САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Бегун, Е.В. Васильева, Т.Е. Звягинцева, Ю.А. Ильин,
В.А. Плисс, А.А. Родионова

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2023

Печатается по решению кафедры дифференциальных уравнений и УМК математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Бегун Н.А., Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., Плисс В.А., Родионова А.А. Линейные дифференциальные уравнения. Линейные системы дифференциальных уравнений. Учебно-методическое пособие.

Данное пособие посвящено теории линейных дифференциальных уравнений высших порядков и теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Пособие предназначено для студентов второго курса математико-механического факультета СПбГУ, обучающихся по специальностям «Фундаментальная математика», «Фундаментальная механика», «Прикладная математика, программирование и искусственный интеллект», «Математика и компьютерные науки», «Технологии программирования», «Механика и математическое моделирование», «Астрономия».

Пособие составлено на основе лекций по третьей части курса «Дифференциальные уравнения», рассчитанной на 16-20 часов (в соответствии с программой курса). Теоретический материал снабжен набором интересных задач, которые предлагаются читателю для самостоятельного решения.

Первая часть курса изложена в опубликованном в 2021 году пособии авторов «Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений», вторая часть – в опубликованном в 2022 году пособии авторов «Общая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений».

Курс «Дифференциальные уравнения» является базовым курсом для студентов вышеперечисленных специальностей. Большая часть материала пособия изложена по конспекту лекций, которые многие годы на математико-механическом факультете СПбГУ (до 1992 года ЛГУ) читал заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Пособие может быть использовано для проведения лекций, семинарских занятий и проверочных работ на математических, физических и других естественнонаучных факультетах высших учебных заведений.

Авторы:

Бегун Никита Андреевич, кандидат ф.-м.н., старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Васильева Екатерина Викторовна, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Звягинцева Татьяна Евгеньевна, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Ильин Юрий Анатольевич, кандидат ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Плисс Виктор Александрович, чл.-корр. РАН, доктор ф.-м.н, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений СПбГУ (с 1961 г. по 2019 г.);

Родионова Анастасия Александровна, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ.

Рецензенты:

Бибиков Юрий Николаевич, доктор ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений СПбГУ;

Иванов Борис Филиппович, кандидат ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД.

Содержание

Введение

Пособие составлено на основе третьей части лекций по базовому для учащихся практически всех специальностей математико-механического факультета СПбГУ курсу «Дифференциальные уравнения». Этот курс ежегодно читается на факультете студентам второго года обучения.

Первая и вторая части курса изложены в опубликованных ранее пособиях авторов «Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений» [1] и «Общая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений» [2].

Большая часть материала данного пособия основана на конспекте лекций, которые многие годы читал на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, профессор Виктор Александрович Плисс.

Теоретический материал пособия изложен в двух главах.

Первая глава посвящена линейным дифференциальным уравнениям n-го порядка. Она состоит из семи параграфов.

В первых трех параграфах изложены основы общей теории линейных однородных уравнений, введено понятие фундаментальной системы решений и общего решения однородного уравнения. В четвертом и пятом параграфах изучены линейные неоднородные уравнения. Здесь определено общее решение такого уравнения и изложен метод Лагранжа вариации произвольных постоянных, позволяющий найти общее решение неоднородного уравнения, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного.

Заключительные два параграфа первой главы посвящены линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Такие уравнения играют важную роль в решении различных прикладных задач.

В шестом параграфе с помощью метода Эйлера построена фундаментальная система решений однородного уравнения, в седьмом параграфе изложен метод неопределенных коэффициентов, позволяющий найти решение неоднородного уравнения, правая часть которого является функцией специального вида.

Во второй главе построена теория систем линейных дифференциальных уравнений. Эта глава включает в себя десять параграфов.

Первый параграф является вспомогательным, он содержит основные сведения из теории матриц, которые используются в дальнейшем.

В следующих трех параграфах изложены основы общей теории линейных однородных систем, определены фундаментальная система решений и общее решение однородной системы. Пятый параграф посвящен формулам Лиувилля, которые связывают вронскиан (или определитель Вронского) решений линейной однородной системы с коэффициентами этой системы. В шестом параграфе рассматриваются линейные неоднородные системы, определено общее решение такой системы и изложен метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Параграфы 7–9 посвящены линейным системам с постоянными коэффициентами. В седьмом параграфе изложен аналог метода Эйлера построения фундаментальной системы решений такой системы, в восьмом параграфе введено понятие экспоненты от матрицы и доказан матричный метод интегрирования однородных систем (с постоянными коэффициентами). В параграфе девять изучено асимптотическое поведение решений этой системы при t, стремящемся к бесконечности. Эти вопросы чрезвычайно важны при решении целого ряда прикладных проблем.

Заключительный десятый параграф посвящен изучению свойств линейной однородной системы с периодическими коэффициентами, которая так же часто встречается при решении прикладных задач. В этом параграфе введено понятие логарифма от матрицы, доказаны теорема о мультипликаторах системы и теорема Флоке, доказана теорема Ляпунова о приводимости однородной периодической системы к системе с постоянными коэффициентами.

Нумерация формул в каждом из параграфов автономна. Если мы ссылаемся на какую-либо формулу из другого параграфа, мы указываем номер формулы и номер параграфа.

В заключение вдумчивому читателю предлагается набор интересных и разнообразных теоретических и практических задач для самостоятельного решения и список литературы для самостоятельной работы.

Список литературы состоит из двух разделов, в первом из которых указана основная литература, а во втором – дополнительная.

К основной литературе относятся опубликованные ранее (и упомянутые выше) пособия авторов [1] и [2], классический учебник Ю.Н. Бибикова «Курс обыкновенных дифференциальных уравнений» и сборник задач по дифференциальным уравнениям А.Ф. Филиппова.

Список дополнительной литературы состоит в основном из классических широко известных учебников по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и содержит 12 наименований.

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\dot{x} + p_n(t)x = q(t), \tag{1}$$

где $x = x(t)$ – искомая неизвестная функция, $x^{(k)} = d^k x / dt^k$, все функции $p_k(t)$ и функция $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k = 1, 2, \ldots, n$.

Если $q(t) \equiv 0$ на (a,b), то уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае уравнение (1) – *неоднородное*.

Перейдем от уравнения к нормальной системе по общему правилу, описанному в [2].

Положим

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x}, \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2,\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3, \ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n,$$

и, как следует из (1),

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = -p_1(t)x_n - \ldots - p_{n-1}(t)x_2 - p_n(t)x_1 + q(t).$$

Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \ldots - p_1(t)x_n + q(t). \end{cases} \tag{2}$$

Как показано в последнем параграфе пособия [2], все решения этой системы продолжимы на интервал (a,b), поэтому и все решения уравнения (1) продолжимы на (a,b). В дальнейшем будем под решением уравнения (1) понимать решение, определенное на интервале (a,b).

Пусть $t_0 \in (a,b)$, $x_0 = (x_{10},...,x_{n0})^T \in R^n$. Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом:

$$t = t_0,\ \ x_1 = x_{10},\ \ x_2 = x_{20},\ \ \ldots,\ \ x_n = x_{n0}, \tag{3}$$

поэтому задача Коши для уравнения (1) имеет вид:

$$t = t_0,\ \ x = x_{10},\ \ \dot{x} = x_{20},\ \ \ldots,\ \ x^{(n-1)} = x_{n0}. \tag{4}$$

Решить задачу Коши (1), (4) означает: найти решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) такое, что $\varphi(t_0) = x_{10}$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_{20}$, …, $\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n0}$.

Правые части уравнений системы (2) непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x_k (для всех $k = 1,2,...,n$) в области

$$G = \left\{ (t, x_1,...,x_n) : t \in (a,b),\ |x_k| < +\infty,\ k = 1,2,...,n \right\},$$

и, следовательно, любая задача Коши (2), (3) имеет единственное решение. Поэтому и задача Коши (4) для уравнения (1) имеет единственное решение, определенное на интервале (a,b).

Обозначим левую часть уравнения (1) через $L(x)$.

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)},\ \text{где}\ p_0(t) \equiv 1,\ x^{(0)} = x.$$

Замечание. $L(x)$ есть линейный дифференциальный оператор, то есть для любых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, определенных на (a,b), и произвольных констант c_1, c_2 верно равенство

$$L\left(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\right) = c_1 L\left(x_1(t)\right) + c_2 L\left(x_2(t)\right).$$

§1. Основное свойство решений линейного однородного уравнения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0. \tag{1}$$

Теорема. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ – решения уравнения (1). Тогда функция

$$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_m\varphi_m(t),$$

где c_1, $c_2,\ldots$, c_m – произвольные вещественные (или комплексные) числа, также есть решение уравнения (1) на (a,b).

Доказательство теоремы 1. Заметим, что $\varphi_j(t)$ – решение уравнения (1), то есть $L(\varphi_j(t))\equiv 0$ на интервале (a,b) для всех $j=1,2,\ldots,m$.

Следовательно,

$$L(\psi(t))=L\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\varphi_j(t)\right)=\sum_{j=1}^{m}c_jL(\varphi_j(t))=0,$$

и $\psi(t)$ – решение уравнения (1). Теорема доказана.

§2. Линейно независимые функции.

Определение 1. Функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$, непрерывные на интервале (a,b), называются *линейно зависимыми* на (a,b), если существуют постоянные c_1, $c_2,\ldots$, c_n, не все равные нулю, такие, что

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0 \tag{1}$$

на (a,b).

В противном случае функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$ называются *линейно независимыми* на (a,b).

Иными словами, непрерывные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$ линейно независимы на интервале (a,b), если из тождества (1) следует, что $c_k=0$ для всех $k=1,2,\ldots,n$.

Предположим, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$ непрерывно дифференцируемы $(n-1)$ раз на интервале (a,b). Составим определитель

$$W(t)=W_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n}(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t)\\ \dot\varphi_1(t) & \dot\varphi_2(t) & \ldots & \dot\varphi_n(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}. \tag{2}$$

Определение 2. Определитель (2) называется *определителем Вронского* для системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ на интервале (a,b) или *вронскианом*.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ непрерывно дифференцируемы $(n-1)$ раз на интервале (a,b) и линейно зависимы. Тогда $W(t)\equiv 0$ на (a,b).

Доказательство теоремы 1. По условию теоремы, существуют такие постоянные c_1, $c_2,\ldots,$ c_n, не все равные нулю, что на (a,b) выполнено тождество (1). Продифференцируем это тождество $(n-1)$ раз и составим систему тождеств:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0, \\ c_1\dot{\varphi}_1(t)+c_2\dot{\varphi}_2(t)+\ldots+c_n\dot{\varphi}_n(t)\equiv 0, \\ \ldots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+c_2\varphi_2^{(n-1)}(t)+\ldots+c_n\varphi_n^{(n-1)}(t)\equiv 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для произвольного фиксированного $t\in(a,b)$ рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t)+z_2\varphi_2(t)+\ldots+z_n\varphi_n(t)=0, \\ z_1\dot{\varphi}_1(t)+z_2\dot{\varphi}_2(t)+\ldots+z_n\dot{\varphi}_n(t)=0, \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t)$ для функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ в точке $t\in(a,b)$. Согласно (3), система (4) имеет ненулевое решение $z_1=c_1$, $z_2=c_2,\ldots,$ $z_n=c_n$, поэтому определитель $W(t)$ системы (4) равен нулю. Из произвольности t следует, что $W(t)\equiv 0$ на (a,b). Теорема доказана.

Замечание. Обратное к теореме 1 утверждение, вообще говоря, не верно. Это доказывает следующий пример.

Пример. Пусть $n=2$,

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}0, & \textit{если } -1<t\le 0,\\ t^2, & \textit{если } 0<t<1,\end{cases}\quad \varphi_2(t)=\begin{cases}t^2, & \textit{если } -1<t\le 0,\\ 0, & \textit{если } 0<t<1.\end{cases}$$

$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые на интервале $(-1,1)$ функции,

$W\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right)=\begin{vmatrix}0 & t^2\\ 0 & 2t\end{vmatrix}$, если $-1<t\le 0$, и $W\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\right)=\begin{vmatrix}t^2 & 0\\ 2t & 0\end{vmatrix}$, если $0<t<1$. Следовательно, $W(t)\equiv 0$ на $(-1,1)$.

Покажем, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независимы на $(-1,1)$.

Составим тождество

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)\equiv 0. \tag{5}$$

Положим сначала $t=1/2$ в (5), получим: $c_1=0$. Положим теперь $t=-1/2$ в (5), и получим: $c_2=0$. Таким образом, из тождества (5) следует, что $c_1=c_2=0$, и функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независимы на $(-1,1)$.

Рассмотрим теперь линейное однородное уравнение

$$L(x)=0, \tag{6}$$

где $L(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}p_k(t)x^{(n-k)}$, $p_0(t)\equiv 1$, $x^{(0)}=x$, функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b) для всех $k=1,2,...,n$.

Если $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – решения уравнения (6), то верно более сильное утверждение, чем обратное к теореме 1.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – решения уравнения (6).

Если существует точка $t_0\in(a,b)$ такая, что $W(t_0)=0$, то функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0)+z_2\varphi_2(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n(t_0)=0, \\ z_1\dot{\varphi}_1(t_0)+z_2\dot{\varphi}_2(t_0)+\ldots+z_n\dot{\varphi}_n(t_0)=0, \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)=0$. Поэтому система (7) имеет ненулевое решение $z_1=c_1$, $z_2=c_2,\ldots,$ $z_n=c_n$.

Положим

$$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t). \tag{8}$$

$x=\psi(t)$ – решение уравнения (6), согласно основному свойству решений линейного однородного уравнения.

Поскольку c_1, $c_2,\ldots,$ c_n – решение системы (7), то

$$\psi(t_0)=0,\ \dot{\psi}(t_0)=0,\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t_0)=0,$$

то есть $x=\psi(t)$ – решение задачи Коши

$$t=t_0,\ \ x=0,\ \ \dot{x}=0,\ \ \ldots,\ \ x^{(n-1)}=0$$

для уравнения (6). Эту же задачу Коши решает тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (6).

Из теоремы единственности следует, что $\psi(t)\equiv 0$ на интервале (a,b). И из (8) вытекает линейная зависимость функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$, поскольку c_1, $c_2,\ldots,$ c_n – ненулевое решение системы (7). Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ – решения уравнения (6), $t\in(a,b)$. Тогда из теорем 1 и 2 следуют два утверждения.

Следствие 1. Если существует точка $t_0\in(a,b)$ такая, что $W(t_0)=0$, то $W(t)\equiv 0$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Следствие 2. Если существует точка $t_1\in(a,b)$ такая, что $W(t_1)\neq 0$, то $W(t)\neq 0$ для всех $t\in(a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b).

§3. Фундаментальная система решений.

Рассматриваем линейное однородное уравнение

$$L(x)=0, \tag{1}$$

где $L(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k(t)x^{(n-k)}$, $p_0(t)\equiv 1$, $x^{(0)}=x$, функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b) для всех $k=1,2,...,n$.

Определение 1. Набор $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$, состоящий из n линейно независимых решений уравнения (1), называется *фундаментальной системой решений* уравнения (1).

Теорема 1. Линейное однородное уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A=\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{n}$ – произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det A\neq 0$.

Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$, и поставим n задач Коши для уравнения (1):

$$t=t_0,\quad x=a_{1k},\quad \dot{x}=a_{2k},\quad \ldots,\quad x^{(n-1)}=a_{nk},$$

$k=1,2,...,n$.

Пусть $\varphi_k(t)$ – решение k-ой задачи Коши. Составим вронскиан для системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ на (a,b).

По нашему выбору задач Коши

$$W(t_0)=\begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \dot{\varphi}_2(t_0) & \cdots & \dot{\varphi}_n(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}=\det A\neq 0,$$

и по следствию 2 предыдущего параграфа, решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b), то есть образуют фундаментальную систему решений. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что существует бесконечно много фундаментальных систем решений уравнения (1).

Определение 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (1), c_1, c_2,…, c_n – произвольные константы.

Формула

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t). \qquad (2)$$

называется *формулой общего решения* уравнения (1), а правая часть формулы (2) называется *общим решением* уравнения (1).

Следующая теорема показывает, что формула (2) задает множество всех решений линейного однородного уравнения (1).

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений (1). Тогда

1) при любом наборе констант c_1, c_2,…, c_n формула (2) дает решение уравнения (1),

2) если $x = \xi(t)$ – решение (1), то существует такой набор постоянных $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$,…, $\bar{c}_n$, что $\xi(t) = \bar{c}_1\varphi_1(t) + \bar{c}_2\varphi_2(t) + \ldots + \bar{c}_n\varphi_n(t)$.

Доказательство теоремы 2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейного однородного уравнения.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0) + z_2\varphi_2(t_0) + \ldots + z_n\varphi_n(t_0) = \xi(t_0), \\ z_1\dot{\varphi}_1(t_0) + z_2\dot{\varphi}_2(t_0) + \ldots + z_n\dot{\varphi}_n(t_0) = \dot{\xi}(t_0), \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0) + \ldots + z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) = \xi^{(n-1)}(t_0). \end{cases} \qquad (3)$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0) \neq 0$, поскольку $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений (1). Следовательно, система (3) имеет единственное решение $z_1 = \bar{c}_1$, $z_2 = \bar{c}_2$,…, $z_n = \bar{c}_n$.

Положим

$$\eta(t) = \bar{c}_1\varphi_1(t) + \bar{c}_2\varphi_2(t) + \ldots + \bar{c}_n\varphi_n(t). \qquad (4)$$

$x=\eta(t)$ – решение уравнения (1), и, согласно (3)

$$\eta(t_0)=\xi(t_0),\ \dot{\eta}(t_0)=\dot{\xi}(t_0),\ \ldots,\ \eta^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0),$$

то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши

$$t=t_0,\quad x=\xi(t_0),\quad \dot{x}=\dot{\xi}(t_0),\quad \ldots,\quad x^{(n-1)}=\xi^{(n-1)}(t_0)$$

для уравнения (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

§4. Линейное неоднородное уравнение.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L(x)=q(t), \tag{1}$$

где $L(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k(t)x^{(n-k)}$, $p_0(t)\equiv 1$, $x^{(0)}=x$, функции $p_k(t)$, $k=1,2,...,n$, и $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b).

Соответствующее уравнению (1) однородное уравнение есть

$$L(x)=0. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $x=\psi(t)$ – решение уравнения (1), а $x=\varphi(t)$ – решение уравнения (2), тогда $x=\varphi(t)+\psi(t)$ - решение уравнения (1).

Доказательство теоремы 1. Функция $\psi(t)$ – решение уравнения (1), а $\varphi(t)$ – решение уравнения (2), это значит, что $L(\psi(t))\equiv q(t)$ и $L(\varphi(t))\equiv 0$ на интервале (a,b). Следовательно,

$$L(\varphi(t)+\psi(t))=L(\varphi(t))+L(\psi(t))=0+q(t)=q(t),$$

и функция $\varphi(t)+\psi(t)$ есть решение уравнения (1). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть функция $\psi(t)$ – решение уравнения (1), а набор функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2), c_1, c_2,…, c_n – произвольные константы.

Формула

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)+\psi(t). \qquad (3)$$

называется *формулой общего решения* уравнения (1), а правая часть формулы (3) называется *общим решением* уравнения (1).

Теорема 2. Пусть $\psi(t)$ – решение уравнения (1), а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда

1) при любом наборе констант c_1, $c_2,\ldots,$ c_n формула (3) дает решение уравнения (1),

2) если $x=\xi(t)$ – решение (1), то существует такой набор постоянных $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2,\ldots,$ $\overline{c}_n$, что $\xi(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t)+\psi(t)$.

Доказательство теоремы 2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейного однородного уравнения и теоремы 1.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} z_1\varphi_1(t_0)+z_2\varphi_2(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n(t_0)+\psi(t_0)=\xi(t_0), \\ z_1\dot\varphi_1(t_0)+z_2\dot\varphi_2(t_0)+\ldots+z_n\dot\varphi_n(t_0)+\dot\psi(t_0)=\dot\xi(t_0), \\ \ldots \\ z_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0)+z_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0)+\ldots+z_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0)+\psi^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0). \end{cases} \qquad (4)$$

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений (2). Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z_1=\overline{c}_1$, $z_2=\overline{c}_2,\ldots,$ $z_n=\overline{c}_n$.

Положим

$$\eta(t)=\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\ldots+\overline{c}_n\varphi_n(t)+\psi(t). \qquad (5)$$

$x=\eta(t)$ - решение уравнения (1), и, согласно (4)

$$\eta(t_0)=\xi(t_0),\ \dot\eta(t_0)=\dot\xi(t_0),\ \ldots,\ \eta^{(n-1)}(t_0)=\xi^{(n-1)}(t_0),$$

то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши

$$t=t_0,\quad x=\xi(t_0),\quad \dot x=\dot\xi(t_0),\quad \ldots,\quad x^{(n-1)}=\xi^{(n-1)}(t_0)$$

для уравнения (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t) \equiv \eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

Таким образом, решение линейного неоднородного уравнения (1) сводится к нахождению фундаментальной системы решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ линейного однородного уравнения (2) и какого-то одного решения $\psi(t)$ линейного неоднородного уравнения (1).

Если фундаментальная система решений уравнения (2) уже известна, то решение $\psi(t)$ уравнения (1) может быть найдено с помощью метода Лагранжа, который изложен в следующем параграфе.

§5. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L(x) = q(t), \tag{1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L(x) = 0, \tag{2}$$

$L(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(n-k)}$, $p_0(t) \equiv 1$, $x^{(0)} = x$, функции $p_k(t)$, $k = 1,2,...,n$, и $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b).

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2). Частное решение $x = \psi(t)$ уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \varphi_j(t), \tag{3}$$

где $u_j(t)$ – неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые на интервале (a,b), $j = 1,2,...,n$.

При этом

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \dot{\varphi}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t) \varphi_j(t).$$

Положим

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j(t) = 0, \tag{4}$$

следовательно,

$$\dot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\dot{\varphi}_j(t),$$

и

$$\ddot{\psi}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\ddot{\varphi}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\dot{\varphi}_j(t).$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\dot{\varphi}_j(t) = 0,$$

и аналогично далее будем полагать, что для всех $s = 1,...,(n-2)$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) = 0. \tag{5}$$

Тогда

$$\psi^{(s)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(s)}(t) \tag{6}$$

для всех $s = 1,...,(n-1)$, и

$$\psi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t). \tag{7}$$

Подставим функцию $\psi(t)$ вместе с ее производными в уравнение (1), используя формулы (3), (6), (7) и тот факт, что $L(\varphi_j(t)) \equiv 0$ на интервале (a,b).

$$L(\psi(t)) = L\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t)\left(\sum_{j=1}^{n} u_j(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\varphi_j^{(n-k)}(t)\right) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j(t)L(\varphi_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t).$$

Чтобы $x=\psi(t)$ было решением уравнения (1), должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\dot{u}_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t)=q(t). \tag{8}$$

Таким образом, функция $\psi(t)$, определенная формулой (3), является решением уравнения (1), если выполнены условия (4), (5), (8).

Соберем эти условия в одну систему.

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t)\varphi_1(t)+\dot{u}_2(t)\varphi_2(t)+\ldots+\dot{u}_n(t)\varphi_n(t)=0, \\ \dot{u}_1(t)\dot{\varphi}_1(t)+\dot{u}_2(t)\dot{\varphi}_2(t)+\ldots+\dot{u}_n(t)\dot{\varphi}_n(t)=0, \\ \ldots \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-2)}(t)+\dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-2)}(t)+\ldots+\dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-2)}(t)=0, \\ \dot{u}_1(t)\varphi_1^{(n-1)}(t)+\dot{u}_2(t)\varphi_2^{(n-1)}(t)+\ldots+\dot{u}_n(t)\varphi_n^{(n-1)}(t)=q(t). \end{cases} \tag{9}$$

При каждом $t\in(a,b)$ система (9) – линейная неоднородная алгебраическая система относительно $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$,…, $\dot{u}_n(t)$. Определитель этой системы есть вронскиан $W(t)$, и $W(t)\neq 0$. Поэтому при каждом $t\in(a,b)$ система (9) имеет решение $\dot{u}_j(t)=f_j(t)$, $j=1,2,...,n$.

Все коэффициенты линейной системы (9) непрерывно зависят от t на интервале (a,b), а решения этой системы непрерывно зависят от коэффициентов, следовательно, функции $f_j(t)$ непрерывны на (a,b), $j=1,2,...,n$, и могут быть проинтегрированы. Поэтому

$$u_j(t)=\int_{t_0}^{t}f_j(\tau)d\tau,$$

где t_0 – произвольное число из интервала (a,b), $j=1,2,...,n$.

Согласно формуле (3), функция

$$\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\int_{t_0}^{t}f_j(\tau)d\tau$$

и будет решением линейного неоднородного уравнения (1).

Таким образом, формула (3) предыдущего параграфа для общего решения уравнения (1) принимает вид

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\ldots+c_n\varphi_n(t)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\int_{t_0}^{t}f_j(\tau)d\tau.$$

§6. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пусть

$$L(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{(n-k)}, \tag{1}$$

$a_0=1,\ a_k$ – вещественные числа, $k=1,2,\dots,n$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L(x)=0, \tag{2}$$

Изложим метод построения фундаментальной системы решений уравнения (2), который в литературе называют *методом Эйлера*.

Ищем решение уравнения (2) в виде $x=e^{\lambda t}$. Подставим функцию $e^{\lambda t}$ в $L(x)$. Учитывая, что $\left(e^{\lambda t}\right)^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda t}$ для всех натуральных k, получим:

$$L\left(e^{\lambda t}\right)=P(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{3}$$

где многочлен $P(\lambda)$, как нетрудно видеть, будет иметь вид

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}. \tag{4}$$

Определение. Многочлен $P(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, уравнение

$$P(\lambda)=0 \tag{5}$$

– *характеристическим уравнением*, его корни называются *характеристическими числами* уравнения (2).

Из формулы (3) следует, что функция $x=e^{\lambda t}$ является решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда λ – корень характеристического уравнения (5).

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ – корни уравнения (5), и каждый из корней выписан столько раз, какова его кратность. Построим фундаментальную систему решений уравнения (2). Рассмотрим три случая.

1. Пусть все характеристические числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ вещественные и различные.

Теорема 1. Если $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ – вещественные и различные, то уравнение (2) имеет фундаментальную систему решений

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},...,\ e^{\lambda_n t}.$$

Доказательство теоремы 1. Каждая из функций $e^{\lambda_j t}$ $(j = 1,2,...,n)$ является решением уравнения (2), докажем линейную независимость этих функций.

Вронскиан функций $e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},...,\ e^{\lambda_n t}$ равен

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & ... & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & ... & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

то есть $W(t) = e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t} V(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$, где $V(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$ – определитель Вандермонда.

Хорошо известно, что определитель Вандермонда не равен нулю, если $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ – различные числа. Следовательно, $W(t)$ не равен нулю для всех вещественных t, и функции $e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},...,\ e^{\lambda_n t}$ линейно независимы (согласно следствию 2 из теорем 1 и 2 второго параграфа). Теорема доказана.

2. Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ характеристического уравнения по-прежнему вещественные, но среди них есть кратные.

Пусть корень λ_j, $j \in \{1, 2,..., n\}$, имеет кратность $d_j \geq 2$. Это значит, что

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = P''(\lambda_j) = ... = P^{(d_j - 1)}(\lambda_j) = 0,\ P^{(d_j)}(\lambda_j) \neq 0. \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию $e^{\lambda t}$ как функцию двух переменных и продифференцируем равенство (3) m раз по λ.

С одной стороны,

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}L\left(e^{\lambda t}\right)=\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}\left(\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}e^{\lambda t}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^{n-k}}{\partial t^{n-k}}\left(t^m e^{\lambda t}\right)=L\left(t^m e^{\lambda t}\right). \tag{7}$$

А с другой стороны, по формуле Лейбница для производной m-го порядка произведения двух функций, имеем:

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\left(P(\lambda)e^{\lambda t}\right)=\sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)\frac{\partial^{m-s}}{\partial\lambda^{m-s}}e^{\lambda t}=\sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)t^{m-s}e^{\lambda t}, \tag{8}$$

где C_m^s – число сочетаний из m элементов по s.

Из равенств (3) и (7), (8) следует, что

$$L\left(t^m e^{\lambda t}\right)=\sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}(\lambda)t^{m-s}e^{\lambda t}. \tag{9}$$

Заметим, что формула (9) верна для любых значений t и λ, и любых целых неотрицательных m.

Положим теперь в (9) $\lambda=\lambda_j$, и последовательно $m=1$, затем $m=2$, и далее до $m=d_j-1$. Тогда из (6) следует, что правая часть в равенстве (9) равна нулю, и поэтому $L\left(t^m e^{\lambda_j t}\right)=0$ для всех $m=1,2,...,\left(d_j-1\right)$, то есть уравнение (2) имеет d_j решений

$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ t^2e^{\lambda_j t},...,\ t^{d_j-1}e^{\lambda_j t}, \tag{10}$$

которые соответствуют корню λ_j кратности d_j.

Таким образом, если $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ – различные корни характеристического уравнения (5), где d_j – кратность корня λ_j, $j=1,2,...,s$, $d_j\ge 1$, $\sum_{j=1}^{s}d_j=n$, то этим корням соответствует n решений уравнения (2) вида

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^2e^{\lambda_1 t},...,\ t^{d_1-1}e^{\lambda_1 t},...,e^{\lambda_s t},\ te^{\lambda_s t},\ t^2e^{\lambda_s t},...,\ t^{d_s-1}e^{\lambda_s t}. \tag{11}$$

Докажем, что функции (11) линейно независимы, то есть построенная система решений является фундаментальной.

Теорема 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ – различные вещественные корни характеристического уравнения (5), где d_j – кратность корня λ_j, $j = 1, 2, ..., s$, $d_j \geq 1$, $\sum_{j=1}^{s} d_j = n$. Тогда система решений (11) является фундаментальной системой решений уравнения (2).

Прежде, чем доказывать теорему, сформулируем простое утверждение.

Утверждение. Пусть $R(t)$ – многочлен, α – произвольное число, не равное нулю. Тогда $\left(R(t)e^{\alpha t}\right)' = Q(t)e^{\alpha t}$, где $Q(t)$ – многочлен той же степени, что и $R(t)$. Кроме того, $Q(t) \equiv 0$, если и только если $R(t) \equiv 0$.

Докажите, пожалуйста, это утверждение самостоятельно.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что решения (11) уравнения (2) линейно зависимы, то есть существуют константы c_{jm}, $j = 1, 2, ..., s$, $m = 1, 2, ..., d_j$, не все равные нулю, такие, что

$$c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}te^{\lambda_1 t} + c_{13}t^2 e^{\lambda_1 t} + ... + c_{1d_1}t^{d_1 - 1}e^{\lambda_1 t} + ... +$$
$$+ c_{s1}e^{\lambda_s t} + c_{s2}te^{\lambda_s t} + c_{s3}t^2 e^{\lambda_s t} + ... + c_{sd_s}t^{d_s - 1}e^{\lambda_s t} \equiv 0$$

для всех вещественных t, или

$$R_{10}(t)e^{\lambda_1 t} + R_{20}(t)e^{\lambda_2 t} + ... + R_{s0}(t)e^{\lambda_s t} \equiv 0, \tag{12}$$

где $R_{j0}(t)$ – многочлен степени $(d_j - 1)$, $j = 1, 2, ..., s$, и не все из этих многочленов тождественно равны нулю.

Пусть для определенности $R_{s0}(t)$ не равен тождественно нулю. Приведем тождество (12) к виду

$$R_{10}(t) + R_{20}(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + ... + R_{s0}(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} \equiv 0, \tag{13}$$

и продифференцируем (13) d_1 раз. Получим тождество

$$R_{21}(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + ... + R_{s1}(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} \equiv 0, \tag{14}$$

где $R_{j1}(t)$ – многочлены той же степени, что и $R_{j0}(t)$ ($j=2,3,...,s$), согласно сформулированному выше утверждению. Кроме того, $R_{j1}(t)\equiv 0$, если и только если $R_{j0}(t)\equiv 0$.

Из тождества (14) следует, что

$$R_{21}(t)+R_{31}(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t}+...+R_{s1}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_2)t}\equiv 0. \tag{15}$$

Дифференцируем (15) d_2 раз, и получаем тождество

$$R_{32}(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t}+...+R_{s2}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_2)t}\equiv 0,$$

где $R_{j2}(t)$ – многочлены той же степени, что и $R_{j0}(t)$ ($j=3,...,s$). И $R_{j2}(t)\equiv 0$ если, и только если $R_{j0}(t)\equiv 0$.

Проделав описанную процедуру $(s-1)$ раз, получим тождество

$$R_{s(s-1)}(t)e^{(\lambda_s-\lambda_{s-1})t}\equiv 0, \text{ или } R_{s(s-1)}(t)\equiv 0,$$

которое верно, если и только если $R_{s0}(t)\equiv 0$. Но по нашему предположению $R_{s0}(t)$ не равен тождественно нулю. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

3. Пусть среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ есть комплексные.

Наряду с вещественными решениями линейного однородного уравнения (2) можно рассматривать и комплекснозначные решения (то есть комплекснозначные функции, которые будучи подставленными в уравнение, обращают уравнение (2) в тождество).

Теоремы 1 и 2 остаются верными и для случая, когда среди корней характеристического уравнения (5) есть комплексные числа. Доказательства теорем полностью сохраняются, надо только допустить, что теперь коэффициенты многочленов – это тоже комплексные числа. Таким образом, в рассматриваемом случае набор функций (11) по-прежнему будет представлять собой фундаментальную систему решений уравнения (2), но только уже комплекснозначную. При этом линейная независимость комплекснозначных решений должна определяться над полем C, то есть коэффициенты линейной комбинации комплекснозначных решений надо теперь брать комплексными.

Построим теперь вещественную фундаментальную систему решений.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1 *(об овеществлении решений)*. Комплекснозначная функция $w(t)$ есть решение уравнения (2), тогда и только тогда, когда вещественные функции $\operatorname{Re} w(t)$ и $\operatorname{Im} w(t)$ являются решениями уравнения (2).

Доказательство леммы 1. Пусть $u(t) = \operatorname{Re} w(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} w(t)$, тогда $w(t) = u(t) + iv(t)$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица), и

$$L(w(t)) = L(u(t) + iv(t)) = L(u(t)) + iL(v(t)).$$

Если $w(t)$ – решение уравнения (2), то есть $L(w(t)) = 0$, то и $L(u(t)) + iL(v(t)) = 0$. Следовательно, $L(u(t)) = 0$ и $L(v(t)) = 0$, то есть $u(t)$ и $v(t)$ – решения (2).

И обратно, если $L(u(t)) = 0$ и $L(v(t)) = 0$, то и $L(w(t)) = 0$, то есть $w(t)$ – решение уравнения (2). Лемма доказана.

Пусть $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, – простой корень характеристического уравнения (5) (то есть корень кратности 1), тогда и $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ – простой корень характеристического уравнения. Следовательно, функции $e^{\lambda_j t}$, $e^{\overline{\lambda}_j t}$ – комплекснозначные решения уравнения (2).

По формуле Эйлера

$$e^{\lambda_j t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

и, в силу леммы 1, функции

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \text{ и } e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

являются вещественными решениями уравнения (2), которые соответствует паре комплексных корней λ_j и $\overline{\lambda}_j$ характеристического уравнения (5).

Поставим в фундаментальной системе решений (11) на место комплекснозначных решений $e^{\lambda_j t}$, $e^{\overline{\lambda}_j t}$ вещественные решения $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ и $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ уравнения (2).

Если $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, – корень уравнения (5) кратности $d_j \geq 2$, то и $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ – корень уравнения (5) кратности d_j. Разделяя в комплекснозначных решениях вида (10) вещественные и мнимые части, мы получим $2d_j$ решений

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ te^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t^2e^{\alpha t}\cos(\beta t),\dots,\ t^{d_j-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t),\\&e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ te^{\alpha t}\sin(\beta t),\ t^2e^{\alpha t}\sin(\beta t),\dots,\ t^{d_j-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t),\end{aligned}\tag{16}$$

отвечающих паре корней λ_j и $\bar{\lambda}_j$ кратности d_j характеристического уравнения (5). Поставим в фундаментальной системе решений (11) на место $2d_j$ комплекснозначных решений $e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ t^2e^{\lambda_j t},\dots,\ t^{d_j-1}e^{\lambda_j t}$, $e^{\bar{\lambda}_j t},\ te^{\bar{\lambda}_j t},\ t^2e^{\bar{\lambda}_j t},\dots,\ t^{d_j-1}e^{\bar{\lambda}_j t}$ такое же число вещественных решений (16).

Таким образом, мы получили вещественную систему решений уравнения (2), состоящую из n функций. Эта система строится в соответствии с корнями характеристического уравнения (5) по следующему правилу.

Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$ – различные корни уравнения (5), d_j – кратность корня λ_j, $j=1,2,\dots,s$, $d_j\ge 1$, $\sum_{j=1}^{s}d_j=n$.

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_{2m}$ – комплексные корни уравнения (5), и при этом $\lambda_2=\bar{\lambda}_1,\ \lambda_4=\bar{\lambda}_3,\ \dots,\ \lambda_{2m}=\bar{\lambda}_{2m-1}$ (тогда и $d_2=d_1,\ d_4=d_3,\ \dots,\ d_{2m}=d_{2m-1}$), а остальные корни $\lambda_{2m+1},\dots,\lambda_s$ – вещественные.

Пусть $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$ ($\beta_j\ne 0$) для всех нечетных j от 1 до $(2m-1)$.

Тогда система n функций

$$\begin{aligned}&e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\ te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\ t^2e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\dots,\ t^{d_j-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t),\\&e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\ te^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\ t^2e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\dots,\ t^{d_j-1}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t),\\&e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t},\ t^2e^{\lambda_k t},\dots,\ t^{d_k-1}e^{\lambda_k t}\\&\text{где }\ j=1,3,\dots,(2m-1),\ k=(2m+1),\dots,s,\end{aligned}\tag{17}$$

есть фундаментальная система вещественных решений линейного однородного уравнения (2) с постоянными коэффициентами.

Для доказательства того, что полученная система решений действительно является фундаментальной, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (2). Пусть при этом функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_{2m}(t)$ – комплекснозначные, $2m\le n$, причем $\varphi_j(t)$ и $\varphi_{j+1}(t)$ – комплексно сопряженные функции, $j=1,3,\ldots,(2m-1)$, а функции $\varphi_{2m+1}(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$ - вещественные.

Тогда набор функций

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\varphi_1(t), \mathrm{Im}\varphi_1(t), \mathrm{Re}\varphi_3(t), \mathrm{Im}\varphi_3(t),\ldots, \mathrm{Re}\varphi_{2m-1}(t), \mathrm{Im}\varphi_{2m-1}(t),\\ \varphi_{2m+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\end{gathered} \tag{17}$$

является вещественной фундаментальной системой решений уравнения (2).

Доказательство леммы 2. Согласно лемме 1, все функции в наборе (17) являются решениями уравнения (2). И для доказательства леммы 2 достаточно доказать, что функции (17) являются линейно независимыми.

Пусть $\mathrm{Re}\varphi_j(t)=u_j(t)$, $\mathrm{Im}\varphi_j(t)=v_j(t)$, $j=1,3,\ldots,(2m-1)$.

Предположим, что функции (17) линейно зависимы, то есть существуют вещественные постоянные c_1, $c_2,\ldots$, c_n, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация

$$K_1=\sum_{j=1,\,3,\,\ldots,\,(2m-1)}\left(c_j u_j(t)+c_{j+1}v_j(t)\right)+\sum_{j=2m+1}^{n}c_j\varphi_j(t)$$

равна нулю для всех $t\in R$.

Положим $\mu_j=c_j+ic_{j+1}$ для $j=1,3,\ldots,(2m-1)$, $\mu_{j+1}=\bar{\mu}_j$.

Очевидно, что не все из комплексных чисел μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_{2m}, c_{2m+1}, $\ldots$, c_n равны нулю.

Составим линейную комбинацию функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots$, $\varphi_n(t)$ из исходной фундаментальной системы решений.

$$K_2=\sum_{j=1,\,3,\,\ldots,\,(2m-1)}\left(\mu_j\varphi_{j+1}(t)+\bar{\mu}_j\varphi_j(t)\right)+2\sum_{j=2m+1}^{n}c_j\varphi_j(t).$$

Заметим, что

$$K_2=\sum_{j=1,\,3,\,\ldots,\,(2m-1)}\Big(\left(c_j+ic_{j+1}\right)\left(u_j(t)-iv_j(t)\right)+\left(c_j-ic_{j+1}\right)\left(u_j(t)+iv_j(t)\right)\Big)+$$

$$+2\sum_{j=2m+1}^{n} c_j\varphi_j(t)=\sum_{j=1,\,3,\,\ldots,\,(2m-1)} 2\left(c_j u_j(t)+c_{j+1}v_j(t)\right)+2\sum_{j=2m+1}^{n} c_j\varphi_j(t),$$

то есть $K_2=2K_1=0$, что означает линейную зависимость функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\ldots,$ $\varphi_n(t)$ из фундаментальной системы решений. Полученное противоречие и доказывает лемму 2.

Замечание. Мы рассматриваем в этом курсе линейные уравнения с вещественными постоянными коэффициентами и особое внимание уделяем построению вещественной фундаментальной системы решений уравнения. Комплекснозначные решения уравнения (2) появляются в процессе изложения только по мере необходимости.

Аналогичная теория (с некоторыми незначительными изменениями) может быть построена и для линейных уравнений с постоянными комплексными коэффициентами, но эта теория не рассматривается здесь, поскольку она выходит за рамки нашего курса.

§7. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.

Пусть $L(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^{(n-k)}$, где $x^{(0)}=x$, $a_0=1$, a_k – вещественные числа, $k=1,2,\ldots,n$.

Рассматриваем линейное неоднородное уравнение

$$L(x)=q(t), \tag{1}$$

где функция $q(t)$ непрерывна для всех $t\in R$.

Соответствующее уравнению (1) однородное уравнение:

$$L(x)=0. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (2):

$$P(\lambda)=0, \tag{3}$$

где $P(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\lambda^{n-k}$.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots,$ $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2). Такая система построена в предыдущем параграфе. Для того, чтобы получить общее решение неоднородного уравнения (1), осталось найти частное решение $x = \psi(t)$ уравнения (1). Это решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, но если уравнение (2) – уравнение с постоянными коэффициентами, а функция $q(t)$ имеет специальный вид, то решение $x = \psi(t)$ может быть получено также *методом неопределенных коэффициентов*, который изложен ниже.

1. Пусть неоднородность уравнения (1) имеет вид

$$q(t) = R_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{4}$$

где $R_m(t)$ – многочлен степени m: $R_m(t) = \sum_{j=0}^{m} r_j t^{m-j}$.

Теорема 1. Если $P(\lambda_0) \neq 0$, то есть λ_0 – не корень характеристического уравнения (3), то уравнение (1) с нелинейностью (4) имеет единственное решение вида

$$\psi(t) = Q_m(t) e^{\lambda_0 t}, \tag{5}$$

где $Q_m(t)$ – многочлен степени m: $Q_m(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^{m-j}$.

Доказательство теоремы 1. Коэффициенты многочлена $Q_m(t)$ находим подстановкой функции (5) в уравнение (1).

$$L(\psi(t)) = L\left(Q_m(t) e^{\lambda_0 t}\right) = L\left(\sum_{j=0}^{m} q_j t^{m-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{j=0}^{m} q_j L\left(t^{m-j} e^{\lambda_0 t}\right).$$

Согласно формуле (9) предыдущего параграфа

$$L\left(t^{m-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{s=0}^{m-j} C_{m-j}^{s} P^{(s)}(\lambda_0) t^{m-j-s} e^{\lambda_0 t}, \tag{6}$$

следовательно,

$$L(\psi(t)) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{m} q_j \left(\sum_{s=0}^{m-j} C_{m-j}^{s} P^{(s)}(\lambda_0) t^{m-j-s}\right). \tag{7}$$

Подставим полученное равенство (7) в уравнение

$$L\left(\psi\left(t\right)\right)=R_m\left(t\right)e^{\lambda_0 t}.$$

Тогда

$$q_0\sum_{s=0}^{m}C_m^s P^{(s)}\left(\lambda_0\right)t^{m-s}+q_1\sum_{s=0}^{m-1}C_{m-1}^s P^{(s)}\left(\lambda_0\right)t^{m-1-s}+$$

$$+q_2\sum_{s=0}^{m-2}C_{m-2}^s P^{(s)}\left(\lambda_0\right)t^{m-2-s}+\ldots+q_{m-1}\sum_{s=0}^{1}C_1^s P^{(s)}\left(\lambda_0\right)t^{1-s}+q_m C_0^0 P\left(\lambda_0\right)= \tag{8}$$

$$=r_0 t^m+r_1 t^{m-1}+\ldots+r_{m-1}t+r_m.$$

Приравнивая в (8) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему для определения коэффициентов многочлена $Q_m\left(t\right)$:

$$\begin{cases} q_0\,P\left(\lambda_0\right)=r_0, \\ q_0\,C_m^1\,P'\left(\lambda_0\right)+q_1 P\left(\lambda_0\right)=r_1, \\ q_0\,C_m^2\,P''\left(\lambda_0\right)+q_1\,C_{m-1}^1 P'\left(\lambda_0\right)+q_2\,P\left(\lambda_0\right)=r_2, \\ \ldots \\ q_0\,P^{(m)}\left(\lambda_0\right)+q_1 P^{(m-1)}\left(\lambda_0\right)+\ldots+q_m\,P\left(\lambda_0\right)=r_m. \end{cases} \tag{9}$$

Из системы (9) рекуррентно и однозначно находятся коэффициенты q_j, $j=0,1,\ldots,m$, поскольку $P\left(\lambda_0\right)\neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если λ_0 – корень характеристического уравнения (3) кратности $d\geq 1$, то есть

$$P\left(\lambda_0\right)=P'\left(\lambda_0\right)=P''\left(\lambda_0\right)=\ldots=P^{(d-1)}\left(\lambda_0\right)=0,\quad P^{(d)}\left(\lambda_0\right)\neq 0, \tag{10}$$

то уравнение (1) с нелинейностью (4) имеет единственное решение вида

$$\psi\left(t\right)=t^d Q_m\left(t\right)e^{\lambda_0 t}, \tag{11}$$

где $Q_m\left(t\right)$ – многочлен степени m: $Q_m\left(t\right)=\sum_{j=0}^{m}q_j\,t^{m-j}$.

Доказательство теоремы 2. Как и в доказательстве теоремы 1, коэффициенты многочлена $Q_m(t)$ находим подстановкой (11) в уравнение (1).

$$L(\psi(t)) = L\left(t^d Q_m(t) e^{\lambda_0 t}\right) = L\left(\sum_{j=0}^{m} q_j\, t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{j=0}^{m} q_j\, L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right),$$

и согласно формуле (6),

$$L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) = \sum_{s=0}^{m+d-j} C_{m+d-j}^{s} P^{(s)}(\lambda_0)\, t^{m+d-j-s} e^{\lambda_0 t}.$$

Из условий (10) следует, что

$$L\left(t^{m+d-j} e^{\lambda_0 t}\right) =$$

$$= \sum_{s=d}^{m+d-j} C_{m+d-j}^{s}\, P^{(s)}(\lambda_0)\, t^{m+d-j-s} e^{\lambda_0 t} = \sum_{s=0}^{m-j} C_{m+d-j}^{s+d}\, P^{(s+d)}(\lambda_0)\, t^{m-j-s} e^{\lambda_0 t},$$

и

$$L(\psi(t)) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{m} q_j \left(\sum_{s=0}^{m-j} C_{m+d-j}^{s+d} P^{(s+d)}(\lambda_0)\, t^{m-j-s} \right). \qquad (12)$$

Подставляя полученное равенство (12) в уравнение

$$L(\psi(t)) = R_m(t) e^{\lambda_0 t}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему для определения коэффициентов многочлена $Q_m(t)$:

$$\begin{cases} q_0\, C_{d+m}^{d} P^{(d)}(\lambda_0) = r_0, \\ q_0\, C_{d+m}^{d+1}\, P^{(d+1)}(\lambda_0) + q_1\, C_{d+m-1}^{d}\, P^{(d)}(\lambda_0) = r_1, \\ q_0\, C_{d+m}^{d+2} P^{(d+2)}(\lambda_0) + q_1\, C_{d+m-1}^{d+1}\, P^{(d+1)}(\lambda_0) + q_2\, C_{d+m-2}^{d}\, P^{(d)}(\lambda_0) = r_2, \\ \ldots \\ q_0\, P^{(d+m)}(\lambda_0) + q_1\, P^{(d+m-1)}(\lambda_0) + \ldots + q_m\, P^{(d)}(\lambda_0) = r_m. \end{cases} \qquad (13)$$

Поскольку $P^{(d)}(\lambda_0) \neq 0$, то из системы (13) рекуррентно и однозначно находятся коэффициенты q_j, $j = 0,1,\ldots,m$. Теорема доказана.

2. Пусть неоднородность уравнения (1) имеет вид

$$q(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{14}$$

где $\tilde{R}_{m_1}(t)$ и $\hat{R}_{m_2}(t)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Теорема 3. Если $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ – не корень характеристического уравнения (3), то уравнение (1) с нелинейностью (14) имеет единственное решение вида

$$\psi(t)=e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{15}$$

где $m=\max(m_1,m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$– многочлены степени m.

Теорема 4. Если $\lambda_0=\alpha_0+i\beta_0$ – корень характеристического уравнения (3) кратности d, то уравнение (1) с нелинейностью (14) имеет единственное решение вида

$$\psi(t)=t^d e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t)+\hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{16}$$

где $m=\max(m_1,m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$– многочлены степени m.

Перед доказательством теорем 3 и 4 докажем простое утверждение.

Утверждение. Если $\psi_1(t)$ – решение уравнения $L(x)=q_1(t)$, а $\psi_2(t)$ – решение уравнения $L(x)=q_2(t)$, то функция $\psi_1(t)+\psi_2(t)$ является решением уравнения $L(x)=q_1(t)+q_2(t)$.

Доказательство утверждения. По условию $L(\psi_1(t))=q_1(t)$ и $L(\psi_2(t))=q_2(t)$, следовательно,

$$L(\psi_1(t)+\psi_2(t))=L(\psi_1(t))+L(\psi_2(t))=q_1(t)+q_2(t),$$

то есть функция $\psi_1(t)+\psi_2(t)$ – решение уравнения $L(x)=q_1(t)+q_2(t)$. Утверждение доказано.

Доказательство теорем 3 и 4. Согласно формулам Эйлера

$$e^{\alpha_0 t}\cos(\beta_0 t)=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda_0 t}+e^{\bar{\lambda}_0 t}\right),\quad e^{\alpha_0 t}\sin(\beta_0 t)=\frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_0 t}-e^{\bar{\lambda}_0 t}\right),$$

где $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, $\bar{\lambda}_0 = \alpha_0 - i\beta_0$.

Поэтому

$$q(t) = \frac{1}{2}\tilde{R}_{m_1}(t)\left(e^{\lambda_0 t} + e^{\bar{\lambda}_0 t}\right) + \frac{1}{2i}\hat{R}_{m_2}(t)\left(e^{\lambda_0 t} - e^{\bar{\lambda}_0 t}\right) =$$
$$= e^{\lambda_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) + \hat{R}_{m_2}(t)\right) + e^{\bar{\lambda}_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) - \hat{R}_{m_2}(t)\right).$$

Положим

$$q_1(t) = e^{\lambda_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) + \hat{R}_{m_2}(t)\right), \quad q_2(t) = e^{\bar{\lambda}_0 t}\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) - \hat{R}_{m_2}(t)\right).$$

Тогда $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, а $q_1(t)$ и $q_2(t)$ – функции вида (4), причем степень многочленов

$$\frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) + \hat{R}_{m_2}(t)\right) \text{ и } \frac{1}{2i}\left(i\tilde{R}_{m_1}(t) - \hat{R}_{m_2}(t)\right)$$

(с комплексными коэффициентами) равна $m = \max(m_1, m_2)$.

Заметим, что теоремы 1 и 2 остаются верными и в случае комплекснозначной функции $q(t)$. В этом случае можно утверждать, что существует единственное комплекснозначное решение $\psi(t)$ уравнения (1), которое имеет вид (5), если λ_0 не является корнем характеристического уравнения (3), и имеет вид (11), если λ_0 – корень характеристического уравнения (3) кратности $d \geq 1$ (доказательства теорем 1 и 2 полностью сохраняются в комплексном случае).

Применим теоремы 1 и 2 к уравнениям

$$L(x) = q_1(t) \text{ и } L(x) = q_2(t).$$

Эти уравнения имеют соответственно комплекснозначные решения $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ вида (5), если λ_0 – не корень характеристического уравнения (3), и вида (11), если λ_0 – корень уравнения (3) кратности d.

По доказанному выше утверждению, уравнение (1) имеет решение $\psi_0(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ вида

$$\psi_0(t) = \tilde{U}_m(t)e^{\lambda_0 t} + \hat{U}_m(t)e^{\bar{\lambda}_0 t}, \tag{17}$$

если λ_0 - не корень характеристического уравнения (3), и решение вида

$$\psi_0(t) = t^d \left(\tilde{U}_m(t) e^{\lambda_0 t} + \hat{U}_m(t) e^{\bar{\lambda}_0 t} \right), \tag{18}$$

если λ_0 – корень характеристического уравнения (3) кратности d.

Через $\tilde{U}_m(t)$ и $\hat{U}_m(t)$ в формулах (17) и (18) обозначены многочлены степени m с комплексными коэффициентами.

Для того, чтобы найти вещественные решения уравнения (1) с неоднородностью вида (14), докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть комплекснозначная функция $w(t) = u(t) + iv(t)$ – решение уравнения (1), где $q(t) = f(t) + ih(t)$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $u(t)$, $v(t)$ и $f(t)$, $h(t)$ – вещественные функции).

Тогда $u(t)$ – решение уравнения $L(x) = f(t)$, а $v(t)$ – решение уравнения $L(x) = h(t)$.

Доказательство леммы. С одной стороны, $L(w(t)) = f(t) + ih(t)$, а с другой стороны,

$$L(w(t)) = L(u(t) + iv(t)) = L(u(t)) + iL(v(t)).$$

Из равенства $L(u(t)) + iL(v(t)) = f(t) + ih(t)$ следует, что

$$L(u(t)) = f(t) \text{ и } L(v(t)) = h(t),$$

то есть $u(t)$ и $v(t)$ – решения уравнений $L(x) = f(t)$ и $L(x) = h(t)$ соответственно. Лемма доказана.

Разделяя в решении вида (17) вещественные и мнимые части, согласно лемме, получим утверждение теоремы 3. Аналогично, разделяя вещественные и мнимые части в решении вида (18), получим утверждение теоремы 4.

Доказательство теорем закончено.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Определение. *Линейной системой* дифференциальных уравнений называется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + q_1(t), \\ \dot{x}_2 = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + q_2(t), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + q_n(t), \end{cases} \qquad (1_0)$$

где функции $p_{jk}(t)$, $q_j(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Система (1_0) есть система в нормальной форме, правые части всех уравнений системы (1_0)

$$X_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k + q_j(t)$$

непрерывны в области $G = \{(t,x) : t \in (a,b), \|x\| < +\infty\}$ и удовлетворяют условию Липшица по $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in R^n$ локально, поскольку в G существуют непрерывные частные производные $\partial X_j(t,x)/\partial x_k = p_{jk}(t)$, $j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Напомним, что *решением системы* (1_0) называется набор таких функций $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, …, $x_k = \varphi_k(t)$, которые будучи подставлены в систему (1_0), обращают эту систему в тождество.

В последнем параграфе пособия [2] было доказано, что максимальный промежуток задания всех решений линейной системы (1_0) равен интервалу (a,b), поэтому далее считаем все решения (1_0) заданными на (a,b).

Задача Коши для системы (1)

$$t = t_0, \ \ x_1 = x_{10}, \ \ x_2 = x_{20}, \ \ \ldots, \ \ x_n = x_{n0}, \qquad (2_0)$$

где $t_0 \in (a,b)$, $x_0 = (x_{10},\ldots,x_{n0})^T \in R^n$, имеет единственное решение.

Определение. Система (1) называется *однородной*, если $q_j(t) \equiv 0$ для всех $j = 1,2,\ldots,n$. В противном случае система называется *неоднородной*.

§ 1. Векторная запись линейной системы.

Сначала напомним сведения из теории матриц, которые будем использовать в дальнейшем.

Матрицу A размерности $m\times n$ будем записывать в виде $A_{[m\times n]}=\{a_{jk}\}$, или $A=\{a_{jk}\}_{[m\times n]}$, где a_{jk} ($j=1,2,...,m$, $k=1,2,...,n$) – элементы матрицы, или в виде $A=(a_1,a_2,...,a_n)$, где a_k – k-ый столбец матрицы A.

Кроме того, если $x=(x_1,...,x_n)^T$, то $Ax=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$.

Если $A_{[m\times n]}=\{a_{jk}\}$, $B_{[m\times n]}=\{b_{jk}\}$, то $(A+B)_{[m\times n]}=\{a_{jk}+b_{jk}\}$.

Если $B_{[s\times m]}=\{b_{lj}\}$, $A_{[m\times n]}=\{a_{jk}\}=(a_1,a_2,...,a_n)$, то $(BA)_{[s\times n]}=\left\{\sum_{j=1}^{m}b_{lj}a_{jk}\right\}$ или $(BA)_{[s\times n]}=(Ba_1,Ba_2,...,Ba_n)$.

Если матрица A – квадратная размерности n, то под нормой матрицы A понимаем *операторную норму*:

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|,$$

где (как и раньше) $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$ – евклидова норма вектора $x=(x_1,...,x_n)^T$.

Нетрудно показать, что для норм матриц $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ верны неравенства

$$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\| \text{ и } \|A\cdot B\|\le\|A\|\cdot\|B\|.$$

Если $x=(x_1,...,x_n)^T$, $s=(s_1,...,s_n)$, то

$$\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|,\ \|sA\|\le\left\|s^T\right\|\cdot\|A\|$$

(эти неравенства показывают свойство согласованности операторной нормы матрицы и евклидовой нормы вектора).

Матрица $U(t)_{[s\times m]}=\{u_{jk}(t)\}$ называется *непрерывной* на промежутке $\langle a,b\rangle$, если все функции $u_{jk}(t)$ непрерывны на $\langle a,b\rangle$.

Матрица $U(t)_{[s\times m]}=\{u_{jk}(t)\}$ называется *непрерывно дифференцируемой* на интервале (a,b), если все $u_{jk}(t)$ непрерывно дифференцируемы на (a,b) ($j=1,2,...,s$, $k=1,2,...,m$). При этом полагаем

$$\dot{U}(t)_{[s\times m]}=\{\dot{u}_{jk}(t)\}.$$

Если $U(t)_{[s\times m]}$ и $V(t)_{[m\times n]}$ – матрицы, непрерывно дифференцируемые на (a,b), то их произведение тоже непрерывно дифференцируемо на (a,b), и нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt}\big(U(t)V(t)\big)=\dot{U}(t)V(t)+U(t)\dot{V}(t).$$

Если матрица $U(t)_{[s\times m]}=\{u_{jk}(t)\}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по определению полагаем

$$\left(\int_a^b U(t)\,dt\right)_{[s\times m]}=\left\{\int_a^b u_{jk}(t)\,dt\right\}.$$

Можно доказать следующее свойство нормы интеграла от квадратной матрицы $U(t)$ размерности n:

$$\left\|\int_a^b U(t)\,dt\right\|\le\int_a^b\|U(t)\|\,dt.$$

Упражнение. Докажите это неравенство.

Теперь запишем линейную систему (1_0) в векторном виде.

Пусть $x=(x_1,...,x_n)^T$, $P(t)_{[n\times n]}=\{p_{jk}(t)\}$, $q(t)=(q_1(t),...,q_n(t))^T$. Тогда система ($1_0$) принимает вид

$$\dot{x}=P(t)x+q(t), \tag{1}$$

где матрица $P(t)$ и вектор $q(t)$ непрерывны на интервале (a,b).

Решение системы (1) есть вектор-функция $x = \varphi(t)$, определенная на (a, b), которая, будучи подставлена в (1), обращает систему в тождество.

Задача Коши для системы (1) имеет вид

$$t = t_0, \ x = x_0,$$

где $t_0 \in (a, b), \ x_0 \in R^n$.

§ 2. Матричное уравнение. Основное свойство линейной однородной системы.

Рассмотрим сначала линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

где матрица $P(t)_{[n \times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a, b).

Пусть вектор-функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1). Составим матрицу

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)). \tag{2}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\dot{X} = P(t)X, \tag{3}$$

где X – любая матрица с n строками.

Решением уравнения (3) называется матрица $X = X(t)$, непрерывно дифференцируемая на (a, b) и удовлетворяющая уравнению (3).

Утверждение. $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ есть решения системы (1) тогда, и только тогда, когда матрица $\Phi_m(t)$ – решение уравнения (3).

Доказательство утверждения. Если $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1), то $\dot{\varphi}_j(t) = P(t)\varphi_j(t)$ для всех $j = 1, 2, ..., m$. Согласно (2),

$$\dot{\Phi}_m(t) = (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), ..., \dot{\varphi}_m(t)) =$$
$$= (P(t)\varphi_1(t), P(t)\varphi_2(t), ..., P(t)\varphi_m(t)) = P(t)\Phi_m(t),$$

то есть матрица $\Phi_m(t)$ – решение уравнения (3).

Обратно, если $\Phi_m(t)$ – решение уравнения (3), то

$$\left(\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), ..., \dot{\varphi}_m(t)\right) = \dot{\Phi}_m(t) =$$
$$= P(t)\Phi_m(t) = \left(P(t)\varphi_1(t), P(t)\varphi_2(t), ..., P(t)\varphi_m(t)\right),$$

и $\dot{\varphi}_j(t) = P(t)\varphi_j(t)$ для всех $j = 1, 2, ..., m$, то есть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1). Утверждение доказано.

Замечание. Для матричного уравнения (3) можно ставить задачу Коши

$$t = t_0, \ X = A_0,$$

где $t_0 \in (a, b)$, A_0 – матрица с n строками. Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для линейных систем следует аналогичная теорема для решения задачи Коши матричного уравнения (3).

Основное свойство линейной однородной системы.

Теорема. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1), тогда вектор-функция

$$\psi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_m\varphi_m(t),$$

где c_1, c_2,…, c_m – произвольные постоянные числа, также есть решение системы (1) на (a, b).

Доказательство теоремы 1. Функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, ..., m$, – решения системы (1), а значит, матрица $\Phi_m(t)$ – решение уравнения (3).

Заметим, что $\psi(t) = \Phi_m(t)c$, где $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ – m-мерный постоянный вектор, и

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\Phi}_m(t)c = P(t)\Phi_m(t)c = P(t)\psi(t),$$

то есть $\psi(t)$ – решение уравнения (1). Теорема доказана.

§3. *Линейно независимые решения линейной однородной системы.*

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \qquad (1)$$

матрица $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a,b).

Пусть вектор-функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1),

$$\Phi_m(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) \qquad (2)$$

– составленная из решений матрица.

Определение 1. Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно зависимы* на интервале (a,b), если существуют постоянные c_1, $c_2, \ldots$, c_m, не все равные нулю, такие, что на (a,b)

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_m\varphi_m(t) \equiv 0. \qquad (3)$$

Определение 1 можно переформулировать с помощью матрицы (2).

Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно зависимы* на интервале (a,b), если существует m-мерный постоянный вектор $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^T$ такой, что $c \neq 0$, а $\Phi_m(t)c \equiv 0$ на (a,b).

Определение 2. Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) *линейно независимы* на (a,b), если они не являются линейно зависимыми на этом интервале.

Иными словами, решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ *линейно независимы* на (a,b), если из тождества $\Phi_m(t)c \equiv 0$ следует, что вектор c равен нулю.

Теорема 1. Пусть решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ системы (1) линейно зависимы на интервале (a,b). Тогда для всех $t \in (a,b)$

$$rank\, \Phi_m(t) < m.$$

Доказательство теоремы 1. По условию теоремы, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ – линейно зависимы, то есть существует m-мерный постоянный вектор $\bar{c} \neq 0$ такой, что $\Phi_m(t)\bar{c} \equiv 0$ на (a,b).

Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\Phi_m(t)z = 0, \qquad (4)$$

где $z = (z_1, z_2, ..., z_m)^T$ – искомый вектор.

Система (4) имеет ненулевое решение $z = \bar{c}$ для каждого $t \in (a,b)$, поэтому $rank\, \Phi_m(t) < m$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 1 мы не пользовались тем, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1). Теорема 1 верна для любого набора вектор-функций, определенных на интервале (a,b).

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1).

Если существует точка $t_0 \in (a,b)$ такая, что

$$rank\, \Phi_m(t_0) < m,$$

то $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим линейную однородную алгебраическую систему

$$\Phi_m(t_0)z = 0, \qquad (5)$$

где вектор $z = (z_1, z_2, ..., z_m)^T$ – искомый.

По условию $rank\, \Phi_m(t_0) < m$, следовательно, система (5) имеет ненулевое решение $z = \bar{c}$.

Положим $\psi(t) = \Phi_m(t)\bar{c}$. Согласно основному свойству решений линейного однородного уравнения, $x = \psi(t)$ – решение системы (1).

Поскольку $z = \bar{c}$ – решение системы (5), $\psi(t_0) = \Phi_m(t_0)\bar{c} = 0$, то есть $x = \psi(t)$ – решение задачи Коши $t = t_0$, $x = 0$ для системы (1). Эту же задачу Коши решает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ системы (1).

Из теоремы единственности следует, что $\psi(t) \equiv 0$ на интервале (a,b). И отсюда вытекает линейная зависимость функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$, поскольку $\bar{c} \neq 0$. Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1), $t \in (a,b)$. Тогда из теорем 1 и 2 следуют два утверждения.

Следствие 1. Если существует такая точка $t_0 \in (a,b)$, что $rank\, \Phi_m(t_0) < m$, то $rank\, \Phi_m(t) < m$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b).

Следствие 2. Если существует такая точка $t_1 \in (a,b)$, что $rank\, \Phi_m(t_1) = m$, то $rank\, \Phi_m(t) = m$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,…, $\varphi_m(t)$ линейно независимы на (a,b).

Теорема 3. Система (1) не может иметь больше, чем n линейно независимых решений.

Доказательство теоремы 3. Пусть $m > n$ и $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ – решения системы (1), $t \in (a,b)$.

Составим матрицу (2). Эта матрица имеет размерность $n \times m$, поэтому $rank\, \Phi_m(t) \le n < m$, и из теоремы 1 следует, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ линейно зависимы на (a,b). Теорема доказана.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ – набор из n решений системы (1). Составим матрицу

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)).$$

Если $m = n$, то индекс у функции $\Phi(t)$ обычно не пишут.

Определение. Определитель матрицы $\Phi(t)$ называется *определителем Вронского* для функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ на интервале (a,b) или *вронскианом*.

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Следствие 3. Если существует такая точка $t_0 \in (a,b)$, что $W(t_0) = 0$, то $W(t) \equiv 0$ на (a,b), и решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно зависимы.

Следствие 4. Если существует такая точка $t_1 \in (a,b)$, что $W(t_1) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для всех $t \in (a,b)$, и решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b).

Замечание. Определение вронскиана для решений линейной системы (1) согласовано с определением вронскиана для решений линейного однородного уравнения n-го порядка (в том смысле, что вронскиан для решений линейного однородного уравнения равен вронскиану решений системы, которая получена при переходе от уравнения к системе по стандартному правилу, описанному в начале первой главы).

Упражнение. Выпишите вронскиан для решений линейного однородного уравнения n-го порядка. Затем перейдите от уравнения к системе по стандартному правилу и выпишите вронскиан для решений полученной системы. Убедитесь в том, что эти два вронскиана равны.

§4. Фундаментальная система решений. Общее решение.

Рассматриваем линейную однородную систему

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1}$$

где матрица $P(t)_{[n\times n]} = \{p_{jk}(t)\}$ непрерывна на интервале (a,b).

Определение 1. Набор $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ из n линейно независимых решений системы (1) называется *фундаментальной системой решений* (1).

Матрица

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)), \tag{2}$$

составленная из этих решений называется *фундаментальной матрицей решений* системы (1).

Теорема 1. Линейная система (1) имеет фундаментальную систему решений.

Доказательство теоремы 1. Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det A \neq 0$.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$, и поставим задачу Коши

$$t = t_0, \; X = A$$

для матричного уравнения

$$\dot{X} = P(t)X, \qquad (3)$$

Как было показано во втором параграфе, эта задача Коши имеет решение $X = \Phi(t)$. Столбцы матрицы $\Phi(t)$ есть решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ системы (1). При этом

$$\det \Phi(t_0) = W(t_0) = \det A \neq 0,$$

и по следствию 4 предыдущего параграфа, решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b), то есть образуют фундаментальную систему решений. Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1), c – произвольный постоянный n-мерный вектор.

Формула

$$x(t) = \Phi(t)c. \qquad (4)$$

называется *формулой общего решения* системы (1), а правая часть формулы (4) называется *общим решением* системы (1).

Теорема 2. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1). Тогда

1) для любого постоянного вектора c формула (4) дает решение (1),

2) если $x = \xi(t)$ – решение (1), то существует вектор $\bar{c}$ такой, что $\xi(t) = \Phi(t)\bar{c}$ для всех $t \in (a,b)$.

Доказательство теоремы2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейной однородной системы.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0 \in (a,b)$ и образуем линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)z = \xi(t_0), \qquad (5)$$

где вектор z – искомый.

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0) \neq 0$, поскольку $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений (1). Следовательно, система (5) имеет единственное решение $z = \bar{c}$.

Положим

$$\eta(t)=\Phi(t)\overline{c}\ .$$

$x=\eta(t)$ – решение системы (1), и, согласно (5), $\eta(t_0)=\xi(t_0)$, то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши для системы (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

Теорема о множестве всех фундаментальных матриц системы (1).

Теорема 3. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений (1).

1). Если B – произвольная квадратная матрица порядка n, такая, что $\det B\neq 0$, то матрица $\Psi(t)=\Phi(t)B$ – тоже фундаментальная матрица решений системы (1).

2). Если $\Psi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1), то существует такая квадратная матрица B порядка n, $\det B\neq 0$, что $\Psi(t)=\Phi(t)B$ для всех $t\in(a,b)$.

Доказательство теоремы3. Докажем первое утверждение. Матрица $\Phi(t)$ есть решение матричного уравнения (3), $\Psi(t)=\Phi(t)B$, тогда

$$\dot{\Psi}(t)=\dot{\Phi}(t)B=\big(P(t)\Phi(t)\big)B=P(t)\big(\Phi(t)B\big)=P(t)\Psi(t),$$

то есть $\Psi(t)$ – тоже решение уравнения (3).

Кроме того, $\det\Psi(t)=\det\Phi(t)\cdot\det B\neq 0$ для всех $t\in(a,b)$. Следовательно, $\Psi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1).

Докажем второе утверждение. Пусть $\Psi(t)$ – фундаментальная матрица решений (1). Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и положим

$$B=\Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0).$$

$\det B=\det\Phi^{-1}(t_0)\cdot\det\Psi(t_0)\neq 0$, и по доказанному в первом пункте, матрица $X(t)=\Phi(t)B$ есть фундаментальная матрица решений системы (1).

Заметим, что

$$X(t_0)=\Phi(t_0)B=\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\Psi(t_0)=\Psi(t_0),$$

следовательно, матрицы $X(t)$ и $\Psi(t)$ решают одну задачу Коши для матричного уравнения (3). Из теоремы единственности следует, что $X(t) \equiv \Psi(t)$ на интервале (a,b). Теорема доказана.

Определение 3. Пусть $\Phi(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица решений системы (1). Тогда формула

$$X(t) = \Phi(t)B, \tag{6}$$

где B – произвольная квадратная матрица порядка n, $\det B \neq 0$, задает любую из фундаментальных матриц линейной однородной системы (1).

Правая часть формулы (6) называется *общим выражением для фундаментальных матриц* системы (1).

Фундаментальная матрица, которая при $t = t_0$ обращается в единичную матрицу, называется *фундаментальной матрицей Коши* и обозначается как $\Phi(t,t_0)$.

Замечание. Если $\Phi(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица решений системы (1), то $\Phi(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$.

Действительно, $\Phi(t,t_0)$ является фундаментальной матрицей в силу теоремы 3, и $\Phi(t_0,t_0) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0) = E$.

§5. Формулы Лиувилля.

Запишем линейную однородную систему в виде

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)x_k, \ j = 1,2,...,n, \tag{1}$$

функции $p_{jk}(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k = 1,2,...,n$.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ – решения системы (1),

$$\varphi_m(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1m}(t) \\ ... \\ \varphi_{nm}(t) \end{pmatrix}, \ m = 1,2,...,n.$$

Вронскиан этой системы решений равен

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

По определению определителя матрицы

$$W(t)=\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\varphi_{1j_1}(t)\dots\varphi_{nj_n}(t), \tag{2}$$

где знак суммы означает суммирование по правилу определителя, то есть суммирование ведется по всем перестановкам $\Delta=(j_1,j_2,\dots,j_n)$ натуральных чисел $(1,2,\dots,n)$. При этом $\alpha=0$, если перестановка $(j_1,j_2,\dots,j_n)$ – четная, и $\alpha=1$, если перестановка нечетная. Дифференцируя равенство (2), получим

$$\dot W(t)=\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\sum_{s=1}^{n}\varphi_{1j_1}(t)\dots\varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t)\dot\varphi_{sj_s}(t)\varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t)\dots\varphi_{nj_n}(t)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\Delta}(-1)^{\alpha}\varphi_{1j_1}(t)\dots\varphi_{(s-1)j_{s-1}}(t)\dot\varphi_{sj_s}(t)\varphi_{(s+1)j_{s+1}}(t)\dots\varphi_{nj_n}(t).$$

Внутренняя сумма в последнем равенстве есть определитель, который отличается от вронскиана лишь тем, что в s-ой строке стоят производные соответствующих компонент решений системы (1). Следовательно,

$$\dot W(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dot\varphi_{s1}(t) & \dot\varphi_{s2}(t) & \dots & \dot\varphi_{sn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-ая\ строка).$$

Поскольку $\varphi_m(t)$ – решения системы (1), то

$$\dot\varphi_{sm}(t)=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{km}(t)$$

для всех $s=1,2,\dots,n$, $m=1,2,\dots,n$. Следовательно,

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k1}(t) & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{k2}(t) & \dots & \sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-\textit{ая строка}),$$

Или

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{sk}(t)\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{k1}(t) & \varphi_{k2}(t) & \dots & \varphi_{kn}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}(s-\textit{ая строка}),$$

Определители под знаком суммы в последней формуле при $s\neq k$ отличаются от вронскиана тем, что на месте s-ой строки у них стоит k-ая строка. И эти определители равны нулю, поскольку имеют две одинаковые строки. При $s=k$ определители под знаком суммы просто совпадают с вронскианом. Следовательно,

$$\dot{W}(t)=\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)W(t),$$

или

$$\dot{W}(t)=W(t)TrP(t), \tag{3}$$

где $Tr\,P(t)$ – след матрицы $P(t)=\left\{p_{jk}(t)\right\}_{[n\times n]}$.

Интегрируя уравнение (3), получим

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}TrP(\tau)d\tau\right), \tag{4}$$

где $t_0\in(a,b)$.

Определение. Формула (4) называется *формулой Лиувилля*.

Замечание. Из формулы Лиувилля для линейной однородной системы легко получается аналогичная формула для линейного однородного уравнения n-го порядка

$$x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(t)\dot{x}+p_n(t)x=0, \tag{5}$$

где функции $p_k(t)$ непрерывны на интервале (a,b), $k=1,2,...,n$.

По стандартной процедуре, описанной в начале третьей главы, с помощью обозначений

$$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ x_3 = \ddot{x},\ldots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

уравнение (5) может быть приведено к линейной однородной системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \ldots - p_1(t)x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Формула Лиувилля для системы (6) и, следовательно, для линейного уравнения (5) принимает вид:

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)\,d\tau\right),$$

где $t_0 \in (a,b)$.

§6. Общее решение линейной неоднородной системы.

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = P(t)x + q(t), \tag{1}$$

где матрица $P(t)$ и вектор $q(t)$ непрерывны при $t \in (a,b)$.

Соответствующая (1) однородная система имеет вид

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $x=\psi(t)$ – решение системы (1), а $x=\varphi(t)$ - решение системы (2), тогда $x=\varphi(t)+\psi(t)$ – решение (1).

Доказательство теоремы 1. Если $\psi(t)$ – решение (1), а $\varphi(t)$ – решение (2), то $\dot{\psi}(t) = P(t)\psi(t) + q(t)$ и $\dot{\varphi}(t) = P(t)\varphi(t)$ на интервале (a,b).

Тогда

$$\dot{\psi}(t)+\dot{\varphi}(t)=P(t)\psi(t)+q(t)+P(t)\varphi(t)=P(t)\big(\psi(t)+\varphi(t)\big)+q(t),$$

и вектор-функция $\varphi(t)+\psi(t)$ есть решение системы (1). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\psi(t)$ – решение уравнения (1), $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2), c – произвольный постоянный n-мерный вектор.

Формула

$$x(t)=\Phi(t)c+\psi(t). \tag{3}$$

называется *формулой общего решения* системы (1), а правая часть формулы (3) называется *общим решением* системы (1).

Теорема 2. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2). Тогда

1) для любого постоянного вектора c формула (3) дает решение (1),

2) если $x=\xi(t)$ – решение (1), то существует вектор $\overline{c}$ такой, что $\xi(t)=\Phi(t)\overline{c}+\psi(t)$ для всех $t\in(a,b)$.

Доказательство теоремы2. Первое утверждение теоремы следует из основного свойства решений линейной однородной системы и теоремы 1.

Докажем второе утверждение. Возьмем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и составим линейную неоднородную алгебраическую систему

$$\Phi(t_0)z+\psi(t_0)=\xi(t_0), \tag{4}$$

где вектор z – искомый.

Определитель этой системы есть вронскиан $W(t_0)$, и $W(t_0)\neq 0$, поскольку $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений (2). Следовательно, система (4) имеет единственное решение $z=\overline{c}$.

Положим

$$\eta(t)=\Phi(t)\overline{c}+\psi(t).$$

Заметим, что $x=\eta(t)$ – решение системы (1), и, согласно (4), $\eta(t_0)=\xi(t_0)$, то есть $x=\xi(t)$ и $x=\eta(t)$ решают одну задачу Коши для системы (1). Из теоремы единственности следует, что $\xi(t)\equiv\eta(t)$ на интервале (a,b). И теорема доказана.

Таким образом, отыскание общего решения линейной неоднородной системы (1) разбивается на два этапа. Во-первых, нужно найти общее решение линейной однородной системы (2), и во-вторых, найти хотя бы одно решение неоднородной системы (1). Последнее может быть сделано с помощью метода Лагранжа, который изложен ниже.

Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Пусть мы знаем фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ решений системы (2). Будем искать частное решение $x=\psi(t)$ неоднородной системы (1) в виде

$$\psi(t)=\Phi(t)u(t), \tag{5}$$

где $u(t)$ – неизвестная вектор-функция.

Из равенства (5) и тождества $\dot{\psi}(t)=P(t)\psi(t)+q(t)$ следует, что

$$\dot{\Phi}(t)u(t)+\Phi(t)\dot{u}(t)=P(t)\Phi(t)u(t)+q(t). \tag{6}$$

Заметим, что $\dot{\Phi}(t)=P(t)\Phi(t)$, и равенство (6) приводится к виду

$$\Phi(t)\dot{u}(t)=q(t),$$

или

$$\dot{u}(t)=\Phi^{-1}(t)q(t),$$

следовательно,

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau$$

где $t_0\in(a,b)$.

Формула (3) для общего решения линейной неоднородной системы (1), с учетом равенства (5), принимает вид

$$x(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Решение задачи Коши $t=t_0$, $x=x_0$ для системы (1) имеет вид

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau, \tag{8}$$

или

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)q(\tau)d\tau, \tag{9}$$

где $\Phi(t,t_0)$ - фундаментальная матрица Коши.

Формулы (8), (9) называются *формулами Коши* для решения линейной неоднородной системы (1).

§7. Линейная однородная система с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x}=Ax, \tag{1}$$

где A – постоянная квадратная матрица размерности n.

Ищем решение системы (1) в виде $x=\gamma e^{\lambda t}$, где γ – постоянный вектор размерности n, λ – скаляр.

Подставим вектор-функцию $\gamma e^{\lambda t}$ в (1):

$$\lambda\gamma e^{\lambda t}=A\gamma e^{\lambda t},$$

следовательно,

$$(A-\lambda E)\gamma=0. \tag{2}$$

Уравнение (2) хорошо известно из курса алгебры, если оно имеет ненулевое решение γ, то λ – собственное число матрицы A, а γ – соответствующий этому собственному числу собственный вектор.

Очевидно, что система (2) имеет ненулевое решение, если и только если

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{3}$$

Определение. Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* для системы (1), корни этого уравнения называются *характеристическими числами*.

Из равенства (2) следует, что вектор-функция $x=\gamma e^{\lambda t}$ является решением системы (1) тогда, и только тогда, когда λ – собственное число матрицы A, а γ – соответствующий этому числу собственный вектор.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A, каждое из них выписано столько раз, какова его кратность.

Опишем способ построения фундаментальной системы решений системы (1), аналогичный методу Эйлера построения фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Пусть все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ вещественные и простые (то есть не кратные).

Тогда каждому из собственных чисел λ_j матрицы A соответствует вещественный собственный вектор γ_j ($j = 1, 2, ..., n$). При этом, как известно, разным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные вектора.

И система (1) имеет фундаментальную систему решений

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t},\ \gamma_2 e^{\lambda_2 t}, ...,\ \gamma_n e^{\lambda_n t}.$$

2. Пусть среди корней характеристического уравнения (3) есть кратные.

Если вещественный корень λ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, имеет кратность $d_j \geq 2$, то решения системы (1), отвечающие в фундаментальной системе решений числу λ_j, следует искать в виде

$$x = \gamma_j(t) e^{\lambda_j t}, \tag{4}$$

где $\gamma_j(t)$ – векторный многочлен степени не выше, чем $(d_j - 1)$.

В следующем параграфе (с помощью матричного метода интегрирования линейной системы с постоянными коэффициентами) докажем, что существует ровно d_j линейно-независимых решений вида (4), которые в фундаментальной системе решений системы (1) отвечают собственному числу λ_j кратности d_j.

3. Пусть среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ есть комплексные.

Заметим, что в этом случае комплексным собственным числам отвечают комплекснозначные решения вида (4) системы (1). Для построения вещественной фундаментальной системы в комплекснозначных решениях вида $\gamma_j(t) e^{\lambda_j t}$ следует разделить вещественные и мнимые части.

Лемма. Если $u(t)$, $v(t)$ – вещественные вектор-функции, и комплекснозначная функция $w(t) = u(t) + iv(t)$ ($i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица) – решение системы (1), то $u(t)$ и $v(t)$ – решения системы (1).

Доказательство леммы. С одной стороны, $\dot{w}(t) = \dot{u}(t) + i\dot{v}(t)$, с другой стороны,

$$\dot{w}(t) = Aw(t) = A\big(u(t) + iv(t)\big) = Au(t) + iAv(t).$$

Поэтому $\dot{u}(t) = Au(t)$ и $\dot{v}(t) = Av(t)$, то есть $u(t)$ и $v(t)$ - решения системы (1), и лемма доказана.

Пусть $\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, – простое собственное число матрицы A, γ_j – соответствующий λ_j собственный вектор, тогда и $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ – простое собственное число матрицы A, а $\overline{\gamma}_j$ – соответствующий $\overline{\lambda}_j$ собственный вектор. Функции $\gamma_j e^{\lambda_j t}$ и $\overline{\gamma}_j e^{\overline{\lambda}_j t}$ – решения системы (1), и, согласно лемме, вещественные функции $\mathrm{Re}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\gamma_j e^{\lambda_j t}\right)$ – тоже решения системы (1). Эта пара функций в фундаментальной системе решений соответствует паре характеристических чисел λ_j и $\overline{\lambda}_j$.

Если $\lambda_j = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$, – характеристическое число кратности $d_j \geq 2$, то и $\overline{\lambda}_j = \alpha - i\beta$ – характеристическое число кратности d_j. Разделяя в решениях вида (4) вещественные и мнимые части, мы получим $2d_j$ линейно независимых решений, отвечающих в фундаментальной системе решений паре корней характеристического уравнения λ_j и $\overline{\lambda}_j$ кратности d_j.

Упражнение. Докажите, что после такого «овеществления» решений фундаментальная система решений останется фундаментальной.

§8. Матричный метод интегрирования линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Сначала напомним некоторые сведения из теории матриц.

Последовательность матриц $A_k = \left\{a_{jm}^{[k]}\right\}_{[n\times n]}$ ($k \in N$) *сходится* к матрице $A = \left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$ при $k \to +\infty$ (пишем $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$), если $\left\|A_k - A\right\| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Нетрудно проверить, что $A_k \underset{k\to+\infty}{\to} A$ если, и только если $a_{jm}^{[k]} \underset{k\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j, m \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ряд из матриц $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$ *сходится* к матрице A, если сходится к A последовательность его частичных сумм. При этом пишем $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k = A$.

Ясно, что $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k = A$ если, и только если $\sum_{k=0}^{s} a_{jm}^{[k]} \underset{s\to+\infty}{\to} a_{jm}$ для всех $j, m \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ряд из матриц $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k$ *сходится абсолютно*, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \left\|A_k\right\|$. При этом из абсолютной сходимости матричного ряда следует его сходимость.

Для матричных рядов существует аналог признака Вейерштрасса. Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ сходится, и $\left\|A_k\right\| \le b_k$ для всех $k \in N$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ тоже сходится, причем абсолютно. При этом говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Пусть $A = \left\{a_{jm}\right\}_{[n\times n]}$ – постоянная матрица. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{1}$$

где $0!=1$, $A^0 = E_{[n\times n]}$ ($E_{[n\times n]} = E$ – единичная матрица размерности n).

Поскольку $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$, а числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^k$ сходится к $e^{\|A\|}$, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится абсолютно.

Определение. Сумма ряда (1) называется *экспонентой матрицы* A. Обозначение: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^A$.

Если $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ – произвольные квадратные матрицы, то, вообще говоря, e^{A+B} не равно $e^A e^B$.

Упражнение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $e^{A+B} = \begin{pmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{pmatrix}$, а $e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Но если A и B коммутируют, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ – квадратные матрицы. Если $AB = BA$, то

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Доказательство леммы 1. Сравним ряды

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k$$

и

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} B^m\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} A^{k-s} B^s\right).$$

Очевидно, что первые два члена этих рядов (при $k=0$ и при $k=1$) совпадают.

При $k=2$ член первого ряда равен $\frac{1}{2}(A+B)^2 = \frac{1}{2}\left(A^2 + AB + BA + B^2\right)$, а член второго ряда равен $\frac{1}{2}\left(A^2 + 2AB + B^2\right)$. Если $AB = BA$, то эти слагаемые равны между собой.

Для доказательства равенства членов этих рядов при $k \ge 3$, достаточно доказать, что

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} A^{k-s} B^{s} = \frac{1}{k!}(A+B)^{k},$$

то есть

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!(k-s)!} A^{k-s} B^{s} = (A+B)^{k}.$$

Последнее равенство хорошо известно в скалярном случае (формула бинома Ньютона). Доказательство этой формулы в случае, когда A и B – коммутирующие матрицы, ничем не отличается от скалярного случая.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $A_{[n\times n]}$ и $B_{[n\times n]}$ – квадратные матрицы, и существует матрица $S_{[n\times n]}$ такая, что $\det S \ne 0$, и $A = SBS^{-1}$, тогда

$$e^{A} = S\, e^{B} S^{-1}.$$

Доказательство леммы 2. Оценим норму $\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k} - S\, e^{B} S^{-1} \right\|$.

$$A^{k} = \left(SBS^{-1}\right)^{k} = SBS^{-1}SBS^{-1}...SBS^{-1} = SB^{k} S^{-1},$$

и

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^{k} - Se^{B}S^{-1} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} SB^{k}S^{-1} - Se^{B}S^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| S\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^{k} - e^{B} \right) S^{-1} \right\| \le \|S\| \cdot \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} B^{k} - e^{B} \right\| \cdot \left\| S^{-1} \right\| \underset{m\to+\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $e^{A} = S\, e^{B} S^{-1}$, и лемма доказана.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

где A – постоянная квадратная матрица размерности n.

Теорема. e^{At} – фундаментальная матрица решений системы (2).

Доказательство теоремы. По определению экспоненты

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \ .$$

Элементы этой матрицы есть сходящиеся при всех $t \in R$ степенные ряды, что нетрудно доказать, например, используя признак Даламбера сходимости рядов. Эти ряды можно почленно дифференцировать, поэтому

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \ .$$

Матрицу A в последнем равенстве можно вынести за знак суммы, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k$ сходится абсолютно для всех $t \in R$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{At} \ ,$$

то есть e^{At} удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X} = AX \ ,$$

и столбцы матрицы e^{At} есть решения системы (2).

Вронскиан этих решений равен $W(t) = \det e^{At}$.

Заметим, что $W(0) = \det e^{A \cdot 0} = \det E = 1$, и эти решения линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений.

Следовательно, e^{At} – фундаментальная матрица решений системы (2). Теорема доказана.

Пусть J – жорданова каноническая форма матрицы A, а S – приводящая матрица, $\det S \neq 0$, и $A = S\,J\,S^{-1}$. Тогда $e^{At} = S\,e^{Jt} S^{-1}$ по лемме 2.

Найдем вид матрицы e^{Jt} .

Известно, что

$$J = diag\left(J_1, J_2, ..., J_d\right) \qquad (3)$$

– блочно-диагональная матрица с блоками $J_1, J_2, ..., J_d$, где

$$J_s = \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_p \end{pmatrix}_{[v_s \times v_s]}, \quad s = 1, 2, \dots, d.$$

По диагонали блока J_s стоит собственное число λ_p матрицы A, v_s – размерность этого блока Жордана.

Если $v_s = 1$, то блок J_s будем называть *простым*, в противном случае – *кратным*.

Матрицу J_s можно представить в виде

$$J_s = \lambda_p E_s + H_s, \tag{4}$$

где E_s – единичная матрица размерности v_s, а $H_s = \left\{ h_{jm} \right\}_{[v_s \times v_s]}$ – матрица, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, то есть $h_{jm} = 1$, если $m = j - 1$, и $h_{jm} = 0$, если $m \neq j - 1$, $j = 2, 3, \dots, v_s$.

Из равенства (4) следует, что

$$e^{J_s t} = e^{\left(\lambda_p E_s + H_s \right) t},$$

и согласно лемме 1, поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей,

$$e^{J_s t} = e^{\lambda_p E_s t} e^{H_s t}. \tag{5}$$

$$e^{\lambda_p E_s t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t \right)^k}{k!} E_s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t \right)^k}{k!} E_s = E_s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda_p t \right)^k}{k!} = E_s e^{\lambda_p t}, \tag{6}$$

При умножении матрицы H_s на себя получается матрица $H_s^2 = \left\{ h_{jm}^{[2]} \right\}$, где $h_{jm}^{[2]} = 1$, если $m = j - 2$, и $h_{jm}^{[2]} = 0$, если $m \neq j - 2$, $j = 3, 4, \dots, v_s$.

Если $k \leq v_s - 1$, то $H_s^k = \left\{ h_{jm}^{[k]} \right\}$, где $h_{jm}^{[k]} = 1$, если $m = j - k$, и $h_{jm}^{[k]} = 0$, если $m \neq j - k$, $j = \left(k + 1 \right), \dots, v_s$.

И, наконец, $H_s^k=0$ в случае $k\ge v_s$, где $0=0_{[v_s\times v_s]}$ - нулевая матрица.

Поэтому

$$e^{H_s t}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}H_s^k=E_s+tH_s+\frac{t^2}{2!}H_s^2+\ldots+\frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!}H_s^{v_s-1}. \tag{7}$$

Заметим, что ряд (7) содержит конечное число членов, и $e^{H_s t}$ является матричным многочленом.

И из равенств (5) – (7) получаем:

$$e^{J_s t}=e^{\lambda_p t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ t & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \frac{t^2}{2!} & t & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0\\ \frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!} & \ldots & \ldots & t & 1\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]}$$

или

$$e^{J_s t}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_p t} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t} & 0 & \ldots & 0\\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_p t} & te^{\lambda_p t} & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & e^{\lambda_p t} & 0\\ \frac{t^{v_s-1}}{(v_s-1)!}e^{\lambda_p t} & \ldots & \ldots & te^{\lambda_p t} & e^{\lambda_p t}\end{pmatrix}_{[v_s\times v_s]} \tag{8}$$

Из определения экспоненты матрицы и формулы (3) следует, что e^{Jt} есть блочно-диагональная матрица

$$e^{Jt}=diag\left(e^{J_1 t},e^{J_2 t},\ldots,e^{J_d t}\right), \tag{9}$$

где каждый блок имеет вид (8).

Умножая равенство $e^{At}=Se^{Jt}S^{-1}$ на S справа, получаем:

$$e^{At}S=Se^{Jt}.$$

Поскольку $\det S \neq 0$, то согласно теореме 3 четвертого параграфа, $e^{At}S$ также будет фундаментальной матрицей решений системы (2), откуда следует, что и $S\,e^{Jt}$ будет фундаментальной матрицей решений (2).

Столбцы матрицы $S\,e^{Jt}$ образуют фундаментальную систему решений системы (2). Из (8) и (9) следует, что эти решения имеют вид

$$x = \gamma_p(t)e^{\lambda_p t}, \tag{10}$$

где $\gamma_p(t)$ – векторный многочлен степени не выше, чем $(\nu_s - 1)$.

Пусть λ_p – собственное число матрицы A, алгебраическая кратность которого равна $d_p \geq 2$. Заметим, что суммарная размерность всех блоков J_s в матрице J, отвечающих λ_p, равна d_p. И в построенной фундаментальной системе решений существует ровно d_p решений вида (10), отвечающих кратному собственному числу λ_p.

Тем самым обоснован метод построения фундаментальной системы решений, описанный в предыдущем параграфе, для случая кратных корней характеристического уравнения.

Если среди характеристических чисел матрицы A есть комплексные, то в том же параграфе дан способ «овеществления» построенной комплекснозначной фундаментальной системы решений.

Замечание. Для нахождения частного решения $x = \psi(t)$ линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + q(t), \tag{11}$$

где $A_{[n\times n]}$ – постоянная матрица, а $q(t)$ – непрерывная на R вектор-функция специального вида, существует метод неопределенных коэффициентов, аналогичный соответствующему методу для линейных неоднородных уравнений.

Приведем без доказательства теоремы этого метода (доказательство здесь аналогично доказательству соответствующих теорем для линейных уравнений).

Соответствующая (11) линейная однородная система имеет вид (2), характеристическое уравнение для системы (2):

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{12}$$

1. Пусть неоднородность системы (11) имеет вид

$$q(t) = R_m(t)e^{\lambda_0 t}, \tag{13}$$

где $R_m(t)$ – векторный многочлен степени m.

Теорема 1. Если λ_0 – не корень характеристического уравнения (12), то система (11) с нелинейностью (13) имеет единственное решение вида

$$\psi(t) = Q_m(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $Q_m(t)$ – векторный многочлен степени m.

Теорема 2. Если λ_0 – кратный корень характеристического уравнения (12), то есть собственное число матрицы A кратности $d \geq 1$, то система (11) с нелинейностью (13) имеет решение вида

$$\psi(t) = Q_{m+d}(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $Q_{m+d}(t)$ – векторный многочлен степени не выше, чем $(m+d)$.

Можно доказать, что на самом деле степень многочлена $Q_{m+d}(t)$ не превышает $(m+\nu_0)$, где ν_0 – максимальная из размерностей всех клеток Жордана, отвечающих в жордановой форме матрицы A собственному числу λ_0.

2. Пусть неоднородность уравнения (11) имеет вид

$$q(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{R}_{m_1}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{R}_{m_2}(t)\sin(\beta_0 t)\right), \tag{14}$$

где $\tilde{R}_{m_1}(t)$ и $\hat{R}_{m_2}(t)$ – векторные многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Теорема 3. Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ – не корень характеристического уравнения (12), то система (11) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$\psi(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_m(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_m(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_m(t)$ и $\hat{Q}_m(t)$ – векторные многочлены степени m.

Теорема 4. Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ – корень характеристического уравнения (12) кратности $d \geq 1$, то система (11) с нелинейностью (14) имеет решение вида

$$\psi(t) = e^{\alpha_0 t}\left(\tilde{Q}_{m+d}(t)\cos(\beta_0 t) + \hat{Q}_{m+d}(t)\sin(\beta_0 t)\right),$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, $\tilde{Q}_{m+d}(t)$ и $\hat{Q}_{m+d}(t)$ – векторные многочлены степени не выше, чем $(m+d)$.

§ 9. Асимптотическое поведение решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

где A – постоянная квадратная матрица размерности n, $t \in R$, $x \in R^n$.

Во многих прикладных задачах большую роль играет вопрос об асимптотическом поведении решений линейной системы при $t \to +\infty$. Важно знать такие свойства решений как стремление к нулю при $t \to +\infty$, ограниченность или неограниченность.

Поскольку e^{At} – фундаментальная матрица решений системы (1), то каждое решение системы может быть представлено в виде $x(t) = e^{At}c$, где c – постоянный вектор. Следовательно, поведение на бесконечности решений (1) определяется свойствами матрицы e^{At}.

Ясно, что все решения системы (1) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, если и только если $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ (то есть каждая компонента матрицы e^{At} стремится к нулю при $t \to +\infty$).

Все решения системы (1) ограничены на промежутке $[0, +\infty)$, если и только если $\left\|e^{At}\right\| < +\infty$ на этом промежутке (то есть каждая компонента матрицы e^{At} ограничена на $[0, +\infty)$).

И наконец, существуют неограниченные на промежутке $[0, +\infty)$ решения системы (1), если $\left\|e^{At}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ (то есть существует хотя бы одна компонента матрицы e^{At}, которая стремится к бесконечности при $t \to +\infty$).

Докажем некоторые простые свойства матрицы e^{At} при $t \geq 0$.

Пусть J – жорданова каноническая форма матрицы A, $A = S\,J\,S^{-1}$, $\det S \neq 0$.

Лемма 1.

1. Матрица e^{At} ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, если и только если на этом промежутке ограничена матрица e^{Jt}.
2. $\left\| e^{At} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ тогда и только тогда, когда $\left\| e^{Jt} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Доказательство леммы. Согласно лемме 2 восьмого параграфа, если $A = S\,J\,S^{-1}$, то $e^{At} = S\,e^{Jt} S^{-1}$, следовательно,

$$\left\| e^{At} \right\| \leq \|S\| \cdot \left\| e^{Jt} \right\| \cdot \left\| S^{-1} \right\|, \tag{2}$$

и из ограниченности матрицы e^{Jt} при $t \in [0, +\infty)$ следует ограниченность e^{At}, поскольку S и S^{-1} – постоянные матрицы.

Если $\left\| e^{Jt} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, то из оценки (2) следует, что и $\left\| e^{At} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Аналогично доказывается, что из ограниченности матрицы e^{At} при $t \in [0, +\infty)$ следует ограниченность e^{Jt}, поскольку $e^{Jt} = S^{-1} e^{At} S$.

И, кроме того, если $\left\| e^{At} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$, то и $\left\| e^{Jt} \right\| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$. Лемма доказана.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A, каждое из которых выписано столько раз, какова его кратность.

Теорема 1 (о стремлении к нулю фундаментальной матрицы).

Норма матрицы e^{At} стремится к нулю при $t \to +\infty$, если и только если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме, достаточно доказать теорему для нормы матрицы e^{Jt}.

Как следует из предыдущего параграфа, каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\dfrac{t^k}{k!} e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$.

Заметим, что согласно формуле Эйлера $\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right| = \frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}$, и эта величина стремится к нулю при $t \to +\infty$, если и только если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$.

Таким образом, все элементы матрицы e^{Jt} стремятся к нулю при $t \to +\infty$ (то есть $\left\|e^{Jt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$), если и только если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Теорема доказана.

Теорема 2 (об ограниченности фундаментальной матрицы).

Норма матрицы e^{At} ограничена на промежутке $[0,+\infty)$, если и только если $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ для всех $j = 1,2,...,n$, и всем собственным числам с нулевыми вещественными частями в жордановой форме матрицы A соответствуют лишь одномерные (простые) клетки Жордана.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме, достаточно доказать теорему для нормы матрицы e^{Jt}.

Как показано выше, каждый элемент матрицы e^{Jt} либо равен нулю, либо имеет вид $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$, где $k \in \{0\} \cup N$. При этом $\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}\right| = \frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}$.

Если собственное число λ_j таково, что $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то $\frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ для всех $k \in \{0\} \cup N$, и $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t}$ есть величина, ограниченная при $t \ge 0$.

Если λ_j таково, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то $\frac{t^k}{k!}e^{\operatorname{Re}\lambda_j t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ (даже для $k = 0$), и в матрице e^{Jt} существует неограниченный элемент.

Если $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечают лишь одномерные клетки Жордана, то каждая такая клетка представляет собой один элемент, равный $e^{\lambda_j t}$. При этом $\left|e^{\lambda_j t}\right| = e^0 = 1$, и этот элемент есть величина ограниченная.

Если $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, и собственному числу λ_j в матрице J отвечает клетка Жордана размерности больше единицы, то матрица e^{Jt} имеет элемент, равный $te^{\lambda_j t}$. Этот элемент неограничен при $t \ge 0$, поскольку $\left|te^{\lambda_j t}\right| = t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$.

Таким образом, все элементы матрицы e^{Jt} ограничены на промежутке $[0,+\infty)$ (то есть ограничена норма матрицы e^{Jt}) тогда и только тогда, когда

$\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, и всем собственным числам с нулевыми вещественными частями в матрице J соответствуют лишь одномерные клетки Жордана. Теорема доказана.

Теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3 (о неограниченности фундаментальной матрицы).

Матрица e^{At} неограничена по норме на промежутке $[0, +\infty)$, если и только если среди собственных чисел матрицы A существует хотя бы одно число с положительной вещественной частью или хотя бы одно число с нулевой вещественной частью, которому в жордановой форме матрицы A соответствует клетка Жордана размерности больше единицы.

Оценим теперь норму фундаментальной матрицы e^{At} с помощью собственных чисел матрицы A.

Теорема 4 (об оценке нормы фундаментальной матрицы).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A, каждое из которых выписано столько раз, какова его кратность.

Тогда для любого $\delta > \max\limits_{j=1,2,...,n} \left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$ существует константа $K \ge 1$ такая, что

$$\left\|e^{At}\right\| \le Ke^{\delta t}.$$

Доказательство теоремы 4. Фиксируем $\delta > \max\limits_{j=1,2,...,n} \left(\operatorname{Re}\lambda_j\right)$.

Собственные числа матрицы $B = A - \delta E$ равны $\mu_j = \lambda_j - \delta$, и $\operatorname{Re}\mu_j < 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$. Следовательно, $\left\|e^{Bt}\right\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ согласно теореме 1. Тогда

$$e^{At} = e^{Bt+\delta Et} = e^{Bt}e^{\delta Et} = e^{Bt}Ee^{\delta t} = e^{Bt}e^{\delta t}. \tag{3}$$

Пусть $K = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \left\|e^{Bt}\right\|$. Заметим: $K \ge 1$, поскольку $\left\|e^{Bt}\right\| = 1$ при $t = 0$.

Из равенства (3) следует, что $\left\|e^{At}\right\| \le Ke^{\delta t}$. Теорема доказана.

§10. Линейная однородная система с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица размерности n, непрерывная на всей числовой оси, периодическая с периодом $\omega > 0$:

$$A(t+\omega) = A(t) \text{ для всех } t \in R.$$

Свойства фундаментальных матриц решений системы (1).

1. Если $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (1), то $\Phi(t+\omega)$ – тоже фундаментальная матрица.

Доказательство. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений (1), поэтому $\det\Phi(t) \neq 0$ для всех $t \in R$, и

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Следовательно, $\det\Phi(t+\omega) \neq 0$ для всех $t \in R$, и

$$\dot{\Phi}(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega),$$

то есть $\Phi(t+\omega)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{2}$$

и значит, является фундаментальной матрицей решений (1). Доказательство закончено.

2. Существует квадратная матрица B порядка n, $\det B \neq 0$, такая, что для всех $t \in R$

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B.$$

Это свойство следует из теоремы 3 четвертого параграфа об общем виде фундаментальных матриц системы.

3. Если $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ – фундаментальные матрицы решений системы (1), $\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B$, а $\Psi(t+\omega)=\Psi(t)\tilde{B}$, то существует матрица S такая, что $\det S \neq 0$, и $\tilde{B}=S^{-1}BS$.

Доказательство. $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ – фундаментальные матрицы решений (1), и по теореме об общем виде фундаментальных матриц, существует матрица S такая, что $\det S \neq 0$, и $\Psi(t)=\Phi(t)S$. Тогда

$$\Psi(t+\omega)=\Phi(t+\omega)S=\Phi(t)BS=\Phi(t)S\,S^{-1}BS=\Psi(t)S^{-1}BS,$$

с другой стороны, $\Psi(t+\omega)=\Psi(t)\tilde{B}$, следовательно, $\Psi(t)S^{-1}BS=\Psi(t)\tilde{B}$.

Фундаментальная матрица всегда обратима. Умножая обе части последнего равенства на $\Psi^{-1}(t)$ слева, получим нужное равенство $\tilde{B}=S^{-1}BS$.

Доказательство закончено.

Замечание 1. Из третьего свойства следует, что у матриц B и $\tilde{B}$, порождаемых различными фундаментальными матрицами, одинаковый набор собственных чисел и одинаковая жорданова форма.

Теорема о мультипликаторах.

Рассмотрим одну из фундаментальных матриц системы (1), а именно фундаментальную матрицу Коши $\Phi(t)=\Phi(t,0)$, которая обращается в единичную при $t=0$. Положим $t=0$ в равенстве $\Phi(t+\omega)=\Phi(t)B$, тогда $B=\Phi(\omega)$.

Определение. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица Коши системы (1) (такая, что $\Phi(0)=E$). Матрица $\Phi(\omega)$ называется *матрицей монодромии*, а ее собственные числа называются *мультипликаторами* системы (1).

Теорема 1. Число ρ – мультипликатор системы (1) если, и только если у системы (1) существует нетривиальное решение $x=\xi(t)$ такое, что

$$\xi(t+\omega)=\rho\xi(t) \tag{3}$$

для всех $t \in R$.

Заметим, что это решение может быть комплекснозначным.

Доказательство теоремы 1. Пусть ρ – мультипликатор системы (1), тогда по определению, ρ – собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица Коши системы (1) ($\Phi(0)=E$). Пусть собственному числу ρ соответствует собственный вектор γ, тогда

$$\Phi(\omega)\gamma = \rho\gamma . \tag{4}$$

Любое решение $x=\xi(t)$ системы (1) можно записать в виде

$$\xi(t)=\Phi(t)\xi(0). \tag{5}$$

Рассмотрим решение с начальными условиями $\xi(0)=\gamma$. Докажем, что $\xi(t)$ – искомое решение. Действительно,

$$\xi(t+\omega)=\Phi(t+\omega)\xi(0)=\Phi(t)\Phi(\omega)\xi(0),$$

и согласно (4),

$$\xi(t+\omega)=\Phi(t)\rho\xi(0)=\rho\Phi(t)\xi(0)=\rho\xi(t),$$

то есть решение $x=\xi(t)$ удовлетворяет условию (3).

Пусть теперь решение $x=\xi(t)$ системы (1) удовлетворяет условию (3), докажем, что ρ – мультипликатор (1).

Сначала положим $t=0$ в равенстве (3), и получим: $\xi(\omega)=\rho\xi(0)$.

Теперь положим $t=\omega$ в равенстве (5), тогда $\xi(\omega)=\Phi(\omega)\xi(0)$.

Из двух последних равенств следует, что

$$\Phi(\omega)\xi(0)=\rho\xi(0),$$

то есть ρ – собственное число матрицы $\Phi(\omega)$, а $\xi(0)$ – отвечающий ρ собственный вектор. Теорема доказана.

Определение. Решение системы (1), удовлетворяющее условию (3), называется *нормальным решением*.

Следствие 1. ω-периодическая система (1) имеет ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный 1.

Следствие 2. ω-периодическая система (1) имеет периодическое решение с наименьшим положительным периодом, равным 2ω, тогда и только тогда, когда среди ее мультипликаторов существует по крайней мере один, равный (-1).

Доказательство следствия 2. Если существует мультипликатор $\rho = -1$, то система (1) имеет решение $\xi(t)$, удовлетворяющее условию (3). Тогда

$$\xi(t+2\omega) = -\xi(t+\omega) = \xi(t),$$

и это решение является 2ω-периодическим.

Пусть теперь система (1) имеет 2ω-периодическое решение $\xi(t) = \Phi(t)\xi(0)$, и 2ω есть наименьший положительный период этого решения. Тогда

$$\xi(t+2\omega) = \Phi(t+2\omega)\xi(0) = \Phi(t+\omega)\Phi(\omega)\xi(0) = \Phi(t)\Phi^2(\omega)\xi(0).$$

Поскольку $\xi(t+2\omega) = \xi(t)$, то $\Phi(t)\Phi^2(\omega)\xi(0) = \Phi(t)\xi(0)$.

Умножая обе части последнего равенства на $\Phi^{-1}(t)$ слева, получим:

$$\Phi^2(\omega)\xi(0) = \xi(0),$$

то есть единица есть собственное число матрицы $\Phi^2(\omega)$, а $\xi(0)$ – отвечающий этому числу собственный вектор. Следовательно, $\rho = 1$ или $\rho = -1$ является собственным числом матрицы $\Phi(\omega)$ или мультипликатором системы (1).

Если $\rho = 1$ – мультипликатор системы (1), то $\xi(t)$ является ω-периодическим решением. Это противоречит тому предположению, что наименьший положительный период $\xi(t)$ равен 2ω.

Следовательно, $\rho = -1$. И следствие доказано.

Логарифм матрицы.

Определение. Матрица B называется *логарифмом матрицы* A, если $A = e^B$.

Множество всех логарифмов матрицы A будем обозначать через $Ln A$. Как будет ясно из дальнейшего изложения, если определитель A не равен нулю, то множество $Ln A$ бесконечно. Для конкретной матрицы $B \in Ln A$ будем использовать обозначение $B = ln A$.

Лемма. Если $\det A \neq 0$, то множество $Ln\,A$ не пусто.

Доказательство леммы. Пусть J – жорданова каноническая форма матрицы A, $A = S\,J\,S^{-1}$, $\det S \neq 0$.

Хорошо известно, что $J = diag\left(J_1, J_2, ..., J_d\right)$ – блочно-диагональная матрица с блоками $J_1, J_2, ..., J_d$.

Пусть v_s - размерность блока J_s, $s \in \{1, 2, ..., d\}$. Тогда блок J_s можно представить в виде

$$J_s = \lambda_p E_s + H_s,$$

где λ_p – собственное число матрицы A, E_s – единичная матрица размерности v_s, матрица H_s – квадратная матрица размерности v_s, у которой под главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

По условию $\det A \neq 0$, поэтому $\lambda_p \neq 0$, и мы можем написать

$$J_s = \lambda_p \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right).$$

По аналогии с рядом Тейлора для скалярной функции $\ln\left(1+z\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} z^k$ положим

$$ln\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k, \tag{6}$$

и

$$ln\,J_s = E_s\, ln\,\lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-1\right)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k, \tag{7}$$

где

$$ln\lambda_p = ln\left|\lambda_p\right| + i\left(\arg\lambda_p + 2\pi m\right), \tag{8}$$

$\arg\lambda_p \in \left(-\pi, \pi\right]$, m – некоторое фиксированное целое число.

Заметим, что матрица $ln\,J_s$ определена неоднозначно из-за неоднозначности определения $ln\,\lambda_p$. Формула (8) задает одну из ветвей многозначной функции $Ln\,\lambda_p$ при фиксированном значении m.

Ряд, стоящий в правых частях равенств (6) и (7), сходится, поскольку имеет конечное число членов ($H_s^k = 0$, если $k \ge \nu_s$, как показано в восьмом параграфе).

Проверим, что формула (7) действительно определяет $ln\, J_s$, то есть $e^{ln\, J_s} = J_s$. Из (7) следует, что

$$e^{ln\, J_s} = \exp\left(E_s\, ln\lambda_p + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right).$$

И поскольку единичная матрица коммутирует с любой матрицей (согласно лемме 1 восьмого параграфа)

$$e^{ln\, J_s} = e^{E_s\, ln\, \lambda_p} \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right). \tag{9}$$

Из определения матричной экспоненты следует, что $e^{E_s\, ln\, \lambda_p} = E_s e^{ln\lambda_p}$.

Из курса математического анализа известно, что для скалярной переменной z справедливо тождество $e^{\ln(1+z)} = 1 + z$. Поскольку скалярные и матричные ряды для функций e^z и $\ln(1+z)$ задаются одинаковыми буквенными формулами, с которыми можно оперировать формально одинаково, то и для матричных рядов будет справедливо аналогичное тождество. Поэтому (с учетом равенства (6))

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\lambda_p^k} H_s^k \right) = \exp\left(\ln\left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right) \right) = E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s.$$

И равенство (9) можно переписать в виде

$$e^{Ln\, J_s} = E_s e^{ln\lambda_p} \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right).$$

Следовательно,

$$e^{Ln\, J_s} = \lambda_p \left(E_s + \frac{1}{\lambda_p} H_s \right) = E_s \lambda_p + H_s = J_s,$$

и формула (7) определяет логарифм для жорданова блока J_s.

Положим

$$ln\, J = diag\left(ln\, J_1, ln\, J_2, ..., ln\, J_d \right), \tag{10}$$

и

$$ln\,A = S\,ln\,J\,S^{-1}. \tag{11}$$

Проверим, что $e^{ln\,A} = A$.

По лемме 2 восьмого параграфа

$$e^{ln\,A} = e^{S\,ln\,J\,S^{-1}} = S\,e^{ln\,J}\,S^{-1}.$$

Используя формулы (10), (11) и определение матрицы J, получаем

$$e^{ln\,A} = S\,e^{diag\left(ln\,J_1, ln\,J_2,...,ln\,J_d\right)}\,S^{-1} = S\,diag\left(e^{ln\,J_1}, e^{ln\,J_2},...,e^{ln\,J_d}\right)S^{-1} =$$

$$= S\,diag\left(J_1, J_2,..., J_d\right)S^{-1} = S\,J\,S^{-1} = A.$$

Таким образом, формулы (7), (10) и (11) определяют $ln\,A$, лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ – собственные числа матрицы A. Тогда из формул (7) и (10) следует, что $ln\,\lambda_1, ln\,\lambda_2,..., ln\,\lambda_n$ являются собственными числами для построенной выше матрицы $ln\,A$.

Замечание 3. Как уже отмечалось в доказательстве леммы, $ln\,A$ определяется неоднозначно, в силу формулы (8). Кроме того, у вещественной матрицы не всегда существует вещественный логарифм.

Утверждение. Вещественная матрица A, $\det A \neq 0$, имеет вещественный логарифм, если и только если среди ее собственных чисел нет вещественных отрицательных, либо каждому отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы A четное число одинаковых клеток Жордана.

Доказательство этого утверждения можно найти в книге Ф.Р. Гантмахера «Теория матриц» [9]. Здесь мы оставляем это утверждение без доказательства.

Теорема Флоке.

Теорема 2 (теорема Флоке). Любая фундаментальная матрица системы (1) представима в виде

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}, \tag{12}$$

где R - постоянная матрица, а $Q(t)$ – матрица ω-периодическая.

Доказательство теоремы 2. По второму свойству фундаментальных матриц системы (1), существует матрица B, $\det B \neq 0$, такая, что

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$$

для всех t.

Положим $R = \frac{1}{\omega} ln B$, $Q(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$, и докажем, что $Q(t)$ – матрица ω-периодическая.

Заметим, что из определения матрицы R следует, что $Be^{-R\omega}$ – единичная матрица, поэтому

$$Q(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-R(t+\omega)} = \Phi(t)Be^{-R\omega}e^{-Rt} = \Phi(t)e^{-Rt} = Q(t).$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Из замечания 3 следует, что матрица R в представлении (12), вообще говоря, комплексная. Этого можно избежать, если в теореме от матрицы $Q(t)$ требовать 2ω-периодичности, а не ω-периодичности.

Действительно,

$$\Phi(t+2\omega) = \Phi(t+\omega)B = \Phi(t)B^2.$$

Известно, что матрица B^2 либо не имеет вещественных отрицательных собственных чисел, либо каждому ее отрицательному собственному числу соответствует в жордановой форме матрицы B^2 четное число одинаковых клеток Жордана [9].

Поэтому существует вещественная матрица $\tilde{R} = \frac{1}{2\omega} ln B^2$.

Положим $\tilde{Q}(t) = \Phi(t)e^{-\tilde{R}t}$, тогда

$$\tilde{Q}(t+2\omega) = \Phi(t+2\omega)e^{-\tilde{R}(t+2\omega)} = \Phi(t)B^2e^{-2\tilde{R}\omega}e^{-\tilde{R}t} = \Phi(t)e^{-\tilde{R}t} = Q(t),$$

то есть $\tilde{Q}(t)$ – матрица 2ω-периодическая, и $\Phi(t) = \tilde{Q}(t)e^{\tilde{R}t}$.

Замечание 5. Из представления (12) следует, что характер поведения решений системы (1) при $t \to +\infty$ зависит от поведения на бесконечности элементов матрицы e^{Rt}, поскольку $Q(t)$ есть матрица ограниченная (как непрерывная, ω-периодическая матрица, определенная на всей числовой оси).

Матрица e^{Rt} является фундаментальной матрицей решений системы

$$\dot{z} = Rz,$$

а характер поведения решений этой системы при $t \to +\infty$ зависит от собственных чисел матрицы R, как было показано в предыдущем параграфе.

Если $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ – собственные числа матрицы B (то есть мультипликаторы системы (1)), то из определения логарифма следует, что

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega} ln\, \rho_1, \;\; \mu_2 = \frac{1}{\omega} ln\, \rho_2, \; ..., \;\; \mu_n = \frac{1}{\omega} ln\, \rho_n$$

– собственные числа матрицы R.

Приводимость системы с периодическими коэффициентами.

Определение. Система с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = P(t)x \tag{13}$$

называется *приводимой к системе с постоянными коэффициентами*

$$\dot{z} = Cz, \tag{14}$$

или просто *приводимой*, если существует преобразование

$$x = L(t)z, \tag{15}$$

приводящее систему (13) к системе (14), такое, что матрица $L(t)$ непрерывно дифференцируема и обратима, и матрицы $L(t)$, $L^{-1}(t)$, $dL(t)/dt$ ограничены.

Матрица $L(t)$ называется *матрицей Ляпунова*, преобразование (15) называется *преобразованием Ляпунова*.

Теорема 3 (теорема Ляпунова). Система (1) с периодическими коэффициентами приводима.

Доказательство теоремы 3. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (1) представима в виде (12). Докажем, что $Q(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$ – матрица Ляпунова.

$Q(t)$ – непрерывно дифференцируемая и обратимая матрица, поскольку $\det Q(t) = \det \Phi(t) \cdot \det e^{-Rt} \neq 0$.

$Q(t)$, $Q^{-1}(t)$, $dQ(t)/dt$ – матрицы непрерывные, ω-периодические, определенные на всей числовой оси, и следовательно, эти матрицы ограничены.

Сделаем в системе (1) замену $x = Q(t)z$, или $x = \Phi(t)e^{-Rt}z$.

С одной стороны,

$$\dot{x} = \dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z + \Phi(t)(-R)e^{-Rt}z + \Phi(t)e^{-Rt}\dot{z},$$

с другой стороны,

$$\dot{x} = A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z,$$

следовательно,

$$\dot{\Phi}(t)e^{-Rt}z + \Phi(t)e^{-Rt}(-R)z + \Phi(t)e^{-Rt}\dot{z} = A(t)\Phi(t)e^{-Rt}z. \qquad (16)$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет соответствующему системе (1) матричному уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, поэтому (16) можно переписать в виде

$$\Phi(t)e^{-Rt}(-Rz + \dot{z}) = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на матрицу $e^{Rt}\Phi^{-1}(t)$ слева, получаем систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{z} = Rz.$$

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ - произвольные функции, непрерывные на интервале (a,b).

   а). Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b). Следует ли отсюда, что эти функции линейно независимы на любом интервале $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$?

   б). Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$ линейно независимы на некотором интервале $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, $(\alpha,\beta)\neq(a,b)$. Следует ли отсюда, что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,$ $\varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b)?

2. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы и линейно независимы на интервале (a,b), но вронскиан $W(t)=W(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ этих функций тождественно равен нулю на (a,b).

   Докажите, что

   а). существуют такие точки $t_1,t_2\in(a,b)$, что $\varphi_1(t_1)=0$ и $\varphi_2(t_2)=0$;

   б). существует такой интервал $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$, что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно зависимы на (α,β)?

3. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ непрерывно дифференцируемы и линейно независимы на интервале (a,b), но вронскиан $W(t)=W(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ этих функций тождественно равен нулю на (a,b).

   Докажите (используя утверждения предыдущей задачи), что существует такая точка $t_0\in(a,b)$, что $\varphi_1(t_0)=\varphi_1'(t_0)=\varphi_2(t_0)=\varphi_2'(t_0)=0$.

4. Пусть $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)\in C^{n-1}(a,b)$, и $W(t)=W(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t))$ – определитель Вронского этих функций.

   а). Пусть $t_0,t_1\in(a,b)$, $t_0<t_1$, $W(t_0)\neq0$, $W(t_1)=0$. Что можно сказать о линейной зависимости (или линейной независимости) функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$ на отрезке $[t_0,t_1]$?

   б). Пусть $W(t)\equiv0$ на (a,b). Могут ли функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\dots$, $\varphi_n(t)$ быть линейно зависимыми на (a,b)? Могут ли эти функции быть линейно независимыми?

в). Пусть функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ линейно зависимы на (a,b). Что можно сказать об определителе $W(t)$?

г). Что можно сказать о $W(t)$, если функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ линейно независимы на (a,b)?

5. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t) \in C^{n-1}(a,b)$, и $\varphi_k(t) \neq 0$ для всех $t \in (a,b)$, $k = 1,2,...,n$. Докажите, что для вронскиана этих функций имеет место формула понижения порядка
$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)) = \varphi_1^n(t) W\left(\left(\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\right)', \left(\frac{\varphi_3(t)}{\varphi_1(t)}\right)', ..., \left(\frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)}\right)'\right).$$

6. Даны четыре решения линейного однородного уравнения $y^{(n)} - xy = 0$, графики которых касаются друг друга в точке $x = 0$. Какое максимальное количество линейно независимых функций может оказаться среди этих решений?
Рассмотрите случаи $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$.

7. а). Составьте линейное уравнение (наименьшего возможного порядка) вида $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$, где $a_k(x) \in C(R)$, $k = 0,1,...,n$, решениями которого являются функции x и $\sin x$.

   б). Составьте линейное уравнение (наименьшего возможного порядка) вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$, где $a_k(x) \in C(R)$, $k = 1,...,n$, решениями которого являются функции x и $\sin x$.

8. Может ли функция $y = 1 - \cos x$ быть решением (на интервале $(-1,1)$) линейного однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, где $p(x), q(x) \in C(-1,1)$?

9. Составьте линейное однородное уравнение (наименьшего возможного порядка), которое имеет на интервале $(0,1)$ такие четыре решения:
$$\varphi_1(x) = 1 - x,\ \ \varphi_2(x) = (x-2)^2,\ \ \varphi_3(x) = x^2 + x - 1,\ \ \varphi_4(x) = x^2 - 2x + 2.$$

10. Найдите необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять гладкие коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ линейного однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, чтобы уравнение имело два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, таких, что $y_2(x) = \left(y_1(x)\right)^2$.

11. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является решением задачи Коши $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Докажите, что $\varphi(x)$ – четная функция.

12. Укажите значения параметров α, a и b, при которых существует единственное решение задачи Коши $y(a) = 1, y'(a) = b, y''(a) = \alpha$ линейного уравнения

$$\alpha(x+1)y''' + 2\alpha y'' - (\alpha - 1)x^2 y\,tgx = \ln\frac{3+x}{3-x}.$$

На какой максимальный интервал можно продолжить решение этой задачи в случае $\alpha = -1,\ a = -2,\ b = -3$?

13. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения $(x-2)y'' - 2y' + y\sqrt{x+1} = 0$ с начальными условиями $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0$ и $y_2(0) = 3,\ y_2'(0) = 2$.
Укажите интервал, на который могут быть продолжены эти решения.
Составляют ли эти решения фундаментальную систему решений?
Чему равен вронскиан этих решений при $x = 1$?

14. Рассмотрим линейное уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, где $p(x), q(x), f(x) \in C(R)$; $p(x) \le 0$, $q(x) \le 0$, $f(x) \ge 0$ для всех $x \in R$. Пусть $y = \varphi(x)$ – такое решение этого уравнения, что $\varphi(x_0) > 0$, $\varphi'(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 \in R$. Докажите, что $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ для всех $x \ge x_0$.

15. Пусть $y = \psi_j(x)$, $j = 1,2,3$, – решения линейного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ с начальными условиями $\psi_1(0) = 1,\ \psi_1'(0) = 0$; $\psi_2(0) = 1,\ \psi_2'(0) = 1$; $\psi_3(0) = 0,\ \psi_3'(0) = 1$.
Выразите через $\psi_j(x)$ решение уравнения с начальными условиями $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

16. Известны три частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка: $\varphi_1(x)=x+1$, $\varphi_2(x)=x-1$, $\varphi_3(x)=1-x^2$.
Найдите общее решение этого уравнения.
Составьте такое уравнение.

17. Докажите, что с помощью замены искомой функции $y=u(x)z$, где $u(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau\right)$, $x_0\in(a,b)$, уравнение второго порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $p(x)\in C^1(a,b)$, $q(x)\in C(a,b)$, приводится к каноническому виду $z''+J(x)z=0$, где $J(x)=q(x)-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)$ – *инвариант Пуанкаре* для исходного уравнения.

18. Пусть $J_1(x)$ – инвариант Пуанкаре для уравнения $y''+p_1(x)y'+q_1(x)y=0$, а $J_2(x)$ – инвариант Пуанкаре для уравнения $y''+p_2(x)y'+q_2(x)y=0$, $p_j(x)\in C^1(a,b)$, $q_j(x)\in C(a,b)$, $j=1,2$.
(Инвариант Пуанкаре определен в предыдущей задаче.)
Докажите, что условие $J_1(x)\equiv J_2(x)$ на (a,b) является необходимым и достаточным условием того, что первое уравнение может быть преобразовано во второе с помощью замены $y\mapsto f(x)y$.
Выпишите такую замену в явном виде.

19. Заменой независимой переменной приведите уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=0$ к виду $\frac{d^2y}{dt^2}+b(t)\frac{dy}{dt}\pm y=0$, затем приведите полученное уравнение к каноническому виду (к уравнению, не содержащему слагаемого с первой производной) заменой искомой функции $y=u(t)z$.
Такое преобразование называется *преобразованием Лиувилля*.

20. Докажите, что уравнение $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0$, где $b(x),c(x)\in C(\alpha,\beta)$, $a(x)\in C^1(\alpha,\beta)$, $a(x)\neq 0$ на интервале (α,β), можно привести к самосопряженному виду $\left(p(x)y'\right)'+q(x)y=0$.
Выразите функции $p(x),q(x)$ через $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$.

21. Докажите, что для решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ самосопряженного уравнения $\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$, где $p(x) \in C^1(\alpha,\beta)$, $q(x) \in C(\alpha,\beta)$, $p(x) \neq 0$ на интервале (α,β), верны следующие утверждения:

а). существует такая константа c, что $\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = \dfrac{c}{p(x)}$;

б). если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют общую точку экстремума $x_0 \in (\alpha,\beta)$, то эти решения линейно зависимы.

22. Какой наименьший порядок может иметь линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, решениями которого являются функции

а). $x,\ e^x,\ x\sin x$;

б). $xe^{-x},\ x^2 + x\cos(2x)$;

в). $x^2\sin^2 x + x,\ 1 + x^3e^x,\ \cos(2x)$.

23. Какой наименьший порядок может иметь линейное неоднородное уравнение $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$, где $a_k = const$, $k = 1,\ldots,n$, решениями которого являются функции $y_1(x) = x + xe^{-x}$ и $y_2(x) = x + \cos x$?

24. Пусть $y = \psi(x)$ – решение уравнения $y'' + 5y' + 4y = f(x)$ с начальными условиями $\psi(0) = 1,\ \psi'(0) = 1$. Выразите через $\psi(x)$ решение уравнения с начальными условиями $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

25. Пусть функция $y(x) = x + xq(x)\sin x$ является решением линейного неоднородного уравнения $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = p(x)\cos x$, где $a_k = const$, $k = 1,\ldots,n$, $p(x), q(x)$ – многочлены первого порядка. Какой минимальный порядок может иметь данное уравнение?

26. При каких значениях параметра a существует периодическое решение уравнения $y''' + ay' = \sin(2x)$?

27. При каких целых значениях параметра a уравнение $y'' + a^2 y' = \sin(4x)\cos(2x)$

а). не имеет решений с периодом π?

б). имеет единственное решение с периодом π?

28. При каких значениях параметра a хотя бы одно решение уравнения $y''' + y'' - 2y' = e^{ax} + \sin(2ax)$ ограничено при $x \geq 0$?

29. Сколько решений имеет задача

а). $\left(a^3 - 4a\right)y''' + \left(a^2 + 2a\right)y'' + y' - 2y = ax$, $\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0$,

б). $\left(a^3 - a\right)y''' + \left(a^2 + 2a\right)y'' + y' - 2y = x + a$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$,

в зависимости от значения параметра a?
На каком промежутке заданы такие решения, если они существуют?

30. а). Пусть вектор-функция $x = \varphi(t)$ есть решение линейной однородной системы $\dot{x} = -P^T(t)x$, где $P^T(t)$ – матрица, транспонированная для матрицы $P(t)$. Докажите, что функция $u(t,x) = \left\langle x, \varphi(t)\right\rangle$ есть первый интеграл системы $\dot{x} = P(t)x$. (Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.)

б). Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ – фундаментальная система решений системы $\dot{x} = -P^T(t)x$. Докажите, что функции $u_k(t,x) = \left\langle x, \varphi_k(t)\right\rangle$, $k = 1,\ldots,n$, составляют базис первых интегралов для системы $\dot{x} = P(t)x$.

31. Пусть матрица $P(t)$ такова, что для всех $t \geq 0$ выполнено условие

$$P(t)\int_0^t P(s)\,ds = \int_0^t P(s)\,ds \cdot P(t). \qquad (*)$$

Докажите, что $\varPhi(t) = \exp\left(\int_0^t P(s)\,ds\right)$ является фундаментальной матрицей системы $\dot{x} = P(t)x$.

Покажите: если условие (*) не выполняется, то утверждение, вообще говоря, неверно.

32. Решите систему $\dot{x} = A \cdot t \cdot x$, где A – постоянная матрица.

33.Существует ли такая матрица A, что

а). $e^{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$?

б). $e^{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$?

34.Найдите e^{At}, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

35.Пусть A, B - постоянные квадратные матрицы размерности n.
Покажите, что из равенства $e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$ не следует, что $AB=BA$.
Верно ли, что $AB=BA$, если $e^{At}e^{Bt}=e^{Bt}e^{At}$ для всех $t\in R$?

36.Известно, что $e^{A}=\sum_{k=0}^{5}k!A^{k}$. Что можно сказать о собственных числах и жордановой форме матрицы A?

37.Пусть квадратная матрица размерности n имеет единственное собственное число λ алгебраической кратности n. Покажите, что

$$e^{At}=e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}t^{k}\left(A-\lambda E\right)^{k}.$$

38.Может ли вектор-функция $x=\begin{pmatrix}t^{2}-1\\ t^{2}+2\\ t^{3}-3\end{pmatrix}e^{t}$ быть решением некоторой линейной однородной системы $\dot{x}=Ax$ третьего порядка?

39.Известно, что система с постоянными коэффициентами $\dot{x}=Ax$ имеет решение $x=\varphi(t)$, и первая компонента вектора $\varphi(t)$ равна

а) $t^{2}e^{-2t}$;

б) $t\cos(2t)$.

Что можно сказать о собственных числах матрицы A и о размерности системы?
Приведите пример такой системы (минимальной размерности).

40. Известно, что линейная однородная система $\dot{x} = Ax$ третьего порядка имеет частное решение $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

а). Каковы собственные числа матрицы A, их геометрическая и алгебраическая кратности?

б). Напишите общее решение системы.

41. Известно, что линейная однородная система $\dot{x} = Ax$ третьего порядка имеет частное решение $\varphi(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$.

а). Каковы собственные числа матрицы A, их геометрическая и алгебраическая кратности?

б). Напишите общее решение системы.

42. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(2t), \\ \dot{y} = -4x + a\cos(2t) \end{cases}$ имеет периодическое решение?

43. При каких значениях параметров a и b все решения системы $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 4x + a, \\ \dot{y} = 2x - y + b \end{cases}$ ограничены при $t \geq 0$?

44. По фундаментальной матрице $\Phi(t)$ линейной однородной системы с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$ восстановите жорданову форму J матрицы A (найдите собственные числа, их кратность, количество и размерность клеток Жордана), если

а). $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & 4-2t & 3-2t & 2-2t \\ 2t & 2t & 2 & 2t \\ 3 & 3+t & 1+t & 4+t \\ -1+t & t & 2 & t \end{pmatrix}$,

б). $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 5 & 7+4t & 4+4t & 6+6t+2t^2 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 5+2t & 5+2t & 3+3t+t^2 \\ 1 & 3 & 4 & 4+2t \end{pmatrix}$.

45. Существует ли такое значение параметра a, при котором определитель любой фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, остается постоянным при изменении t?

46. Пусть вектор-функция $x = p(t)e^{\lambda t}$, где $p : R \to R^n$, есть решение линейной однородной системы $\dot{x} = Ax$. Докажите, что функция $x = \dot{p}(t)e^{\lambda t}$ тоже является решением этой системы.

47. Пусть $x = p_m(t)e^{\lambda t}$, где $p_m(t)$ – векторный многочлен степени m, есть решение линейной однородной системы $\dot{x} = Ax$. Докажите, что набор функций $p_m(t)e^{\lambda t}$, $\dot{p}_m(t)e^{\lambda t}$, …, $p_m^{(m-1)}(t)e^{\lambda t}$, $p_m^{(m)}(t)e^{\lambda t}$ состоит из $(m+1)$ линейно независимых решений этой системы.

48. Какому условию должны удовлетворять мультипликаторы линейной системы с периодическими коэффициентами $\dot{x} = A(t)x$ для того, чтобы все решения системы стремились к нулю при $t \to +\infty$?

49. Найдите мультипликатор для уравнения $\dot{x} = \left(a + \sin^2 t\right)x$.

50. При каких значениях параметра a уравнение $\dot{x} = \left(a + \sin^2 t\right)x + 1$ имеет ровно одно периодическое решение?

Список литературы для самостоятельной работы

Основная литература

1. Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., Плисс В.А., Родионова А.А. Дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решений. Учебно-методическое пособие. Опубликовано в репозитории СПбГУ. 2021.
2. Бегун Н.А., Васильева Е.В., Звягинцева Т.Е., Ильин Ю.А., Плисс В.А., Родионова А.А. Общая теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебно-методическое пособие. Опубликовано в репозитории СПбГУ. 2022.
3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: «Лань». 2011. https://proxy.library.spbu.ru:2190/book/1542
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Интеграл-пресс, 1998.

Дополнительная литература

5. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета. 2005.
6. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Издание 7-е, дополненное. СПб.: «Лань», 2002.
7. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Минск, 1987.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1984.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. «Наука». 1966.
10. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.
11. Рейзинь Л.Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, 1971.
12. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. 1978.
14. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1979.
16. Адрианова Л.Я., Крыжевич С.Г. Некоторые коэффициентные критерии свойств решений линейных уравнений второго порядка. Изд-во СПбГУ. 2002.