Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4
УДК 519.254+519.651+512.643.8
MSC 65G99, 65F30; 65F15

Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра*

В. В. Некруткин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Некруткин В. В.* Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 720–735.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409

Статья посвящена достаточным условиям асимптотической разделимости отдельных членов линейной комбинации гармоник методом Анализа сингулярного спектра (АСС). А именно, рассматривается ряд $x_0, \ldots, x_{N-1}$ с $x_n = \sum_{i=1}^{r} f_{i,n}$, где $f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i)$, а амплитуды $|b_i|$ и частоты $\omega_i \in (0, 1/2)$ попарно различны. Тогда, как доказано в работе, при определенном соотношении амплитуд $|b_i|$ и выборе стандартных параметров метода АСС для этой задачи восстановленные значения $\widetilde{f}_{i,n}$ оказываются близкими к $f_{i,n}$, причем для любого i $\max_n(|\widetilde{f}_{i,n} - f_{i,n}|) = O(N^{-1})$, если $N \to \infty$.

Ключевые слова: обработка сигналов, анализ сингулярного спектра, линейная комбинация гармоник, разделимость гармоник, асимптотический анализ.

1. Введение. Постановка задачи. Одним из наиболее ярких экспериментальных результатов применения метода Анализа сингулярного спектра (далее — АСС) является выделение отдельных гармоник из их суммы. А именно, если рассмотреть ряд $x_0, \ldots, x_{N-1}$ с

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} f_{i,n}, \quad \text{где} \quad f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i), \tag{1}$$

с различными амплитудами $|b_i|$ и частотами $\omega_i \in (0, 1/2)$, то при больших длинах ряда N и выборе стандартных параметров метода АСС для этой задачи (берется длина окна $L \approx N/2$, а для восстановления i-го слагаемого в сумме (1) используются две соответствующие последовательные главные компоненты, см. [1, гл. 1]) в результате полученные восстановленные значения $\widetilde{f}_{i,n}$ оказываются близкими к $f_{i,n}$.

Например, если взять в (1) $r = 3$, $\gamma_i = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.8$, $b_3 = 0.6$ и

$$\omega_1 = \sqrt{2}/4 \approx 0.35356, \quad \omega_2 = \sqrt{3}/4 \approx 0.43301, \quad \omega_3 = \sqrt{5}/5 \approx 0.44721,$$

то, обозначив $r_i(N) = \widetilde{f}_{i,N} - f_{i,N}$ и определив максимальные ошибки восстановления как $\max_{0 \le i < N} |r_i(N)|$, а среднеквадратические ошибки восстановления формулой $\sqrt{\sum_{0 \le i < N} r_i^2(N)/N}$, мы получим данные табл. 1 и 2, подтверждающие приведенные рассуждения.

Таблица 1. **Максимальные ошибки восстановления при** $L = N/2$

N	1-е слагаемое	2-е слагаемое	3-е слагаемое
500	0.051	0.094	0.092
1000	0.031	0.077	0.071
2000	0.026	0.064	0.055
5000	0.004	0.007	0.009

Таблица 2. **Среднеквадратические ошибки восстановления при** $L = N/2$

N	1-е слагаемое	2-е слагаемое	3-е слагаемое
500	0.0434	0.0209	0.0196
1000	0.0025	0.0124	0.0125
2000	0.0010	0.0069	0.0070
5000	0.0001	0.0006	0.0006

Как уже говорилось, все подобные результаты являются экспериментальными, т. е. формально не доказанными. В настоящей работе приведены достаточные условия асимптотической (при $N \to \infty$) разделимости гармоник (точную постановку задачи и полученный результат см. в разделе 4).

Эти условия проще всего объяснить при $r = 2$ с $|b_1| > |b_2|$. В этом случае компьютерные эксперименты показывают, что для успешного восстановления обоих слагаемых в (1) достаточно, чтобы (кроме условия $\omega_1 \neq \omega_2$) у гармоник были различные (и сколь угодно близкие) амплитуды $|b_1|, |b_2|$.

В утверждении, доказанном в настоящей статье (см. теорему 3 и Заключение), между $|b_1|$ и $|b_2|$ предполагается некий «зазор», т. е. отношение $|b_2|$ к $|b_1|$ считается достаточно малым (точнее, требуется, чтобы $|b_2/b_1| < 0.5$). При $r > 2$ все в целом аналогично.

Конечно, подобные ограничения являются весьма обременительными, однако при этом удается доказать, что все ошибки восстановления имеют порядок $O(N^{-1})$.

Перейдем теперь к изложению содержания работы. Определяющим для доказательства теоремы 3 является следующее утверждение.

Обозначим при $n \geq 0$, $r \geq 2$, $1 \leq k < r$ и $\omega_i \in (0, 1/2)$ с $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$

$$f_n = f_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i) \quad \text{и} \quad e_n = e_n^{(k)} = \sum_{i=k+1}^{r} \beta_i \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i),$$
$$\text{где} \quad 1 = \beta_1 > |\beta_2| > \ldots > |\beta_k| > |\beta_{k+1}| > \ldots > |\beta_r| > 0. \tag{2}$$

Ряды с элементами f_n и e_n обозначим соответственно F и E, а при $0 \leq n < N - 1$ их отрезки $f_0, \ldots, f_{N-1}$ и $e_0, \ldots, e_{N-1}$ будем записывать как F_N и E_N.

Рассмотрим ряд $\mathrm{X}_N = \mathrm{F}_N + \delta\mathrm{E}_N$ с элементами $x_n = f_n + \delta e_n$, $0 \leq n < N - 1$, где δ — параметр возмущения.

Общая задача состоит в том, чтобы выделить сигнал F_N из суммы X_N при больших N с использованием метода АСС. Согласно [1] (см. также [4]) это происходит следующим образом.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-21-00222).

После выбора *длины окна* $L < N$ ряд X_N преобразуется в ганкелеву (*траекторную*) матрицу $\mathbf{H}(\delta)$ размера $L \times K$ с элементами $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-2}$, $1 \le i \le L$, $1 \le j \le K := N - L + 1$.

Затем осуществляется сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}(\delta)$. В [1] эта операция называется *вложением.*

Заметим, что $\operatorname{rank}\mathbf{H}(\delta) = 2r$ при $\min(L, K) \ge 2r$. Поскольку в дальнейшем предполагается, что $N \to \infty$, а $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, то можно считать, что сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ состоит из суммы $2r$ элементарных (т. е. имеющих ранг 1) матриц.

Далее, обозначим через $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ сумму $2k$ главных (т. е. имеющих наибольшие нормы Фробениуса) элементарных матриц и найдем ближайшую (тоже в норме Фробениуса) к $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ ганкелеву матрицу. Применив к этой матрице операцию, обратную вложению, получим ряд $\mathrm{F}_N(\delta) = (f_0(\delta), \ldots, f_{N-1}(\delta))$, который и объявляется приближением к сигналу F_N.

Согласно [1] ряд $\mathrm{F}_N(\delta)$ называется *результатом восстановления ряда* F_N *по первым* $2k$ *главным компонентам ряда* X_N, а ряд с элементами $r_i(\delta) = r_i^{(k)}(\delta) = f_i - f_i(\delta)$ при $0 \le i \le N - 1$ — *рядом ошибок этого восстановления.*

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $N \to \infty$ *и* $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, *то* $\max_i |r_i^{(k)}(\delta)| = O(N^{-1})$ *при*

$$|\delta| < \delta^{(k)} := 0.5 \min\left(\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|}, \frac{\beta_k^2}{\sum_{j=k+1}^{r} \beta_j^2}\right).$$

Доказательство этого факта основано на теории, развитой в [2], которая, в свою очередь, базируется на фундаментальных результатах Т. Като (см. [3]). В целях краткости изложения необходимое утверждение, фактически содержащееся в [2], сформулировано в теореме 2 раздела 3, все остальное в этом разделе — это применение теоремы 2 в конкретных условиях настоящей задачи.

Для этого применения оказалось необходимым доказать многочисленные вспомогательные утверждения, сосредоточенные в разделе 2. Так, в раздел 2.1 представлено несколько элементарных тождеств, связанных с суммированием произведений синусов и косинусов, раздел 2.2 посвящен доказательству предложения 1, необходимого для нахождения асимптотик положительных собственных чисел нужных нам матриц, а в разделе 2.3 содержатся факты, относящиеся к асимптотическому поведению равномерных норм некоторых матриц растущей размерности.

Собрав все эти утверждения вместе, мы и получаем доказательство теоремы 1. Наконец, раздел 4 посвящен собственно доказательству теоремы 3, являющейся, как уже говорилось, целью настоящей работы и дающий достаточные условия разделимости гармоник в терминах их амплитуд [см. формулу (17)].

2. Вспомогательные факты. ***2.1. Элементарные тождества.*** Следующие тождества, необходимые для всего дальнейшего, легко доказываются представлением синусов и косинусов через мнимые экспоненты.

Лемма 1. *Пусть* $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1/2)$. *Обозначим* $\cos_{j\,1}(\gamma) = \cos(2\pi\omega_1 j + \gamma)$, $\cos_{j\,2}(\gamma) = \cos(2\pi\omega_2 j + \gamma)$, $\sin_{j\,1}(\gamma) = \sin(2\pi\omega_1 j + \gamma)$, *и* $\sin_{j\,2}(\gamma) = \sin(2\pi\omega_2 j + \gamma)$.

Тогда

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos_{j\,1}(\gamma_1)\cos_{j\,2}(\gamma_2) = \frac{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2)n)}{2\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))}\cos\big(\pi(\omega_1+\omega_2)(n-1)+\gamma_1+\gamma_2\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))}\cos\big(\pi(\omega_1-\omega_2)(n-1)+\gamma_1-\gamma_2\big) & \text{при } \omega_1\neq\omega_2,\\ n\cos(\gamma_1-\gamma_2) & \text{при } \omega_1=\omega_2,\end{cases} \qquad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin_{j\,1}(\gamma_1)\sin_{j\,2}(\gamma_2) = -\frac{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2)n)}{2\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))}\cos\big(\pi(\omega_1+\omega_2)(n-1)+\gamma_1+\gamma_2\big)+$$
$$+\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))}\cos\big(\pi(\omega_1-\omega_2)(n-1)+\gamma_1-\gamma_2\big) & \text{при } \omega_1\neq\omega_2,\\ n\cos(\gamma_1-\gamma_2) & \text{при } \omega_1=\omega_2,\end{cases} \qquad (4)$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos_{j\,1}(\gamma_1)\sin_{j\,2}(\gamma_2) = \frac{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2)n)}{2\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))}\sin\big(\pi(\omega_1+\omega_2)(n-1)+\gamma_1+\gamma_2\big)-$$
$$-\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))}\sin\big(\pi(\omega_1-\omega_2)(n-1)+\gamma_1-\gamma_2\big) & \text{при } \omega_1\neq\omega_2,\\ n\sin(\gamma_1-\gamma_2) & \text{при } \omega_1=\omega_2.\end{cases} \qquad (5)$$

2.2. Асимптотика собственных чисел матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$. Обозначим $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ как ганкелевы матрицы размера $L\times K$, построенные из рядов F_N и E_N точно так же, как матрица $\mathbf{H}(\delta)$ строится исходя из ряда X_N. Если L и K достаточно большие, то $\operatorname{rank}\mathbf{H}=2k$ и $\operatorname{rank}\mathbf{E}=2(r-k)$.

В дальнейшем нам понадобятся результаты о поведении положительных собственных чисел матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ при больших значениях длины ряда N. Эти результаты получаются с использованием леммы 2.1 статьи [5]. Сформулируем сначала эту лемму.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{G}:\mathbb{R}^K\mapsto\mathbb{R}^L$ и обозначим $d=\operatorname{rank}\mathbf{G}$. Предположим, что $\mathbf{G}=\sum_{k=1}^{d}P_kQ_k^{\mathrm{T}}$, где $P_k\in\mathbb{R}^L$ и $Q_k\in\mathbb{R}^K$, причем вектора $P_1,\ldots,P_d$ (и вектора $Q_1,\ldots,Q_d$) линейно независимы. Обозначим $X_i=P_i/\|P_i\|$, $Y_i=Q_i/\|Q_i\|$,

$$\mathbf{X}=[X_1:\ldots:X_d],\quad \mathbf{Y}=[Y_1:\ldots:Y_d],$$

$\mathbf{U}=[P_1:\ldots:P_d]$ и $\mathbf{V}=[Q_1:\ldots:Q_d]$. Также положим

$$\Pi_P=\begin{pmatrix}\|P_1\| & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \|P_2\| & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \|P_d\|\end{pmatrix},\quad \Pi_Q=\begin{pmatrix}\|Q_1\| & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \|Q_2\| & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \|Q_d\|\end{pmatrix}$$

и $\Pi_{PQ}=\Pi_P\,\Pi_Q$. Наконец, обозначим $\mathbf{C}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\Pi_{PQ}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}\Pi_{PQ}$.

Лемма 2. *Пусть λ — положительное собственное число матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$, соответствующее собственному вектору Z. Тогда λ — собственное число матрицы $\mathbf{C}$, соответствующее ненулевому собственному вектору $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}Z$.*

Как уже говорилось, доказательство этой леммы можно найти в [5, лемма 2.1]. Применим ее результат для наших целей.

Рассмотрим ряд $y_n = \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell \cos(2\pi\omega_\ell n + \gamma_\ell)$ с $\omega_\ell \in (0, 1/2)$, $\omega_\ell \neq \omega_j$ при $\ell \neq j$ и $|\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \ldots \geq |\Delta_p| > 0$. Обозначая $\cos_{k\,\ell}(\varphi_\ell) = \cos(2\pi k\omega_\ell + \varphi_\ell)$ и $\sin_{k\,\ell}(\varphi_\ell) = \sin(2\pi k\omega_\ell + \varphi_\ell)$, положим

$$C_{j\,\ell} = \big(\cos_{0\,\ell}(\psi_\ell), \ldots, \cos_{j-1\,\ell}(\psi_\ell)\big)^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad S_{j\,\ell} = \big(\sin_{0\,\ell}(\psi_\ell), \ldots, \sin_{j-1\,\ell}(\psi_\ell)\big)^{\mathrm{T}},$$

где $\psi_\ell = \gamma_\ell/2$. Кроме того, введем обозначения

$$X_\ell = \begin{cases} \operatorname{sign}\Delta_\ell\, C_{L\,\ell}/\|C_{L\,\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\operatorname{sign}\Delta_{p-\ell}\, S_{L\,\ell-r}/\|S_{L\,\ell-r}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$Y_\ell = \begin{cases} C_{K\,\ell}/\|C_{K\,\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ S_{K\,\ell-p}/\|S_{K\,\ell-p}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_{2p}]$, $\mathbf{Y} = [Y_1, \ldots, Y_{2p}]$, $\mathbf{C}_{L,X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ и $\mathbf{C}_{K,Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$. Далее, введем $2r \times 2r$ диагональные матрицы $\mathbf{\Pi}_{P,L}$, $\mathbf{\Pi}_{Q,K}$ и $\mathbf{D}$ с элементами

$$\big[\mathbf{\Pi}_{P,L}\big]_{\ell,\ell} = \begin{cases} \Delta_\ell\|C_{L\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\Delta_{p-\ell}\|S_{Lp-\ell}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$\big[\mathbf{\Pi}_{Q,K}\big]_{\ell,\ell} = \begin{cases} \|C_{K\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ \|S_{Kp-\ell}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$\mathbf{D}[\ell,\ell] = \begin{cases} \Delta_\ell & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\Delta_{p-\ell} & \text{при } p < \ell \leq 2p \end{cases}$$

и положим $\mathbf{\Pi}_{PQ} = \mathbf{\Pi}_{P,L}\mathbf{\Pi}_{Q,K}$. Наконец, пусть $\mathbf{G}$ — траекторная матрица ряда y_n размерности $L \times K$, а $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{2p}$ — положительные собственные числа матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$.

Предложение 1. *Если* $\min(L, K) \to \infty$ *при* $N \to \infty$, *то* $\lambda_i/LK \to \Delta^2_{\lceil i/2\rceil}/4$.

Доказательство. Так как

$$y_{n+m} = \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell \cos(2\pi n\omega_\ell + \psi_\ell)\cos(2\pi m\omega_\ell + \psi_\ell) - \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell \sin(2\pi n\omega_\ell + \psi_\ell)\sin(2\pi m\omega_\ell + \psi_\ell),$$

$\mathbf{G}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{G} = \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell C_{L\ell}C_{K\ell}^{\mathrm{T}} - \sum_{\ell=1}^{p} \Delta_\ell S_{L\ell}S_{K\ell}^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}\,\mathbf{\Pi}_{PQ}\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}.$$

Согласно лемме 2 множество положительных собственных чисел матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ совпадает со спектром матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{L,X}\mathbf{\Pi}_{PQ}\mathbf{C}_{K,Y}\mathbf{\Pi}_{PQ}$.

Так как элементы матрицы $\mathbf{C}_{K,Y}$ имеют вид

$$c_{\ell m}^{(K,Y)} = \begin{cases} C_{K\ell}^{\mathrm{T}} C_{Km} / \|C_{K\ell}\| \, \|C_{Km}\| & \text{при} \ \ \ell, m \le p, \\ S_{K\ell}^{\mathrm{T}} S_{Km} / \|S_{K\ell}\| \, \|S_{Km}\| & \text{при} \ \ \ell, m > p, \\ C_{K\ell}^{\mathrm{T}} S_{Km} / \|C_{K\ell}\| \, \|S_{Km}\| & \text{при} \ \ \ell \le p \ \ \text{и} \ \ m > p, \\ C_{Km}^{\mathrm{T}} S_{K\ell} / \|C_{Km}\| \, \|S_{K\ell}\| & \text{при} \ \ \ell > p \ \ \text{и} \ \ m \le p\,, \end{cases}$$

то, согласно лемме 1, матрицы $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{C}_{K,Y}$ поэлементно сходятся при $K \to \infty$ к единичной матрице $\mathbf{I}_{2p}$ размера $2p \times 2p$. Точно так же матрицы $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{C}_{L,X}$ сходятся к $\mathbf{I}_{2p}$ при $L \to \infty$.

Далее, $\sqrt{2}\,\mathbf{\Pi}_{P,L}/\sqrt{L} \to \mathbf{D}$ при $L \to \infty$ и соответственно $\sqrt{2}\,\mathbf{\Pi}_{Q,K}/\sqrt{K} \to \mathbf{I}_{2r}$ при $K \to \infty$. Это означает, что $4\mathbf{C}/KL \to \mathbf{D}^2$ при $L, K \to \infty$.

Поскольку $\mathbf{D}^2$ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\Delta_1^2, \ldots, \Delta_p^2, \Delta_1^2, \ldots, \Delta_p^2,$$

а $\Delta_1^2 \ge \ldots \ge \Delta_p^2 > 0$, то утверждение доказано. □

Следствие 1. *Рассмотрим траекторные матрицы* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{E}$ *размером* $L \times K$, *построенные из рядов* F_N *и* E_N *соответственно. Пусть* $L \sim \alpha N$ *с* $\alpha \in (0,1)$ *при* $N \to \infty$.

Обозначим $\mu_1, \ldots, \mu_{2k}$ *и* $\mu_{2k+1}, \ldots, \mu_{2r}$ *как положительные собственные числа матриц* $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *и* $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ *соответственно. Тогда, согласно Предложению 1, при* $1 \le i \le 2r$

$$\mu_i/N^2 \to \alpha(1-\alpha)\beta_{\lceil i/2 \rceil}^2/4.$$

В частности, если обозначить $\mu_{\max}$ *и* $\mu_{\min}$ *как максимальное и минимальное положительные собственные числа матрицы* $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, *то окажется, что*

$$\mu_{\max} \sim N^2 \alpha(1-\alpha)/4 \ \ \text{и} \ \ \mu_{\min} \sim \beta_k^2 N^2 \alpha(1-\alpha)/4.$$

При этом все μ_i *при* $1 \le i \le 2r$ *имеют порядок роста* N^2, *а* $\|\mathbf{H}\|$ *и* $\|\mathbf{E}\|$ *растут линейно по* N *при* $N \to \infty$.

2.3. Об асимптотике равномерной нормы некоторых матриц. В настоящей работе используются две матричные нормы. *Спектральная норма* $\|\mathbf{K}\|$ матрицы $\mathbf{K}$ — это максимальное ее сингулярное число, иначе говоря, $\|\mathbf{K}\|^2$ — максимальное собственное число матрицы $\mathbf{K}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$.

Равномерная норма $\|\mathbf{K}\|_{\max}$ — максимум из модулей элементов $L \times K$ матрицы $\mathbf{K}$. Эти нормы связаны следующими неравенствами (см. [7, § 2.3.2]):

$$\|\mathbf{K}\|_{\max} \le \|\mathbf{K}\| \le \sqrt{LK}\|\mathbf{K}\|_{\max}. \tag{6}$$

Кроме того, если $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — матрицы размера соответственно $L \times K$ и $K \times M$, то

$$\|\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\|_{\max} \le K\, \|\mathbf{K}_1\|_{\max} \|\mathbf{K}_2\|_{\max}. \tag{7}$$

В этом разделе помещены оценки скорости сходимости равномерных норм некоторых траекторных матриц для длинных рядов.

Так как $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{H}_i$, где $\mathbf{H}_i$ — ганкелева матрица, порожденная рядом $f_{in} = \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i)$ с $i \le k$, то $\|\mathbf{H}\|_{\max} \le \sum_{i=1}^{k} |\beta_i|$. Аналогично $\|\mathbf{E}\|_{\max} \le \sum_{i=k+1}^{r} |\beta_i|$.

Лемма 3. *Рассмотрим сингулярное разложение матрицы* $\mathbf{H}$*:*

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{2k} \sqrt{\mu_i} U_i V_i^{\mathrm{T}},$$

причем предположим, что $L/N \to \alpha \in (0,1)$*. Обозначим* $\mathbf{P}_{\mu_i} = U_i U_i^{\mathrm{T}}$ *как ортогональный проектор на одномерное пространство, порожденное собственным вектором* U_i *матрицы* $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ *с собственным числом* μ_i*,* $i \le 2k$*.*

Тогда $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$*,* $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(1)$ *и* $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1)$*.*

Доказательство. Начнем с $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}$. Обозначим при $1 \le j \le k$

$$\begin{aligned} P_{j1} &= (1, \cos(2\pi\omega_j), \ldots, \cos(2\pi\omega_j(L-1)))^{\mathrm{T}}, \\ P_{j2} &= (0, \sin(2\pi\omega_j), \ldots, \sin(2\pi\omega_j(L-1)))^{\mathrm{T}}, \\ Q_{j1} &= (1, \cos(2\pi\omega_j), \ldots, \cos(2\pi\omega_j(K-1)))^{\mathrm{T}}, \\ Q_{j2} &= (0, \sin(2\pi\omega_j), \ldots, \sin(2\pi\omega_j(K-1)))^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Тогда $U_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij1} P_{j1}/\|P_{j1}\| + \sum_{j=1}^{k} a_{ij2} P_{j2}/\|P_{j2}\|$, причем

$$1 = \|U_i\|^2 = \sum_{j=1}^{k} a_{ij1}^2 + \sum_{j=1}^{k} a_{ij2}^2 + 2\sum_{m \ne \ell} a_{im1} a_{i\ell 1} (P_{m1}, P_{\ell 1})/\|P_{m1}\|\,\|P_{\ell 1}\| +$$

$$+2\sum_{m \ne \ell} a_{im2} a_{i\ell 2} (P_{m2}, P_{\ell 2})/\|P_{m2}\|\|P_{\ell 2}\| + 2\sum_{1 \le m,\ell \le k} a_{im1} a_{i\ell 2} (P_{m1}, P_{\ell 2})/\|P_{m1}\|\,\|P_{\ell 2}\|. \quad (8)$$

Поскольку, согласно лемме 1, все скалярные произведения в (8) ограничены по модулю, а нормы $\|P_{mi}\|$ растут как $\sqrt{N}$, то коэффициенты a_{ij1} и a_{ij2} тоже ограничены.

Далее,

$$\mathbf{P}_{\mu_i} = U_i U_i^{\mathrm{T}} = \sum_{j,m=1}^{k} a_{ij1} a_{im1} P_{j1} P_{j1}^{\mathrm{T}}/\|P_{j1}\|\|P_{m1}\| + \sum_{j,m=1}^{k} a_{ij2} a_{im2} P_{j2} P_{m2}^{\mathrm{T}}/\|P_{j2}\|\|P_{m2}\| +$$

$$+2\sum_{j,m=1}^{k} a_{ij1} a_{im2} \Big(P_{j1} P_{m2}^{\mathrm{T}} + P_{m2} P_{j1}^{\mathrm{T}}\Big)/\|P_{j1}\|\|P_{m2}\|.$$

Заметим, что $\mathbf{E} = \sum_{i=k+1}^{r} \beta_i \mathbf{E}_i$. Так как, согласно неравенству (7), $\|P_{j\ell} P_{mq}^{\mathrm{T}} \mathbf{E}_i\|_{\max} \le \|P_{j\ell}\|_{\max} \|P_k^{\mathrm{T}} \mathbf{E}_i\|_{\max}$, а $\|P_{mq}^{\mathrm{T}} \mathbf{E}\|_{\max} = O(1)$ ввиду леммы 1, то первое утверждение доказано.

Далее, $V_i = \sum_{j=1}^{k} b_{ij1} Q_{j1}/\|Q_{j1}\| + \sum_{j=1}^{k} b_{ij2} Q_{j2}/\|Q_{j2}\|$, где, как и в первом случае, $|b_{ij1}| + |b_{ij2}| = O(1)$ при $N \to \infty$ для любых i, j. Поскольку

$$\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H} = \sqrt{\mu_i} U_i V_i^{\mathrm{T}} = \sqrt{\mu_i}\Big(\sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1,2} a_{ijm} P_{jm}/\|P_{jm}\|\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{p=1,2} b_{i\ell p} Q_{\ell p}/\|Q_{\ell p}\|\Big)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sqrt{\mu_i} \sum_{j,\ell=1}^{k} \sum_{m,p=1,2} a_{ijm} b_{i\ell p} P_{jm} Q_{\ell p}^{\mathrm{T}}/\|P_{jm}\|\|Q_{\ell p}\|,$$

а $\|P_{jm}Q_{\ell p}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1)$ и $\sqrt{\mu_i}/\|P_{jm}\|\|Q_{\ell p}\| = O(1)$ при $N \to \infty$, то $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(1)$. Аналогичным образом, так как

$$\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \sqrt{\mu_i}\sum_{q=k+1}^{r}\beta_q\sum_{j,\ell=1}^{k}\sum_{m,p=1,2}a_{ijm}b_{i\ell p}P_{jm}Q_{\ell p}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_q^{\mathrm{T}}/\|P_{jm}\|\|Q_{\ell p}\|,$$

$\|Q_m^{\mathrm{T}}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1)$ (см. лемму 1), а по неравенству (7)

$$\|P_{jm}Q_{\ell p}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_q^{\mathrm{T}}\|_{\max}\| \le \|P_{jm}\|_{\max}\|Q_{\ell p}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_q^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1),$$

то все утверждения леммы доказаны. □

Введем следующие обозначения: $\mathrm{U}_0^{\perp}$ — линейное пространство столбцов матрицы $\mathbf{H}$; $\mathbf{P}_0^{\perp}$ — ортогональный проектор на это подпространство, а $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{2k} - \mathbf{P}_0^{\perp}$ — ортогональный проектор на ортогональное дополнение U_0 к $\mathrm{U}_0^{\perp}$.

Лемма 4. *Пусть $L/N \to \alpha \in (0,1)$ при $N \to \infty$. Тогда*

1. $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = \|\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1)$.
2. *Существуют такие постоянные C_f и C_e, что*

$$\|\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le 0.5K\sum_{i=1}^{k}\beta_i^2 + C_f = O(N) \quad \text{и} \tag{9}$$

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le 0.5K\sum_{i=k+1}^{r}\beta_i^2 + C_e = O(N). \tag{10}$$

3. $\|\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} = O(N)$.
4. $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$.
5. $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.
6. $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$.
7. $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$.
8. $\|\mathbf{P}_0\,\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$.

Доказательство. 1. Следует из того, что $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{r}\beta_i\beta_j\mathbf{H}_i\mathbf{E_j}^{\mathrm{T}}$, а, согласно равенству (3) для случая $\omega_1 \ne \omega_2$, $\|\mathbf{H}_i\mathbf{E}_j^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(1)$.

2. Следует из равенства $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\beta_i\beta_j\mathbf{H}_i\mathbf{H}_j^{\mathrm{T}}$, а также из того, что

$$\|\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le 0.5K + 0.5\frac{1}{\sin(\pi\omega_i)},$$

а при $i \ne j$

$$\|\mathbf{H}_i\mathbf{H}_j^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le 0.5\left(\frac{1}{\sin(\pi|\omega_i-\omega_j|)+\sin(\pi|\omega_i+\omega_j|)}\right),$$

(см. равенство (3) леммы 1 при $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$). Для случая $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ все абсолютно аналогично.

3. Следует из определения $\mathbf{B}(\delta)$ и уже доказанных соотношений.

4. Используя неравенство (7) и лемму 3, получаем

$$\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq |\delta|\, \|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + |\delta|\, \|\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2\|\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq$$
$$\leq 2|\delta|\, L\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max}\, \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2 L^2\, \|\mathbf{E}\|_{\max}\, \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{H}\|_{\max} = O(N).$$

5. Так как $\mathbf{P}_0^{\perp} = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{P}_{\mu_i}$, то требуемое соотношение следует из леммы 3.

6. Заметим, что $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max}$. Далее,

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq |\delta|\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} +$$
$$+|\delta|\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max}.$$

Так как

$$\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq L\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N),$$
$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\|_{\max} \leq L^2\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\|_{\max}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N),$$
$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq L^2\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{H}\|_{\max} = O(1),$$

то $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$ и, следовательно, утверждение доказано.

7. Следует из неравенства $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq L\, \|\mathbf{B}(\delta)\|_{\max}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}$ и леммы 3.

8. Так как $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{2k} - \mathbf{P}_0^{\perp}$, то

$$\|\mathbf{P}_0\, \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}.$$

Первое слагаемое уже изучено (см. п. 4 настоящей леммы). Что касается второго слагаемого, то

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq |\delta|\, \|\mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} + |\delta|\, \|\mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} +$$
$$+\delta^2\, \|\mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = |\delta|\, J_1 + |\delta|\, J_2 + \delta^2\, J_3.$$

Далее,

$$J_1 = \|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq L\, \|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max}\, \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(1),$$
$$J_2 \leq L^2\, \|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}\, \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\, \|\mathbf{H}\|_{\max} = O(1)$$

и аналогично $J_3 = O(1)$, откуда и следует требуемое. □

3. Основная теорема и ее применение. Обозначим, следуя [2], $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$. Пусть, кроме того, $\mu_{\min}$ — минимальное положительное собственное число матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ и $B(\delta) := |\delta|\, \|\mathbf{A}^{(1)}\| + \delta^2\|\mathbf{A}^{(2)}\|$.

Следующее утверждение является основным для получения окончательного результата — теоремы 3. Обозначим $\mathbf{A}_0^{(2)} = \mathbf{P}_0\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0$ — псевдообратную матрицу Мура — Пенроуза к матрице $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ с $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min}$. Как и в лемме 3, пусть $\mathbf{P}_{\mu_i}$ — ортогональный проектор на одномерное пространство, порожденное собственным вектором U_i матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ с собственным числом μ_i, при этом $\mu_1 = \mu_{\max}$ и $\mu_{2k} = \mu_{\min}$.

Теорема 2. *Пусть существует такое* $\delta_k > 0$, *что* $B(\delta_k) \le \mu_{\min}/4$. *Тогда при* $|\delta| < \delta_k$ *имеет место неравенство* $\|\delta \mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_{\min}\| < 1$ *и матрица* $\mathbf{I} - \delta\mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_{\min}$ *обратима.*

Обозначим $r_i(\delta) = r_i(\delta, N)$, $0 \le i \le N-1$, *ошибки восстановления ряда* X_N *по* X *первым* $2k$ *главным компонентам методом АСС.*

Кроме того, положим $\mathbf{L}(\delta) = \mathbf{L}_1(\delta) + \mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}(\delta)$ *с*

$$\mathbf{L}_1(\delta) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i}\Big(\mathbf{I} - \delta\mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_i\Big)^{-1}. \tag{11}$$

Тогда при $|\delta| < \delta_k$

$$\max_{0\le i<N} |r_i(\delta)| \le C\,\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\|\,\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1-4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}\,\|\mathbf{H}\| + \\ + \|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H}\|_{\max} + |\delta|\,\|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} + |\delta|\,\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}, \tag{12}$$

где $C > 0$ *— некоторая абсолютная постоянная.*

Доказательство. Доказательство этого факта непосредственно вытекает из [2, теор. 2.5 и § 5.3], а также левого из неравенств (6). Заметим, что неравенство (12) фактически использовалось в [2, § 5.3.1] и в разделе 3 статьи [6]. □

Лемма 5. *Пусть* $N \to \infty$ *и* $L \sim \alpha N$ *с* $\alpha \in (0,1)$. *Тогда существуют такие* $\delta_k > 0$ *и* N_k, *что при* $N > N_k$ *и* $|\delta| < \delta_k$ *выполняется неравенство* $B(\delta) < \mu_{\min}/4$. *При этом* $1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} > 0$ *при* $|\delta| < \delta_k$ *и достаточно большом* N.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $\mu_{\min}$ и $B(\delta)$ имеют одинаковый порядок роста при $N \to \infty$.

Действительно, $\mu_{\min} \sim \beta_k^2\alpha(1-\alpha)N^2/4$ при $N \to \infty$. Из п. 1 леммы 4 следует, что $\|\mathbf{A}^{(1)}\|_{\max} = O(1)$, поэтому $\|\mathbf{A}^{(1)}\| = O(N)$ [см. неравенство (6)].

Так как $\|\mathbf{A}^{(2)}\| = \mu_{2k+2} \sim \beta_{k+1}^2\alpha(1-\alpha)N^2/4$, то $B(\delta)/\mu_{\min} \to \delta^2\beta_{k+1}^2/\beta_k^2$ при любом δ, откуда и следует требуемое с $\delta_k = 0.5|\beta_k|/|\beta_{k+1}|$.

Второе утверждение следует из того, что $\|\mathbf{B}(\delta)\| \le B(\delta)$. □

Дальнейшее действие состоит в получении оценок сверху всех слагаемых в правой части (12). Для этого нам понадобится еще несколько лемм, причем везде будет предполагаться, что $N \to \infty$ и $L/N \to \alpha \in (0,1)$.

Лемма 6. *Если* $N \to \infty$ *и* $L/N \to \alpha \in (0,1)$, *то* $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\| = O(N^{-1})$.

Доказательство. Поскольку $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min} \asymp N^{-2}$, а, как уже отмечалось, $\|\mathbf{A}^{(1)}\| = O(N)$, то нужно разобраться с нормой $\|\mathbf{S}_0\mathbf{A}^{(2)}\|$.

Так как $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{2k}\mu_i\mathbf{P}_{\mu_i}$, то $\mathbf{S}_0 = \sum_{i=1}^{2k}\mathbf{P}_{\mu_i}/\mu_i$ и

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\| \le \sum_{i=1}^{2k}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|/\mu_i \le \sum_{i=1}^{2k}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|\|\mathbf{E}\|/\mu_i \le \\ \le \sum_{i=1}^{2k}\frac{\sqrt{LK}}{\mu_i}\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{E}\| = O(N^{-1}),$$

что и заканчивает доказательство. □

Следствие 2. *Если* $|\delta| < \delta_k = 0.5|\beta_k|/|\beta_{k+1}|$, *то в условиях леммы 6*

$$\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\|\,\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1-4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}\,\|\mathbf{H}\| = O(N^{-1}).$$

Доказательство. Согласно лемме 6

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\|\,\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \le \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\|^2 = O(N^{-2}).$$

Поскольку $\|\mathbf{H}\| = O(N)$, а $1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} > 0$ при $|\delta| < \delta_k$, то утверждение доказано. □

Лемма 7. *Обозначим* $\mathbf{Z}_i = \delta\mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_i = \delta\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0/\mu_i$ *при* $i = 1,\ldots,2k$. *Тогда*

$$\Big\|\sum_{n\ge 1}\mathbf{Z}_i^n\Big\|_{\max} = O(N^{-1}) \tag{13}$$

при достаточно малых δ.

Доказательство. Докажем сначала, что $\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \le |\delta|\,c/N$ при некотором $c > 0$.

Заметим, что $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} - \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0^{\perp} + \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{T}\mathbf{P}_0^{\perp}$. Далее, согласно п. 2 леммы 4,

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le 0.5K\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2 + C_e.$$

Кроме того [см. п. 5 леммы 4 и неравенство (7)],

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le L\,\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}\,\|\mathbf{E}\|_{\max} = O(1)$$

и $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0^{\perp}\|_{\max} \le L\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}^2 = O(N^{-1})$.

Тогда, так как (см. следствие 1) $\mu_i/N^2 \to \alpha(1-\alpha)\beta_{\lceil i/2\rceil}^2/4$, то

$$\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \le |\delta|\left(\frac{0.5K\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2}{\mu_i} + O(N^{-1})\right) \le |\delta|\,\frac{æ\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2}{\alpha\beta_{\lceil i/2\rceil}^2} \le$$
$$\le |\delta|\,\frac{æ\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2/\beta_k^2}{\alpha}\,\frac{1}{N}$$

при некотором $æ > 2$. Поэтому неравенство $\|\mathbf{Z}_i\|_{\max}\le|\delta|\,c/N$ доказано при

$$c = \frac{æ\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2/\beta_k^2}{\alpha}.$$

Далее, если взять

$$|\delta| < \delta^{(k,2)} := \frac{1}{2\sum_{j=k+1}^{r}\beta_j^2/\beta_k^2} < 1/c, \tag{14}$$

то мы получим неравенство $|\delta|c < 1$. При этом условии легко показать, что $\|\mathbf{Z}_i^n\|_{\max} \le |\delta|^n c^n/N$ для любого $n \ge 1$. Действительно, так как $\|\mathbf{Z}_i^n\|_{\max} \le$

$L\|\mathbf{Z}^{n-1}\|_{\max}\|\mathbf{Z}\|_{\max}$ и $L\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \le |\delta|c$, то это доказывается с помощью простой индукции. Отсюда сразу же следует нужное нам неравенство

$$\Big\| \sum_{\ell\ge 1} \mathbf{Z}_i^\ell \Big\|_{\max} \le \frac{|\delta|c}{1-|\delta|c}\,\frac{1}{N}\,, \tag{15}$$

и утверждение доказано. □

Теперь рассмотрим матрицы $\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H}$.

Лемма 8. $\|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H}\|_{\max} = O(N^{-1})$ *при* $N\to\infty$ *и достаточно малых* δ.

Доказательство. Так как $\mathbf{P}_0\mathbf{H} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{Z}_i\mathbf{H} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H} = \mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{L}_{1i}^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{H} \;\text{ с }\; \mathbf{L}_{1i}^{\mathrm{T}}(\delta) = \Big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_i\Big)^{-1}\frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}}{\mu_i}\,, \quad \text{причем}$$

$$\mathbf{L}_{1i}^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}}{\mu_i} + \Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^\ell\Big)\frac{\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}}{\mu_i}\,.$$

Далее, по пп. 4 и 6 леммы 4, $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$ и $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$. Поэтому, согласно лемме 7,

$$\Big\|\Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^\ell\Big)\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\Big\|_{\max} \le L\Big\|\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^\ell\Big\|_{\max}\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N),$$

и утверждение доказано. □

Лемма 9. *При достаточно малом* δ *и* $N\to\infty$, $\|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Доказательство. По определению $\mathbf{L}(\delta)\mathbf{E} = \mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E} + \mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E}$ с

$$\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{2k}\mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{2k}\frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i}\Big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_i\Big)^{-1}\mathbf{E}.$$

Начнем с $\|\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}$. Так как

$$\mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i}\Big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_i\Big)^{-1}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i}\,\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i}\Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^\ell\Big)\,\mathbf{E} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}}{\mu_i} - \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}}{\mu_i} + \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)}{\mu_i}\Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^\ell\Big)\,\mathbf{E}, \quad \text{а}$$

$$\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} \le |\delta|\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} + |\delta|\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\|_{\max} + \delta^2\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} \le$$
$$\le |\delta|\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} + |\delta|\,L\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\|\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2\,L\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}\,\|\mathbf{E}\|_{\max} = O(1),$$

$$\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} \le L\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max}\,\|\mathbf{E}\|_{\max} = O(N), \quad \text{и}$$
$$\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} \le L\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max}\,\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(1),$$

то

$$\|\mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} \le \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i + \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i +$$
$$+L^2\,\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max}\left\|\Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^{\ell}\Big)\right\|_{\max}\|\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i = O(N^{-1}).$$

Перейдем к $\|\mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}$.

$$\mathbf{L}_{1i}^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E} = \Big(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_i\Big)^{-1}\frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i} = \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i} + \Big(\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^{\ell}\Big)\frac{\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i}.$$

Так как (см. пп. 7 и 8 леммы 4) $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$ и $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$, а $\left\|\sum_{\ell\ge 1}\mathbf{Z}_i^{\ell}\right\| = O(N^{-1})$ (см. лемму 7), то

$$\|\mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} \le \|\mathbf{L}_{11}^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{L}_{12}^{\mathrm{T}}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Утверждение доказано. □

Собрав вместе результаты следствия 2, лемм 8 и 9, а также п. 5 леммы 4, получаем из неравенства (12) теоремы 2 окончательный результат работы — теорему 1, приведенную во введении.

4. Выделение гармонических слагаемых из их суммы. Теперь перейдем к выделению гармонических слагаемых из их суммы. Рассмотрим ряд $x_0, \ldots, x_{N-1}$ с

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} f_{i,n}, \quad \text{где} \quad f_{i,n} = b_k\cos(\omega_i n + \gamma_i) \tag{16}$$

с попарно различными частотами $\omega_i \in (0, 1/2)$ и амплитудами $|b_i|$, удовлетворяющими неравенству $1 = b_1 > |b_2| > \ldots > |b_r| > 0$.

Пусть $N \to \infty$. Для асимптотического выделения каждого слагаемого $f_{i,n}$ в сумме (16) применим метод АСС со следующими параметрами: ширина окна $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, а для восстановления i-го слагаемого в сумме (16) используются две главные компоненты с номерами $2i-1, 2i$ (см. [1, гл. 1]).

Обозначим соответствующие восстановленные значения $\widetilde{f}_{i,n}$ и положим $r_{i,n}(N) = \widetilde{f}_{i,n} - f_{i,n}$.

Теорема 3. *Обозначим при* $1 \le k < r$ $\delta_k = b_{k+1}/b_k$. *Если при всех* k

$$|\delta_k| < 0.5\,\frac{1}{1+\sum_{j=k+2}^{r}\Big(\prod_{i=k+1}^{j-1}\delta_i\Big)^2}, \tag{17}$$

то $\max_{0\le n<N}|r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ *при* $1 \le i \le r$.

Доказательство. Обозначим для краткости $\cos_j = \cos(2\pi\omega_j n + \gamma_j)$ и перепишем (16) в терминах δ_i:

$$x_n = \cos_1 + \delta_1\cos_2 + \delta_1\delta_2\cos_3 + \ldots + \delta_1\ldots\delta_{r-1}\cos_r = \cos_1 + \sum_{j=2}^{r}\left(\prod_{i=1}^{j-1}\delta_i\right)\cos_j\,. \tag{18}$$

Зафиксировав $1 \le k < r$, запишем (18) в виде

$$x_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^{k} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) \cos_j + \delta_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \cos_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{r} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k \cos_j \right) \qquad (19)$$

и, введя обозначения $\beta_j = \prod_{i=1}^{j-1} \delta_i$ при $j \le k$ и

$$\beta_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i = \beta_k \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i$$

при $j \ge k$, переписываем (19) в стандартном виде

$$x_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^{k} \beta_j \cos_j + \delta_k \sum_{j=k+1}^{r} \beta_j \cos_j$$

и тем самым приходим к результату теоремы 1: если

$$|\delta_k| < 0.5 \min \left(\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|}, \frac{\beta_k^2}{\sum_{j=k+1}^{r} \beta_j^2} \right), \qquad (20)$$

то максимальные ошибки восстановления сигнала $f_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^{k} \beta_j \cos_j$ от помехи $\delta_k \sum_{j=k+1}^{r} \beta_j \cos_j$ будут иметь вид $O(N^{-1})$.

Заметив теперь, что $|\beta_{k+1}| = |\beta_k|$, а при $j > k$

$$\beta_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i = \beta_k \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i$$

получим, что условие (20) приобретает вид (17).

Пусть теперь (17) выполнено при любом k. Взяв $k = 1$ и $k = r - 1$, мы получим, что $\max_{0 \le n < N} |r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ при $i = 1$ и $i = r$, а из того, что (17) выполняется при $k = i - 1$ и $k = i$, следует, что $\max_{0 \le n < N} |r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ при $1 < i < r$. $\square$

5. Заключение. Конечно, результат теоремы 3 дает только достаточные условия для разделимости гармоник. Так, при $r = 2$ (и $k = 1$) условие (17) превращается в $|\delta_1| = |b_2| < 0.5$, в то время как вычислительные эксперименты показывают, что на самом деле условие должно быть $|b_2| < 1$.

Для $r = 3$ условия (17) имеют вид $|b_2| < 0.5 / (1 + \delta_2^2)$, $|\delta_2| = |b_3/b_2| < 0.5$, что не выполнено в примере, приведенном во введении, где $b_3/b_2 = 0.75$, а $b_2 = 0.8 > 0.5$. Это связано с применением общей техники возмущений самосопряженных операторов, развитой в [3]. Возможно, адаптация этой техники к решению конкретных задач метода АСС позволит по крайней мере ослабить эти достаточные условия.

Отметим также, что скорость сходимости $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ для ошибок восстановления является, по-видимому, стандартной для решения задач выделения сигнала из суммы с осциллирующей помехой. По крайней мере именно такой результат получен в [6, разд. 2] для растущего экспоненциального сигнала и синусоидальной помехи при наличии дискретизации сигнала (как показано в [6, разд. 1], без дискретизации $\max_i |r_i(N)|$ не стремится к нулю при $N \to \infty$).

Аналогичные оценки $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ можно найти в [8], где рассматривается линейный сигнал, а также в [9], где обсуждаются вопросы так называемого рекуррентного прогноза в АСС.

6. Благодарности. Автор благодарит обоих анонимных рецензентов, замечания которых, несомненно, способствовали улучшению работы.

Литература/References

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D. C. (2001).

2. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).

3. Kato T. *Perturbation theory for linear operators.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (1995).

4. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2nd ed., Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).

5. Nekrutkin V., Vasilinetc I. Asymptotic extraction of common signal subspaces from perturbed signals. *Statistics and its Interface.* **10**, 27–32 (2017).

6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and its Interface* **12**, 49–59 (2019).

7. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*, 4th ed. *Johns Hopkins University Press.* (2013).

8. Zenkova N. V., Nekrutkin V. V. On the Asymptotical Separation of Linear Signals from Harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55** (2), 166–173 (2022).

9. Nekrutkin V. V. Remark on the Accuracy of Recurrent Forecasting in Singular Spectrum Analysis. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **56**, 1, 35–45 (2023).

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2023 г.;
доработана 12 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Некруткин Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vnekr@statmod.ru

Asymptotical separation of harmonics by Singular Spectrum Analysis*

V. V. Nekrutkin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Nekrutkin V. V. Asymptotical separation of harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 720–735. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409 (In Russian)

The paper is devoted to the sufficient conditions for the asymptotical separation of distinct terms in the linear combination of harmonics by Singular Spectrum Analysis (briefly, SSA). Namely, let $x_0, \ldots, x_{N-1}$ be the series with $x_n = \sum_{i=1}^{r} f_{i,n}$, where $f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i)$, and both amplitudes $|b_i|$ and frequencies $\omega_i \in (0, 1/2)$ are pairwise different. Then it s proved that under some relationship between amplitudes $|b_i|$ and the standard choice of

*The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-002220).

SSA parameters the so-called reconstruction values $\widetilde{f}_{i,n}$ become very close to $f_{i,n}$ for big N. Moreover, $\max_n(|\widetilde{f}_{i,n} - f_{i,n}|) = O(N^{-1})$ for any i as $N \to \infty$.

Keywords: signal processing, singular spectral analysis, linear combination of harmonics, separability of harmonics, asymptotical analysis.

Received: February 18, 2023
Revised: May 12, 2023
Accepted: May 18, 2023

Author's information:

Vladimir V. Nekrutkin — vnekr@statmod.ru

ХРОНИКА

26 апреля 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступил кандидат физ.-мат. наук Д. С. Ролдугин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН) с докладом на тему «Динамика космических аппаратов с активной магнитной системой ориентации».

Краткое содержание доклада:

Изучается динамика космических аппаратов под управлением магнитной системы ориентации в основных режимах углового движения. Это — гашение угловой скорости, поддержание ориентации аппарата с ротором, одноосная стабилизация аппарата в режиме вращения и, отдельно, в режиме стабилизации на Солнце, стабилизация в произвольном трехосном положении. В ходе работы установлены конкретные приближенные выражения, характеризующие решение и его ключевые параметры — амплитуды колебаний, степень устойчивости и др. Эти выражения позволяют получить общее представление о свойствах движения аппарата в зависимости от его параметров, в первую очередь инерционных, и от параметров управления. Для актуальных режимов движения предложены новые алгоритмы ориентации.