

Санкт — Петербургский государственный университет
Кафедра моделирования электромеханических и компьютерных
систем

Самойлов Илья Александрович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Математическое моделирование
движения пальцев руки**

Направление 010900

Прикладная математика и физика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Трегубов В. П.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Королев В. С.

Научный руководитель
образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Егоров Н. В.

Санкт — Петербург
2016

Содержание

Введение	3
1 Построение модели	6
1.1 Анатомическая модель	6
1.2 Механическая модель	8
1.2.1 Моделирование сократительных элементов	9
1.3 Математическая модель	10
1.3.1 Обобщенные силы	12
1.4 Функции управления	14
2 Экспериментальное исследование движения пальца	17
Заключение	26
Литература	27
Приложение	28

Введение

Согласно исследованиям [1] повреждения кисти и пальцев составляют 30 - 57% от общего числа повреждений опорно – двигательного аппарата и в 12,5% случаев являются причиной инвалидности человека.

У людей, получивших серьезные повреждения, значительно ухудшается качество жизни: зачастую теряется способность к выполнению трудовой деятельности, самообслуживанию, ухудшается психологическое состояние.

При наиболее серьезных травмах верхних конечностей производят их хирургическое удаление. Предлагаемые взамен протезы зачастую либо не являются достаточно функциональными, либо применимы для узкого спектра повреждений [2].

Большинство подобных ограничений являются результатом только механического подхода к вопросам моделирования и проектирования протезов, и могут быть сняты, при создании моделей, направленных на интеграцию с нервной системой человека.

Помимо применений в области протезирования, подобные модели необходимы в областях связанных с диагностированием патологий развития нервной системы и опорно—двигательно аппарата человека [1].

Таким образом, можно говорить, что существует **потребность** в создании математической модели движения верхних конечностей человека, в частности пальцев, максимально приближенной к естественной, управление движением в которой, осуществляется с помощью нервной системы человека.

Построение подобных моделей представляет собой синтез механики, математической теории мышечных сокращений и наук о функционировании нервной системы человека.

Основным литературным источником информации, использованной в данной работе, являются труд А. Хилла [3], по исследованию

тепловыделения и силы, развиваемой сокращающейся мышцей в максимально возможном возбужденном состоянии. Результатом его работы стало соотношение, связывающее силу, развиваемую мышцей и скорость ее сокращения. Однако, данное соотношение было получено при исследовании изолированных от организма мышц и не учитывало механизмы управления силой сокращения со стороны нервной системы.

В свою очередь, связь между силой сокращения отдельных мышечных волокон, их размерами и пороговыми значениями амплитуд нервных импульсов, необходимых мышечным волокнам для включения их в процесс сокращения, была получена в работах Э. Хейнемана [4], и получила название Принцип Хейнемана.

В исследованиях, проведенных М. Аайзерманом и Е. Андреевой [5] было показано, что во время совершения движений, являющихся результатом работы мышц – антагонистов, данные мышцы включаются в работу поочередно, а частота следования нервных импульсов, поступающих на мышцы практически постоянна и управление силой сокращения мышцы происходит с помощью изменения амплитуды, поступающих на нее, нервных импульсов.

Целью данной работы является построение модели движения пальца, управляемого со стороны нервной системы человека.

Задачами данной работы являются:

1. Построить механическую модель пальца.
2. Получить уравнение управляемого сокращения мышцы.
3. Получить систему уравнений движения рассматриваемой модели.
4. Получить явные формулы для вычисления управляющих функций.
5. На основании экспериментальных данных, получить значения управляющих функций на исследуемом промежутке времени.

Стоит отметить, что создаваемая модель является упрощенной по отношению к большому спектру возможных реальных движений и рассматривает только сгибательно – разгибательные движения пальца. Данное упрощение преследует целью уменьшение количества возможных оши-

бок в теоретических рассуждениях и сложности использования модели в прикладных областях.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во **введении** обоснована актуальность исследования, сформулирована цель работы и перечислены решаемые задачи, проведен анализ литературных источников.

Первая глава посвящена обзору и построению анатомической, механической и математической моделям пальца.

В рамках анатомической модели приводятся необходимые анатомические сведения об особенностях моделируемого объекта.

В части посвященной механической модели, антропоморфная модель приближается более простой механической моделью, представляющую из себя кинематическую цепь. Вводится понятие сократительного элемента и выводится уравнение управляемого сокращения мышцы, полученное с использованием экспериментальной зависимости [3].

В части посвященной математической модели представлены уравнения динамики рассматриваемой системы с использованием системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода. Решается прямая задача динамики. На основе ее решения выводится явный вид функций управления.

Вторая глава посвящена проведению расчета управляющих функций на основе построенной модели и законов движения, полученных экспериментально, и обработанных с помощью компьютерной модели с использованием пакета прикладного программного обеспечения Maple.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы.

В **приложении** приведена иллюстрация исследуемого в эксперименте движения, построенная с использованием пакета прикладного программного обеспечения Maple.

Глава 1. Построение модели

1.1 Анатомическая модель

Исследуемым объектом является палец, который состоит из совокупности костей скелета, связок, и мышц, сокращение которых регулируется нервной системой.

Скелет пальца (рис. 1.1а) состоит из трех костей называемых фалангами: проксимальной, средней и дистальной. Исключением является большой палец, имеющий только проксимальную и дистальную фаланги. Фаланги соединены между собой суставами, обеспечивающими поворот одной фаланги относительно другой.

К середине каждой из фаланг крепится соединительная ткань, называемая сухожилием (рис. 1.1б). Задача этой ткани — обеспечение связи между мышцами и соответствующими им фалангами. Исходя из мышц, данная ткань проходит через каждый сустав и закрепляется на фаланге, как на тыльной, так и на ладонной частях.

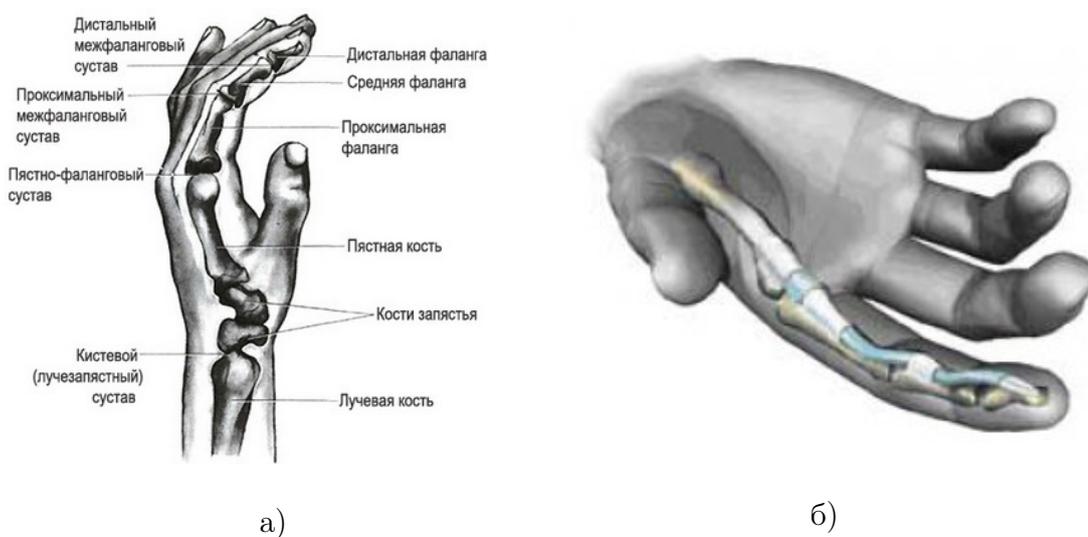


Рис. 1.1: Анатомическая модель пальца: а) Скелетное строение, б) Карта крепления сухожилий

Группа мышц, управляющих рассматриваемым движением пальцев в большинстве своем расположены в области предплечья и является группой многосуставных мышц, т.е. мышц, сухожилия которых, проходят через несколько суставов. Стоит отметить, что во всех положениях сустава мышцы и сухожилия плотно прилегают как к костным элементам, так и к самим суставам. В связи с этими фактами, можно утверждать, что длина сокращения мышцы при совершении пальцем движения, может быть представлена как сумма длин дуг, отмеренных на суставах, соответствующих изменению относительных углов поворота фаланг.

Более того, рассматриваемая группа мышц может быть представлена как совокупность мышц антагонистов: мышц – сгибателей и мышц – разгибателей.

Мышцы – сгибатели (отвечают сгибательным движениям пальца) расположены на внутренней стороне предплечья, и соответствующие им сухожилия крепятся на ладонной стороне фаланг. В свою очередь, мышцы – разгибатели (отвечают разгибательным движениям пальца) расположены на внешней части предплечья и сухожилия, идущие от них, крепятся на тыльной части фаланг.

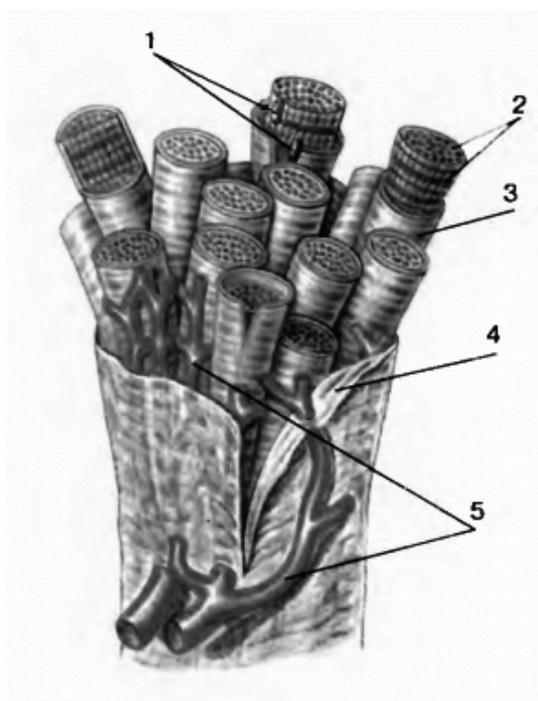


Рис. 1.2: Строение мышечного пучка: 1 – ядра мышечного волокна, 2 – сократительные нити мышечного волокна, 3 – покровная мембрана, 4 – соединительная оболочка, 5 – кровеносные сосуды.

Каждая из мышц состоит из совокупности двигательных единиц, представляющих из себя группу мышечных волокон (рис. 1.2) возбуждающихся одним нервным окончанием. В свою очередь, сократительный аппарат мышечных волокон состоит из нитей последовательно соединенных базовых элементов сокращения — саркомеров. Моделирование сокращения мышцы на уровне отдельных саркомеров подробно рассмотрено в работе В.И. Дещеревского [6].

Каждая скелетная мышца получает от нервной системы электрический сигнал, представляющий собой последовательность быстро следующих друг за другом нервных импульсов. Поступающие к мышцам нервные импульсы заставляют часть волокон сокращаться, причем в соответствии с принципом Хейнемана [4]: чем больше амплитуда импульса, тем большее количество мышечных волокон сокращается. Количество волокон вовлеченных в процесс сокращения определяет силу, развиваемую мышцей.

1.2 Механическая модель

Всякое движение, совершаемое пальцем, подчиняется законам механики, что позволяет приблизить сложную антропоморфную модель, более простой механической моделью.

Построение механической модели (рис. 1.3) основано на приближении фаланг пальцев — абсолютно твердыми стержнями, обладающими одинаковыми массами и длинами, суставов — идеальными шарнирами, сухожилий — нерастяжимыми тяжами, а мышц — сокращающимися элементами, которые развивают усилия в соответствии с величиной нервных импульсов, поступающих на приближаемую мышцу.

В организме человека сгибательно — разгибательные движения пальца осуществляются с помощью сокращения шести мышц: трех мышц — разгибателей и трех мышц — сгибателей, по одну на каждую из фаланг. Известным фактом [5], является то, что у взрослого человека, при совершении естественных для него движений, мышцы—антагонисты включаются в работу поочередно, не оказывая сопротивления мышце — оппоненту.

При условии идентичности антропоморфных характеристик мышц — антагонистов, а так же с целью упрощения записи аналитического вида

развиваемых мышцами сил, было предложено заменить каждую из групп мышц – антогонистов, отвечающих одной фаланге, одним сократительным элементом, принадлежность которого к группе разгибателей или сгибателей определяется по знаку вращающего момента, создаваемого им на соответствующем суставе (рис. 1.3).

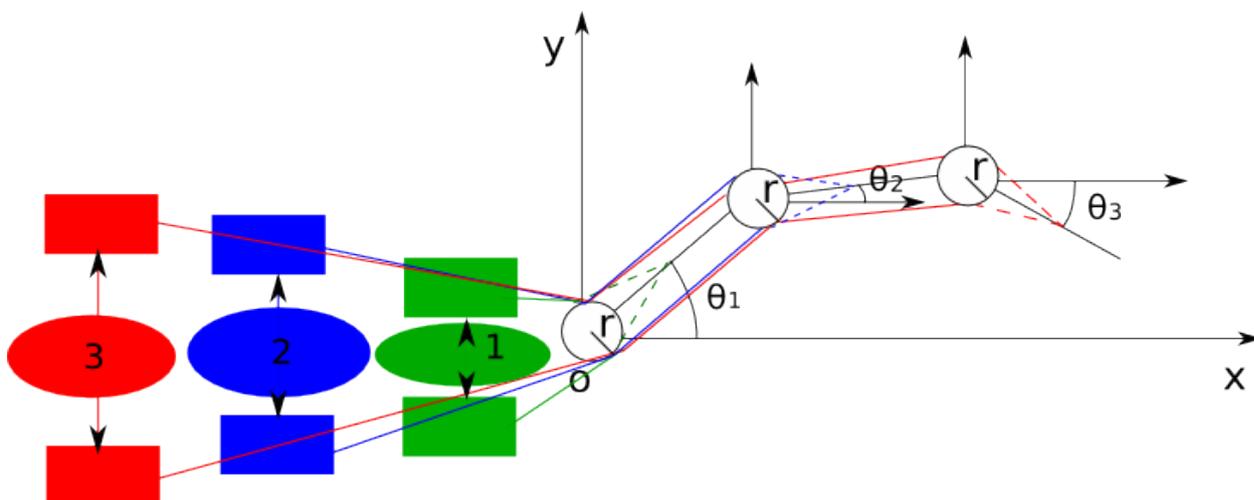


Рис. 1.3: Механическая модель пальца руки: 1 – сократительный элемент, моделирующий работу мышц – антогонистов отвечающих 1-ой (проксимальной) фаланге и 1 суставу, 2 – сократительный элемент, моделирующий работу мышц – антогонистов отвечающих 2-ой фаланге (средней) и 2 суставу, 3 – сократительный элемент, моделирующий работу мышц – антогонистов отвечающих 3-ей фаланге (дистальной) и 3 суставу.

1.2.1 Моделирование сократительных элементов

В экспериментах с изолированными мышцами А. Хиллом [3] была получена связь между скоростью сокращения мышцы и развиваемой ею силой:

$$(P + a)V = b(P_0 - P), \quad (1.1)$$

где a, b, P_0 – постоянные характеристики мышцы, V – средняя скорость сокращения мышцы, P – сила развиваемая мышцей.

Однако, в этих экспериментах изолированная от организма человека мышца, возбуждалась электрическим током, приводящем к задействованию всех мышечных волокон и как следствие, к развитию максимально

возможной силе сокращения мышцы. В то время как, согласно принципу Хейнемена, управление силой сокращения, со стороны нервной системы, осуществляется за счет количества задействованных волокон, которое, в свою очередь, зависит от амплитуды нервных импульсов, поступающих на исследуемую мышцу.

Чтобы учесть это обстоятельство, было предложено мышечную силу, выражаемую из (1.1) умножить на управляющую функцию, представляющую собой амплитуду нервных импульсов, нормированную к единице. В результате, было получено выражение для силы, развиваемой мышцей, в зависимости от амплитуды нервного импульса $A(t)$ и скорости сокращения мышцы $\frac{dL}{dt}$:

$$F(t) = \frac{bP_0 - a\frac{dL}{dt}}{\frac{dL}{dt} + b} A(t) \quad (1.2)$$

1.3 Математическая модель

Описания движения механической модели пальца было произведено с использованием системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.3)$$

где N – количество степеней свободы системы; θ_i – обобщенные координаты; $\dot{\theta}_i$ – обобщенные скорости; T – полная кинетическая энергия системы; Q_i – обобщенные силы, действующие в системе.

В качестве обобщенных координат были выбраны углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ в абсолютной системе координат: между фалангой и горизонталью, совпадающей с положением пальца в состоянии при котором ни одна из мышц сгибателей/разгибателей не претерпевает укорочения (рис. 3). Выбор абсолютной системы координат, обусловлен тем, что система (1.3) имеет в ней легко читаемый и удобный для программирования на ЭВМ вид.

Опустив объемный, но прямолинейный расчет полной кинетической

энергии и ее частных производных, полностью рассмотренный в работе [8], получим что левая часть системы уравнений (1.3) в матричной форме, для рассматриваемой системы, примет вид:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{7}{3}l^2m & \frac{3}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_3) \\ \frac{3}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{4}{3}l^2m & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_2 - \theta_3) \\ \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_3) & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_2 - \theta_3) & \frac{1}{3}l^2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_3(t) \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_3) \\ -\frac{3}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_3) \\ -\frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & -\frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2(t) \\ \dot{\theta}_2^2(t) \\ \dot{\theta}_3^2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Обозначив:

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3}l^2m & \frac{3}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_3) \\ \frac{3}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{4}{3}l^2m & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_2 - \theta_3) \\ \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_1 - \theta_3) & \frac{1}{2}l^2m\cos(\theta_2 - \theta_3) & \frac{1}{3}l^2m \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_3) \\ -\frac{3}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_3) \\ -\frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_1 - \theta_2) & -\frac{1}{2}l^2m\sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Запишем систему уравнений (1.3) в новом виде:

$$B \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_3(t) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2(t) \\ \dot{\theta}_2^2(t) \\ \dot{\theta}_3^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(A_1, t) \\ Q_2(A_2, t) \\ Q_3(A_3, t) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где A_1, A_2, A_3 - искомые функции управления.

Анализ значений в узлах матрицы B и D , позволил распространить (1.4) на систему с N степенями свободы [7]:

$$\sum_{j=i}^N B_{ij}\ddot{\theta}_j + \sum_{j=i}^N D_{ij}\dot{\theta}_j^2 = Q_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.5)$$

где

$$B_{ij} = \begin{cases} (\frac{1}{2} + N - j)l^2m \cos(\theta_i - \theta_j), & i < j \\ (\frac{1}{3} + N - i)l^2m, & i = j \\ B_{ji}, & i > j \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} (\frac{1}{2} + N - j)l^2m \sin(\theta_i - \theta_j), & i < j \\ 0, & i = j \\ -D_{ji}, & i > j \end{cases}$$

Таким образом, подставляя в (1.4) законы движений для θ_i , возможно получить значения действующих в системе сил, т.е. решить прямую задачу динамики.

1.3.1 Обобщенные силы

Обобщенные силы, действующие в системе, формируются в результате действия сил тяжести Q^G и сил развиваемых сократительными элементами Q_{abs}^{muscle} , где *abs* – значения сил в абсолютной системе координат (рис 1.4).

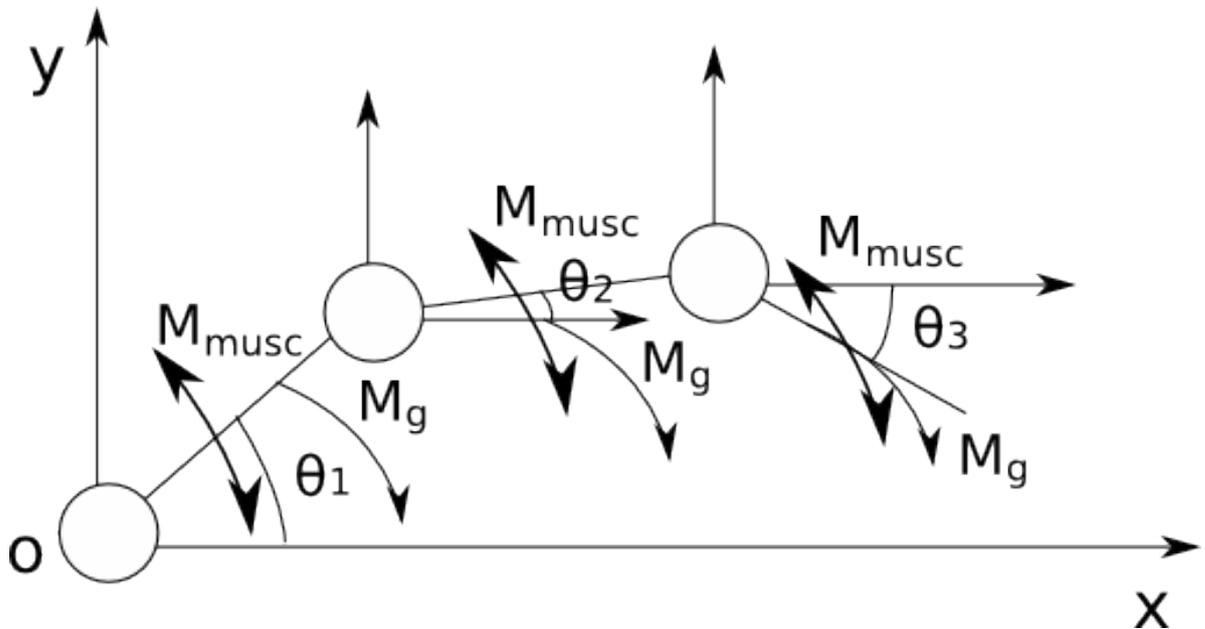


Рис. 1.4: Моменты сил, действующих в системе: M_g - момент силы тяжести, M_{musc} - момент силы, развиваемый сократительными элементами.

Вклад сил тяжести, в случае движения пальца в вертикальной плоскости (рис 1.4), может быть представлен следующим образом:

$$Q^G = - \begin{pmatrix} \frac{5}{2}mgl \cos(\theta_1) + \frac{3}{2}mgl \cos(\theta_2) + \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_3) \\ \frac{3}{2}mgl \cos(\theta_2) + \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_3) \\ \frac{1}{2}mgl \cos(\theta_3) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

а в случае движения пальца в горизонтальной плоскости: $Q^G = 0$.

После анализа выражения (1.6), была замечена закономерность в строках матрицы, что позволило записать вклад сил тяжести в обобщенные силы в общем виде для рассматриваемой системы с N степенями свободы:

$$Q_i^G = - \sum_{j=i}^N (n - j + \frac{1}{2})mgl \cos(\theta_i), \quad (1.7)$$

где Q_i^G есть i -ая строка матрицы Q^G .

Таким образом, система (1.4) с учетом (1.6) примет вид:

$$B \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_3(t) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2(t) \\ \dot{\theta}_2^2(t) \\ \dot{\theta}_3^2(t) \end{pmatrix} = Q^G + Q_{abs}^{muscle} \quad (1.8)$$

На основании (1.8) было получено выражение для обобщенной силы, развиваемой мышцами в абсолютной системе координат:

$$Q_{abs}^{muscle} = B \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_3(t) \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2(t) \\ \dot{\theta}_2^2(t) \\ \dot{\theta}_3^2(t) \end{pmatrix} - Q^G \quad (1.9)$$

Использование абсолютной системы координат позволило воспользоваться не объемными и легко программируемыми формулами (1.5), (1.7), (1.9) для вычисления обобщенных сил с помощью ЭВМ, но полученные таким образом силы Q_{abs}^{muscle} не имеют биологического смысла, в отличии

от сил Q_{rel}^{muscle} , получающихся при вычислениях в относительной системе координат, где обобщенной координатой ϕ_i является угол поворота i -ой фланги относительно $(i - 1)$ -ой и связанной с абсолютной координатой по формулам:

$$\phi_1 = \theta_1, \quad \phi_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = \overline{2, N} \quad (1.10)$$

В свою очередь, использование относительных координат (1.10), приводит систему уравнений (1.3) к громоздкой и не удобной для программирования на ЭВМ форме.

В связи с этими факторами, было предложено вычислять значения Q_{abs}^{muscle} с использованием (1.9), а значения Q_{rel}^{muscle} получать из связи [7]:

$$Q_i^{rel} = \sum_{j=i}^N Q_j^{abs}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.11)$$

где Q_i^{rel} и Q_i^{abs} — i -ые столбцы матриц Q_{rel}^{muscle} и Q_{abs}^{muscle} соответственно.

Таким образом, суммируя выше сказанное, алгоритм вычисления обобщенных сил в относительной системе координат представляет из себя:

1. Решение (1.9) относительно Q_{abs}^{muscle} с использованием абсолютной системы координат;
2. Получение значений строк матрицы Q_{rel}^{muscle} с использованием (1.11).

1.4 Функции управления

Согласно (1.2), сила развиваемая мышцей с учетом управления со стороны нервной системы имеет вид:

$$F(t) = \frac{bP_0 - a \frac{dL}{dt}}{\frac{dL}{dt} + b} A(t),$$

где $\frac{dL}{dt}$ есть скорость сокращения мышцы.

С целью нахождения аналитического вида функции управления, необходимо выразить связь между скоростью сокращения мышцы $\frac{dL}{dt}$ и изменениями обобщенных координат ϕ_i .

Согласно предложенной модели, скорость сокращения сократительного элемента, отвечающей i фаланге, может быть выражена как функция углов $\phi_1 \dots \phi_i$, и с учетом выбранной системы координат имеет вид:

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\mu_i d(\sum_{j=1}^i r \phi_j)}{dt} = \frac{\mu_i r d(\sum_{j=1}^i \phi_j)}{dt} = \mu_i r \sum_{j=1}^i \dot{\phi}_j,$$

где r – радиус шарнира (см. рис. 1.3), а

$$\mu_i = \begin{cases} +1, & \text{при совершении работы мышц – разгибателем} \\ -1, & \text{при совершении работы мышц – сгибателем} \end{cases} \quad (1.12)$$

Таким образом, сила развиваемая мышцей, отвечающей i -ой фаланге и вызывающая изменения относительных углов $\phi_1 \dots \phi_i$ принимает вид:

$$F_i = \frac{b_i P_i^0 - a_i \mu r \sum_{j=1}^i \dot{\phi}_j}{\mu r \sum_{j=1}^i \dot{\phi}_j + b_i} A_i(t), \quad (1.13)$$

где b_i, P_i^0, a_i – антропоморфные характеристики i -ой мышцы.

С целью нахождения обобщенных сил, развиваемых мышцами, рассмотрим работу совершаемую системой на виртуальных перемещениях $\partial\theta_1, \partial\theta_2, \partial\theta_3$:

$$A_{all} = \sum_{i=1}^3 F_i \partial L_i = \sum_{i=1}^3 \left[F_i \sum_{j=1}^i r \partial\theta_j \right] = \sum_{i=1}^3 \left[r F_i \sum_{j=1}^i \partial\theta_j \right]$$

Собрав слагаемые при $\partial\theta_i$, получим выражения, для обобщенных сил, развиваемых мышцами в относительной системе координат и с учетом (1.12):

$$\begin{pmatrix} Q_1^{rel} \\ Q_2^{rel} \\ Q_3^{rel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu_3 F_3) \\ r(\mu_2 F_2 + \mu_3 F_3) \\ r\mu_3 F_3 \end{pmatrix}$$

Подставив полученные выражения в (1.11) получим:

$$\begin{pmatrix} r(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \mu_3 F_3) \\ r(\mu_2 F_2 + \mu_3 F_3) \\ r\mu_3 F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^{abs} + Q_2^{abs} + Q_3^{abs} \\ Q_2^{abs} + Q_3^{abs} \\ Q_3^{abs} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Построчно вычитая значения матриц из выражения (1.14) получим:

$$\begin{pmatrix} r\mu_1 F_1 \\ r\mu_2 F_2 \\ r\mu_3 F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^{abs} \\ Q_2^{abs} \\ Q_3^{abs} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

И в соответствии с (1.13) получим явные выражения для нахождения амплитуд нервных импульсов, поступающих на мышцу и приводящих систему в движение:

$$\begin{pmatrix} A_1^{\mu_1} \\ A_2^{\mu_2} \\ A_3^{\mu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 r \dot{\phi}_1 + b_1}{b_1 P_1^0 - a_1 \mu_1 r \dot{\phi}_1} Q_1^{abs} \\ \frac{\mu_2 r (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) + b_2}{b_2 P_2^0 - a_2 \mu_2 r (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)} Q_2^{abs} \\ \frac{\mu_3 r (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3) + b_3}{b_3 P_3^0 - a_3 r \mu_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3)} Q_3^{abs} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где A_i^{+1}, A_i^{-1} – амплитуды нервных импульсов, поступающих на мышцы разгибатели и сгибатели соответственно, а значения μ_i в соответствии с (1.12), (1.15) и предложением о классификации сократительных элементов, могут быть вычислены по формуле:

$$\mu_i = \text{sign}(Q_i^{abs}).$$

Глава 2. Экспериментальное исследование движения пальца

С помощью анализа видеоряда движения пальца, была построена компьютерная модель в пакете прикладного программного обеспечения Maple, и получены дискретные значения законов движения каждой из фаланг, приведенные в Таблице 2.1.

Данная зависимость получена при исследовании сгибательно – разгибательного движения пальца в вертикальной плоскости (см. **Приложение**), и фиксации экспериментальных данных на временном отрезке $[0, 0.6]$ секунд и равномерной сетке с шагом $\tau = 0.015$.

Особенностью исследуемого движения является то, что в момент времени $t = 0.3$ палец испытывает резкий скачок скоростей и ускорений, связанный с соударением с платформой. Предполагается, что в момент соударения вся кинетическая энергия пальца перешла в платформу, что привело к резкому падению значения скорости до нуля. С целью избавиться от подобного скачка и последующих возмущений, привносящих им при интерполяции поточечно полученных законов движения, было принято решение разбить рассматриваемое движение на 2 фазы: сгибательного и разгибательного движения.

Время (с.)	θ_1 (рад.)	θ_2 (рад.)	θ_3 (рад.)
0.	0.7853981635	0.2969658287	0.1141592654
0.01500000000	0.7834346681	0.2958662713	0.1133738672
0.03000000000	0.7775441819	0.2925675990	0.1110176727
0.04500000000	0.7677267048	0.2870698118	0.1070906819
0.06000000000	0.7539822370	0.2793729098	0.1015928948
0.07500000000	0.7363107783	0.2694768930	0.09452431131
0.09000000000	0.7147123288	0.2573817612	0.08588493151

0.1050000000	0.6891868885	0.2430875147	0.07567475539
0.1200000000	0.6597344573	0.2265941532	0.06389378293
0.1350000000	0.6263550354	0.2079016770	0.05054201416
0.1500000000	0.5890486226	0.1870100858	0.03561944905
0.1650000000	0.5478152190	0.1639193798	0.01912608761
0.1800000000	0.5026548246	0.1386295589	0.0010619298
0.1950000000	0.4535674393	0.1111406232	-0.0185730243
0.2100000000	0.4005530635	0.0814525727	-0.0397787746
0.2250000000	0.3436116966	0.0495654072	-0.0625553214
0.2400000000	0.2827433388	0.0154791268	-0.0869026645
0.2550000000	0.2179479904	-0.0208062682	-0.1128208038
0.2700000000	0.1492256510	-0.0592907783	-0.1403097396
0.2850000000	0.0765763210	-0.0999744031	-0.1693694716
0.3	0.	-0.1428571429	-0.2000000000
0.3150000000	0.001570796327	-0.1418753952	-0.1990182523
0.3300000000	0.006283185309	-0.1389301521	-0.1960730092
0.3450000000	0.01413716694	-0.1340214136	-0.1911642707
0.3600000000	0.02513274122	-0.1271491796	-0.1842920367
0.3750000000	0.03926990818	-0.1183134503	-0.1754563074
0.3900000000	0.05654866778	-0.1075142255	-0.1646570826
0.4050000000	0.07696902002	-0.09475150539	-0.1518943625
0.4200000000	0.1005309649	-0.08002528982	-0.1371681469
0.4350000000	0.1272345025	-0.06333557884	-0.1204784359
0.4500000000	0.1570796327	-0.04468237245	-0.1018252296
0.4650000000	0.1900663556	-0.0240656707	-0.0812085278
0.4800000000	0.2261946711	-0.0014854735	-0.0586283306
0.4950000000	0.2654645793	0.0230582192	-0.0340846379
0.5100000000	0.3078760800	0.0495654071	-0.0075774500
0.5250000000	0.3534291736	0.0780360906	0.0208932335
0.5400000000	0.4021238598	0.1084702695	0.0513274124
0.5550000000	0.4539601384	0.1408679436	0.0837250865
0.5700000000	0.5089380100	0.1752291134	0.1180862563
0.5850000000	0.5670574740	0.2115537784	0.1544109213

0.6	0.6283185309	0.2498419389	0.1926990818
-----	--------------	--------------	--------------

Таблица 2.1: Исследуемые законы движения фаланг

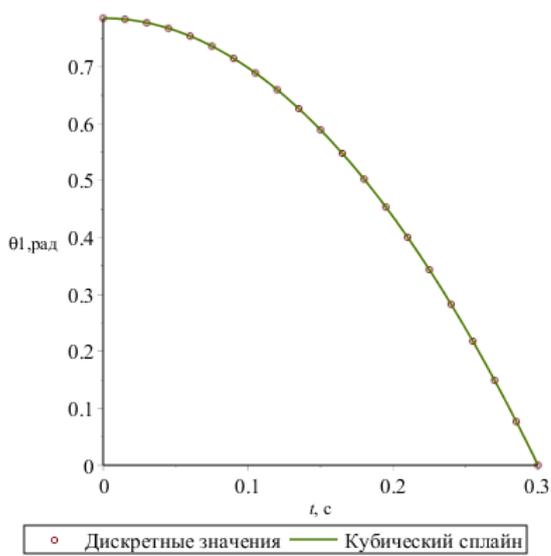
С целью получения корректных, для вычисления амплитуд, данных, дискретные законы движения, полученные в экспериментах, были интерполированы с помощью дважды непрерывно дифференцируемой функции с использованием кубических сплайнов [9] и граничными условиями:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1^C(0) &= 0, & \dot{\theta}_1^C(0.3) &= -5.235987757 \\ \dot{\theta}_2^C(0) &= 0, & \dot{\theta}_2^C(0.3) &= -2.932153144 \\ \dot{\theta}_3^C(0) &= 0, & \dot{\theta}_3^C(0.3) &= -2.094395103\end{aligned}$$

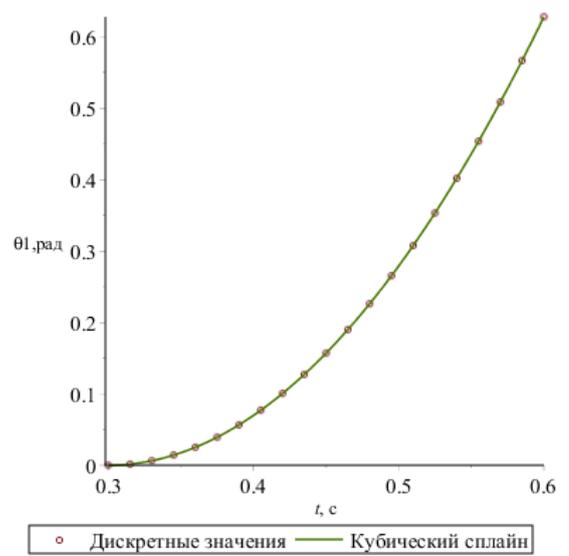
$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1^P(0.3) &= 0, & \dot{\theta}_1^P(0.6) &= 4.188790205 \\ \dot{\theta}_2^P(0.3) &= 0, & \dot{\theta}_2^P(0.6) &= 2.617993878 \\ \dot{\theta}_3^P(0.3) &= 0, & \dot{\theta}_3^P(0.6) &= 2.617993878,\end{aligned}$$

где θ_i^C и θ_i^P – граничные условия для сгибательной и разгибательной фаз соответственно.

На рис. 2.1 – 2.3 приведены полученные законы движения фаланг, как результат интерполяции кубическими сплайнами экспериментальных данных.

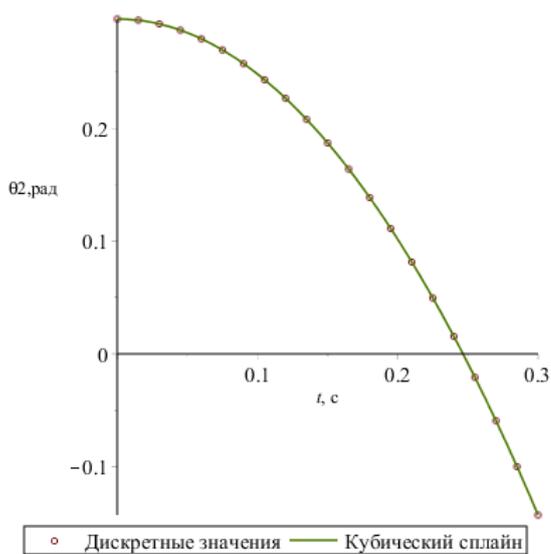


а)

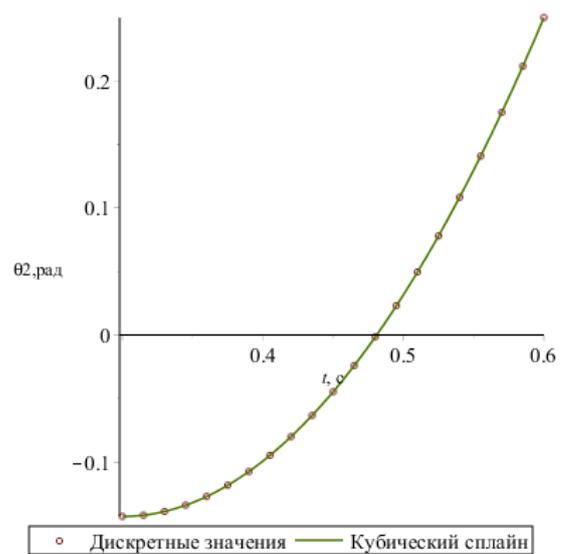


б)

Рис. 2.1: График зависимости $\theta_1(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.



а)



б)

Рис. 2.2: График зависимости $\theta_2(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

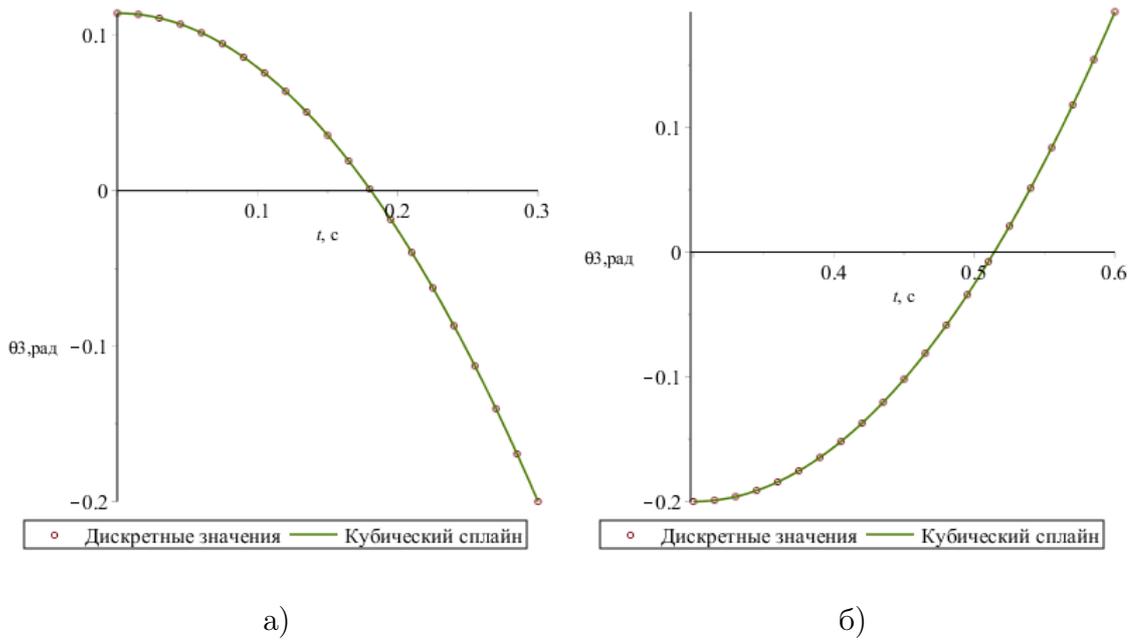


Рис. 2.3: График зависимости $\theta_3(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

С учетом антропоморфных характеристик принятых равными: $l = 0,03$ м, $m = 0,1$ кг, $r = 0,007$ м, а так же на основе формулы (1.9), были вычислены значения обобщенных сил, действующих в системе на исследуемом промежутке времени. Результаты вычислений приведены на рис. 2.4 – 2.6.

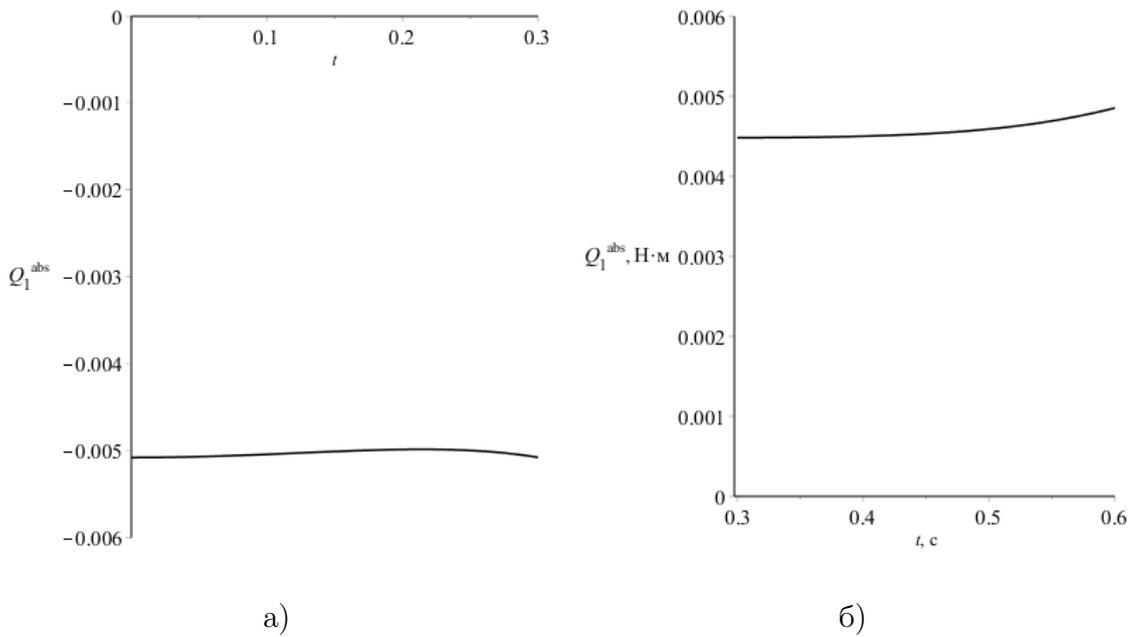


Рис. 2.4: График зависимости $Q_1^{abs}(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

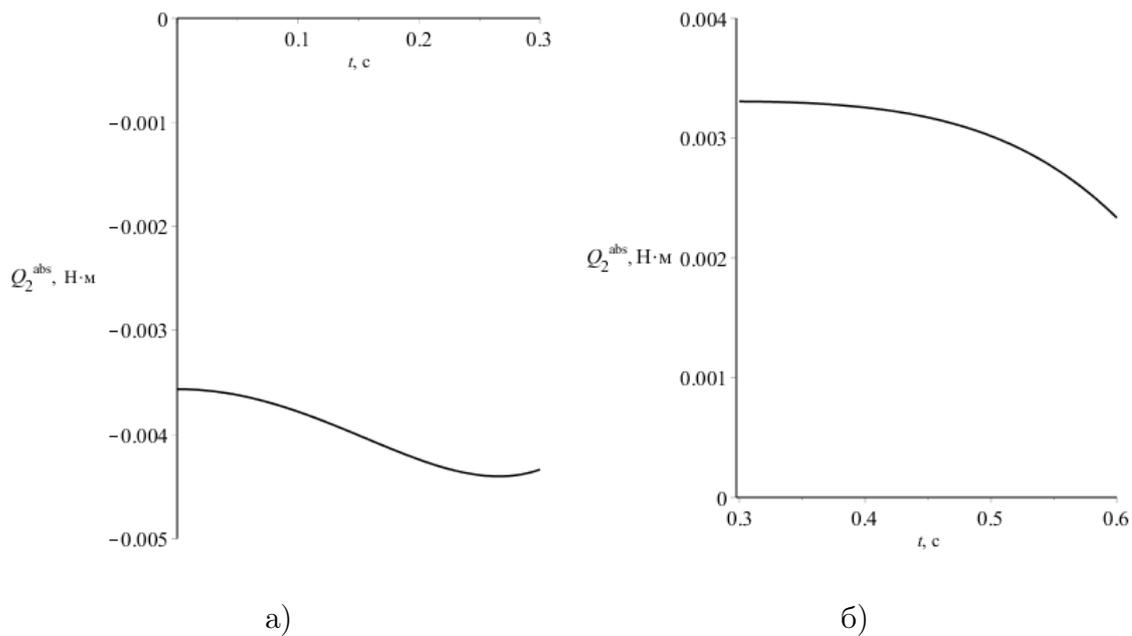


Рис. 2.5: График зависимости $Q_2^{abs}(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

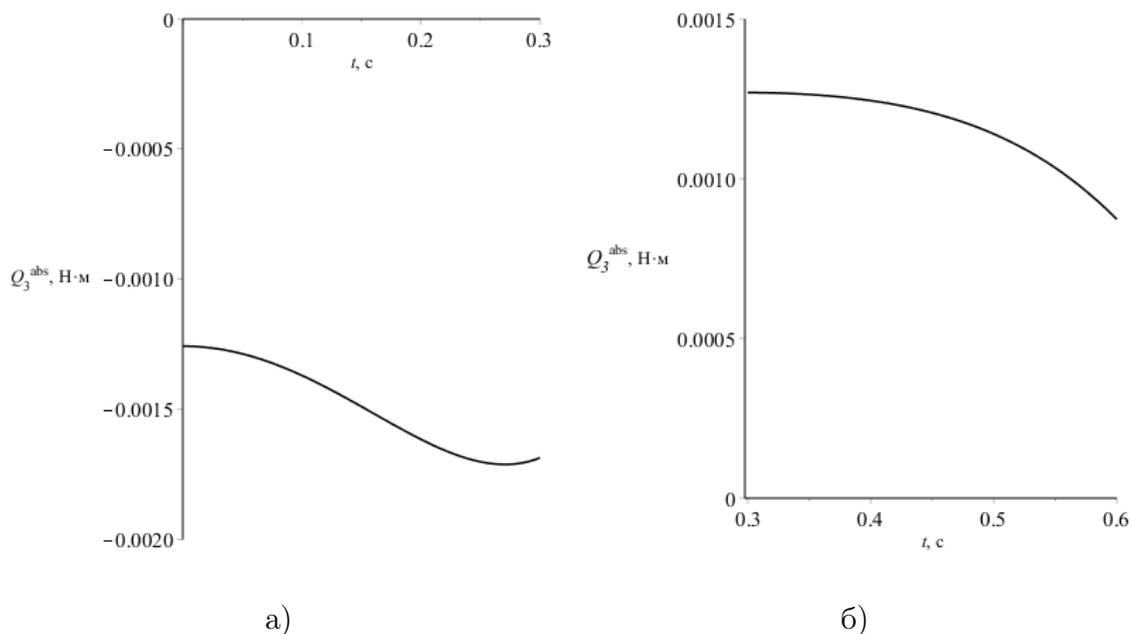


Рис. 2.6: График зависимости $Q_3^{abs}(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

С учетом значений мышечных констант полученных из [3]: $b_i = 0.35$ м/с, $P_1^0 = 350$ Н, $P_2^0 = 300$ Н, $P_3^0 = 270$ Н, $a_1 = 87,5$ Н, $a_2 = 75$ Н, $a_3 = 67,5$ Н, а так же с использованием (1.16) были вычислены искомые значения амплитуд нервных импульсов (рис 2.7 – 2.9), поступающих на мышцы и приводящих к совершению движения из Таблицы 2.1.

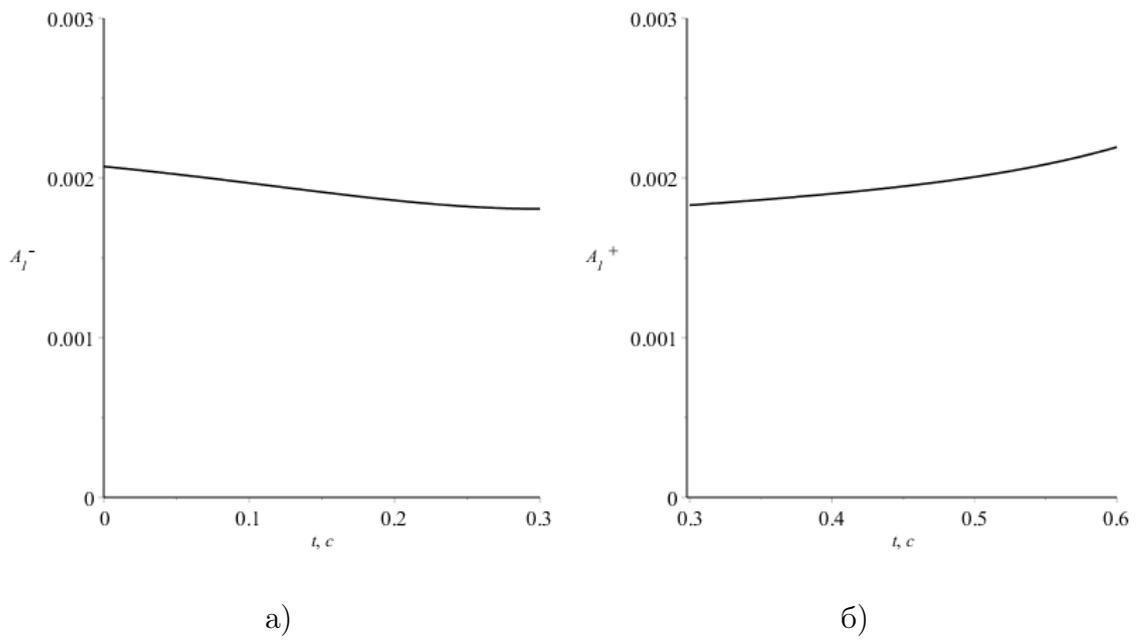


Рис. 2.7: График зависимости $A_1(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

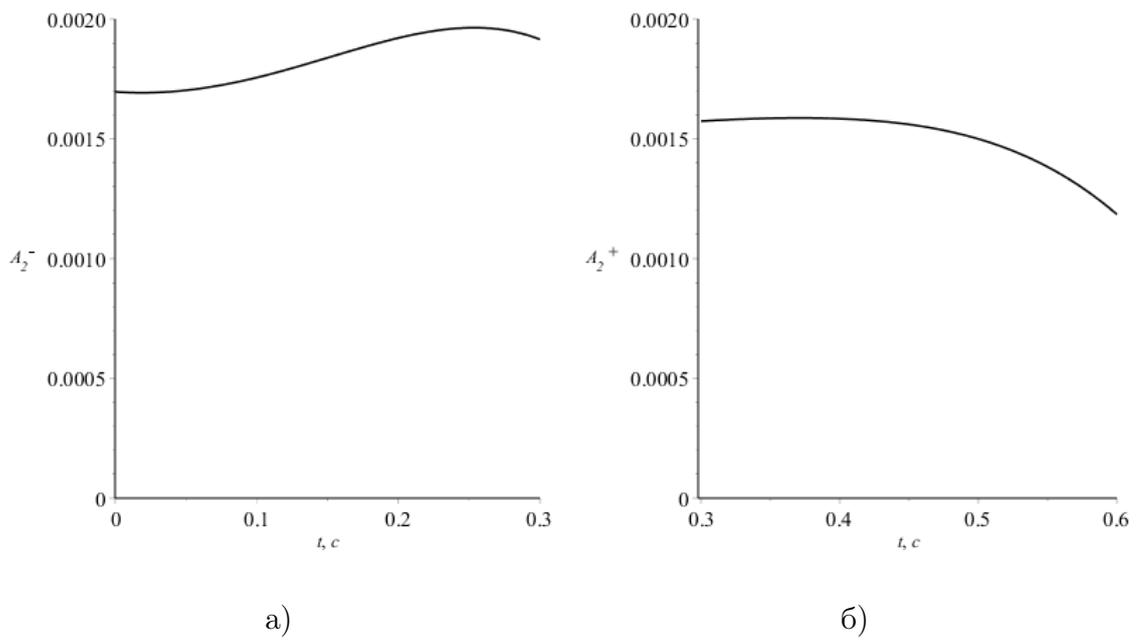


Рис. 2.8: График зависимости $A_2(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

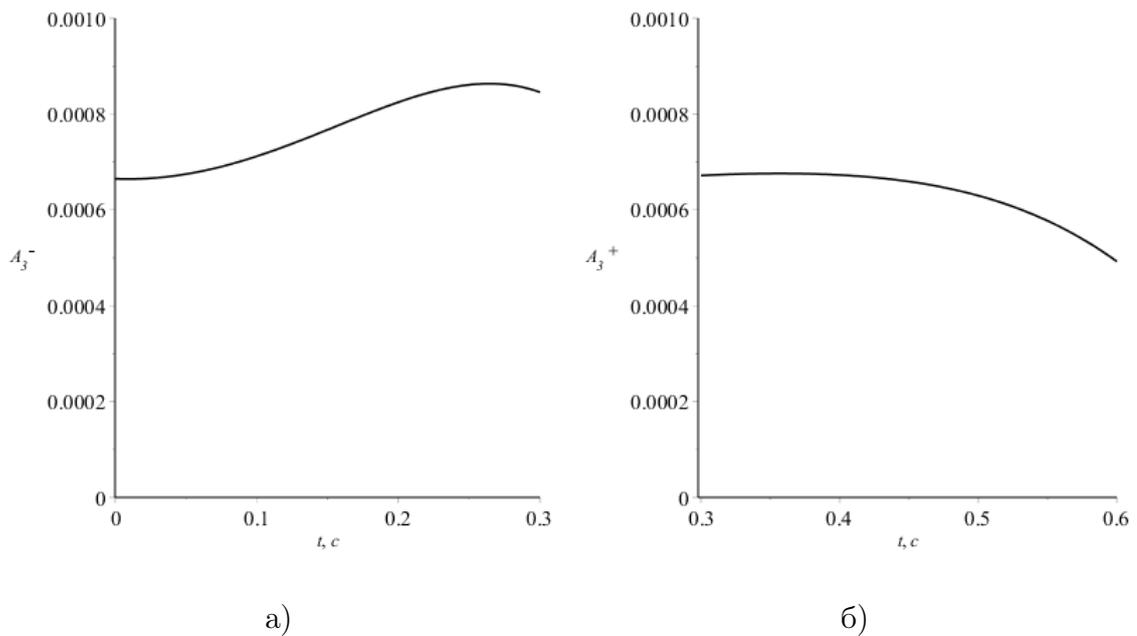
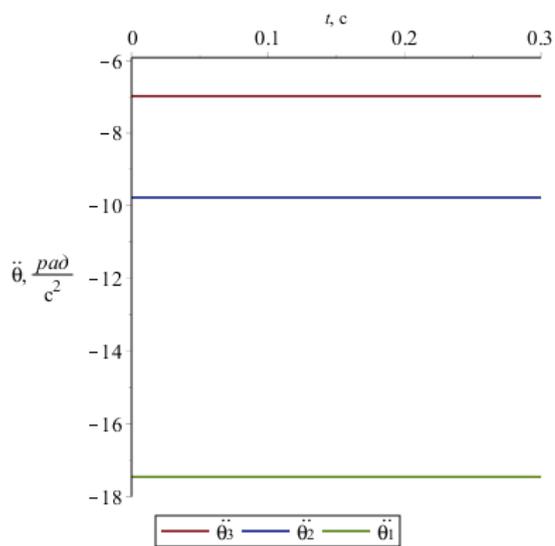


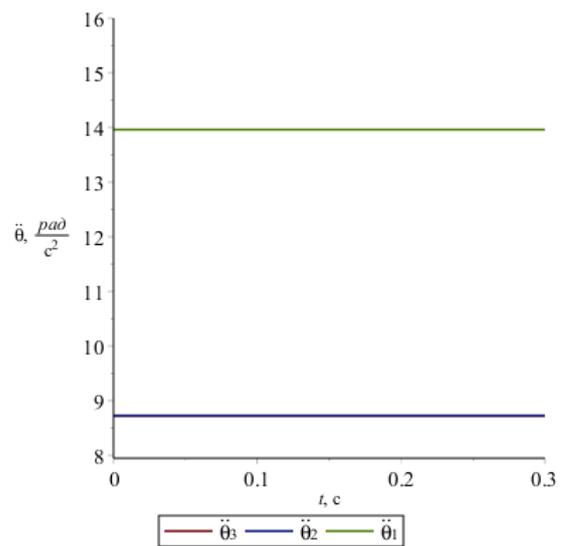
Рис. 2.9: График зависимости $A_3(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания.

Данные графики ведут себя так, как и ожидалось: при совершении сгибательной фазы движения (рис. 2.1а, 2.2а, 2.3а) обобщенные силы, действующие в системе отрицательны (рис. 2.4а, 2.5а, 2.6а), что говорит о работе мышц–сгибателей, и как следствие наличие амплитуд нервных импульсов, поступающих на них (рис. 2.7а, 2.8а, 2.9а). Аналогичный вывод можно сделать и для разгибательной фазы движения и группы мышц разгибателей.

Стоит отметить, что функция амплитуды нервного импульса (рис. 2.7–2.9) не исходят из нуля, что обусловлено наличием не нулевых начальных условий по ускорениям (рис. 2.10), что в свою очередь означает, что уже в момент начала движений мышцы находились в возбужденном состоянии.



а)



б)

Рис. 2.10: График зависимости $\ddot{\theta}_i(t)$: а) фаза сгибания б) фаза разгибания, значения $\ddot{\theta}_2(t)$ и $\ddot{\theta}_3(t)$ совпадают.

Заключение

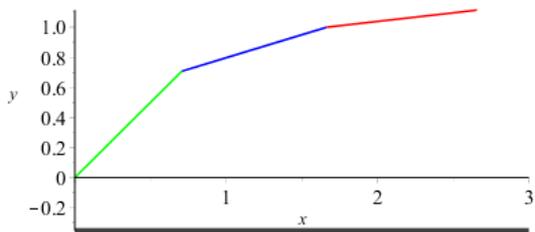
Таким образом, можно утверждать, что в рамках данной работы были выполнены все поставленные задачи, а именно:

1. Построена механическая модель пальца.
2. Получено уравнение управляемого сокращения мышцы.
3. Получена система уравнений движения рассмотренной модели.
4. Получены явные формулы для вычисления управляющих функций.
5. На основании экспериментальных данных, полученных с помощью компьютерного моделирования, получены значения управляющих функций на исследуемом промежутке времени.

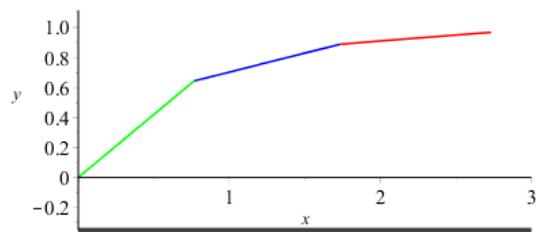
Литература

1. Гринягин И. В. Компьютерная диагностика активности пальцев руки человека на основе биомеханического моделирования: автореф. дис. канд. мед. наук: 03.01.09. М., 2011.
2. Технология изготовления протезов верхних конечностей / В.Г. Петров, Ю.И. Замилацкий, Г.Н. Буров, С.Ф. Курдыбайло, А.О. Андриевская, С.Е. Соболев, А.В. Антипов, Г.В. Чекушина; под ред. Г. Н. Булова. СПб.: Гиппократ, 2008. 128 с.
3. Хилл А.В. Механика мышечного сокращения. М.: Мир, 1972.
4. Heneman E. Functional organization of motoneuron pools: the size principle. // Proc. Intern. Congr. Paris. 1977. Vol. 12. P.50.
5. Айзерман М. А., Андреева Е. А., Кандель Э. И., Тененбаум Л.А. Механизмы управления мышечной активностью: Норма и патлогия. М.: Наука, 1974. 165 с.
6. Дещеревский В.И. Математические модели мышечного сокращения. М.: Наука, 1977.
7. Кривовичев Г.В., Трегубов В.П. Математическое моделирование плоских движений живой клетки // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. 2009. №850. С. 91-102.
8. Смирнов Д.А. Исследование динамики механической системы шарнирных стержней с тремя степенями свободы // Фундаментальные исследования. 2014. №11. С. 2620-2624.
9. Волков Е.А. Численные методы. 2 изд. М.: Наука, 1987. 248 с.

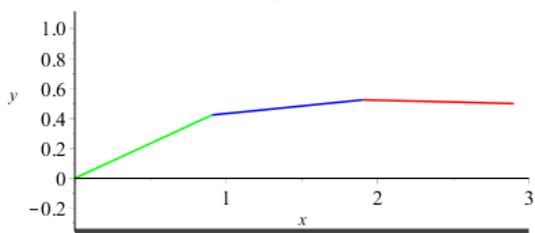
Приложение



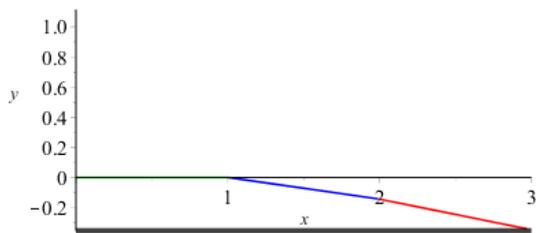
а)



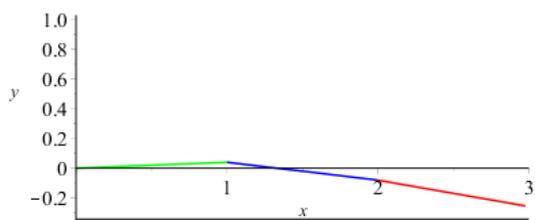
б)



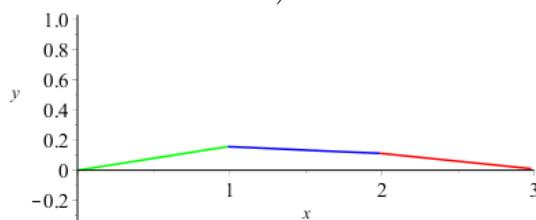
в)



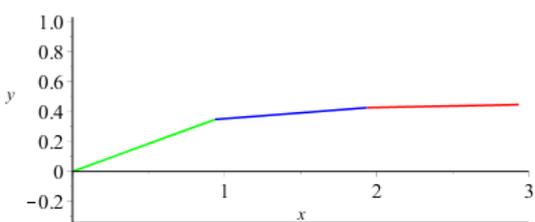
г)



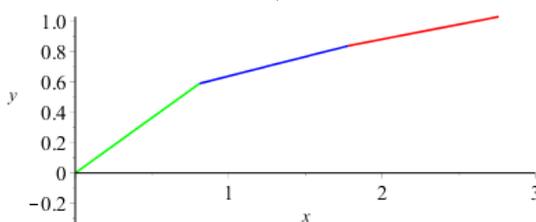
д)



е)



ж)



з)

Положение фаланг исследуемого в Главе 2 движения при: а) $t = 0$ с., б) $t = 0.1$ с., в) $t = 0.2$ с., г) $t = 0.3$ с. д) $t = 0.375$ с., е) $t = 0.45$ с., ж) $t = 0,525$ с., з) $t = 0.6$ с.