УДК 517.928
MSC 34D20
Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 3

Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению

П. А. Шаманаев

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
Российская Федерация, 430005, Республика Мордовия, Саранск, ул. Большевистская, 68

Для цитирования: *Шаманаев П. А.* Об устойчивости нулевого решения относительно части переменных по линейному приближению // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 374–390. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306

Получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости относительно части переменных нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению в случае, когда матрица линейного приближения может содержать собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать. Подход основан на установлении некоторого соответствия между решениями исследуемой системы и ее линейного приближения. В данном случае начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля решения таких систем и сами системы обладают одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами. Для решений такими свойствами являются устойчивость и асимптотическая устойчивость по отношению к части переменных, а для систем — покомпонентная локальная асимптотическая эквивалентность и покомпонентное локальное асимптотическое равновесие. Рассматривая соответствие между решениями систем как оператор, определенный в банаховом пространстве, на основании принципа Шаудера доказывается, что он имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Оператор позволяет построить отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы и ее линейного приближения. Далее на основе оценок элементов строк фундаментальной матрицы линейного приближения делается заключение о покомпонентных асимптотических свойствах решений нелинейной системы. Приведен пример изучения устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных нулевого решения нелинейной системы, матрица линейного приближения которой содержит одно отрицательное и одно нулевое собственные значения, причем алгебраическая и геометрическая кратности нулевого собственного значения не совпадают.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, частичная устойчивость, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность, принцип Шаудера.

1. Введение. Впервые вопрос о возможности переноса основных положений теории устойчивости только лишь на часть переменных был поставлен А. М. Ляпуновым [1]. Впоследствии эта задача сформировалась в отдельное направление как теория устойчивости по отношению к части переменных (частичная устойчивость) в работах И. Г. Малкина [2], В. В. Румянцева [3], В. В. Румянцева и А. С. Озиранера [4], В. И. Воротникова [5].

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

Задача об исследовании частичной устойчивости нулевого решения по линейному приближению рассматривалась в [6, 7], в том числе и в критическом случае (см. [7–11]).

Одним из подходов к изучению покомпонентных асимптотических свойств (частичной устойчивости, частичной асимптотической устойчивости и покомпонентного асимптотического равновесия) поведения системы является метод, изложенный в работах Е. В. Воскресенского [12, 13]. Он основан на установлении покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру между изучаемой системой и некоторой «системой сравнения». В частности, в качестве «системы сравнения» можно взять линейное приближение рассматриваемой системы. При выполнении некоторых дополнительных условий соответствующие решения этих систем будут обладать одинаковыми покомпонентными асимптотическими свойствами.

Развитию этого подхода посвящены работы [14–17]. В них показано, что для исследования асимптотических свойств решений покомпонентную асимптотическую эквивалентность между изучаемой системой и «системой сравнения» достаточно установить лишь в достаточно малой окрестности нуля. В таком случае говорят о локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем.

В работе [18] введено понятие равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру между изучаемой системой и «системой сравнения». Такой вид эквивалентности обеспечивает наличие одинаковых асимптотических свойств у соответствующих решений исследуемой системы и «системы сравнения» без дополнительных условий.

Вместе с тем для изучения устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных нулевого решения нелинейной системы условие равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру систем можно ослабить до условия, которое устанавливает соответствие между решениями нелинейной системы и «системой сравнения» и обеспечивает сохранение покомпонентных асимптотических свойств только лишь при переходе от «системы сравнения» к рассматриваемой системе. Описанию этих условий и посвящена настоящая работа.

Приведенные в статье достаточные условия наличия покомпонентных асимптотических свойств решений нелинейной системы, аналогичные соответствующим решениям ее линейного приближения, дополняют результаты работ [5–7] для случая, когда матрица линейного приближения содержит собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать. Полученные результаты могут быть применены к исследованию устойчивости по всем переменным нулевого решения нелинейных систем исходя из первого линейного приближения. Стоит отметить, что в работе А. Ю. Александрова [19] рассмотрены вопросы об устойчивости нелинейных систем по первому нелинейному приближению. Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вопрос об асимптотической устойчивости по первому нелинейному приближению изучен в [20, 21].

2. Сравнение асимптотических свойств решений двух систем на основе установления некоторого соответствия между ними. Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $T \geqslant 0$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Обозначим через $x(t : t_0, x^{(0)})$ решение с начальными данными $(t_0, x^{(0)})$ системы (1) и будем считать, что у всех систем из множества Ξ существует совокупность решений, определенных при всех $t \geqslant t_0 \geqslant T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$. Здесь D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Пусть

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \tag{2}$$

есть некоторая другая система из множества Ξ, а $y(t : t_0, y^{(0)})$ — ее решение с начальными данными $(t_0, y^{(0)})$.

Для систем (1) и (2) определим через $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ и $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ i-е компоненты соответствующих решений.

Положим U, $V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля, $M_0 \subseteq N = \{1, ..., n\}$.

Определение. Системы (1) и (2) будем называть равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, если выполняются следующие условия:

1) при любом фиксированном $t_0 \geqslant T$ между множествами начальных точек систем (1) и (2) существует непрерывное в нулевой точке отображение

$$P(x^{(0)}) = y^{(0)}, \quad P(0) = 0, \tag{3}$$

где $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, такое, что для i-х компонент решений систем (1) и (2) выполняются равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}), \tag{4}$$

здесь $i \in M_0$, $\mu_i \in C([T, +\infty), R^+)$, $\delta_i \in C^{(0,0,1)}([t_0, +\infty) \times [T, +\infty) \times R^n, R)$;

2) в равенстве (4) функции $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, ограничены при всех $t \geqslant t_0$ и стремятся к нулю при $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$ равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$;

3) в равенстве (4) функции $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$.

Лемма. *Пусть выполняются условия 1 и 2 определения. Тогда справедливы такие утверждения:*

1) если $\mu_i(t) < +\infty$ при всех $t \geqslant t_0$, то из устойчивости нулевого решения системы (2) по переменной y_i следует устойчивость нулевого решения системы (1) по переменной x_i, причем, если дополнительно выполняется условие 3) определения, то из локального асимптотического равновесия системы (2) по переменной y_i вытекает локальное асимптотическое равновесие системы (1) по переменной x_i;

2) если $\mu_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) по переменной y_i следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1) по переменной x_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем проводить его при каждом фиксированном $i \in M_0$.

Докажем справедливость утверждения 1 леммы. Пусть у системы (2) существует нулевое решение, устойчивое по переменной y_i. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$ такое, что из $||y^{(0)}|| < \delta_0$ следует

$$|y_i(t : t_0, y^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ t \geqslant t_0.$$

Зафиксируем t_0 и с помощью отображения P сопоставим начальным значениям $x^{(0)} \in V$ решений системы (1) начальные значения $y^{(0)}$ соответствующих решений системы (2). Тогда, учитывая, что $P(0) = 0$ и P является непрерывным в нулевой точке отображением, получим: существует достаточно малое $\delta_1 > 0$ такое, что как только $||x^{(0)}|| < \delta_1$, то

$$||y^{(0)}|| = ||P(x^{(0)})|| < \delta_0.$$

Поскольку $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$ ограничена по $t \geqslant t_0$ и стремится к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$, $x^{(0)} \in U$ и $\mu_i(t)$ — ограниченная функция при всех $t \geqslant t_0$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $||x^{(0)}|| < \delta_2$ будет выполняться неравенство

$$\mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ t \geqslant t_0.$$

Тогда, оценив равенство (4), находим, что

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)})| \leqslant |y_i(t : t_0, y^{(0)})| + \mu_i(t)|\delta_i(t, t_0, x^{(0)})| < \varepsilon \qquad \forall\ t \geqslant t_0. \tag{5}$$

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, заключим, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать такое δ, когда из $||x^{(0)}|| < \delta$ вытекает справедливость (5), а это и доказывает устойчивость нулевого решения системы (1) по переменной x_i.

Пусть теперь дополнительно выполняется условие 3 определения. Тогда из него и ограниченности функции $\mu_i(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ вытекает, что

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_i(t)\delta_i(t, t_0, x^{(0)}) = 0, \quad x^{(0)} \in U. \tag{6}$$

Пусть также система (2) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной y_i, и, следовательно [14],

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t : t_0, y^{(0)}) = c_i, \quad c_i \in R,\ y^{(0)} \in V, \tag{7}$$

и для любого числа c_i такого, что $(c_1, ..., c_n) \in V$, существует решение $y(t : t_0, y^{(0)})$, $y^{(0)} \in V$ системы (2), для компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ которого справедливы равенства (7).

Тогда из равенства (4) и пределов (6), (7) следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = c_i, \quad x^{(0)} \in U, \tag{8}$$

и для любого числа c_i такого, что $(c_1, ..., c_n) \in V$, существует решение $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, системы (1), для компоненты $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ которого справедливы равенства (8).

Таким образом, система (1) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной x_i.

Докажем справедливость утверждения 2 леммы. Пусть $\mu_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво по переменной y_i. Тогда функция $\mu_i(t)$ является ограниченной функцией при всех $t \geqslant t_0$, и, следовательно, согласно утверждению 1 леммы, нулевое решение системы (1) устойчиво по переменной x_i.

Далее, учитывая асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2) по переменной y_i и справедливость равенства (6), перейдем в (4) к пределу при $t \to +\infty$. Получим, что

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = 0, \quad x^{(0)} \in U,$$

откуда и следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1) по переменной x_i.

Доказательство завершено. $\square$

3. Достаточные условия частичной устойчивости и частичной асимптотической устойчивости по линейному приближению нулевого решения. Сформулируем достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных нулевого решения нелинейных систем из множества Ξ на основании леммы.

Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t,x), \tag{9}$$

где $x \in R^n$; A — постоянная $(n \times n)$-матрица; $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $f(t,0) \equiv 0$;

$$|f_j(t, x_1, ..., x_n)| \leqslant \psi_j(t, |x_1|, ..., |x_n|) \qquad \forall\ x \in U \subseteq D,\ j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

здесь $\psi_j \in C([T,+\infty) \times U_+, [0,+\infty))$, $U_+ = \{x:\ x \in U,\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n}\}$, $\psi_j(t,0,...,0) \equiv 0$, причем $\psi_j(t, |x_1|, ..., |x_n|) \leqslant \psi_j(t, |\tilde{x_1}|, ..., |\tilde{x_n}|)$, $|x_i| \leqslant |\tilde{x_i}|$, $x, \tilde{x} \in U$, $t \in [T, +\infty)$.

Линейное приближение системы (9) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{11}$$

где $y \in R^n$.

Пусть матрица A имеет $r \leqslant n$ различных собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_r$, вещественные части которых обозначим

$$\Lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_1,\ ...,\ \Lambda_r = \mathrm{Re}\ \lambda_r.$$

Тогда, учитывая оценки (24.29) и (24.31) из работы [22], для элементов i-й строки $(i = \overline{1,n})$ нормированной фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ системы (11) будут справедливы оценки

$$|y_{i1}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\hat{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} Q_{i1}(t-t_0), ..., |y_{in}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\hat{\Lambda}_{in}(t-t_0)} Q_{in}(t-t_0),\ t \geqslant t_0, \tag{12}$$

$$|y_{i1}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\check{\Lambda}_{i1}(t-t_0)} q_{i1}(t-t_0), ..., |y_{in}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\check{\Lambda}_{in}(t-t_0)} q_{in}(t-t_0),\ t \leqslant t_0, \tag{13}$$

в которых $D_0 > 0$ — некоторая константа, $\hat{\Lambda}_{i1}$, ..., $\hat{\Lambda}_{in}$, $\check{\Lambda}_{i1}$, ..., $\check{\Lambda}_{in} \in \{\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_r\}$; $Q_{i1}(t-t_0)$, ..., $Q_{in}(t-t_0)$, $q_{i1}(t-t_0)$, ..., $q_{in}(t-t_0)$ — некоторые полиномы относительно $t-t_0$. Степени этих полиномов меньше алгебраических кратностей собственных значений, вещественные части которых равны $\hat{\Lambda}_{i1}$, ..., $\hat{\Lambda}_{in}$, $\check{\Lambda}_{i1}$, ..., $\check{\Lambda}_{in}$ соответственно.

Пусть

$$\beta_i \stackrel{def}{=} \hat{\Lambda}_{ij_i^*} = \max\{\hat{\Lambda}_{i1}, ..., \hat{\Lambda}_{in}\}, \qquad \alpha_i \stackrel{def}{=} \check{\Lambda}_{ik_i^*} = \min\{\check{\Lambda}_{i1}, ..., \check{\Lambda}_{in}\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Тогда b_i и a_i, $i = \overline{1,n}$, определим как степени полиномов $Q_{ij_i^*}(t-t_0)$ и $q_{ik_i^*}(t-t_0)$ соответственно.

Учтем формулы (14) и определения чисел b_i и a_i, тогда оценки (12) и (13) примут вид

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\beta_i (t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geqslant t_0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{15}$$

$$|y_{ij}(t-t_0)| \leqslant D_0 e^{\alpha_i(t-t_0)} \rho^{a_i}(t-t_0), \quad t \leqslant t_0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{16}$$

где $i=\overline{1,n}$,

$$\rho^{\nu}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ |t|<1, \\ |t|^{\nu}, & \text{если} \ \ |t| \geqslant 1. \end{cases} \tag{17}$$

Полагая $M_0 = N$, определим функции

$$\mu_i(t) = D_0 e^{\beta_i(t-t_0)} \rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geqslant t_0, \tag{18}$$

здесь $i=\overline{1,n}$, и введем множества $N_i = \{j : y_{ij}(t-t_0) \equiv 0, \ \ \text{при всех} \ t, \ t_0 \geqslant T\}$, $K_i = N \backslash N_i$, $i=\overline{1,n}$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для любого $t_0 \geqslant T$ существует полуинтервал $[0,c)$, $c>0$, такой, что для всех $c_0 \in [0,c)$ выполняются такие условия:*

А) при всех $j \in K_i$, $i=\overline{1,n}$, сходятся интегралы

$$I_{ij}(c_0) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\alpha_i(s-t_0)} \rho^{a_i}(s) \psi_j(s, c_0 e^{\beta_1(s-t_0)} \rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n(s-t_0)} \rho^{b_n}(s)) ds; \tag{19}$$

Б) справедливы неравенства

$$\sum_{j \in K_i} I_{ij}(c_0) < c_0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Тогда системы (9) и (11) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, и справедливы следующие утверждения:

1) если $\beta_i = 0$ и $b_i = 0$, то нулевое решение системы (9) устойчиво по переменной x_i, причем из локального асимптотического равновесия системы (11) по переменной y_i следует локальное асимптотическое равновесие системы (9) по переменной x_i;

2) если $\beta_i < 0$, то нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво по переменной x_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 1 покажем, что соответствующие решения $x(t:t_0,x^{(0)})$ и $y(t:t_0,y^{(0)})$ систем (9) и (11) удовлетворяют уравнению

$$x(t:t_0,x^{(0)}) = y(t:t_0,y^{(0)}) - \int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s) f(s, x(s:t_0,x^{(0)})) ds, \tag{21}$$

которое для каждого $y(t:t_0,y^{(0)})$ имеет по крайней мере одно решение $x(t:t_0,x^{(0)})$, когда $y^{(0)}$ и $x^{(0)}$ принадлежат достаточно малой окрестности нуля.

Далее, записывая соотношение (21) покоординатно, проверим сначала справедливость условий 1–3 определения, а затем применим лемму.

Рассмотрим банахово пространство [12]

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T,+\infty), R^n), \ |\varphi_i(t)| \leqslant c\mu_i(t), \ t \geqslant t_0, \ c \in R_+, \ i=\overline{1,n}\}$$

с нормой

$$||\varphi||_{\Omega} = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t \geqslant t_0} \left\{ \frac{|\varphi_i(t)|}{\mu_i(t)} \right\}.$$

Пусть на Ω определен оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s)f(s,\varphi(s))ds, \tag{22}$$

в котором $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$.

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \leqslant c_0,\ c_0 \in R_+\}$. Пусть $||\varphi||_\Omega \leqslant c_0$. Тогда $|\varphi_i(t)| \leqslant c_0\mu_i(t)$, $t \geqslant t_0$.

Для i-й компоненты решения системы (11) справедливы неравенства

$$|y_i(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(t-t_0)|\, |y_j^{(0)}| \leqslant D_0 e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)||y^{(0)}||, \quad t \geqslant t_0,\ i = \overline{1,n}. \tag{23}$$

С учетом оценок (10), (15), (16), (23) и неравенств

$$e^{\alpha_i(t-t_0)} \leqslant e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0), \quad t \geqslant t_0,$$
$$\rho^{a_i}(t-s) \leqslant \rho^{a_i}(s), \quad s \geqslant t \geqslant 0,$$
$$\rho^{b_i}(s-t_0) \leqslant \rho^{b_i}(s), \quad s \geqslant t_0 \geqslant 0,$$

для i-й компоненты оператора L получим оценку, справедливую при всех $t \geqslant t_0$:

$$|(L\varphi)_i| \leqslant e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)\Bigg[D_0||y^{(0)}|| +$$

$$+ D_0\sum_{j\in K_i}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha_i(s-t_0)}\rho^{a_i}(s)\psi_j(s, c_0e^{\beta_1(s-t_0)}\rho^{b_1}(s), ..., c_0e^{\beta_n(s-t_0)}\rho^{b_n}(s))ds\Bigg], \tag{24}$$

где $i = \overline{1,n}$.

Учитывая сходимость интегралов (19) в условии А теоремы 1, находим, что

$$|(L\varphi)_i| \leqslant D_0e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0)\Bigg[||y^{(0)}|| + \sum_{j\in K_i} I_{ij}(c_0)\Bigg]. \tag{25}$$

Из неравенств (20) условия Б теоремы 1 следует: при любом фиксированном $t_0 \geqslant T$ всегда можно выбрать ненулевую окрестность, такую, что для всех $y^{(0)}$ из этой окрестности будет выполняться неравенство

$$||y^{(0)}|| \leqslant c_0 - \sum_{j\in K_i} I_{ij}(c_0) \quad \text{при всех } i = \overline{1,n}. \tag{26}$$

Тогда из неравенств (24)–(26) получим, что

$$|(L\varphi)_i| \leqslant c_0D_0e^{\beta_i(t-t_0)}\rho^{b_i}(t-t_0) \quad \forall\ t \geqslant t_0, \tag{27}$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \leqslant c_0 \quad \text{для всех } \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Аналогично работам [12, 15] покажем, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0 и, таким образом, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [23] о существовании неподвижной точки для уравнения

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0. \tag{28}$$

Учитывая (22), запишем уравнение (28) в следующем виде:

$$\varphi(t) = y(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s) f(s, \varphi(s)) ds. \tag{29}$$

Согласно определению оператора L, вектор-функция $y(t)$ в уравнении (29) является решением с начальными данными $y(t_0) = y^{(0)}$ системы (11). Поэтому $\varphi(t)$ будет решением с начальными данными $\varphi(t_0) = x^{(0)}$ системы (9), причем начальные данные этих систем будут связаны соотношением

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0 - s) f(s, x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \tag{30}$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться, если записать решение уравнения (9) в интегральной форме

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = Y(t - t_0) x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t-s) f(s, x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \tag{31}$$

Далее вычитая и прибавляя к правой части уравнения (31) несобственный интеграл

$$\int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s) f(s, \varphi(s)) ds,$$

сходимость которого следует из сходимости интегралов $I_{ij}(c_0)$, получим уравнение

$$x(t : t_0, x^{(0)}) = Y(t - t_0) x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t-s) f(s, x(s : t_0, x^{(0)})) ds -$$
$$- \int\limits_{t}^{+\infty} Y(t-s) f(s, \varphi(s)) ds. \tag{32}$$

Полагая, что начальные данные $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ решений $x(t : t_0, x^{(0)})$ и $y(t : t_0, y^{(0)})$ соответствующих систем (9) и (11) удовлетворяют соотношению (30), из равенства (32) получим уравнение (21).

Покажем справедливость условий 1–3 определения.

Из соотношения (30) следует, что отображение P в формуле (3) имеет вид

$$P(x^{(0)}) = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0 - s) f(s, x(s : t_0, x^{(0)})) ds,$$

где $x^{(0)} \in U$, причем $P(0) = 0$. Непрерывность отображения P в нулевой точке обеспечивается непрерывностью вектор-функций $f(t, x)$ по переменной x и решения $x(s : t_0, x^{(0)})$ по начальной точке $x^{(0)}$, а также известной теоремой о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

Поскольку формулы (24)–(29) справедливы при всех $t \geqslant t_0$, то, положив $t = t_0$, получим неравенство

$$||x^{(0)}|| \leqslant ||Lx^{(0)}|| \leqslant c_0. \tag{33}$$

Тогда из неравенства (33) следует, что $||x^{(0)}|| \to 0$ при $c_0 \to 0$.

Покажем справедливость соотношения (4). Для этого уравнение (21) запишем покомпонентно:

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{t}^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(s, x(s : t_0, x^{(0)}))ds,\ i = \overline{1, n}. \tag{34}$$

Сопоставив равенства (4) и соотношение (34), имеем, что

$$\delta_i(t, t_0, x^{(0)}) = -\frac{1}{\mu_i(t)} \sum_{j=1}^{n} \int_{t}^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(s, x(s : t_0, x^{(0)}))ds, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда, учитывая оценки (15) и (16), получим неравенство

$$|\delta_i(t, t_0, x^{(0)})| \leqslant \sum_{j \in K_i} \left(\int_{t}^{+\infty} e^{-\alpha_i s} \rho^{a_i}(s) \psi_j(s, c_0 e^{\beta_1 s} \rho^{b_1}(s), ..., c_0 e^{\beta_n s} \rho^{b_n}(s))ds \right),\ \ i = \overline{1, n}. \tag{35}$$

С учетом неравенства (20) условия Б из оценки (35) вытекает, что

$$|\delta_i(t, t_0, x^{(0)})| \leqslant \sum_{j \in K_i} I_{ij}(c_0) \leqslant c_0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Считая, что $||x^{(0)}|| \to 0$ при $c_0 \to 0$, заключим, что $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, стремятся к нулю равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ при $||x^{(0)}|| \to 0$. Из последнего неравенства также вытекает ограниченность $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, по $t \geqslant t_0$.

Принимая во внимание сходимость интегралов (19) при всех $c_0 \in [0, c)$, из оценки (35) следует: $\delta_i(t, t_0, x^{(0)})$, $i = \overline{1, n}$, стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$ таким, что $||x^{(0)}|| \leqslant c_0$.

Таким образом, справедливость условий 1–3 определения доказана и в соответствии с определением системы (9) и (11) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Учитывая справедливость условий 1 и 2 определения, применим утверждения 1, 2 леммы к утверждениям 1, 2 теоремы 1.

Рассмотрим утверждение 1 теоремы 1. Пусть $\beta_i = 0$ и $b_i = 0$. Тогда $\mu_i(t) \equiv \mathrm{const} < +\infty$ при всех $t \geqslant t_0$, и, учитывая оценку (23), получим, что нулевое решение системы (11) устойчиво по переменной y_i. Тогда из утверждения 1 леммы следует, что нулевое решение системы (9) устойчиво по переменной x_i.

Пусть теперь система (11) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной y_i. Поскольку справедливость условия 3 определения доказана выше, то из утверждения 1 леммы вытекает локальное асимптотическое равновесие системы (9) по переменной x_i.

Рассмотрим утверждение 2 теоремы 1. Пусть $\beta_i < 0$. Тогда $\mu_i(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, и, следовательно, нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво по переменной y_i. Отсюда утверждение 2 леммы справедливо, и нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво по переменной x_i.

Доказательство завершено. □

Рассмотрим частный случай системы (9), когда $f(t,x)$ — векторный полином по x. В этом случае система (9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t,x), \tag{36}$$

где

$$P(t,x) = \begin{pmatrix} P_1(t,x), \\ \dots, \\ P_n(t,x) \end{pmatrix}, \; P_j(t,x) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} d_j^{(p_j)}(t) x^{p_j}, \; x^{p_j} = x_1^{p_{j1}} x_2^{p_{j2}} \dots x_n^{p_{jn}}, \; \sigma \geqslant 2,$$
$$d_j^{(p_j)} \in C([T,+\infty), R), \quad p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}), \quad |p_j| = p_{j1} + \ldots + p_{jn}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{37}$$

Теорема 2. *Пусть при всех $j \in K_i$, $i = \overline{1,n}$, сходятся интегралы*

$$I_{ij}^{(p_j)} = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \rho^{a_i + p_{j1} b_1 + \ldots + p_{jn} b_n}(s) \; e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s - t_0)} \; |d_j^{(p_j)}(s)| ds. \tag{38}$$

Тогда системы (36) *и* (11) *являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, и справедливы следующие утверждения:*

1) если $\beta_i = 0$ и $b_i = 0$, то нулевое решение системы (36) *устойчиво по переменной x_i, причем из локального асимптотического равновесия системы* (11) *по переменной y_i следует локальное асимптотическое равновесие системы* (36) *по переменной x_i;*

2) если $\beta_i < 0$, то нулевое решение системы (36) *асимптотически устойчиво по переменной x_i.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $t_0 \geqslant T$ существует полуинтервал $[0, c)$, $c > 0$, такой, что для всех $c_0 \in [0, c)$ выполняются условия А и Б теоремы 1.

Аналогично оценке (10) для $f_j(t,x)$, из формул (37) получим оценку для $P_j(t,x)$

$$|P_j(t,x)| \leqslant \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} |d_j^{(p_j)}(t)| \, |x|^{p_j} \quad \text{для всех } x \in R^n, \tag{39}$$

где $|x|^{p_j} = |x_1|^{p_{j1}} |x_2|^{p_{j2}} \ldots |x_n|^{p_{jn}}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда с учетом (39) в качестве ψ_j в формуле (10) можно взять

$$\psi_j(t, |x_1|, ..., |x_n|) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} |d_j^{(p_j)}(t)| \, |x_1|^{p_{j1}} |x_2|^{p_{j2}} \ldots |x_n|^{p_{jn}}. \tag{40}$$

Учитывая формулы (38) и (40), вычислим интегралы (19) из условия А теоремы 1:

$$I_{ij}(c_0) = \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} c_0^{|p_j|} \int_{t_0}^{+\infty} \rho^{a_i+p_{j1}b_1+\ldots+p_{jn}b_n}(s)\; e^{(-\alpha_i+p_{j1}\beta_1+\ldots+p_{jn}\beta_n)(s-t_0)}\; |d_j^{(p_j)}(s)|ds =$$

$$= \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} c_0^{|p_j|} I_{ij}^{(p_j)}, \tag{41}$$

где $j \in K_i,\ i = \overline{1,n}$. Поскольку, согласно условию теоремы 2, интегралы $I_{ij}^{(p_j)}$ в формуле (41) сходятся, то интегралы $I_{ij}(c_0)$ также сходятся.

Проверим справедливость условия Б теоремы 1. Обозначим через k наименьшее из чисел $2, ..., \sigma$, для которого $|p_j| = \nu$ и хотя бы одна из функций $d_j^{(p_j)}(t)$ в формулах (37) отлична от нуля. Тогда для $c_0 < 1$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{j\in K_i} \sum_{|p_j|=2}^{\sigma} c_0^{|p_j|} I_{ij}^{(p_j)} = \sum_{j\in K_i} \sum_{|p_j|=k}^{\sigma} c_0^{|p_j|} I_{ij}^{(p_j)} < c_0^k \sum_{j\in K_i} \sum_{|p_j|=k}^{\sigma} I_{ij}^{(p_j)}. \tag{42}$$

Учитывая, что $I_{ij}^{(p_j)} > 0$, выберем c такое, что

$$c = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ 1, \left[\sum_{j\in K_i} \sum_{|p_j|=k}^{\sigma} I_{ij}^{(p_j)} \right]^{-\dfrac{1}{k-1}} \right\}. \tag{43}$$

Полагая в неравенстве (42) $c_0 < c$, где c выбирается по формуле (43), убеждаемся в справедливости условия Б теоремы 1.

Таким образом, условия А и Б теоремы 1 выполнены, и, следовательно, утверждения 1, 2 теоремы 2 справедливы.

Доказательство завершено. □

Следствие. Пусть коэффициенты $d_j^{(p_j)}(t)$ векторного полинома $P(t,x)$ в формуле (37) постоянны:

$$d_j^{(p_j)}(t) \equiv d_j^{(p_j)} \quad \text{при всех} \quad t \geqslant T \tag{44}$$

для всех наборов $p_j = (p_{j1}, ..., p_{jn}),\ j = \overline{1,n}$. Тогда, если выполняются неравенства

$$\gamma_{ij}^{(p_j)} \equiv -\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + ... + p_{jn}\beta_n < 0, \quad j \in K_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{45}$$

то системы (36) и (11) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, и справедливы следующие утверждения:

1) если $\beta_i = 0$ и $b_i = 0$, то нулевое решение системы (36) устойчиво по переменной x_i, причем из локального асимптотического равновесия системы (11) по переменной y_i следует локальное асимптотическое равновесие системы (36) по переменной x_i;

2) если $\beta_i < 0$, то нулевое решение системы (36) асимптотически устойчиво по переменной x_i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим сходимость интегралов (38) при всех $j \in K_i$, $i = \overline{1,n}$, в условии теоремы 2. С учетом формулы (17) и условия (44) интегралы (38) при $t_0 \geqslant 1$ будут иметь вид

$$I_{ij}^{(p_j)} = |d_j^{(p_j)}| \int\limits_{t_0}^{+\infty} s^{a_i + p_{j1}b_1 + \ldots + p_{jn}b_n} \; e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s - t_0)} ds, \tag{46}$$

а при $t_0 < 1$ —

$$I_{ij}^{(p_j)} = |d_j^{(p_j)}| \left(\frac{1 - e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(1 - t_0)}}{-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{1}^{+\infty} s^{a_i + p_{j1}b_1 + \ldots + p_{jn}b_n} \; e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s - t_0)} ds \right). \tag{47}$$

Учитывая условие (45), выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon - \alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n < 0$ при всех $j \in K_i$, $i = \overline{1,n}$. Далее выберем $t_1 \geqslant t_0$ так, чтобы были справедливы оценки

$$\int\limits_{t_1}^{+\infty} s^{a_i + p_{j1}b_1 + \ldots + p_{jn}b_n} \; e^{(-\alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s - t_0)} ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{+\infty} e^{(\varepsilon - \alpha_i + p_{j1}\beta_1 + \ldots + p_{jn}\beta_n)(s - t_0)} ds, \quad j \in K_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{48}$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (45), заключаем, что интегралы в формуле (48) сходятся. Откуда следует, что интегралы (46) и (47) также сходятся.

Таким образом, условия теоремы 2 выполнены, и, следовательно, утверждения 1–3 следствия справедливы.

Доказательство завершено. □

В качестве примера рассмотрим задачу о частичной устойчивости нулевого решения нелинейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \hat{\beta} x_1 + x_1^2 x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3, \end{cases} \tag{49}$$

где вещественное число $\hat{\beta} < 0$. Тогда матрица линейного приближения

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \hat{\beta} y_1, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = 0 \end{cases} \tag{50}$$

имеет следующие различные собственные значения:

$$\lambda_1 = \hat{\beta}, \quad \lambda_2 = 0,$$

причем алгебраическая кратность λ_1 равна 1, для λ_2 алгебраическая и геометрическая кратности равны 2 и 1 соответственно. Поскольку для λ_2 алгебраическая и геометрическая кратности не совпадают, то условия теорем 0.5.2 ([5], с. 23) и 2.4.1 ([5], с. 118) для системы (49) не выполняются.

Проверим условия следствия для системы (49). Для этого вычислим нормированную в точке t_0 фундаментальную матрицу линейного приближения (50)

$$Y(t-t_0) = \begin{pmatrix} e^{\hat{\beta}(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t-t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в оценках (15), (16) для элементов строк фундаментальной матрицы $Y(t-t_0)$ в качестве параметров α_i, β_i, $i=\overline{1,3}$, можно взять

$$\beta_1 = \alpha_1 = \hat{\beta}, \quad \beta_i = \alpha_i = 0, \quad i = 2, 3,$$

а в качестве параметров b_i, a_i, $i=\overline{1,3}$, —

$$b_i = a_i = 0, \quad i = 1, 3, \quad b_2 = a_2 = 1.$$

Следовательно, согласно формулам (18), функции $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,3}$, при $t \geqslant t_0$ имеют вид

$$\mu_1(t) = e^{\hat{\beta}_1(t-t_0)}, \quad \mu_2(t) = \rho(t-t_0), \quad \mu_3(t) = 1. \tag{51}$$

Здесь $D_0 = 1$. Далее, представляя нелинейную часть системы (49) по формулам (37), находим, что

$$p_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13}) = (2,1,1),\ p_2 = (p_{21}, p_{22}, p_{23}) = (1,1,0),\ p_3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33}) = (1,0,1).$$

Подставляя полученные значения в формулы (45) и учитывая, что для приведенного примера $K_1 = \{1\}$, $K_2 = \{2,3\}$, $K_3 = \{3\}$, имеем

$$\gamma_{11}^{(p_1)} = \gamma_{22}^{(p_2)} = \gamma_{23}^{(p_2)} = \gamma_{33}^{(p_3)} = \hat{\beta}.$$

Учитывая, что $\hat{\beta} < 0$, убеждаемся в справедливости неравенств (45).

Таким образом, все условия следствия выполнены, следовательно, система (49) и ее линейное приближение (50) являются равномерно локально покомпонентно асимптотически эквивалентными относительно функций (51), причем, поскольку

1) $\beta_3 = 0$ и $b_3 = 0$, то нулевое решение системы (49) устойчиво по переменной x_3, а сама система имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной x_3;

2) $\beta_1 < 0$, то нулевое решение системы (49) асимптотически устойчиво по переменной x_1.

4. Заключение. В настоящей работе на основании равномерной локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости относительно части переменных нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению в случае, когда матрица линейного приближения может содержать собственные значения с нулевыми вещественными частями, причем алгебраические и геометрические кратности этих собственных значений могут не совпадать.

Отметим, что вышеизложенный подход может быть также применен к изучению неустойчивости относительно части переменных нулевого решения нелинейной системы по линейному приближению.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963. 116 с.

2. *Малкин И. Г.* Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Математический сборник. 1938. Т. 3 (45). № 1. С. 47–101.

3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия. 1957. № 4. С. 9–16.

4. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

5. *Воротников В. И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

6. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 659–665.

7. *Прокопьев В. П.* Об устойчивости движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 422–426.

8. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

9. *Озиранер А. С.* Об устойчивости движения в критическом случае // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 415–421.

10. *Щенников В. Н.* О частичной устойчивости в критическом случае $2k$ чисто мнимых корней // Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики: сб. ст. Горький: Горьк. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 1985. С. 46–50.

11. *Щенников В. Н.* Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 9. С. 1645–1649.

12. *Воскресенский Е. В.* Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: Изд-во Средневолжск. матем. об-ва, 2000. 300 с.

13. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Саранск. ун-та, 1990. 224 с.

14. *Язовцева О. С.* Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных // Огарев-online. 2017. № 13. URL: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx (дата обращения: 16 марта 2023 г.).

15. *Шаманаев П. А., Язовцева О. С.* Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных // Журн. Средневолжск. матем. об-ва. 2017. Т. 19. № 1. С. 102–115.

16. *Шаманаев П. А., Язовцева О. С.* Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. Средневолжск. матем. об-ва. 2018. Т. 20. № 3. С. 304–317.

17. *Шаманаев П. А., Язовцева О. С.* Исследование устойчивости положения равновесия системы динамики биоценоза в условиях межвидового взаимодействия // Вестник Мордовского университета. 2018. Т. 28. № 3. С. 321–332.

18. *Шаманаев П. А., Язовцева О. С.* О частичной устойчивости положений равновесия динамических систем. Саранск: Средневолжск. матем. об-во, 2018. № 127. 20 с.

19. *Александров А. Ю.* Устойчивость движений неавтономных динамических систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. 184 с.

20. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием // Сибирск. матем. журн. 2012. Т. 53. № 3. С. 495–508.

21. *Екимов А. В., Чижова О. Н., Зараник У. П.* Устойчивость однородных нестационарных систем дифференциально-разностных уравнений с линейно возрастающим запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 415–424. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.401

22. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

23. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 249 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2023 г.

Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Шаманаев Павел Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; korspa@yandex.ru

On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation

P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University,
68, Bolshevistskaya ul., Saransk, Republic of Mordovia, 430005, Russian Federation

For citation: Shamanaev P. A. On the stability of the zero solution with respect to a part of variables in linear approximation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 374–390.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.306 (In Russian)

The article presents the sufficient conditions for stability and asymptotic stability with respect to a part of the variables of the zero solution of a nonlinear system in the linear approximation. the case is considered when the matrix of the linear approximation may contain eigenvalues with zero real parts and the algebraic and geometric multiplicities of these eigenvalues may not coincide. The approach is based on establishing some correspondence between the solutions of the investigated system and its linear approximation. The solutions of such systems starting in a sufficiently small zero neighborhood and the systems themselves possess the same componentwise asymptotic properties in this case. Such solutions' properties are stability and asymptotic stability with respect to some variables, and for systems componentwise local asymptotic equivalence and componentwise local asymptotic equilibrium. Considering the correspondence between the solutions of systems as an operator defined in a Banach space, there is proved that it has at least one fixed point according to the Schauder's principle. The operator allows to construct a mapping that establishes the relationship between the initial points of the investigated system and its linear approximation. Further, a conclusion about the componentwise asymptotic properties of solutions of the nonlinear system is made on the basis of estimates of the fundamental matrix of the linear approximation rows' entries. There is given an example of the investigation of stability and asymptotic stability with respect to a part of the variables of the zero solution of a nonlinear system is given, when the linear approximation matrix contains one negative and one zero eigenvalues, and the algebraic and geometric multiplicities of the zero eigenvalue do not coincide.

Keywords: ordinary differential equations, partial stability, local componentwise asymptotic equivalence, Schauder principle.

References

1. Lyapunov A. M. *Issledovanie odnogo iz osobennykh sluchaev zadachi ob ustoichivosti dvizheniia* [*Study of one of the special cases of the problem of stability of motion*]. Leningrad, Leningrad State University Press, 1963, 116 p. (In Russian)

2. Malkin I. G. Ob ustoichivosti dvizheniia v smysle Liapunova [On motions stability of Liapounov' sense]. *Rec. Math.* [*Mat. Sbornik*] N. S., 1938, vol. 3 (45), no. 1, pp. 47–101. (In Russian)

3. Rumyantsev V. V. Ob ustoichivosti dvizheniia po otnosheniiu k chasti peremennykh [On motion stability with respect to a part of variables]. *Vestnik of Moscow University. Series Mathematics. Mechanics. Astronomy. Physics. Chemistry.* 1957, no. 4, pp. 9–16. (In Russian)

4. Rumyantsev V. V., Oziraner A. S. *Ustoichivost' i stabilizatsiia dvizheniia po otnosheniiu k chasti peremennykh* [*Stability and stabilization of motion with respect to a part of variables*]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 253 p. (In Russian)

5. Vorotnikov V. I. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem po otnosheniiu k chasti peremennykh* [*Stability of dynamical systems with respect to a part of variables*]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 288 p. (In Russian)

6. Oziraner A. S. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti i neustoichivosti otnositel'no chasti peremennykh [On asymptotic stability and instability with respect to a part of the variables]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1973, vol. 37, iss. 4, pp. 659–665. (In Russian)

7. Prokopiev V. P. Ob ustoichivosti dvizheniia otnositel'no chasti peremennykh v kriticheskom sluchae odnogo nulevogo kornia [On the stability of motion with respect to a part of variables in the critical case of one zero root]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, iss. 3, pp. 422–426. (In Russian)

8. Malkin I. G. *Teoriia ustoichivosti dvizheniia* [*Theory of stability of motion*]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 530 p. (In Russian)

9. Oziraner A. S. Ob ustoichivosti dvizheniia v kriticheskom sluchae [On stability of motion in critical cases]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1975, vol. 39, iss. 3, pp. 415–421. (In Russian)

10. Shchennikov V. N. O chastichnoi ustoichivosti v kriticheskom sluchae $2k$ chisto mnimykh kornei [On partial stability in the critical case of $2k$ purely imaginary roots]. *Differential and integral equations: Methods of topological dynamics*. Gorkiy, Gorkiy State University named after N. I. Lobachevsky, 1985, pp. 46–50. (In Russian)

11. Shchennikov V. N. Issledovanie ustoichivosti po chasti peremennykh differentsial'nykh sistem s odnorodnymi pravymi chastiami [Investigation of the stability with respect to a part of the variables of differential systems with homogeneous right-hand sides]. *Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 9, pp. 1645–1649. (In Russian)

12. Voskresenskiy E. V. *Asimptoticheskie metody: teoriia i prilozheniia* [*Asymptotic methods: theory and applications*]. Saransk, Middle Volga Mathematical Society Publ., 2000, 300 p. (In Russian)

13. Voskresenskiy E. V. *Metody sravneniia v nelineinom analize* [*Comparison methods in nonlinear analysys*]. Saransk, Saransky University Press, 1990, 224 p. (In Russian)

14. Yazovtseva O. S. Lokal'naia pokomponentnaia asimptoticheskaia ekvivalentnost' i ee primenenie k issledovaniiu ustoichivosti po chasti peremennykh [The local component-wise asymptotic equivalence and its application to investigate for stability with respect to a part of variables]. *Ogarev-online*, 2017, no. 13. Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnayaasimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-pochasti-peremennyx (accessed: March 19, 2023). (In Russian)

15. Shamanaev P. A., Yazovtseva O. S. Dostatochnye usloviia lokal'noi pokomponentnoi asimptoticheskoi ekvivalentnosti nelineinykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii i ee prilozhenie k ustoichivosti po chasti peremennykh [The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [*Middle Volga Mathematical Society Journal*], 2017, vol. 19, no. 1, pp. 102–115. (In Russian)

16. Shamanaev P. A., Yazovtseva O. S. Dostatochnye usloviia poliustoichivosti po chasti peremennykh nulevogo resheniia nelineinykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [The sufficient conditions for polystability of solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [*Middle Volga Mathematical Society Journal*], 2018. vol. 20, no. 3, pp. 304–317. (In Russian)

17. Shamanaev P. A., Yazovtseva O. S. Issledovanie ustoichivosti polozheniia ravnovesiia sistemy dinamiki biotsenoza v usloviiakh mezhvidovogo vzaimodeistviia [Studying the equilibrium state stability of the biocenosis dynamics system under the conditions of interspecies interaction]. *Mordovia University Bulletin Journal*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 321–332. (In Russian)

18. Shamanaev P. A., Yazovtseva O. S. *O chastichnoi ustoichivosti polozhenii ravnovesiia dinamicheskikh system* [*Partial stability of equilibrium positions of dynamical systems*]. Saransk, Middle Volga Mathematical Society Publ., 2018, no. 127, 20 p. (In Russian)

19. Aleksandrov A. Yu. *Ustoichivost' dvizhenii neavtonomnykh dinamicheskikh sistem* [*Stability of motions of non-autonomous dynamical systems*]. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2004, 184 p. (In Russian)

20. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti reshenii nelineinykh sistem s zapazdyvaniem [On the asymptotic stability of solutions to nonlinear systems with delay]. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 495–508. (In Russian)

21. Ekimov A. V., Chizhova O. N., Zaranik U. P. Ustoichivost' odnorodnykh nestatsionarnykh sistem differentsial'no-raznostnykh uravnenii s lineino vozrastaiushchim zapazdyvaniem [Stability of homogeneous non-stationary systems of differential-difference equations with a linearly increasing delay]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2019, vol. 15, iss. 4, pp. 415–424. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.401 (In Russian)

22. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriia pokazatelei Liapunova i ee prilozheniia k voprosam ustoichivosti* [*Theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems*]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian)

23. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [*Functional analysis*]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 249 p. (In Russian)

Received: March 26, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

Author's information:

Pavel A. Shamanaev — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; korspa@yandex.ru