

О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. II*

Н. Ф. Морозов^{1,2}, Д. А. Индейцев^{2,3}, А. В. Лукин³,
И. А. Попов³, Л. В. Штукин^{2,3}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук,

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 632–649. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.404>

Настоящая статья является второй частью работы, посвященной исследованию нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний заземленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Показана принципиальная техническая возможность лазерной генерации параметрических колебаний высокочастотных микромеханических резонаторов без реализации сценариев потери упругой устойчивости чувствительного элемента или его недопустимого нагрева. Аналитически исследован характер зоны главного параметрического резонанса. Построены резонансные характеристики системы в геометрически нелинейной постановке, соответствующей модели балки Бернулли — Эйлера.

Ключевые слова: нелинейная динамика, параметрические колебания, балка Бернулли — Эйлера, модальное взаимодействие, лазерное термооптическое воздействие.

1. Введение. Принцип лазерного термооптического воздействия на деформируемую среду находит все более широкое применение в задачах неразрушающего контроля оборудования и конструкций [1, 2], определения физико-механических свойств материалов [3, 4], изучения геометрических и физических параметров объектов и структур на нано- и микромасштабном уровне [5, 6], в биомедицине [7], а также в индустрии нано- и микросистем. Так, в работах [8, 9] представлены модели микромеханических актуаторов, использующих оптический метод сообщения упругому элементу температурных деформаций. В [10] исследуются вопросы влияния лазерного излучения на деформации поверхности микромеханических зеркал. Одним

*Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

Первая часть работы опубликована здесь: Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. I. Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 315–333. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

из важных направлений разработок и исследований в указанной области является лазерная термооптическая генерация колебаний подвижных элементов микроэлектромеханических систем различного назначения (датчики, системы обработки сигналов). В [11] представлены результаты разработки волоконно-оптических сенсоров, работающих в авторезонансном режиме при оптическом возбуждении. В [12] теоретически обоснован и экспериментально проверен метод лазерной термооптической частотной подстройки микромеханического резонатора и управления его нелинейной амплитудно-частотной характеристикой. В [13] сообщается об успешных экспериментах по термооптическому возбуждению многомодового параметрического резонанса в графеновых мембранах. В [14, 15] представлены результаты исследования нелинейной динамики и синхронизации колебаний в системе слабо связанных микроэлектромеханических генераторов предельных циклов с термооптическим принципом возбуждения колебаний.

В выполненных ранее работах [16–18] рассматривалась динамика и упругая устойчивость балочного элемента МЭМС и НЭМС при кратковременных тепловых воздействиях. В [19] был исследован характер свободных продольно-изгибных колебаний стержня в случае внутреннего комбинационного резонанса между двумя изгибными и низшей продольной формами колебаний. Было показано, что начальное возмущение в продольном направлении может эффективно возбуждать изгибные формы колебаний, что в целом приводит к режиму продольно-изгибных биений со значительными амплитудами. В работе [20] был выполнен анализ процессов нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными колебаниями микробалочных резонаторов при гармоническом температурном воздействии общего вида. С качественной стороны был исследован режим параметрических колебаний микробалки в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации в системе режима продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки.

Данная статья является второй частью работы, посвященной исследованию нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний защемленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. В первой части работы [21] было получено аналитическое решение для задачи о нестационарном тепловом состоянии микробалочного резонатора при лазерном воздействии, а также найдено первое асимптотическое приближение для задачи нелинейной динамики связанных продольно-изгибных колебаний системы. В настоящей статье на основе анализа полученных общих решений рассматривается вопрос принципиальной физической и технической реализуемости лазерной генерации параметрических колебаний высокочастотных микромеханических резонаторов. Аналитически изучается характер динамики системы в зоне главного параметрического резонанса.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача об изгибных колебаниях защемленной с двух концов прямолинейной тонкой микробалки, описываемой механической моделью Бернулли — Эйлера, при лазерном термооптическом воздействии.

Графическая схема исследуемой задачи показана на рис. 1.

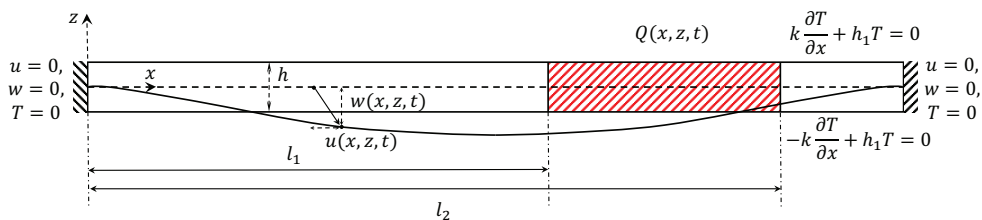


Рис. 1. Графическая схема рассматриваемой задачи.

В обозначениях рисунка t — время; x, z — координаты в горизонтальном и вертикальном направлениях; k — коэффициент теплопроводности; T — температура в данной точке стержня; T_0 — отсчетная температура, везде далее принимаемая равной нулю; $Q(x, z, t)$ — объемное тепловыделение в материале резонатора, моделирующее лазерное термооптическое воздействие; значения продольной координаты l_1, l_2 характеризуют границы области действия лазерного источника. Принимаются условия тепловой изоляции по торцевым сечениям балочного резонатора и конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях элемента с коэффициентом теплопередачи h_1 . Механические параметры системы имеют следующие обозначения: u, w — продольное и поперечное перемещения; N — продольная сила; ρ, E, α_T — плотность, модуль Юнга и коэффициент линейного температурного расширения материала соответственно; $S = bh; L, b, h$ — длина стержня, ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Исследуем случай лазерной генерации колебаний по механизму возбуждения главного параметрического резонанса по нижней изгибной форме колебаний микробалки. Данный случай не подразумевает использования фактора нелинейного модального взаимодействия между изгибными и продольными формами колебаний, в частности — не требует согласования распределения термооптического воздействия по длине микробалки с условиями возбуждения какой-либо продольной формы колебаний [20]. Термооптическое воздействие принимается равномерно распределенным по всей поверхности микробалки, что обеспечивает возбуждение параметрических изгибных колебаний за счет наличия гармонически изменяющейся во времени осевой температурной силы. Подчеркнем, что пространственная равномерность лазерного излучения не гарантирует отсутствия продольных колебаний резонатора как таковых, так как даже в этом случае динамическая компонента температурного поля, как будет показано далее, имеет изменчивость по длине микробалочного элемента. Однако вдали от резонансных зон эти колебания будут иметь пренебрежимо малую амплитуду и могут не учитываться.

В рассматриваемом случае уравнение динамики параметрически возбуждаемого балочного резонатора имеет вид

$$\ddot{W}_l + 2\omega_l \xi_w \dot{W}_l + [k_l^S + \kappa (k_w^S(\Omega) + f_w^{amp}(\Omega) \cos(\Omega\tau))] W_l - 6B_2 W_l^3 = 0. \quad (1)$$

Как отмечено в первой части работы [21], в условиях главного параметрического резонанса частота термооптического воздействия Ω удовлетворяет соотношению $\Omega = 2\omega_l + \sigma_\Omega$. Параметр κ в уравнении (1) является безразмерным множителем интенсивности лазерного воздействия по отношению к некоторому базовому значению, для которого выполняется решение тепловой задачи. Форма введения этого параметра в уравнение отражает как факт пропорциональной зависимости температурных силовых факторов от амплитуды лазерных импульсов, так и свойство

синхронности изменения статической (меняющей собственную частоту резонатора) и динамической компонент температурной силы при изменении этой амплитуды.

Уравнение (1) в основе своей представляет собой классическую модель параметрически возбуждаемого осциллятора с кубической нелинейностью механико-геометрической природы. Особенностью рассматриваемой постановки является уже кратко отмеченные выше два обстоятельства: 1) зависимость актуальной собственной частоты резонатора от интенсивности генерируемого лазером объемного тепловыделения и 2) зависимость как амплитуды воздействия, так и собственной частоты резонатора от частоты следования лазерных импульсов. Оба фактора будут оказывать существенное влияние на форму и расположение зон раскачки параметрических колебаний в пространстве переменных «интенсивность — частота лазерного воздействия». Первая указанная выше особенность является типичной для микроэлектромеханических систем, в которых параметрический резонанс обеспечивается электростатическими актуаторами с переменным межэлектродным зазором. Вторая особенность является, по-видимому, уникальной, так как отражает свойство зависимости собственной частоты резонатора от частоты сообщаемого ему внешнего воздействия.

Исследуемая модель (1) является частным случаем общей системы в модальных координатах, приведенной в [21], поэтому ее качественный анализ может быть выполнен на основе полученной методом многих масштабов системы в медленных переменных. Предметом исследования здесь будет определение зоны раскачки колебаний на главном параметрическом резонансе в пространстве параметров (σ_Ω, κ) , характеризующих интенсивность и частоту лазерного воздействия, а также нахождение резонансных кривых для рассматриваемого нелинейного динамического режима.

Следуя общей методике построения переходных кривых параметрического резонанса в рамках метода многих масштабов, запишем уравнение медленной эволюции комплексной амплитуды изгибных колебаний в пренебрежении нелинейными слагаемыми:

$$8\omega_l^3 \frac{dA_w}{d\tau} = -i(\kappa k_w^S)^2 A_w - 8\omega_l^4 \xi_w A_w + 4i\omega_l^2 \kappa k_w^S A_w + 2i\omega_l^2 \kappa f_w^{amp} \bar{A}_w e^{i\sigma_\Omega \tau}. \quad (2)$$

Выполним в уравнении (2) комплексную замену переменных:

$$A_w = B_w e^{\frac{i\sigma_\Omega \tau}{2}} \quad (3)$$

и представим B_w как

$$B_w = B_w^r + iB_w^i. \quad (4)$$

Отделяя вещественную и мнимую части в полученном уравнении, придем к следующей системе двух вещественно-значных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 8\omega_l^3 \frac{dB_w^r}{d\tau} &= 4\omega_l^3 \sigma_\Omega B_w^i + (\kappa k_w^S)^2 B_w^i - 8\omega_l^4 \xi_w B_w^r - 4\omega_l^2 \kappa k_w^S B_w^i + 2\omega_l^2 \kappa f_w^{amp} B_w^i, \\ 8\omega_l^3 \frac{dB_w^i}{d\tau} &= -4\omega_l^3 \sigma_\Omega B_w^r - (\kappa k_w^S)^2 B_w^r - 8\omega_l^4 \xi_w B_w^i + 4\omega_l^2 \kappa k_w^S B_w^r + 2\omega_l^2 \kappa f_w^{amp} B_w^r. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение данной системы может быть представлено в виде

$$B_w^r = b_r e^{\gamma\tau}, \quad B_w^i = b_i e^{\gamma\tau}, \quad (6)$$

где b_r, b_i и γ — искомые амплитудные коэффициенты и характеристическое число.

Подстановка (6) в (5) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -8\omega_l^3 (\gamma + \omega_l \xi_w) b_r + \left[4\omega_l^3 \sigma_\Omega + (\kappa k_w^S)^2 - 4\omega_l^2 \kappa k_w^S + 2\omega_l^2 \kappa f_w^{amp} \right] b_i &= 0, \\ \left[-4\omega_l^3 \sigma_\Omega - (\kappa k_w^S)^2 + 4\omega_l^2 \kappa k_w^S + 2\omega_l^2 \kappa f_w^{amp} \right] b_r - 8\omega_l^3 (\gamma + \omega_l \xi_w) b_i &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

условие разрешимости которой имеет форму квадратного уравнения относительно γ . Корни этого уравнения, согласно (6) и (3), определяют характер динамического отклика резонатора при параметрическом возбуждении: наличие положительной вещественной части у параметров γ обозначает неустойчивость тривиального (нулевого) решения системы (2) и экспоненциальную раскачку параметрических колебаний. Таким образом, границы области параметрического резонанса в пространстве (σ_Ω, κ) могут быть найдены с помощью критерия Рауса — Гурвица и имеют вид

$$\begin{aligned} 4\kappa^2 [f_w^{amp}(\sigma_\Omega)]^2 \omega_l^4 - \kappa^4 [k_w^S(\sigma_\Omega)]^4 + 8\kappa^3 [k_w^S(\sigma_\Omega)]^3 \omega_l^2 - 16\kappa^2 [k_w^S(\sigma_\Omega)]^2 \omega_l^4 - \\ - 8\kappa^2 [k_w^S(\sigma_\Omega)]^2 \omega_l^3 \sigma_\Omega + 32\kappa k_w^S(\sigma_\Omega) \omega_l^5 \sigma_\Omega - 16\omega_l^6 \sigma_\Omega^2 - 64\xi_w^2 \omega_l^8 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Резонансные кривые (зависимости амплитуды установившихся изгибных колебаний от частоты лазерного воздействия) могут быть построены путем анализа положений равновесия для системы в медленных амплитудно-фазовых переменных при учете нелинейных слагаемых, отражающих факт увеличения изгибной жесткости резонатора при росте амплитуды колебаний за счет сопротивления балки осевому удлинению [20].

Опуская промежуточные выкладки, приходим к следующему виду уравнения для нахождения резонансных кривых в пространстве (a_w, σ_Ω) для различных значений параметра интенсивности воздействия κ :

$$(8\xi_w \omega_l^4)^2 + \left\{ 4\omega_l^3 \sigma_\Omega + [\kappa k_w^S(\sigma_\Omega)]^2 - 4\omega_l^2 \kappa k_w^S(\sigma_\Omega) + 18B_2 \omega_l^2 a_w^2 \right\}^2 = [2\omega_l^2 \kappa f_w^{amp}(\sigma_\Omega)]^2. \quad (9)$$

3. Результаты моделирования. В настоящем разделе представлены результаты моделирования на основе полученных аналитических решений для конкретной геометрической конфигурации резонатора при вариации физических параметров лазерного термооптического воздействия.

Фиксированные геометрические и физико-механические параметры микромеханического резонатора, изготовленного из кремния, приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения фиксированных параметров термооптического воздействия.

Перейдем к представлению результатов выполненных расчетов. На рис. 2–3 приведены зависимости амплитуд статической и динамической (гармонической) компонент мощности объемного тепловыделения на поверхности резонатора от величины отношения периода следования импульсов к длительности одиночного импульса.

Таблица 1. Геометрические и физико-механические характеристики резонатора

| Параметр | Значение | Единицы измерения |
|--|-----------------------|---------------------------------|
| Модуль Юнга E | 169×10^9 | Pa |
| Коэффициент Пуассона ν | 0.22 | — |
| Плотность ρ | 2330 | $кг/м^3$ |
| Коэффициент линейного температурного расширения α_T | 2.59×10^{-6} | K^{-1} |
| Теплопроводность k | 156 | $Вт/(м \cdot K)$ |
| Удельная теплоемкость c | 713 | $Дж \cdot кг^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| Коэффициент конвекции h_1 | 10 | $Вт/(м^2 \cdot K)$ |
| Толщина микробалки h | 5 | мкм |
| Ширина микробалки b | 50 | мкм |
| Длина микробалки L | 1000 | мкм |

Таблица 2. Параметры термооптического воздействия

| Параметр | Значение |
|-----------|----------|
| l | 1 |
| l_1 | 0 |
| l_2 | L |
| T_q/t_p | 100 |
| R_a | 0.9 |
| δ | 50 нм |

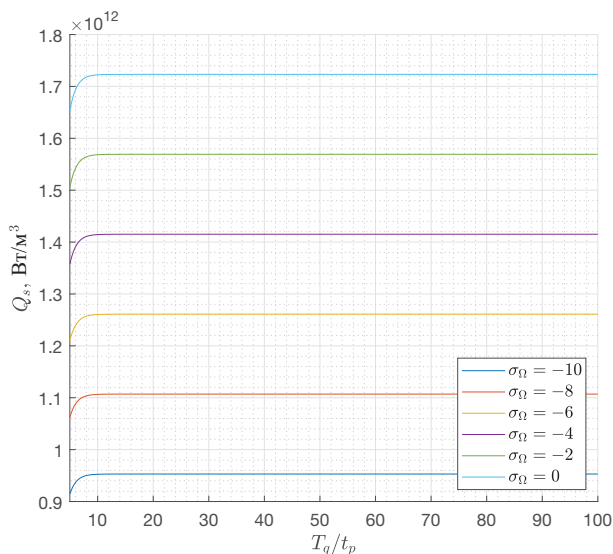


Рис. 2. Мощность статической компоненты объемного тепловыделения при изменении отношения периода следования импульсов к длительности одиночного импульса ($L_0 = 0.15$ Дж/м²).

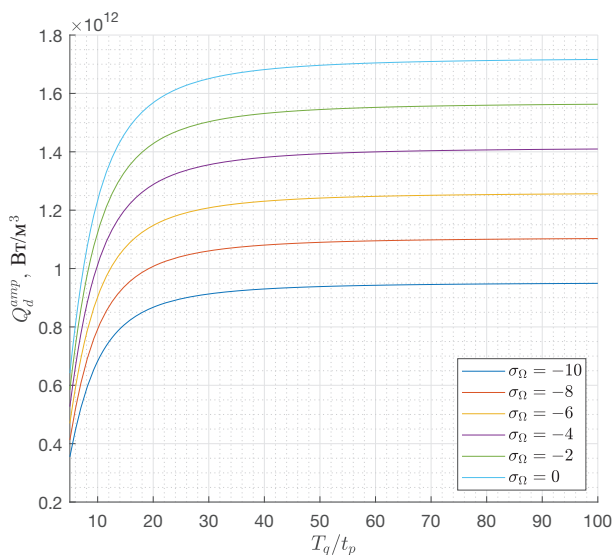


Рис. 3. Мощность гармонической компоненты объемного тепловыделения при изменении отношения периода следования импульсов к длительности одиночного импульса ($L_0 = 0.15$ Дж/м²).

Результаты приведены для нескольких значений безразмерного параметра частотной расстройки σ_Ω в области главного параметрического резонанса. Как видно из рисунков, мощность теплового лазерного воздействия существенно зависит от его частоты для рассмотренного диапазона значений параметра σ_Ω : с ростом частоты следования импульсов амплитуда воздействия увеличивается. Также наблюдается заметная зависимость величины объемного тепловыделения от соотношения между периодом следования импульсов и характерным временем одиночного импульса: с ростом этого отношения амплитуда воздействия также растет, выходя на определенное предельное значение.

На рис. 4 показана зависимость отношения амплитуды гармонической компоненты теплового лазерного воздействия от его статической компоненты. Видно, что на характер этой зависимости не влияет величина частотной расстройки. При этом можно сделать вывод о целесообразности сообщения системе по возможности более коротких одиночных импульсов, так как это приводит к росту эффективности возбуждения механических колебаний резонатора (за счет увеличения относительной амплитуды гармонической компоненты теплового воздействия).

На рис. 5 показано распределение по длине резонатора средней по толщине статической компоненты температуры при изменении параметра частотной расстройки для значения интенсивности лазерного излучения $L_0 = 0.15$ Дж/м². Как видно из рисунка, для рассмотренных геометрических и физико-механических параметров резонатора и параметров лазерного воздействия температура чувствительного элемента не превышает 15 °С. Наблюдается близкий к линейному рост температуры при увеличении частоты следования лазерных импульсов.

Одним из важных факторов при проектировании резонаторов с термооптическим возбуждением является недопущение потери микробалкой упругой устойчивости под действием температурных нагрузок. Анализ этого сценария может быть

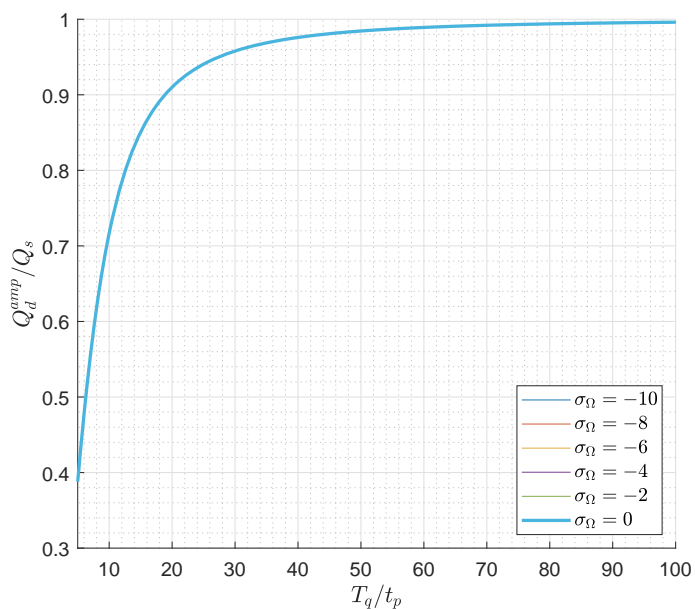


Рис. 4. Соотношение между гармонической и статической компонентами объемного тепловыделения.

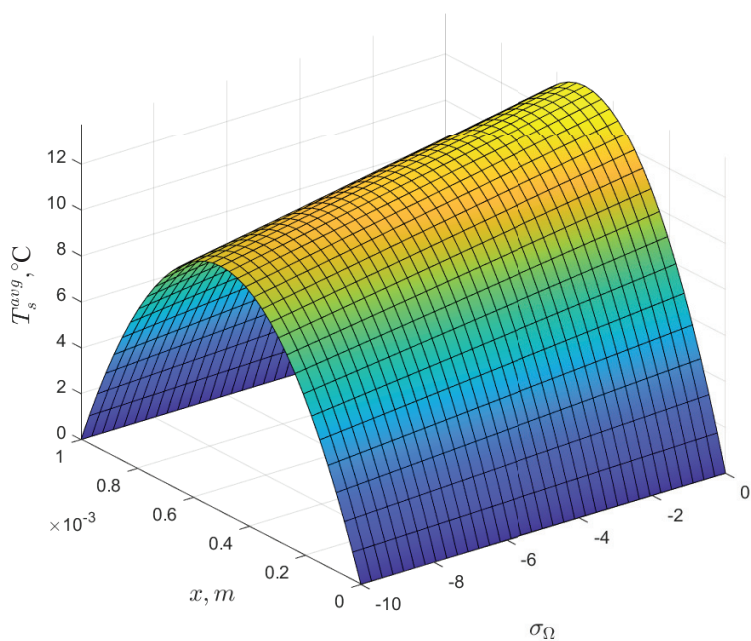


Рис. 5. Распределение средней по толщине статической компоненты температуры при изменении параметра частотной расстройки ($L_0 = 0.15$ Дж/м²).

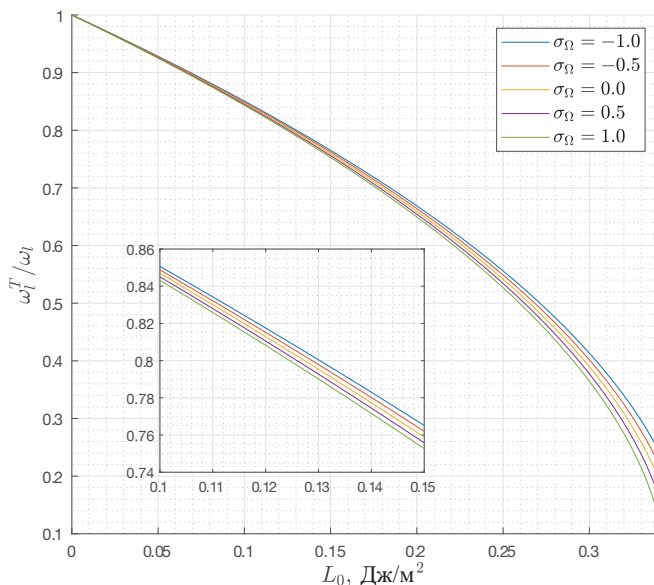


Рис. 6. Зависимость относительной частоты свободных изгибных колебаний от интенсивности лазерного воздействия.

проведен путем нахождения зависимости низшей (в рассматриваемом случае — рабочей) частоты изгибных колебаний резонатора от параметров интенсивности L_0 и частоты σ_Ω лазерного излучения. Соответствующие результаты приведены на рис. 6. Наблюдается ожидаемое стремление к нулю частоты изгибных колебаний, отнесенной к ненапряженному состоянию, с ростом интенсивности воздействия: потеря устойчивости по сценарию дивергенции происходит при значениях $L_0 = 0.34 \text{ Дж/м}^2$. Величина частотной расстройки несущественно влияет на характер исследуемой зависимости, увеличивая степень своего влияния при приближении к зоне потери устойчивости.

Примечательным и отмеченным ранее свойством термооптически возбуждаемых резонаторов является зависимость их механических параметров не только от амплитуды, но и от частоты лазерного воздействия. В явной форме это показано на рис. 7, где приведена зависимость размерной собственной частоты микробалочного резонатора от частоты внешнего воздействия при различных значениях его интенсивности. Как видно из рисунка, соответствующая зависимость является близкой к линейной с убыванием при росте Ω . Кроме того, пунктирной линией на рисунке отмечена прямая $\Omega = 2f_l^T$, характеризующая точное выполнение условия главного параметрического резонанса. Результаты показывают ожидаемое уменьшение резонансной частоты с ростом интенсивности излучения.

На рис. 8 показано распределение средней по толщине гармонической компоненты температуры при изменении параметра частотной расстройки ($L_0 = 0.15 \text{ Дж/м}^2$). Наблюдается локализация областей наибольшего динамического изменения температуры вблизи концов микробалки. Также следует отметить высокие градиенты температуры в указанных областях, что имеет большое значение с точки зрения возбуждения продольных колебаний резонатора по антисимметричным (чет-

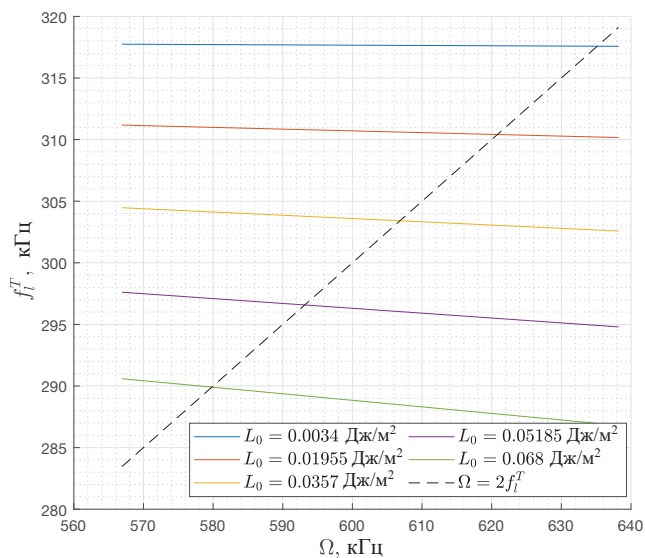


Рис. 7. Зависимость частоты свободных изгибных колебаний от частоты следования лазерных импульсов.

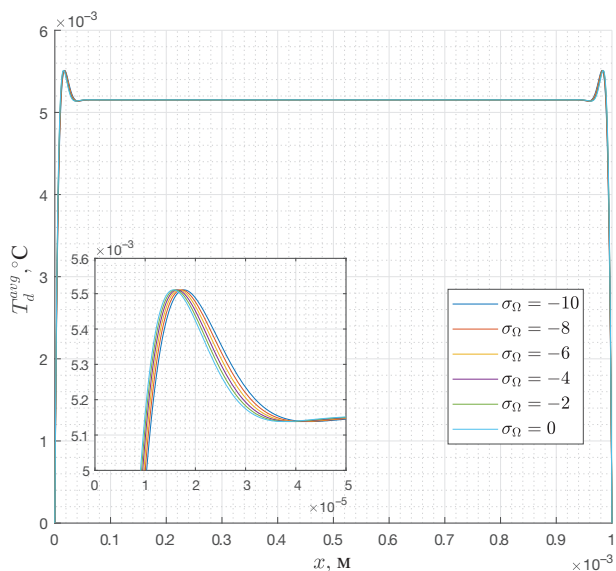


Рис. 8. Распределение средней по толщине гармонической компоненты температуры при изменении параметра частотной расстройки ($L_0 = 0.15$ Дж/м²).

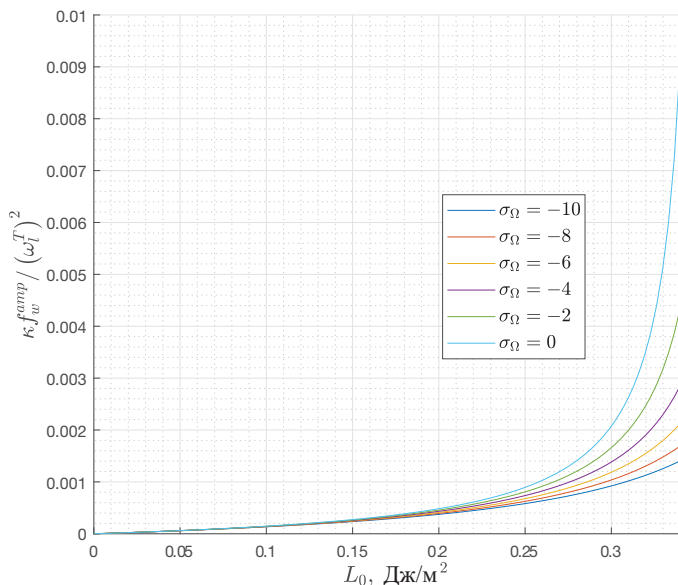


Рис. 9. Относительная амплитуда параметрического возбуждения как функция мощности лазерного излучения.

ным) стержневым формам. Подчеркнем, что на настоящем этапе эффект взаимодействия продольных и изгибных форм колебаний не рассматривается, и подробное исследование этого фактора составляет предмет дальнейших исследований.

На рис. 9 приведена зависимость относительной амплитуды параметрического возбуждения от интенсивности лазерного излучения для различных значений параметра частотной расстройки σ_Ω . С увеличением параметра L_0 наблюдается близкий к экспоненциальному рост относительной амплитуды возбуждения, что вызвано как непосредственным увеличением модальной нагрузки κ_w^{amp} , так и стремлением к нулю безразмерной частоты возбуждаемых изгибных колебаний ω_l^T за счет синхронного роста статического нагрева резонатора.

На рис. 10 приведена зависимость относительной амплитуды параметрического возбуждения от частоты следования лазерных импульсов для различных значений интенсивности лазерного излучения L_0 . Наблюдается близкий к линейному рост относительной амплитуды возбуждения при увеличении частоты излучения.

Перейдем к непосредственному построению диаграмм главного параметрического резонанса в соответствии с уравнением (8). Классическая форма представления подобных диаграмм типа Айнса — Стретта в настоящем случае является не вполне удобной по причине существенного смещения «влево» частотной зоны раскачки при изменении амплитуды нагружения и относительной узости данной зоны. В связи с этим на рис. 11 характеристика параметрического резонанса выполнена в нестандартной форме: сплошной синей линией показана зависимость средней частоты зоны раскачки от интенсивности излучения L_0 , красной — ширина этой зоны; дополнительно пунктирной линией отмечено изменение рабочей изгибной частоты колебаний f_l^T . Как видно из рисунка, с ростом интенсивности воздействия ширина зоны раскачки растет, что соответствует общим свойствам параметрически возбуждаемых систем; средняя частота зоны ожидаемо падает с ростом L_0 , равно

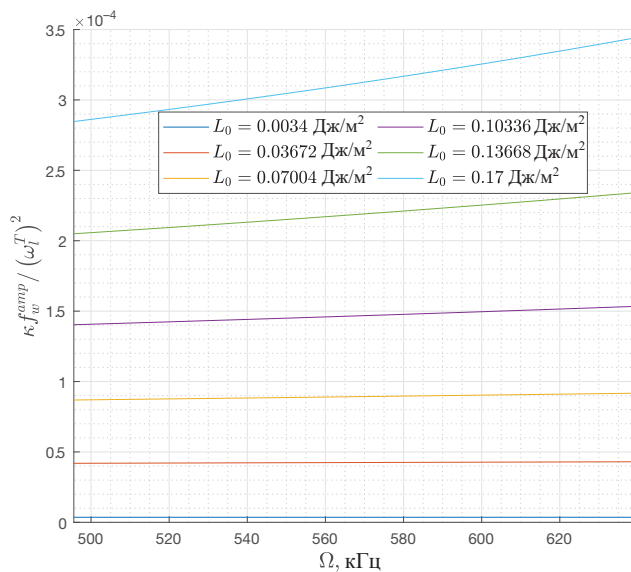


Рис. 10. Относительная амплитуда параметрического возбуждения как функция частоты следования лазерных импульсов.

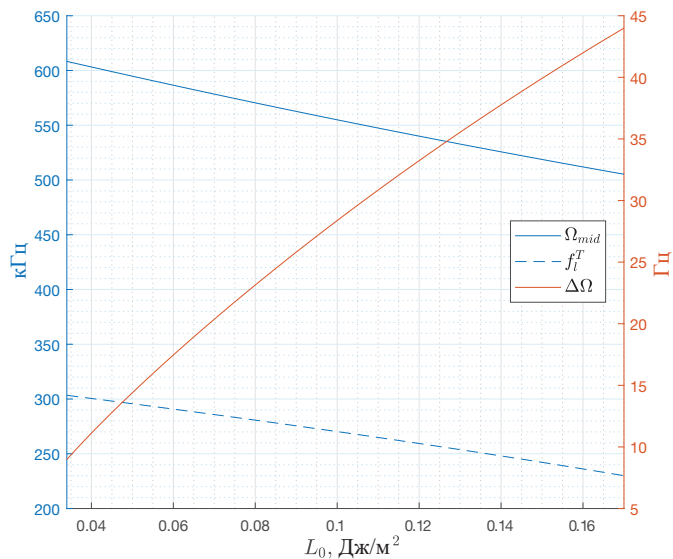


Рис. 11. Параметры зоны главного параметрического резонанса при $Q_w = 10^5$.

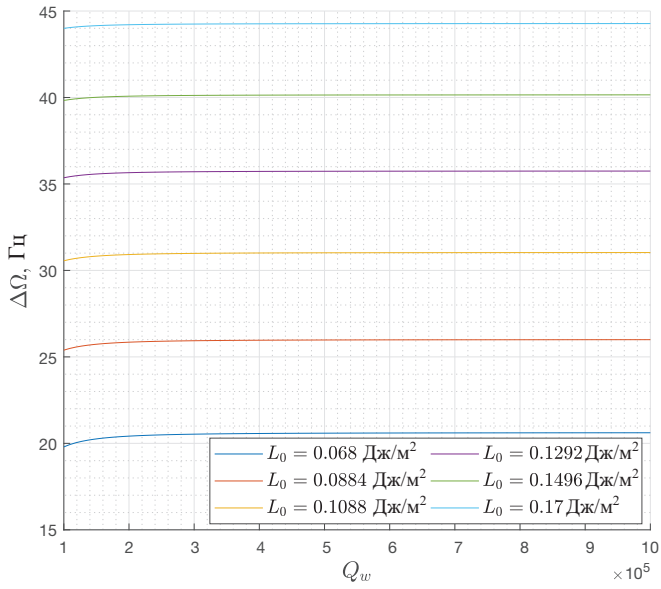


Рис. 12. Ширина зоны главного параметрического резонанса при вариации добротности резонатора и интенсивности лазерного излучения.

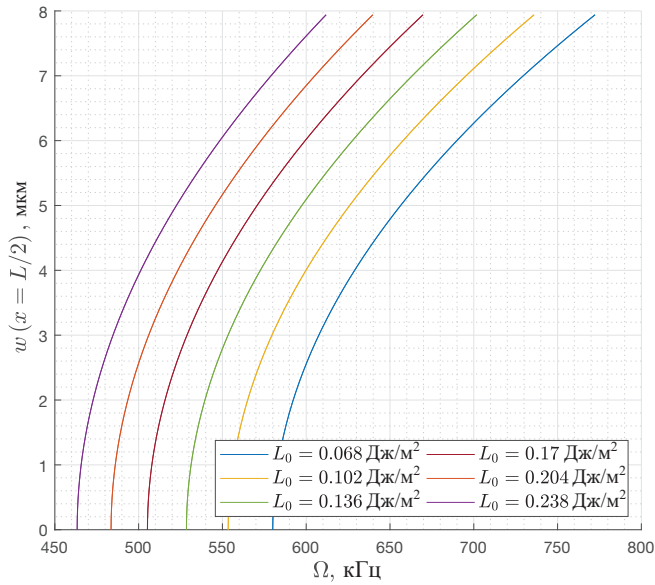


Рис. 13. Резонансные кривые для различных значений интенсивности лазерного излучения.

как и собственная частота f_i^T . Приведенные результаты получены для значения механической добротности резонатора $Q_w = 10^5$; с уменьшением добротности ширина зоны раскачки стремительно сокращается и далее исчезает, что отражает известную особенность «отрыва» зон параметрического резонанса от частотной оси при классическом изображении подобных диаграмм.

Характер зависимости ширины зоны раскачки колебаний от параметра добротности Q_w показан на рис. 12. Как видно из рисунка, рассматриваемые кривые достаточно быстро выходят на горизонтальную асимптоту.

Нахождение зоны раскачки параметрических колебаний позволяет выполнить непосредственный анализ характера этих колебаний в геометрически нелинейной постановке в соответствии с уравнением (9). На рис. 13 приведены резонансные кривые в размерном виде для ряда значений параметра L_0 . Приведенные результаты получены для значения добротности $Q_w = 10^5$. Как видно из рисунка, в системе наблюдается характерная «жесткая» нелинейность резонансного режима. Степень «затягивания» резонансных кривых очень велика по сравнению с шириной зоны раскачки колебаний. При рассмотренных значениях параметров системы наблюдается возможность возбуждения колебаний с амплитудой, сопоставимой с толщиной микробалочного резонатора и превышающей ее, что говорит о потенциальной эффективности предлагаемого принципа возбуждения колебаний чувствительных элементов микросистемной техники в целях высокоточных измерений.

4. Заключение. В ходе работ была создана односторонне связанная термоупругая модель механически нелинейных колебаний микробалочного резонатора при гармоническом лазерном термооптическом воздействии. Найдено аналитическое решение задачи теплопроводности для установившегося гармонического распределения температуры в объеме резонатора. Определены статические и динамические компоненты силовых факторов температурной природы — температурных осевой силы и изгибающего момента. Выполнен анализ зависимости частоты свободных колебаний по рабочей изгибной балочной форме от параметров интенсивности и частоты лазерного воздействия. Определены критические тепловые нагрузки, приводящие к потере подвижным элементом своей упругой устойчивости. С помощью метода Галеркина выполнена дискретизация нелинейных связанных уравнений в частных производных, описывающих продольно-изгибные колебания резонатора. С применением асимптотического метода многих масштабов получено приближенное аналитическое решение для задачи нелинейной динамики системы в условиях главного параметрического резонанса. Аналитически найдены зоны раскачки параметрических колебаний в пространстве параметров термооптического воздействия. Построены резонансные характеристики системы. Результаты исследования показывают принципиальную возможность и потенциальную эффективность лазерной генерации механических колебаний чувствительных элементов широкого класса микромеханических резонансных сенсоров с частотным или амплитудным выходом в целях высокоточных измерений различных физических величин (задачи инерциальной навигации, детектирования массы осаждаемых нано-микрочастиц и др.), а также в целях обработки и преобразования высокочастотных сигналов.

Литература

1. Vorobyev R. I., Sergeichev I. V., Karabutov A. A., Mironova E. A., Savateeva E. V., Akhatov I. Sh. Application of the Optoacoustic Method to Assess the Effect of Voids on the Crack Resistance of Structural Carbon Plastics. *Acoust. Phys.* **66**, 132–136 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>

2. Yan G., Raetz S., Chigarev N., Blondeau Ja., Gusev V.E., Tournat V. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes. *NDT & E International* **116**, 102323 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>
3. Pan Yu., Rossignol C., Audoin B. Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; Application to the elastic constants measurement. *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (4), 1537–1545 (2004). <https://doi.org/10.1121/1.1651191>
4. Chow G., Uchaker E., Cao G., Wang Ju. Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media. *Mechanics of Materials* **91**, 333–342 (2015). <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2015.10.005>
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser. *Optical Materials Express* **2**, 789–798 (2012). <https://doi.org/10.1364/OME.2.000789>
6. Otsuka P.H., Mezil S., Matsuda O., Tomoda M., Maznev A.A., Gan T., Fang N., Boechler N., Gusev V.E., Wright O.B. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New Journal of Physics* **20**, 013026 (2018). <https://doi.org/10.1088/1367-2630/AA9298>
7. Li C., Guan G., Zhang F., Nabi G., Wang R.K., Huang Z. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application. *Biomedical Optics Express* **5** (5), 1403–1418 (2014). <https://doi.org/10.1364/BOE.5.001403>
8. Phinney L.M., Klody K.A., Sackos Jo. T., Walraven Je. A. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation. Reliability, Packaging, Testing and Characterization of MEMS/MOEMS IV. *Proceedings of MOEMS-MEMS Micro and Nanofabrication*, 2005, San Jose, 5716, 81–88 (2005). <https://doi.org/10.1117/12.594408>
9. Serrano J.R., Phinney L.M. Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **17** (1), 166–174 (2008). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>
10. Mai A., Bunce C., Hübner R., Pahner D., Dauderstädt U.A. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS* **15** (3), 035502 (2016). <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>
11. Zook J.D., Burns D.W., Herb W.R., Guckel H., Kang J.W., Ahn Y. Optically excited self-resonant microbeams. *Sensors and Actuators A: Physical* **52** (1), 92–98 (1996). [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2)
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator. *Phys. Rev. Applied* **7**, 064002 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>
13. Dolleman R. J., Hourri S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H.S.J., Steeneken P.G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes. *Sci. Rep.* **8**, 9366 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
14. Zehnder A.T., Rand R.H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **102**, 92–100 (2018). <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>
15. Bhaskar A., Shayak B., Rand R.H., Zehnder A.T. Synchronization characteristics of an array of coupled MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **128**, 103634 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103634>
16. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Privalova O.V., Shtukin L.V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam in coupled electric and thermal fields. *Dokl. Phys.* **63**, 342–347 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>
17. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Privalova O.V., Semenov B.N., Shtukin L.V. Bernoulli—Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior. *Dokl. Phys.* **64**, 185–188 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>
18. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Privalova O.V., Shtukin L.V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam under the action of a moving thermal source. *Dokl. Phys.* **65**, 67–71 (2020). <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>
19. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS. *Journal of Sound and Vibration* **509**, 116–247 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>
20. Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. Нелинейное модальное взаимодействие продольных и изгибных колебаний балочного резонатора при периодиче-

ском тепловом нагружении. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 317–337 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.212>

21. Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. I. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (2), 315–333 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212>

Статья поступила в редакцию 8 октября 2022 г.;
доработана 4 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — д-р физ.-мат. наук, проф.; n.morozov@spbu.ru
Индейцев Дмитрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф. (1948–2022)
Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц.; lukin_av@spbstu.ru
Попов Иван Алексеевич — ведущий инженер; popov_ia@spbstu.ru
Штукин Лев Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; lvtvsh4749@gmail.com

On opto-thermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. II*

N. F. Morozov^{1,2}, *D. A. Indeitsev*^{† 2,3}, *A. V. Lukin*³, *I. A. Popov*³, *L. V. Shtukin*^{2,3}

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoi pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, ul. Politekhmicheskaja, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. On opto-thermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 632–649. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.404> (In Russian)

The present article is the second part of the work devoted to investigation of the nonlinear dynamics of parametrically excited flexural vibrations of a clamped-clamped microbeam — the basic sensitive element of a promising class of microsensors of various physical quantities — under laser thermo-optical action in the form of periodically generated pulses acting on a certain part of the surface of the beam element. The fundamental technical feasibility of laser generation of parametric oscillations of high-Q microresonators without the implementation of scenarios for the loss of elastic stability of the sensitive element or its unacceptable heating is shown. The nature of the zone of the main parametric resonance is analyzed analytically. The resonant characteristics of the system are constructed in a geometrically non-linear formulation corresponding to the Bernoulli — Euler beam model.

Keywords: nonlinear dynamics, parametric oscillations, Bernoulli — Euler beam, modal interaction, laser-induced opto-thermal excitation.

*This work was supported by a grant from the Council for Grants of the President of the Russian Federation for State Support of Young Russian Scientists МК-4577.2022.1.1.

See Part I: Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. On opto-thermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. I. *Vestnik of Saint Petersburg University Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, p. 315–333. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212> (In Russian)

References

1. Vorobyev R. I., Sergeichev I. V., Karabutov A. A., Mironova E. A., Savateeva E. V., Akhatov I. Sh. Application of the Optoacoustic Method to Assess the Effect of Voids on the Crack Resistance of Structural Carbon Plastics. *Acoust. Phys.* **66**, 132–136 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>
2. Yan G., Raetz S., Chigarev N., Blondeau Ja., Gusev V. E., Tournat V. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes. *NDT & E International* **116**, 102323 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>
3. Pan Yu., Rossignol C., Audoin B. Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; Application to the elastic constants measurement. *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (4), 1537–1545 (2004). <https://doi.org/10.1121/1.1651191>
4. Chow G., Uchaker E., Cao G., Wang Ju. Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media. *Mechanics of Materials* **91**, 333–342 (2015). <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2015.10.005>
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser. *Optical Materials Express* **2**, 789–798 (2012). <https://doi.org/10.1364/OME.2.000789>
6. Otsuka P. H., Mezil S., Matsuda O., Tomoda M., Maznev A. A., Gan T., Fang N., Boechler N., Gusev V. E., Wright O. B. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New Journal of Physics* **20**, 013026 (2018). <https://doi.org/10.1088/1367-2630/AA9298>
7. Li C., Guan G., Zhang F., Nabi G., Wang R. K., Huang Z. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application. *Biomedical Optics Express* **5** (5), 1403–1418 (2014). <https://doi.org/10.1364/BOE.5.001403>
8. Phinney L. M., Klody K. A., Sackos Jo. T., Walraven Je. A. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation. Reliability, Packaging, Testing and Characterization of MEMS/MOEMS IV. *Proceedings of MOEMS-MEMS Micro and Nanofabrication*, 2005, San Jose, 5716, 81–88 (2005). <https://doi.org/10.1117/12.594408>
9. Serrano J. R., Phinney L. M. Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **17** (1), 166–174 (2008). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>
10. Mai A., Bunce C., Hübner R., Pahner D., Dauderstädt U. A. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS* **15** (3), 035502 (2016). <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>
11. Zook J. D., Burns D. W., Herb W. R., Guckel H., Kang J. W., Ahn Y. Optically excited self-resonant microbeams. *Sensors and Actuators A: Physical* **52** (1), 92–98 (1996). [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2)
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator. *Phys. Rev. Applied* **7**, 064002 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>
13. Dolleman R. J., Hourri S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H. S. J., Steeneken P. G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes. *Sci. Rep.* **8**, 9366 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
14. Zehnder A. T., Rand R. H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **102**, 92–100 (2018). <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>
15. Bhaskar A., Shayak B., Rand R. H., Zehnder A. T. Synchronization characteristics of an array of coupled MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **128**, 103–634 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103634>
16. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam in coupled electric and thermal fields. *Dokl. Phys.* **63**, 342–347 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>
17. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Semenov B. N., Shtukin L. V. Bernoulli—Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior. *Dokl. Phys.* **64**, 185–188 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>
18. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam under the action of a moving thermal source. *Dokl. Phys.* **65**, 67–71 (2020). <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>

19. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS. *Journal of Sound and Vibration* **509**, 116247 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>

20. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear modal interaction between longitudinal and bending vibrations of a beam resonator underperiodic thermal loading. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 317–337 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.212> (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 2, 212–228 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106345412202008X>].

21. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. On optothermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. I. *Vestnik of Saint Petersburg University Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 2, 315–333 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212> (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **56**, iss. 2, 231–244 (2023) <https://doi.org/10.1134/S1063454123020127>].

Received: October 8, 2022

Revised: May 4, 2023

Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Nikita F. Morozov — n.morozov@spbu.ru

Dmitriy A. Indeitsev (1948–2022)

Alexey V. Lukin — lukin_av@spbstu.ru

Ivan A. Popov — popov_ia@spbstu.ru

Lev V. Shtukin — lvtvsh4749@gmail.com