > 2$ . We find zones in which these probabilities are equivalent to the tail of the standard normal law. The width of zone is a function from the logarithm of a combinatorial variant for Lyapunov's ratio. The author earlier obtained similar results under Bernstein's and Linnik's conditions. The truncations method is used in proofs of the results.

*Keywords:* probabilities of large deviations, probabilities of moderate deviations, combinatorial central limit theorem, combinatorial sums.

## References

1. Frolov A. N. 2022. On large deviations for combinatorial sums. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 217, 24–32.
2. Frolov A. N. On probabilities of large deviations of combinatorial sums of independent random variables satisfying Linnik's condition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 546–554. (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308> (In Russian) (In print)
3. Frolov A. N. On the probabilities of moderate deviations for combinatorial sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (60), iss. 1, 60–67 (2015). (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48** iss. 1, 23–28 (2015). <https://doi.org/10.3103/S1063454115010045>].
4. Frolov A. N. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).
5. Linnik Yu. V. Limit theorems for sums of independent random variables. I, II, III. *Teoriia veroiatnostei i ee primeneniye* I, **6** (2), 145–163 (1961); II, **6** (4), 377–391 (1961); III, **7** (2), 121–134 (1962). (In Russian)
6. Nagaev S. V. Some limit theorems for large deviations. *Theor. Probab. Appl.* **2**, 231–254 (1965). (In Russian)
7. Rubin H., Sethuraman J. Probabilities of moderate deviations. *Sankhya, Ser. A* **27** (2–4) 325–346 (1965)
8. Nagaev A. V. Limit theorems including the effect of large deviations when Cramer's condition is violated. *Izvestiia AN UzSSR. Seriya fiz.-mat. nauk* **6**, 17–22 (1969). (In Russian)
9. Amosova N. N. On limit theorems for probabilities of moderate deviations. *Vestnik Leningrad University* **13**, 5–14 (1972). (In Russian)

\*The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project 23-21-00078).

10. Michel R. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Ann. Probab.* **4** (1), 102–106 (1976).
11. Slastnikov A. D. Limit theorems for moderate deviation probabilities. *Theor. Probab. Appl.* **23** (2), 340–357 (1978). (In Russian)
12. Amosova N. N. On probabilities of moderate deviations for sums of independent random variables. *Theor. Probab. Appl.* **24** (4), 858–865 (1979). (In Russian)
13. Rozovskii L. V., Limit theorems for large deviations in narrow zones. *Theor. Probab. Appl.* **26** (4), 847–857 (1981). (In Russian)
14. Rychlik Z. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Theor. Probab. Appl.* **28** (4), 646–652 (1983).
15. Slastnikov A. D. Narrow zones of normal convergence for sums of non-identically distributed random variables. *Theor. Probab. Appl.* **29** (3), 551–554 (1984). (In Russian)
16. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. *Statist. and Probab. Letters* **37**, 155–165 (1998).
17. Frolov A. N. On probabilities of moderate deviations of sums of independent random variables. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **294**, 200–215 (2002). (In Russian)
18. Rozovskii L. V., Sums of independent random variables with finite variances — moderate deviations and bounds in CLT. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **311**, 242–259 (2004). (In Russian)
19. Frolov A. N. Asymptotic behaviour of probabilities of moderate deviations. *Trudy St. Peterburgskogo Mat. Obschestva* **14**, 197–211 (2008). (In Russian)

Received: February 8, 2023

Revised: April 29, 2023

Accepted: May 18, 2023

Author's information:

Andrei N. Frolov — a.frolov@spbu.ru