УДК 517.977 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4
MSC 34A55

Условия локальной параметрической идентифицируемости для систем дифференциальных уравнений с бесконечномерным параметром*

С. Ю. Пилюгин, В. С. Шалгин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Пилюгин С. Ю., Шалгин В. С.* Условия локальной параметрической идентифицируемости для систем дифференциальных уравнений с бесконечномерным параметром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 749–761. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.411

Задача о параметрической идентификации (определении параметров системы по наблюдению решений или функций от них) — одна из основных задач прикладной теории дифференциальных уравнений. При решении этой задачи важнейшую роль играет свойство локальной идентифицируемости. Наличие такого свойства означает, что по наблюдению решений можно однозначно определить значение параметров системы в окрестности выделенного параметра. Ранее в этой задаче в основном изучался случай конечномерного параметра. Задача о локальной параметрической идентифицируемости в случае бесконечномерного параметра изучена гораздо меньше. В данной работе предлагается новый метод получения достаточных условий локальной параметрической идентифицируемости в случае бесконечномерного параметра. При выполнении этих условий бесконечномерный параметр, принадлежащий определенным классам, локально идентифицируется по наблюдению решения на конечном наборе точек. Для систем с линейной зависимостью от параметра установлена типичность выполнения указанных условий.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, локальная параметрическая идентифицируемость, типичность.

1. Введение. Задача о параметрической идентификации (определении параметров системы по наблюдению решений или функций от них) — одна из основных задач прикладной теории дифференциальных уравнений. При решении этой задачи важнейшую роль играет свойство локальной идентифицируемости. Наличие такого свойства означает, что по наблюдению решений можно однозначно определить значение параметров системы в окрестности выделенного параметра. Свойство локальной идентифицируемости детально изучено в монографии [1].

Как в монографии [1], так и в других работах по этой тематике в основном изучается случай конечномерного параметра. Задача о локальной параметрической идентифицируемости в случае бесконечномерного параметра изучена гораздо меньше.

Отметим статью [2], в которой получены достаточные условия локальной параметрической идентифицируемости по наблюдениям решения на концах фикси-

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00025, https://rscf.ru/project/23-21-00025/.

рованного промежутка для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром-функцией.

Опишем постановку задачи и основной результат статьи [2]; по сути, постановка задачи, изучаемая в данной статье, весьма к ней близка (только в данной статье точками наблюдения решений являются не концы фиксированного промежутка, а точки конечного множества, определяемого выделенной параметром-функцией).

Рассматривается зависящая от параметра p система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, p), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$.

Описывая постановку задачи, мы предполагаем, что вектор-функция f, стоящая в правой части системы (1), непрерывна по совокупности переменных (t, x, p) и непрерывно дифференцируема по переменным (x, p) в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{1+n+m}$ (в дальнейшем требования к гладкости f будут уточняться).

В задаче, изучаемой в статье [2], параметр p является функцией от t, принадлежащей некоторому классу функций $\mathcal{P}$, определенных на фиксированном отрезке $[0, T]$. В нашей постановке будут рассматриваться параметр-функции, определенные на некотором открытом интервале I, содержащем отрезок $[0, T]$ (см. ниже). Введем обозначение:

$$\{p\} = \{p(t) : \ t \in [0, T]\}.$$

Фиксируем вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $x(t, \{p\})$ решение задачи Коши с начальными данными $(0, x_0)$ для системы (1), в которой зафиксирована параметр-функция $p \in \mathcal{P}$ (мы предполагаем, что для любой функции $p \in \mathcal{P}$ система

$$\dot{x} = f(t, x, p(t))$$

удовлетворяет условиям существования и единственности).

Фиксируем функцию p_0 класса C^1 на $[0, T]$ и предположим, что решение $x(t, \{p_0\})$ определено на $[0, T]$ и

$$\{(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)) : \ t \in [0, T]\} \subset D.$$

Основное предположение о классе $\mathcal{P}$ в статье [2] таково: для любой функции $p \in \mathcal{P}$ решение $x(t, \{p\})$ единственно и определено на всем промежутке $[0, T]$.

Для любой непрерывной функции $q(t), t \in [0, T]$ обозначим

$$\|q\| = \max_{[0,T]} |q(t)|.$$

Сформулируем определение локальной параметрической идентифицируемости из работы [2].

Пусть $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$. Будем говорить, что пара (p_1, p_2) различима по наблюдению решения в точке T, если

$$x(T, \{p_1\}) \neq x(T, \{p_2\}).$$

Отметим, что начальное данное x_0 предполагается фиксированным для всех рассматриваемых решений $x(t, \{p\})$.

Назовем систему локально идентифицируемой при $p_0 \in \mathcal{P}$, если существует такое $\delta > 0$, что если $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \|p_0 - p\| < \delta$, то пара (p_0, p) различима по наблюдению решения в точке T.

Сформулируем достаточное условие локальной параметрической идентифицируемости из статьи [2].

Обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t))}{\partial x} y,$$

удовлетворяющую начальному условию $Y(0) = E$, где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Определим оператор

$$\Psi: \ C^1([0,T]) \to \mathbb{R}^n$$

формулой

$$\Psi(p) = \int_0^T Y^{-1}(s) \frac{\partial f(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))}{\partial p} p(s) \, ds$$

(отметим, что в статье [2] определенный выше оператор назван функционалом).

Пусть $\mathcal{K}$ — ядро оператора Ψ. Будем говорить, что семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, если из любой последовательности элементов $p_k \in \mathcal{P}$, обладающей свойствами $\|p_k - p_0\| > 0$ и $\|p_k - p_0\| \to 0, \ k \to \infty$, можно выбрать такую подпоследовательность p_{k_l}, что последовательность

$$\frac{p_{k_l} - p_0}{\|p_{k_l} - p_0\|}$$

равномерно сходится на $[0, T]$ к некоторой функции, не принадлежащей $\mathcal{K}$.

В статье [2] показано, что если семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, то система (1) локально идентифицируема при $p_0 \in \mathcal{P}$.

В данной работе мы предлагаем и реализуем другой подход к получению достаточных условий локальной параметрической идентифицируемости по наблюдениям решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром-функцией.

В разделе 2 вводится класс систем $\mathcal{F}(p_0)$. Система (1) принадлежит этому классу, если определитель матрицы

$$\frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)) \tag{2}$$

имеет только простые нули (и тогда множество его нулей в отрезке $[0, T]$ конечно).

Основной результат статьи — теорема 1 (раздел 3), в которой для системы класса $\mathcal{F}(p_0)$ выделены классы таких возмущений параметр-функции $p_0(t)$, что этот параметр локально идентифицируем в указанных классах возмущений по наблюдению решений в нулях определителя матрицы (2) (а также в точке T).

В статьях [3, 4] для систем типа вход-выход изучался вопрос о типичности свойства локальной идентифицируемости (как с топологической, так и с метрической точек зрения).

В разделе 4 мы рассматриваем случай системы, линейно зависящей от параметра, и показываем, что система вида

$$\dot{x} = F(t, x) + G(t)p$$

с диагональной матрицей $G(t)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$ для открытого и плотного в C^r-топологии множества матриц $G(t)$ при любом $r \geq 1$.

2. Класс $\mathcal{F}(p_0)$. Будем считать для упрощения изложения, что $m = n$ (т. е. размерность параметра p совпадает с размерностью переменной x); общий случай может быть изучен с помощью несложных модификаций.

Кроме того, будем считать, в дополнение к предположениям, сделанным во введении, что матрица

$$\frac{\partial f}{\partial p}(t, x, p)$$

класса C^1 в области D.

Так как решения дифференциальных уравнений определяются на открытых интервалах, мы фиксируем открытый интервал I, содержащий отрезок $[0, T]$, и параметр-функцию $p_0(t)$ класса C^1 на I.

Фиксируем точку x_0 и будем, как и во введении, обозначать через $x(t, \{p\})$ решение системы (1) с параметр-функцией $p(t)$ с начальными данными $(0, x_0)$.

Будем рассматривать в качестве возмущений параметр-функции $p_0(t)$ такие функции $p(t)$ класса C^1 на I, что решения $x(t, \{p\})$ определены на $[0, T]$ и

$$\{(t, x(t, \{p\}), p(t)) : \ t \in [0, T]\} \subset D.$$

Для фиксированной выше функции p_0 класса C^1 на I обозначим

$$\mathcal{D}(t) = \frac{\partial f}{\partial p}(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t)).$$

Будем говорить, что система (1) принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$, если из равенства

$$\det\{\mathcal{D}\}(\tau) = 0 \tag{3}$$

при некотором $\tau \in [0, T]$ следует, что

$$\frac{d}{dt}(\det\{\mathcal{D}\}(t))|_{t=\tau} \neq 0.$$

Ясно, что если система (1) принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$, то множество точек $\tau \in [0, T]$, в которых выполнены равенства (3), конечно; пусть это точки

$$0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_s \leq T.$$

Если $0 < \tau_1$, положим $\tau_0 = 0$; если $\tau_s < T$, положим $\tau_{s+1} = T$. Обозначим

$$\mathcal{R}(p_0) = \{\tau_0, \ldots, \tau_{s+1}\}. \tag{4}$$

3. Условия локальной параметрической идентифицируемости. Пусть $\tau \in [0, T]$; обозначим через $Y_\tau(t)$ фундаментальную матрицу линейной системы:

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x(t, \{p_0\}), p_0(t))}{\partial x} y,$$

удовлетворяющую начальному условию $Y_\tau(\tau) = E$, где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Определим семейство операторов:

$$\Psi_{\tau,\theta}:\ C^1(I)\to\mathbb{R}^n,$$

где

$$\tau,\theta\in[0,T] \text{ и } \tau<\theta,$$

формулами

$$\Psi_{\tau,\theta}(p)=\int_\tau^\theta Y_\tau^{-1}(s)\frac{\partial f(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))}{\partial p}p(s)\,ds.$$

Пусть $q(t)$ — непрерывная вектор-функция на отрезке $[a,b]\subset[0,T]$; будем обозначать

$$\|q\|_{a,b}=\max_{t\in[a,b]}|q(t)|$$

и

$$\|q\|_{i,a,b}=\int_a^b|q(t)|\,dt.$$

В работе [2] показано, что если

$$p(t)=p_0(t)+\Delta p(t),$$

$$\Delta_p x(t)=x(t,\{p\})-x(t,\{p_0\})$$

и

$$\Delta_p x(\tau)=0,$$

то при $\theta\in[0,T]$ с $\theta>\tau$ имеет место представление

$$\Delta_p x(\theta)=Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)+G_{\tau,\theta}(\Delta p), \tag{5}$$

где

$$\frac{|G_{\tau,\theta}(\Delta p)|}{\|\Delta p\|_{\tau,\theta}}\to 0 \text{ при } \|\Delta p\|_{\tau,\theta}\to 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Предположим, что система (1) принадлежит классу $\mathcal{F}(p_0)$ со множеством $\mathcal{R}(p_0)$, имеющим вид (4).*

Фиксируем индекс $k=0,\dots,s$ и обозначим $\tau=\tau_k$ и $\theta=\tau_{k+1}$.

Введем несколько классов, соответствующих промежутку $[\tau,\theta]$ параметр-функций $p(t)$. Все эти классы состоят из функций $p(t)\in C^1(I)$, обладающих общим свойством: существует такое $\alpha>0$ (зависящее от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$\|\Delta p\|_{i,\tau,\theta}\ge\alpha\|\Delta p\|_{\tau,\theta} \tag{7}$$

(напомним, что $\Delta p(t)=p(t)-p_0(t)$).

Параметр-функция $p(t)$ принадлежит классу $A([\tau,\theta])$, если существует такое $\beta>0$ (зависящее от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$|\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)|\ge\beta\|\Delta p\|_{i,\tau,\theta}. \tag{8}$$

Общим предположением для следующих классов $B1-B4$ является существование такого числа $\beta>0$ (зависящего от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$|\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)|\ge\beta\|\mathcal{D}\Delta p\|_{i,\tau,\theta}. \tag{9}$$

Параметр-функция $p(t)$ принадлежит классу $B1([\tau,\theta])$, если существует такое $\gamma > 0$ (зависящее от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$\det\{\mathcal{D}\}(\tau) = \det\{\mathcal{D}\}(\theta) = 0,$$

$$\Delta p(t) \in Ker(\mathcal{D}(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau+\gamma),$$

и

$$\Delta p(t) \in Ker(\mathcal{D}(\theta)), \quad t \in (\theta-\gamma, \theta].$$

Параметр-функция $p(t)$ принадлежит классу $B2([\tau,\theta])$, если $\tau = \tau_0 = 0$, $\det\{\mathcal{D}\}(\tau) \neq 0$, $\det\{\mathcal{D}\}(\theta) = 0$ и существует такое $\gamma > 0$ (зависящее от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$\Delta p(t) \in Ker(\mathcal{D}(\theta)), \quad t \in (\theta-\gamma, \theta].$$

Параметр-функция $p(t)$ принадлежит классу $B3([\tau,\theta])$, если $\theta = \tau_{s+1} = T$, $\det\{\mathcal{D}\}(\tau) = 0$, $\det\{\mathcal{D}\}(\theta) \neq 0$ и существует такое $\gamma > 0$ (зависящее от промежутка $[\tau,\theta]$), что

$$\Delta p(t) \in Ker(\mathcal{D}(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau+\gamma).$$

Параметр-функция $p(t)$ принадлежит классу $B4([\tau,\theta])$, если $\tau = 0$, $\theta = T$, $\det\{\mathcal{D}\}(\tau) \neq 0$ и $\det \mathcal{D}(\theta) \neq 0$.

При этих предположениях существует такое $\delta > 0$, что если параметр-функция $p(t)$ принадлежит одному из введенных выше классов,

$$\Delta_p x(\tau_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, s+1,$$

и $\|\Delta p\|_{0,T} < \delta$, то $p(t) \equiv p_0(t)$ при $t \in [0,T]$.

Замечание. Очевидно, сформулированные в теореме условия выполняются для невырожденных бесконечномерных семейств параметров.

Предпошлем доказательству теоремы техническую лемму.

Лемма. *Пусть $A(t)$ — такая $n \times n$ матрица класса $C^1([a,b])$, что*

$$\det A(t) \neq 0, \quad t \in (a,b),$$

$$\det A(a) = \det A(b) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\det A(a) \neq 0 \ \text{и}\ \frac{d}{dt}\det A(b) \neq 0.$$

Пусть $r(t)$ — непрерывная функция на $[a,b]$, удовлетворяющая неравенству

$$\|r\|_{i,a,b} \geq \alpha \|r\|_{a,b}$$

с некоторым $\alpha > 0$.

Предположим, кроме того, что существует такое число $\gamma > 0$, что

$$r(t) \in KerA(a), \quad [a, a+\gamma), \tag{10}$$

и

$$r(t) \in KerA(b), \quad (b-\gamma, b].$$

Тогда существует такое $\lambda > 0$, зависящее только от $A(t)$, α и γ, что

$$\|Ar\|_{i,a,b} \geq \lambda \|r\|_{i,a,b}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $[a,b] = [0,1]$. Предположим также, что $\det A(t) > 0$ при $t \in (0,1)$.

Существует такое число $c_1 \in (0,1)$, что функция $\det A(t)$ монотонна на каждом из отрезков $[0, c_1]$ и $[1 - c_1, 1]$.

Найдем такое $c_2 \in (0, c_1]$, что если $c \in (0, c_2]$, то

$$\det A(c) < \min_{t \in [c_1, 1-c_1]} \det A(t).$$

Ясно, что в этом случае

$$\det A(c) \leq \min_{t \in [c, 1-c_1]} \det A(t).$$

При этом мы можем считать, что если $1 - c \in (0, c_2]$, то

$$\det A(c) \leq \min_{t \in [c_1, c]} \det A(t).$$

Так как функция $\det A(t)$ дифференцируема и монотонна при $c \in [0, c_2] \cup [1 - c_2, 1]$, уменьшая c_2, если нужно, мы можем найти такое число $M_1 > 0$, не зависящее от c, что

$$\min_{t \in [c, 1-c]} \det A(t) \geq M_1 c \tag{11}$$

для $c \in (0, c_2]$.

Будем обозначать через $\mu(A)$ мини-норму обратимого линейного оператора A, т. е. число

$$\mu(A) = \min_{|x|=1} |Ax|.$$

Хорошо известно, что в этом случае

$$\mu(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

где $\|.\|$ — операторная норма матрицы.

Элементы матрицы $A^{-1}(t)$ вычисляются как отношения соответствующих алгебраических дополнений в матрице $A(t)$ к определителю матрицы $A(t)$, поэтому из неравенств (11) следует, что существует такое число $M_2 > 0$, не зависящее от c, что абсолютные величины элементов матрицы $A^{-1}(t)$ не превосходят M_2/c для $c \in (0, c_2]$ и $t \in [c, 1-c]$.

Таким образом, существует такое число $M > 0$, зависящее только от $A(t)$, что

$$\mu(A(t)) \geq Mc, \quad t \in [c, 1-c],$$

для $c \in (0, c_2]$.

Тогда

$$\int_c^{1-c} |A(t)r(t)| \, dt \geq Mc \int_c^{1-c} |r(t)| \, dt \tag{12}$$

для $c \in (0, c_2]$.

Обозначим

$$R = \int_0^1 |r(t)|\, dt.$$

По нашему предположению,

$$|r(t)| \le \|r\|_{0,1} \le \frac{\|r\|_{i,0,1}}{\alpha} = \frac{R}{\alpha}, \quad t \in [0,1].$$

Представим

$$A(t) = A(0) + A_1(t), \quad t \in [0, \gamma).$$

По условию (10),

$$A(t)r(t) = A(0)r(t) + A_1(t)r(t) = A_1(t)r(t), \quad t \in [0, \gamma).$$

Так как $A_1(0) = 0$ и

$$\frac{d}{dt}A_1(t) = \frac{d}{dt}A(t), \quad t \in [0, \gamma),$$

существует такое число $a > 0$, что абсолютные величины элементов матрицы $A_1(t)$ оцениваются сверху величиной at для $t \in [0, c_2]$, если c_2 достаточно мало.

Следовательно, существует такое $N > 0$, что

$$\int_0^c |A(t)r(t)|\, dt \le c^2 \frac{NR}{\alpha} \tag{13}$$

для $c \in (0, c_2]$.

Мы можем и будем считать, что

$$\int_{1-c}^1 |A(t)r(t)|\, dt \le c^2 \frac{NR}{\alpha} \tag{14}$$

для $c \in (0, c_2]$.

Кроме того, очевидны неравенства

$$\int_0^c |r(t)|\, dt,\ \int_{1-c}^1 |r(t)|\, dt \le c\frac{R}{\alpha} \tag{15}$$

для $c \in (0, c_2]$.

Следовательно, используя неравенства (12)–(14), мы видим, что

$$\int_0^1 |A(t)r(t)|\, dt \ge Mc \int_c^{1-c} |r(t)|\, dt - 2c^2 \frac{NR}{\alpha},$$

а из неравенств (15) мы получаем оценку

$$\int_0^1 |A(t)r(t)|\, dt \ge Mc\left(R - 2c\frac{R}{\alpha}\right) - 2c^2 \frac{NR}{\alpha}.$$

Для завершения доказательства осталось выбрать такое число $c \in (0, c_2]$, для которого правая часть последнего выражения не меньше, например, чем

$$\lambda R = \frac{McR}{2}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим вначале параметр-функцию $p(t)$ класса $A([\tau,\theta])$.

Из равенств

$$\Delta_p x(\tau) = \Delta_p x(\theta) = 0$$

и представления (5) следует равенство

$$Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p) = -G_{\tau,\theta}(\Delta p). \tag{16}$$

Так как матрица

$$\frac{\partial f(t, x(t,\{p_0\}), p_0(t))}{\partial x}$$

ограничена на $[0,T]$, существует такое $\nu > 0$, что для мини-нормы $\mu(Y_\tau(\theta))$ выполнено неравенство

$$\mu(Y_\tau(\theta)) \geq \nu$$

для любых $\tau,\theta \in [0,T]$.

Поэтому

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \nu|\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)|.$$

Применяя условие (8), мы приходим к оценке

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \beta\nu\|\Delta p\|_{i,\tau,\theta}.$$

Из условия (7) следует теперь, что

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \alpha\beta\nu\|\Delta p\|_{\tau,\theta}. \tag{17}$$

В то же время из оценки (6) следует, что по любому $\epsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если $\|\Delta p\|_{\tau,\theta} < \delta$, то

$$|G_{\tau,\theta}(\Delta p)| \leq \epsilon \left\|\Delta p\right\|_{\tau,\theta}.$$

Сопоставляя эту оценку с равенством (16) и оценкой (17), мы видим, что если $\|\Delta p\|_{\tau,\theta} < \delta$ и δ достаточно мало, то $\Delta p(t) \equiv 0$ на промежутке $[\tau,\theta]$.

Рассмотрим теперь параметр-функцию $p(t)$ класса $B1([\tau,\theta])$.

По общему предположению обо всех классах $B1 - B4$ выполнено неравенство (9), поэтому

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \beta\nu\|\mathcal{D}\Delta p\|_{i,\tau,\theta}.$$

Из доказанной выше леммы с $[a,b] = [\tau,\theta]$, $A(t) = \mathcal{D}(t)$ и $r(t) = \Delta p(t)$ следует, что существует такое число $\lambda > 0$, не зависящее от Δp, что

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \beta\lambda\nu \left\|\Delta p\right\|_{i,\tau,\theta}.$$

Применяя еще раз условие (7), мы получаем оценку

$$|Y_\tau(\theta)\Psi_{\tau,\theta}(\Delta p)| \geq \alpha\beta\lambda\nu \left\|\Delta p\right\|_{\tau,\theta}.$$

Теперь то же рассуждение, что и в случае параметр-функции класса $A([\tau,\theta])$, показывает, что если $\|\Delta p\|_{\tau,\theta} < \delta$ и δ достаточно мало, то $\Delta p(t) \equiv 0$ на промежутке $[\tau,\theta]$.

Случаи остальных классов рассматриваются так же (с применением очевидных модификаций леммы); мы оставляем их рассмотрение читателю. $\square$

4. Системы с линейной зависимостью от параметра. Предположим, что в системе (1) правая часть имеет вид

$$f(t,x,p) = F(t,x) + G(t)p, \tag{18}$$

где $x, p \in \mathbb{R}^n$, функция F удовлетворяет условиям, наложенным на f в начале статьи, а $n \times n$ матрица $G(t)$ принадлежит классу C^r, где $r \geq 1$, на открытом промежутке I, содержащем отрезок $[0,T]$.

В этом разделе мы вновь фиксируем функцию p_0 класса C^1 на I и предполагаем, что решение $x(t,\{p_0\})$ определено на I и

$$\{(t, x(t,\{p_0\}), p_0(t)) : \ t \in I\} \subset D.$$

Нас, как и выше, будет интересовать вопрос о локальной идентифицируемости параметр-функции $p_0(t)$ на отрезке $[0,T]$. Так как мы хотим применять доказанную выше теорему 1 и, очевидно, верно равенство

$$\mathcal{D}(t) = G(t),$$

нам нужно изучить множество матриц $G(t)$, которые удовлетворяют на I условиям, сформулированным в определении класса $\mathcal{F}(p_0)$ (с естественной заменой $\mathcal{D}(t)$ на $G(t)$).

Ограничимся при этом случаем диагональных матриц вида

$$G(t) = \operatorname{diag}(g_1(t), \dots, g_n(t)), \quad t \in I, \tag{19}$$

класса C^r, $r \geq 1$, и обозначим через $\mathcal{G}^{(r)}$ пространство таких матриц на I, которое мы будем рассматривать как со слабой, так и с сильной C^r-топологией [5] (говоря дальше просто о C^r-топологии; это допустимо, так как используемые дальше теоремы трансверсальности из книги [5] верны для обеих топологий).

Обозначим множество матриц $G(t) \in \mathcal{G}^{(r)}$, которые удовлетворяют на I условиям, сформулированным в определении класса $\mathcal{F}(p_0)$, через $\mathcal{A}$.

Из определения класса $\mathcal{F}(p_0)$ немедленно следует, что при любом $r \geq 1$ множество $\mathcal{A}$ открыто в $\mathcal{G}^{(r)}$ относительно C^r-топологии.

Покажем, что это множество плотно в $\mathcal{G}^{(r)}$. Будем доказывать плотность $\mathcal{A}$ в два этапа.

Рассмотрим вначале отображение I в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, сопоставляя матрице (19) вектор

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)).$$

Пусть $0 < k \leq n$; обозначим через R_k подмножество $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов, имеющих ровно k нулевых компонент. Ясно, что R_k — объединение конечного набора подмногообразий $\mathbb{R}^n$, каждое из которых имеет коразмерность k.

Из теоремы трансверсальности [5] следует, что существует плотное в $\mathcal{G}^{(r)}$ множество отображений $\mathcal{A}_0$ со следующим свойством: если $g \in \mathcal{A}_0$, то при любом $0 < k \leq n$ прообраз $g^{-1}(R_k)$ — это конечное объединение подмногообразий интервала I, имеющих коразмерность k. Тогда для $g \in \mathcal{A}_0$ любой из прообразов $g^{-1}(R_k)$ пуст при $1 < k \leq n$ и имеет коразмерность 1 при $k = 1$. Следовательно, множество

$$\Theta = g^{-1}(R_1)$$

является набором изолированных точек промежутка I.

Ясно, что если $t_0 \in I \setminus \Theta$, то все компоненты вектора $g(t_0)$ ненулевые, а если $t_0 \in \Theta$, то существуют такой индекс i и такая окрестность U точки t_0 в I, что $g_i(t_0) = 0$,

$$g_i(t) \neq 0, \quad t \in U \setminus \{t_0\}$$

и

$$g_j(t) \neq 0, \quad t \in U,\ j \neq i.$$

Покажем, что в этом случае соответствующую матрицу $G(t)$ вида (19) можно приблизить в C^r-топологии матрицей, удовлетворяющей в окрестности U условиям, сформулированным в определении класса $\mathcal{F}(p_0)$.

Пусть для определенности $i = n$. Обозначим

$$h(t) = g_1(t) \cdots g_{n-1}(t).$$

Рассмотрим 1-струйное расширение функции $g_n(t)$:

$$g_n^{(1)}(t) = \left(g_n(t), \frac{dg_n(t)}{dt}\right), \quad t \in U.$$

Применим к $g_n^{(1)} : U \to \mathbb{R}^2$ струйную теорему трансверсальности [5] и найдем такую функцию $l(t)$ с произвольно малой C^r-нормой $l - g_n$, чтобы соответствующее 1-струйное расширение $l^{(1)}$ было трансверсально на U к точке $(0, 0)$.

Тогда $l^{(1)}(t) \neq (0, 0)$ при $t \in U$, а это означает, что в каждой точке $t \in U$

$$l(t) \neq 0 \text{ или } \frac{dl(t)}{dt}(t) \neq 0.$$

Пусть

$$J(t) = \operatorname{diag}(g_1(t), \ldots, g_{n-1}(t), l(t)),$$

тогда

$$\det J(t) = h(t)l(t)$$

и

$$\frac{d}{dt} \det J(t) = \frac{dh}{dt}(t)l(t) + h(t)\frac{dl}{dt}(t).$$

Поэтому если $\det J(t) = h(t)l(t) = 0$, то $l(t) = 0$ и

$$\frac{d}{dt} \det J(t) = h(t)\frac{dl}{dt}(t) \neq 0.$$

Таким образом, мы можем сколь угодно точно приблизить в C^r-топологии матрицу $G(t)$ матрицей с искомыми свойствами. Реализовав такую конструкцию в окрестности каждой точки, в которой $\mathrm{rank}G(t) = n - 1$, мы докажем искомую плотность множества $\mathcal{A}$ в $\mathcal{G}^{(r)}$.

Тем самым мы доказали следующий результат.

Теорема 2. *Множество матриц-функций $G(t)$ вида (19), при которых утверждение теоремы 1 верно для системы с правой частью вида (18) при любых начальном данном x_0, вектор-функции $F(t, x)$ и параметр-функции $p_0(t)$, открыто и плотно в C^r-топологии с любым $r \geq 1$.*

5. Заключение. В статье получены новые условия локальной параметрической идентифицируемости для систем дифференциальных уравнений с бесконечномерным параметром. Для систем с линейной зависимостью от параметра установлена C^r-типичность выполнения указанных условий при произвольном $r \geq 1$.

Благодарность. Авторы глубоко благодарны А. А. Лодкину за ценные советы при подготовке данной статьи.

Литература

1. Бодунов Н. А. *Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2006).

2. Бодунов Н. А., Вольфсон Г. И. Локальная идентифицируемость систем с переменным параметром. *Дифференциальные уравнения и процессы управления* **2**, 17–31 (2009). URL: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/volfson.pdf (дата обращения: 03.02.2023).

3. Бодунов Н. А., Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Локально параметрически идентифицируемые системы типичны. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1, вып. 2, 16–20 (2012).

4. Бодунов Н. А., Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Превалентность локально параметрически идентифицируемых систем. *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1 **2** (60), вып. 4, 517–523 (2015).

5. Хирш М. *Дифференциальная топология*, пер. с англ. Москва, Мир (1979).

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2023 г.;
доработана 15 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Пилюгин Сергей Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.pilyugin@spbu.ru
Шалгин Владимир Сергеевич — аспирант; st086496@student.spbu.ru

Conditions of local parameter identifiability for systems of differential equations with an infinite-dimensional parameter*

S. Yu. Pilyugin, V. S. Shalgin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Pilyugin S. Yu., Shalgin V. S. Conditions of local parameter identifiability for systems of differential equations with an infinite-dimensional parameter. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 749–761. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.411 (In Russian)

*This research was supported by a grant of Russian Science Foundation no. 23-21-00025, https://rscf.ru/project/23-21-00025/.

The problem of parameter identification (determining parameters of a system by observing solutions or functions of them) is one of the main problems of the applied theory of differential equations. The property of local identifiability plays the most important role in solving this problem. The presence of this property means that one can uniquely determine values of parameters of a system in a neighborhood of a particular parameter by observing solutions. Earlier, the case of a finite-dimensional parameter was mostly studied in this issue. The problem of local parameter identifiability in the case of an infinite-dimensional parameter is less studied. In this paper, we propose a new method for obtaining sufficient conditions for local parameter identifiability in the case of an infinite-dimensional parameter. Under these conditions, an infinite-dimensional parameter belonging to certain classes is locally identifiable by observing a solution at a finite set of points. For system with linear dependence on a parameter, we establish the genericity of the mentioned conditions.

Keywords: differential equation, local parameter identifiability, genericity.

References

1. Bodunov N. A. *An introduction to the theory of local parameter identifiability.* St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2006). (In Russian)

2. Bodunov N. A., Volfson G. I. Local identifiability of systems with a variable parameter. *Differential Equations and Control Processes* **2**, 17–31 (2009). Available at: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/volfson.pdf (accessed: February 3, 2023). (In Russian)

3. Bodunov N. A., Kolbina S. A., Pilyugin S. Yu. Locally parameter identifiable systems are generic. *Vestnik St. Petersburgskogo Universiteta.* Ser. 1, iss. 2, 16–20 (2012). (In Russian)

4. Bodunov N. A., Kolbina S. A., Pilyugin S. Yu. Prevalence of locally parameter identifiable systems. *Vestnik St. Petersburg University* Ser. 1 **2** (60), iss. 4, 517–523 (2015). (In Russian)

5. Hirsch M. W. *Differential topology.* New York, Springer (1976). doi.org/10.1007/978-1-4684-94495 [Rus. ed.: Hirsch M. *Differencial'naya topologiya.* Moscow, Mir Publ. (1979)].

Received: February 6, 2023
Revised: May 15, 2023
Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Sergei Yu. Pilyugin — s.pilyugin@spbu.ru
Vladimir S. Shalgin — st086496@student.spbu.ru