ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.962.24
MSC 39A11

Применение неявного метода Эйлера для дискретизации некоторых классов нелинейных систем

А. Ю. Александров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Александров А. Ю.* Применение неявного метода Эйлера для дискретизации некоторых классов нелинейных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 3. С. 304–319. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.301

Исследуется проблема сохранения устойчивости при дискретизации некоторых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений. Рассматриваются системы Персидского, системы Лурье непрямого управления и системы, правые части которых имеют каноническую структуру. Предполагается, что нулевые решения этих систем глобально асимптотически устойчивы. Определяются условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевых решений соответствующих разностных систем. Ранее такие условия были установлены для случая, когда дискретизация проводилась с помощью явного метода Эйлера. В данной работе разностные схемы строятся на основе неявного метода Эйлера. Для полученных дискретных систем доказаны теоремы о локальной и глобальной асимптотической устойчивости, выведены оценки времени переходных процессов. Для систем с канонической структурой правых частей на основе подхода В. И. Зубова предложена модифицированная неявная вычислительная схема, обеспечивающая согласование скорости сходимости решений к началу координат для дифференциальной и соответствующей разностной систем. Показано, что неявные вычислительные схемы могут гарантировать сохранение асимптотической устойчивости при менее жестких ограничениях на шаг дискретизации и правые части рассматриваемых систем по сравнению с ограничениями, полученными с использованием явного метода. Приводится пример, иллюстрирующий установленные теоретические выводы.

Ключевые слова: разностные системы, дискретизация, неявный метод Эйлера, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова, консервативные численные методы.

1. Введение. При решении задач анализа и синтеза управляемых систем довольно часто непрерывные модели приближенно заменяются дискретными [1–6]. Для этого используются различные численные методы и схемы дискретизации [7–10]. Однако в результате перехода к дискретному виду модель может терять важные качественные характеристики, присущие исследуемой системе (интегралы движения, интегральные инварианты, устойчивость программных режимов и т. д.). Для решения указанной проблемы применяются так называемые консервативные численные методы, основанные на специальной корректировке вычислительных процедур, обеспечивающей согласованность свойств непрерывных и соответствующих им дискретных моделей [1, 7, 8, 10]. В то же время следует отметить, что такой подход приводит к значительному усложнению разностных схем. Потому актуальную задачу представляет собой нахождение классов систем и используемых для них численных методов, для которых можно гарантировать, что качественные характеристики моделей сохраняются при дискретизации без дополнительной коррекции вычислительных процедур.

Одним из простейших методов численного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера, применяющийся как в явной, так и неявной форме. Условия сходимости и устойчивости явных и неявных схем Эйлера хорошо изучены для линейных [7, 8] и некоторых классов нелинейных систем [11–13]. В статье [14] исследовалась проблема дискретизации нелинейных однородных систем. Было показано, что использование явного метода Эйлера для глобальной аппроксимации решений однородных систем с ненулевым порядком однородности проблематично, а неявная схема Эйлера более перспективна. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах [15–17].

В настоящей статье рассматриваются три класса нелинейных систем дифференциальных уравнений: системы Персидского, системы Лурье непрямого управления и системы, правые части которых имеют каноническую структуру. Исследуются условия сохранения асимптотической устойчивости нулевых решений при дискретизации этих систем. Такие условия были найдены в [18, 19] в случае, когда дискретизация проводилась с помощью явного метода Эйлера. В данной работе выводятся условия существования и сходимости к нулю аппроксимаций, построенных неявным методом Эйлера. Показывается, что неявные вычислительные схемы могут гарантировать сохранение асимптотической устойчивости для соответствующих дискретных моделей при менее жестких ограничениях на шаг дискретизации и правые части систем по сравнению с ограничениями, установленными с использованием явного метода.

Следует отметить, что для неявных методов Эйлера есть известные условия устойчивости сходимости и контрактивности (см., например, [8, п. 2.4]). Однако ни устойчивость сходимости, ни контрактивность не гарантируют асимптотической устойчивости. Указанные условия основаны на использовании матриц Якоби правых частей рассматриваемых систем и одностороннего условия Липшица или логарифмической нормы матрицы [8]. Данный подход, вообще говоря, не применим для анализа асимптотической устойчивости решений изучаемых в настоящей работе систем, особенно если их правые части существенно нелинейны (для такого случая и логарифмическая норма, и односторонняя константа Липшица будут неотрицательными).

2. Системы Персидского. Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = A\varphi(z(t)). \tag{1}$$

Здесь $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))^\top \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, A — постоянная матрица, $\varphi(z)$ — непрерывная при всех $z \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция сепарабельного типа, т. е. $\varphi(z) = (\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_n(z_n))^\top$, компоненты которой удовлетворяют секторным условиям: $z_i\varphi_i(z_i) > 0$ при $z_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Система (1) — это классическая система Персидского [20]. Такие системы широко применяются при моделировании систем автоматического регулирования, нейронных сетей, цифровых фильтров, в задачах моделирования взаимодействия видов в биологических сообществах, а также в ряде других областей (см. [21–24]).

Предположение 1. Функции $\varphi_i(z_i)$ непрерывно дифференцируемы и строго возрастают при $z_i \in (-\infty, +\infty)$, причем $\varphi_i(z_i) \to -\infty$ при $z_i \to -\infty$ и $\varphi_i(z_i) \to +\infty$ при $z_i \to +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Предположение 2. Матрица A диагонально устойчива [21], т. е. существует диагональная положительно определенная матрица Λ такая, что матрица $\Lambda A + A^\top \Lambda$ отрицательно определена.

Предположение 3. При любом векторе $y \in \mathbb{R}^n$ и любом числе $h > 0$ система

$$z = y + hA\varphi(z) \tag{2}$$

однозначным образом разрешима относительно z.

Замечание 1. Условия однозначной разрешимости системы (2) были получены в статье [25].

Замечание 2. Из результатов работ [21, 25] следует, что предположения 2 и 3 справедливы в случае, когда матрица A метцлерова и гурвицева.

Используя непрерывность функции $\varphi(z)$ и секторные условия, нетрудно показать, что система (1) имеет нулевое решение. Известно [21], что при выполнении предположений 1 и 2 это решение глобально асимптотически устойчиво, причем функцию Ляпунова для (1) можно выбрать в виде

$$V(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_0^{z_i} \varphi_i(s)ds, \tag{3}$$

где λ_i — диагональные элементы матрицы Λ. Исследуем условия сохранения асимптотической устойчивости при дискретизации. В [19] такие условия были установлены в случае, когда к изучаемым уравнениям применялся явный метод Эйлера. Однако следует заметить, что в [19] для доказательства глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения соответствующей разностной системы требовалось, чтобы вектор-функция $\varphi(z)$ была глобально липшицевой, и накладывались довольно жесткие ограничения на шаг дискретизации.

В настоящей статье рассмотрим разностную систему, построенную с помощью неявного метода Эйлера:

$$x(k+1) = x(k) + hA\varphi(x(k+1)). \tag{4}$$

Здесь $x(k) = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^\top \in \mathbb{R}^n$, h — положительный коэффициент (шаг дискретизации), $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда для любого $h > 0$ и каждого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(k)$ системы* (4)*, начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, а нулевое решение глобально асимптотически устойчиво при любом шаге дискретизации.*

Доказательство. Существование, единственность и бесконечная продолжимость решений обеспечивается предположением 3. Заметим также, что решение системы (2) непрерывно зависит от y. Поэтому $x(k+1)$ будет непрерывной функцией от $x(k)$.

Для доказательства глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения выбираем функцию Ляпунова в виде (3), где λ_i — диагональные элементы матрицы Λ, обладающей свойствами, указанными в предположении 2. Эта функция положительно определена, причем $V(z) \to +\infty$ при $\|z\| \to \infty$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора).

Рассмотрим приращение $V(z)$ на решениях системы (4). Имеем соотношения

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) = h \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} \varphi_i(x_i(k+1)) \varphi_j(x_j(k+1)) -$$

$$- \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i'(x_i(k+1) + \theta_k(x_i(k) - x_i(k+1))) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varphi_j(x_j(k+1)) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant h\varphi^\top(x(k+1))(\Lambda A + A^\top \Lambda)\varphi(x(k+1)) \leqslant -\alpha h \|\varphi(x(k+1))\|^2,$$

в которых a_{ij} — элементы матрицы A, $\theta_k \in (0,1)$, α — положительная постоянная. Следовательно (см. [2, 3]), нулевое решение системы (4) глобально асимптотически устойчиво. Теорема 1 доказана. □

Покажем теперь, что в случае, когда предположение 3 не выполнено, за счет выбора достаточно малого шага дискретизации можно обеспечить локальную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (4) с любой наперед заданной ограниченной областью притяжения.

Теорема 2. *Пусть справедливы предположения 1 и 2. Тогда для любого $Q > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что при каждом фиксированном $h \in (0, h_0]$ и любом x_0, удовлетворяющем условию $\|x_0\| \leqslant Q$, решение $x(k)$ системы (4), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно, определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, и $\|x(k)\| \to 0$ при $k \to \infty$, а нулевое решение будет асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Выберем $Q > 0$. Функцию Ляпунова снова строим по формуле (3). Тогда (см. доказательство теоремы 1), если решение $x(k)$ системы (4), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, определено при $k = 0, \ldots, m$, то $V(x(k)) \leqslant V(x_0)$, $k = 1, \ldots, m$. Значит, найдется число $\widetilde{Q} > 0$ такое, что $\|x(k)\| \leqslant \widetilde{Q}$ при $\|x_0\| \leqslant Q$, $k = 0, \ldots, m$. Отметим, что величина $\widetilde{Q}$ не зависит от шага дискретизации.

С помощью замены переменной $u = z - y$ представим систему (2) следующим образом:

$$u = hA\varphi(u + y). \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что число $h_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы при каждом фиксированном $h \in (0, h_0]$ и любом y, удовлетворяющем условию $\|y\| \leqslant \widetilde{Q}$, для оператора $hA\varphi(u + y)$ в области $D = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \leqslant 2\widetilde{Q}\}$ выполнялись требования теоремы Банаха. Тогда в этой области система (5) будет иметь единственное решение, которое непрерывно зависит от y. Значит, если $h \in (0, h_0]$ и $\|x_0\| \leqslant Q$, то из (4) однозначным образом находится решение $x(k)$, определенное при всех $k = 0, 1, \ldots$ и такое, что $x(0) = x_0$, $\|x(k)\| \leqslant \widetilde{Q},\ k = 0, 1, \ldots$.

Сходимость к нулю последовательности $\|x(k)\|$ и асимптотическая устойчивость нулевого решения следуют из оценки приращения функции Ляпунова, полученной при доказательстве теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Далее рассмотрим функции $\varphi_i(z_i)$ специального вида.

Предположение 4. Пусть $\varphi_i(z_i) = z_i^{\mu_i}$, где μ_i — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, причем $\mu_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Покажем, что при таких функциях существование, единственность и продолжимость решений системы (4) можно обеспечить при любом шаге дискретизации за счет соответствующего выбора области допустимых начальных данных решений. Кроме того, в этом случае можно получить оценки времени переходных процессов в системе (4).

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения 2 и 4. Тогда для любого $h > 0$ найдутся положительные числа $Q, c, d_1, \ldots, d_n$ такие, что при каждом x_0, удовлетворяющем условию $\|x_0\| \leqslant Q$, решение $x(k)$ системы (4), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, причем справедливы оценки*

$$x_i^{\mu_i+1}(k) \leqslant d_i \sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu_i+1}(0) \left(1 + c \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu_i+1}(0)\right)^{\rho} k\right)^{-1/\rho}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\rho = \max_{i=1,\ldots,n}(\mu_i - 1)/(\mu_i + 1)$.

Доказательство. Произвольным образом задаем и фиксируем шаг дискретизации $h > 0$. Теперь для оператора, стоящего в правой части системы (5), выполнение требований теоремы Банаха в области D и при любом y, удовлетворяющем условию $\|y\| \leqslant \widetilde{Q}$, можно гарантировать за счет выбора достаточно малого значения $\widetilde{Q}$.

Функция (3) в данном случае принимает вид

$$V(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} z_i^{\mu_i+1}.$$

Снова получаем, что если решение $x(k)$ системы (4), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, определено при $k = 0, \ldots, m$, то $V(x(k)) \leqslant V(x_0)$, $k = 1, \ldots, m$. По выбранному значению $\widetilde{Q}$ найдем $Q > 0$ такое,что если $V(x(k)) \leqslant \max_{\|z\| \leqslant Q} V(z)$, то $\|x(k)\| \leqslant \widetilde{Q}$. Тогда при $\|x_0\| \leqslant Q$ решение $x(k)$ системы (4), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, причем $x(k+1)$ непрерывно зависит от $x(k)$.

На таких решениях имеют место неравенства

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leqslant -\alpha_1 h \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\mu_i}(k+1) \leqslant -\alpha_2 h V^{\rho+1}(x(k+1)), \tag{7}$$

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \geqslant -\alpha_3 h \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\mu_i}(k+1) -$$

$$- \alpha_4 h^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{2\mu_i}(k+1) \sum_{j=1}^{n} (x_i(k+1) + \theta_k(x_i(k) - x_i(k+1)))^{\mu_i - 1}, \tag{8}$$

здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — положительные коэффициенты, $\theta_k \in (0, 1)$.

С использованием соотношения (8) нетрудно проверить, что если величина $\widetilde{Q}$ достаточно мала, то $V(x(k)) \leqslant 2V(x(k+1))$. Тогда из (7) следует, что

$$V(x(k+1)) \leqslant V(x(k)) - \alpha_2 h 2^{-(\rho+1)} V^{\rho+1}(x(k)). \tag{9}$$

Применяя к разностному неравенству (9) лемму из статьи [18], приходим к оценкам (6). Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Неравенства (6) согласуются с неравенствами, установленными в [26] и [19] для соответствующей непрерывной системы и ее дискретного аналога, построенного с помощью явного метода Эйлера (в указанных работах были получены аналогичные степенные оценки с теми же самыми показателями степеней).

3. Система Лурье непрямого управления. Далее рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= P\xi(t) + bf(\sigma(t)), \\ \dot{\sigma}(t) &= c^\top \xi(t) + df(\sigma(t)), \end{aligned} \qquad (10)$$

в которой $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, $\sigma(t) \in \mathbb{R}$, P — постоянная матрица, b и c — постоянные векторы, $f(\sigma)$ — непрерывная при всех $\sigma \in \mathbb{R}$ скалярная нелинейность секторного типа ($\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$), d — постоянный коэффициент.

Заметим, что (10) представляет собой классическую систему Лурье непрямого управления [27]. Ее можно рассматривать как частный случай системы (1), полагая $n = l+1$, $z(t) = (\xi^\top(t), \sigma(t))^\top$, $\varphi_i(z_i) = z_i$ при $i = 1, \ldots, n-1$, $\varphi_n(z_n) = f(z_n)$. Однако наличие только одной нелинейности в некоторых случаях позволяет гарантировать сохранение асимптотической устойчивости при дискретизации системы (10) при менее жестких ограничениях по сравнению с установленными для системы (1).

Предположение 5. Функция $f(\sigma)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает при $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, причем $f(\sigma) \to -\infty$ при $\sigma \to -\infty$ и $f(\sigma) \to +\infty$ при $\sigma \to +\infty$.

Предположение 6. Существует положительно определенная матрица M такая, что матрица

$$L = \begin{pmatrix} MP + P^\top M & \frac{1}{2}c + Mb \\ \frac{1}{2}c^\top + b^\top M & d \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

Замечание 4. Условия, при выполнении которых справедливо предположение 6, хорошо известны (см. [28, 29]). В частности, для существования требуемой матрицы M необходимо, чтобы коэффициент d был отрицательным, а матрица P — гурвицевой.

Замечание 5. Если выполнены предположения 5 и 6, то положительно определенную функцию Ляпунова, гарантирующую глобальную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (10), можно выбрать в виде «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»:

$$V(\xi, \sigma) = \xi^\top M \xi + \int_0^\sigma f(s)ds. \qquad (11)$$

Применяя к (10) неявный метод Эйлера, приходим к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= \zeta(k) + hP\zeta(k+1) + hbf(\eta(k+1)), \\ \eta(k+1) &= \eta(k) + hc^\top \zeta(k+1) + hdf(\eta(k+1)), \end{aligned} \qquad (12)$$

в которой $\zeta(k) \in \mathbb{R}^l$, $\eta(k) \in \mathbb{R}$, h — положительный коэффициент (шаг дискретизации), $k = 0, 1, \ldots$.

Теорема 4. *Пусть справедливы предположения 5 и 6. Тогда можно указать $h_0 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_0]$ и для любой точки $(\zeta_0^\top, \eta_0)^\top \in \mathbb{R}^{l+1}$ решение системы (12), выходящее при $k = 0$ из этой точки, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, а нулевое решение глобально асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первой группы уравнений системы (12) находим, что

$$\zeta(k+1) = (I - hP)^{-1}\zeta(k) + hf(\eta(k+1))(I - hP)^{-1}b,$$

где I — единичная матрица. Тогда

$$\eta(k+1) - hf(\eta(k+1))\left(d + hc^\top(I - hP)^{-1}b\right) = \eta(k) + hc^\top(I - hP)^{-1}\zeta(k).$$

В силу предположения 6 имеем $d < 0$. Значит, если h достаточно мало, то выполнено неравенство $d + hc^\top(I - hP)^{-1}b \leqslant 0$. Это гарантирует существование, единственность и бесконечную продолжимость решений системы (12).

Рассмотрев теперь приращение функции Ляпунова (11) на решениях изучаемой системы, получаем

$$\Delta V = V(\zeta(k+1), \eta(k+1)) - V(\zeta(k), \eta(k)) = \int\limits_{\eta(k)}^{\eta(k+1)} f(s)ds + \zeta(k+1)^\top M\zeta(k+1) -$$

$$- (\zeta(k+1) - hP\zeta(k+1) - hbf(\eta(k+1)))^\top M(\zeta(k+1) - hP\zeta(k+1) - hbf(\eta(k+1))) =$$

$$= h\Big(\zeta^\top(k+1)(MP + P^\top M)\zeta(k+1) + f(\eta(k+1))(2Mb + c)^\top\zeta(k+1) + df^2(\eta(k+1))\Big) -$$

$$- h^2(P\zeta(k+1) + bf(\eta(k+1)))^\top M(P\zeta(k+1) + bf(\eta(k+1))) -$$

$$- \frac{1}{2}(\eta(k+1) - \eta(k+1))^2 f'(\eta(k+1) + \theta_k(\eta(k) - \eta(k+1))) \leqslant -\alpha h(\|\zeta(k+1)\|^2 + f^2(\eta(k+1))).$$

Здесь α — положительная постоянная, $\theta_k \in (0, 1)$. Теорема 4 доказана.

Далее рассмотрим функцию $f(\sigma)$ специального вида.

Предположение 7. Пусть $f(\sigma) = \sigma^\mu$, где μ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, причем $\mu > 1$.

Теорема 5. *Если выполнены предположения 6 и 7, то для каждого $h > 0$ найдутся положительные числа $Q, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ такие, что для любой точки $(\zeta_0^\top, \eta_0)^\top$, удовлетворяющей условию $\|(\zeta_0^\top, \eta_0)^\top\| \leqslant Q$, решение $(\zeta^\top(k), \eta(k))^\top$ системы (12), начинающееся при $k = 0$ в этой точке, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, причем справедливы неравенства*

$$\|\zeta(k)\|^2 \leqslant \beta_1 V(\zeta_0, \eta_0)\left(1 + \beta_3 V^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}(\zeta_0, \eta_0)k\right)^{-\frac{\mu+1}{\mu-1}}, \tag{13}$$

$$|\eta(k)|^{\mu+1} \leqslant \beta_2 V(\zeta_0, \eta_0)\left(1 + \beta_3 V^{\frac{\mu-1}{\mu+1}}(\zeta_0, \eta_0)k\right)^{-\frac{\mu+1}{\mu-1}}, \tag{14}$$

где

$$V(\xi, \sigma) = \xi^\top M\xi + \frac{1}{\mu+1}\sigma^{\mu+1}.$$

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 6. Оценки (13), (14) согласуются с оценками, установленными в [30, 31] для соответствующей непрерывной системы и ее дискретного аналога, построенного с помощью явного метода Эйлера.

4. Системы с канонической структурой правых частей. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial W(z(t))}{\partial z} + G(z(t))z(t), \tag{15}$$

здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, функция $W(z)$ непрерывно дифференцируема при $z \in \mathbb{R}^n$, $G(z)$ — непрерывная при $z \in \mathbb{R}^n$ кососимметрическая матрица ($G^\top(z) = -G(z)$).

Согласно теореме В. И. Зубова о канонической структуре силового поля (см. [1]), любая автономная система дифференциальных уравнений с непрерывно дифференцируемыми правыми частями представима в виде (15), при этом $W(z)$ является потенциалом силового поля, а вектор $H(z) = G(z)z$ определяет соленоидальную (гироскопическую) составляющую поля, которая не производит работы при перемещении вдоль радиус-вектора: $z^\top H(z) \equiv 0$.

Предположение 8. Пусть $W(z)$ — отрицательно определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu > 1$.

При выполнении данного предположения система (15) имеет нулевое решение, которое асимптотически устойчиво в целом, причем в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию

$$V(z) = \|z\|^2. \tag{16}$$

Проблема сохранения устойчивости при дискретизации системы (15) исследовалась в работе [18]. Применялся явный метод Эйлера. Было показано, что при любом сколь угодно малом шаге дискретизации асимптотически устойчивой системе дифференциальных уравнений (15) может соответствовать неустойчивая разностная система. Таким образом, возникает необходимость коррекции вычислительной схемы для того, чтобы обеспечить согласованность дифференциальных и соответствующих им разностных уравнений в смысле асимптотической устойчивости нулевых решений. Для решения этой задачи в [18] использовался предложенный В. И. Зубовым подход к построению консервативных численных методов (см. [1]). Однако модифицированная разностная схема усложняет вычисления. Кроме того, чтобы гарантировать ее устойчивость, в [18] накладывались довольно сильные ограничения на шаг дискретизации.

В настоящей статье применим к (15) неявный метод Эйлера. Получим систему

$$x(k+1) = x(k) + h\left(\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} + G(x(k+1))\,x(k+1)\right), \tag{17}$$

в которой $x(k) \in \mathbb{R}^n$, h — положительный коэффициент, $k = 0, 1, \ldots$.

Предположение 9. Правые части уравнений (15) в любой ограниченной области удовлетворяют условию Липшица.

Теорема 6. *Пусть справедливы предположения 8 и 9. Тогда для любого $Q > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что при каждом фиксированном $h \in (0, h_0]$ и любом x_0, удовлетворяющем условию $\|x_0\| \leqslant Q$, решение $x(k)$ системы (17), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно, определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, и $\|x(k)\| \to 0$ при $k \to \infty$, а нулевое решение будет асимптотически устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрев приращение функции Ляпунова (16) на решениях системы (17), имеем, что

$$\Delta V = \|x(k+1)\|^2 - \left\| x(k+1) - h\left(\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} + G(x(k+1))\,x(k+1)\right)\right\|^2 =$$

$$= 2h(\mu+1)W(x(k+1)) - h^2\left\|\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} + G(x(k+1))\,x(k+1)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -\alpha h(\mu+1)\|x(k+1)\|^{\mu+1}, \tag{18}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Значит, если решение $x(k)$, выходящее при $k = 0$ из точки x_0, определено при $k = 0, 1, \ldots, m$, то $\|x(k)\| \leqslant \|x_0\|$ при $k = 0, 1, \ldots, m$.

Как и при доказательстве теоремы 2, используя теорему Банаха, нетрудно показать, что для любого $Q > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что если $h \in (0, h_0]$ и $\|x_0\| \leqslant Q$, то решение $x(k)$ системы (17), начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$.

Сходимость к нулю последовательности $\|x(k)\|$ и асимптотическая устойчивость нулевого решения следуют из оценки (18). Теорема 6 доказана.

Замечание 7. Получаем, что при применении к (15) неявного метода Эйлера для сохранения асимптотической устойчивости не требуется модификации вычислительной схемы, а ограничение на шаг дискретизации нужно только для того, чтобы гарантировать существование решений. Если каким-то образом установлено, что для любого $h > 0$ и каждой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(k)$ системы (17) с начальным условием $x(0) = x_0$ существует и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, то нулевое решение такой системы глобально асимптотически устойчиво при произвольном шаге дискретизации.

Однако следует отметить, что разностная схема, построенная на основе неявного метода Эйлера, может быть не согласована с исходной системой дифференциальных уравнений (15) в смысле скорости сходимости решений к началу координат.

Действительно, известно (см. [32]), что если выполнено предположение 8, то для любого решения $z(t)$ системы (15) справедливы оценки

$$\|z(0)\|(1 + b_1\|z(0)\|^{\mu-1}t)^{-\frac{1}{\mu-1}} \leqslant \|z(t)\| \leqslant \|z(0)\|(1 + b_2\|z(0)\|^{\mu-1}t)^{-\frac{1}{\mu-1}} \tag{19}$$

при $t \geqslant 0$, где $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.

В то же время, если матрица G является постоянной и неособой, то приращение функции Ляпунова (16) на решениях такой системы можно оценить следующим образом:

$$\Delta V = \|x(k+1)\|^2 - \left\| x(k+1) - h\left(\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} + G\,x(k+1)\right)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -h^2\left(\|Gx(k+1)\|^2 - 2x^\top(k+1)G\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -h^2\left(\alpha_1\|x(k+1)\|^2 - \alpha_2\|x(k+1)\|^{\mu+1}\right),$$

здесь $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Выберем число $Q > 0$, удовлетворяющее условию $2\alpha_2\|x\|^{\mu-1} \leqslant \alpha_1$ при $\|x\| \leqslant Q$. В соответствии с доказательством теоремы 6 по числу Q находим $h > 0$ так, чтобы решения системы (17), начинающиеся при $k = 0$ в области $\|x\| \leqslant Q$, определялись однозначным образом и оставались в данной области при всех $k = 0, 1, \ldots$. Тогда для этих решений будут выполнены неравенства $\|x(k+1)\| \leqslant \beta \|x(k)\|$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\beta = 1/\sqrt{1 + h^2\alpha_1/2}$. Значит, $\|x(k)\| \leqslant \beta^k \|x(0)\|$, $k = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, для решений дифференциальной системы справедливы степенные оценки (19), а соответствующая разностная система экспоненциально устойчива.

Находим, что при применении явной схемы Эйлера асимптотически устойчивой системе (15) может соответствовать неустойчивая разностная система, а для неявной схемы Эйлера устойчивость получается «слишком сильной», что также приводит к рассогласованию свойств дифференциальной и разностной систем. Поэтому при использовании неявного метода Эйлера тоже нужно модифицировать вычислительную схему.

Требуемую модификацию будем конструировать на основе подхода В. И. Зубова. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{z}(t) = G(z(t))z(t).$$

Для нее функция (16) является первым интегралом. Строим модифицированную неявную схему Эйлера, сохраняющую этот интеграл.

Пусть

$$x(k+1) = x(k) + hG(x(k+1))x(k+1) + hu(h, x(k+1))x(k+1), \tag{20}$$

где $u(h, x(k+1))$ — скалярное управление, которое должно обеспечить выполнение условия $\|x(k+1)\|^2 = \|x(k)\|^2$. Получим, что

$$\|x(k+1)\|^2 = \|x(k+1) - hG(x(k+1))x(k+1) - hu(h, x(k+1))x(k+1)\|^2.$$

Значит,

$$h\|x(k+1)\|^2u^2(h, x(k+1)) - 2\|x(k+1)\|^2u(h, x(k+1)) + h\|G(x(k+1))x(k+1)\|^2 = 0.$$

Таким образом, управление может быть выбрано в следующей форме:

$$u(h, x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \left(1 - \sqrt{1 - h^2\|G(x)x\|^2/\|x\|^2}\right)/h \quad \text{при} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Отметим, что для любого числа $Q > 0$ можно указать $h_0 > 0$ такое, что функция $u(h, x)$ определена при $\|x\| < Q$, $h \in (0, h_0)$ и удовлетворяет неравенству $|u(h, x))| \leqslant ah$, где $a = \mathrm{const} > 0$. Значит, порядок (относительно шага дискретизации) корректирующего слагаемого $hu(h, x(k+1))x(k+1)$ в правой части системы (20) выше порядков других членов.

С помощью выбранного управления для исходной системы (15) строим неявную разностную схему

$$x(k+1) = x(k) + h\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} + hG(x(k+1))x(k+1) + hu(h, x(k+1))x(k+1). \tag{21}$$

Теорема 7. *Пусть выполнены предположения 8 и 9. Тогда для любого $Q > 0$ найдутся положительные числа $h_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ такие, что при каждом фиксированном $h \in (0, h_0]$ и любом x_0, удовлетворяющем условию $\|x_0\| \leqslant Q$, решение $x(k)$ системы*

(21), *начинающееся при $k = 0$ в точке x_0, существует, единственно, определено при всех $k = 0, 1, \ldots$, причем справедливы оценки*

$$\|x_0\|(1 + h\tilde{b}_1\|x_0\|^{\mu-1}k)^{-\frac{1}{\mu-1}} \leqslant \|x(k)\| \leqslant \|x_0\|(1 + h\tilde{b}_2\|x_0\|^{\mu-1}k)^{-\frac{1}{\mu-1}}, \qquad (22)$$

а нулевое решение будет асимптотически устойчивым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим приращение функции Ляпунова (16) на решениях системы (21):

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) = \|x(k+1)\|^2 -$$

$$-\left\|x(k+1) - h\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z} - hG(x(k+1))x(k+1) - hu(h, x(k+1))x(k+1)\right\|^2 =$$

$$= 2h(\mu+1)W(x(k+1))(1 - hu(h, x(k+1))) - h^2\left\|\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z}\right\|^2 +$$

$$+ 2h^2x^T(k+1)G(x(k+1))\frac{\partial W(x(k+1))}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$-h\alpha_1\|x(k+1)\|^{\mu+1} - h\alpha_2|u(h, x(k+1))|\|x(k+1)\|^{\mu+1} -$$

$$- h^2\alpha_3\|x(k+1)\|^{\mu+1} - h^2\alpha_4\|x(k+1)\|^{2\mu} \leqslant \Delta V \leqslant -h\alpha_5\|x(k+1)\|^{\mu+1} +$$

$$+ h\alpha_2|u(h, x(k+1))|\|x(k+1)\|^{\mu+1} + h^2\alpha_3\|x(k+1)\|^{\mu+1}.$$

Задаем число $Q > 0$. Тогда если h достаточно мало, то при $\|x(k)\| \leqslant Q$, $\|x(k+1)\| \leqslant Q$ получим, что

$$-2h\alpha_1\|x(k+1)\|^{\mu+1} \leqslant \Delta V \leqslant -\frac{1}{2}h\alpha_5\|x(k+1)\|^{\mu+1}, \qquad \frac{1}{2}\|x(k)\| \leqslant \|x(k+1)\| \leqslant \|x(k)\|.$$

Значит, справедливы соотношения

$$-2h\alpha_1 V^{\frac{\mu+1}{2}}(x(k)) = -2h\alpha_1\|x(k)\|^{\mu+1} \leqslant \Delta V \leqslant$$

$$\leqslant -\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+2} h\alpha_5\|x(k)\|^{\mu+1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+2} h\alpha_5 V^{\frac{\mu+1}{2}}(x(k)).$$

Применяя лемму из работы [18], приходим к оценкам (22).

То, что при соответствующем выборе шага дискретизации решения системы (21), начинающиеся при $k = 0$ в области $\|x\| \leqslant Q$, определяются однозначным образом и остаются в данной области при всех $k = 0, 1, \ldots$, показывается так же, как и при доказательстве теоремы 2. Кроме того, из оценок (22) следует, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Теорема 7 доказана.

Замечание 8. Неравенства (22) согласуются с известными для соответствующей дифференциальной системы неравенствами (19).

5. Пример. Рассмотрим задачу гашения угловых движений твердого тела. Пусть задано твердое тело, вращающееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))^\top$ вокруг своего центра инерции O. Предположим, что с телом связаны оси $Oxyz$, которые являются его главными центральными осями.

Динамические уравнения Эйлера, описывающие вращательное движение тела под действием управляющего момента M, имеют вид

$$\Theta\,\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times \Theta\omega(t) = M. \tag{23}$$

Здесь $\Theta = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$ — тензор инерции тела, A, B, C — главные центральные моменты инерции [33].

Будем считать, что $A = B$, а $M = -(\gamma_1\omega_1^\mu, \gamma_2\omega_2^\mu, \gamma_3\omega_3^\mu)^\top$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — положительные коэффициенты, μ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, $\mu > 1$. Тогда систему (23) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1(t) + (C - A)\omega_2(t)\omega_3(t) + \gamma_1\omega_1^\mu(t) &= 0,\\ A\dot{\omega}_2(t) + (A - C)\omega_1(t)\omega_3(t) + \gamma_2\omega_2^\mu(t) &= 0,\\ C\dot{\omega}_3(t) + \gamma_3\omega_3^\mu(t) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Известно [33], что положение равновесия $\omega = 0$ данной системы асимптотически устойчиво в целом. Заметим также, что (24) представляет собой частный случай системы (15) и для нее выполнены предположения 8 и 9.

Применяя неявный метод Эйлера, приходим к разностной системе

$$\begin{aligned} A(x_1(k+1) - x_1(k)) + h(C - A)x_2(k+1)x_3(k+1) + h\gamma_1 x_1^\mu(k+1) &= 0,\\ A(x_2(k+1) - x_2(k)) + h(A - C)x_1(k+1)x_3(k+1) + h\gamma_2 x_2^\mu(k+1) &= 0,\\ C(x_3(k+1) - x_3(k)) + h\gamma_3 x_3^\mu(k+1) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Из последнего уравнения находим $x_3(k+1)$ как однозначным образом определенную и непрерывную функцию от $x_3(k)$: $x_3(k+1) = \varphi(x_3(k))$. Подставив ее во второе уравнение системы, находим, что

$$Ax_2(k+1) + h\gamma_2 x_2^\mu(k+1) = Ax_2(k) + h(C - A)x_1(k+1)\varphi(x_3(k)).$$

Значит, $x_2(k+1) = \psi(Ax_2(k) + h(C - A)x_1(k+1)\varphi(x_3(k)))$, где $\psi(\tau)$ — однозначным образом определенная, непрерывная и строго возрастающая при $\tau \in (-\infty, +\infty)$ функция. Тогда

$$Ax_1(k+1) + h(C - A)\varphi(x_3(k))\psi(Ax_2(k) + h(C - A)x_1(k+1)\varphi(x_3(k))) + h\gamma_1 x_1^\mu(k+1) = Ax_1(k). \tag{26}$$

Левая часть уравнения (26) является непрерывной и строго возрастающей функцией переменной $x_1(k+1)$, поэтому данное уравнение однозначно задает $x_1(k+1)$ как непрерывную функцию от $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$.

Таким образом, для любого $h > 0$ и для каждой начальной точки решение системы (25), выходящее при $k = 0$ из этой точки, существует, единственно и определено при всех $k = 0, 1, \ldots$.

Применяя теорему 6 и учитывая замечание 7, получаем, что нулевое решение системы (25) глобально асимптотически устойчиво при любом шаге дискретизации.

Далее, как и в п. 4, можно построить модифицированную разностную схему, чтобы обеспечить согласованность скорости стремления решений к началу координат для дифференциальной системы (24) и ее дискретного аналога.

6. Заключение. В настоящей работе рассмотрены три класса нелинейных систем дифференциальных уравнений: системы Персидского, системы Лурье непрямого управления и системы с канонической структурой правых частей. С помощью неявного метода Эйлера проведена дискретизация указанных систем. Найдены условия сохранения асимптотической устойчивости нулевых решений при переходе от дифференциальных уравнений к разностным. Доказано, что неявные вычислительные схемы могут гарантировать асимптотическую устойчивость для соответствующих дискретных моделей при менее жестких ограничениях по сравнению с ограничениями, установленными ранее с использованием явного метода Эйлера. Следует отметить, что при применении неявного метода Эйлера для доказательства асимптотической устойчивости требование малости шага дискретизации нужно только для того, чтобы обеспечить существование решений. Если каким-то образом установлено, что решения рассматриваемых разностных систем определяются однозначно и неограниченно продолжимы для любого h, то нулевые решения таких систем будут глобально асимптотически устойчивы при произвольном шаге дискретизации.

В качестве направления дальнейших исследований укажем развитие предложенных подходов для применения их к более широким классам систем, в том числе к системам с запаздыванием.

Литература

1. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судпромгиз, 1980. 253 с.

2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем / пер. с рум.; под ред. В. П. Рубаника. М.: Мир, 1971. 312 с.

3. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972. 246 с.

4. *Igaadi A., Mghari H. E., Amraoui R. E.* Numerical investigation into the effects of orientation on subcooled flow boiling characteristics // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2023. Vol. 9. N 2. P. 464–474.

5. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N.* Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 3. С. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

6. *Zhabko A. P., Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Shindyapin A. I.* Optimal control of a differential-difference parabolic systems with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 4. С. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

7. *Butcher J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations. New York: John Wiley & Sons, 2003. 463 p.

8. *Dekker K., Verwer J. G.* Stability of Runge — Kutta methods for stiff nonlinear differential equations. Amsterdam: North-Holland, 1984. 307 p.

9. *Олемской И. В., Фирюлина О. С., Тумка О. А.* Семейства вложенных методов шестого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 2. С. 285–296. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.209

10. *Зубов В. И.* Консервативные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в нелинейной механике // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 4. С. 446–448.

11. *Gonzalez C., Ostermann A., Palencia C., Thalhammer M.* Backward Euler discretization of fully nonlinear parabolic problems // Mathematics of Computation. 2002. Vol. 71. N 237. P. 125–145.

12. *Merlet B., Pierre M.* Convergence to equilibrium for the backward Euler scheme and applications // Communications on Pure and Applied Analysis. 2010. Vol. 9. N 3. P. 685–702.

13. *Acary V., Brogliato B.* Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems // Systems and Control Letters. 2010. Vol. 59. P. 284–293.

14. *Efimov D., Polyakov A., Levant A., Perruquetti W.* Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62. N 11. P. 5962–5969.

15. *Brogliato B., Polyakov A., Efimov D.* The implicit discretization of the supertwisting sliding-mode control algorithm // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65. N 8. P. 3707–3713.

16. *Efimov D., Polyakov A., Aleksandrov A.* Discretization of homogeneous systems using Euler method with a state-dependent step // Automatica. 2019. Vol. 109. Art. N 108546.
17. *Brogliato B., Polyakov A.* Digital implementation of sliding-mode control via the implicit method: A tutorial // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2021. Vol. 31. N 9. P. 3528–3586.
18. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 6. С. 1217–1225.
19. *Александров А. Ю., Жабко А. П.* О сохранении устойчивости при дискретизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирск. матем. журн. 2010. Т. 51. № 3. С. 481–497.
20. *Persidskii S. K.* Problem of absolute stability // Automation and Remote Control. 1969. N 12. P. 1889–1895.
21. *Kaszkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser Press, 1999. 267 p.
22. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p.
23. *Erickson K., Michel A.* Stability analysis of fixed-point digital filters using computer generated Lyapunov functions. Pt I: Direct form and coupled form filters // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1985. Vol. 32. P. 113–132.
24. *Hopfield J., Tank D.* Computing with neural circuits: a model // Science. 1986. Vol. 233. P. 625–633.
25. *Sandberg I. W., Willson A. N.* Some theorems on properties of DC equations of nonlinear networks // The Bell System Technical Journal. 1969. Vol. 48. P. 1–34.
26. *Александров А. Ю.* Об устойчивости по нелинейному приближению одного класса неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 993–995.
27. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. 216 с.
28. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York: Springer, 1977. 396 p.
29. *Liao X., Yu P.* Absolute stability of nonlinear control systems. New York: Springer, 2008. 384 p.
30. *Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.* Asymptotic stability conditions and estimates of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2016. Vol. 35. P. 3531–3554.
31. *Aleksandrov A., Aleksandrova E.* Delay-independent stability conditions for a class of nonlinear difference systems // Journal of the Franklin Institute. 2018. Vol. 355. P. 3367–3380.
32. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений нелинейных неавтономных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 5–9.
33. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1976. 320 с.

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2023 г.
Статья принята к печати 8 июня 2023 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Application of the implicit Euler method for the discretization of some classes of nonlinear systems

A. Yu. Aleksandrov

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu. Application of the implicit Euler method for the discretization of some classes of nonlinear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 304–319.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.301 (In Russian)

The problem of stability preservation under discretization of some classes of nonlinear differential equations systems is studied. Persidskii systems, Lurie systems of indirect control, and systems whose right-hand sides have a canonical structure are considered. It is assumed that the zero solutions of these systems are globally asymptotically stable. Conditions are determined that guarantee the asymptotic stability of the zero solutions for the corresponding difference systems. Previously, such conditions were established for the case where discretization was carried out using the explicit Euler method. In this paper, difference schemes are constructed on the basis of the implicit Euler method. For the obtained discrete systems, theorems on local and global asymptotic stability are proved, estimates of the time of transient processes are derived. For systems with a canonical structure of right-hand sides, based on the approach of V. I. Zubov, a modified implicit computational scheme is proposed that ensures the matching of the convergence rate of solutions to the origin for the differential and corresponding difference systems. It is shown that implicit computational schemes can guarantee the preservation of asymptotic stability under less stringent constraints on the discretization step and right-hand sides of the systems under consideration compared to the constraints obtained using the explicit method. An example is presented illustrating the obtained theoretical conclusions.

Keywords: difference systems, discretization, implicit Euler method, asymptotic stability, Lyapunov functions, conservative numerical methods.

References

1. Zubov V. I. *Problema ustoichivosti protsessov upravleniia* [*The stability problem of control processes*]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1980, 253 p. (In Russian)

2. Khalanai A., Vexler D. *Kachestvennaia teoriia impul'snykh sistem* [*Qualitative theory of impulsive systems*]. Transl. from Romanian, ed. by V. P. Rubanik. Moscow, Mir Publ., 1971, 312 p. (In Russian)

3. Martynyuk D. I. *Lektsii po kachestvennoi teorii raznostnykh uravnenii* [*Lectures on the qualitative theory of difference equations*]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972, 246 p. (In Russian)

4. Igaadi A., Mghari H. E., Amraoui R. E. Numerical investigation into the effects of orientation on subcooled flow boiling characteristics. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2023, vol. 9, no. 2, pp. 464–474.

5. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2021, vol. 17, iss. 3, pp. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

6. Zhabko A. P., Provotorov V. V., Ryazhskikh V. I., Shindyapin A. I. Optimal control of a differential-difference parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2021, vol. 17, iss. 4, pp. 433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411

7. Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations.* New York, John Wiley & Sons Publ., 2003, 463 p.

8. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge — Kutta methods for stiff nonlinear differential equations.* Amsterdam, North-Holland Publ., 1984, 307 p.

9. Olemskoy I. V., Firyulina O. S., Tumka O. A. Semeistva vlozhennykh metodov shestogo poriadka [Families of embedded methods of order six]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 285–296. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.209 (In Russian)

10. Zubov V. I. Konservativnye chislennye metody integrirovaniia differentsial'nykh uravnenii v nelineinoi mekhanike [Conservative numerical methods for integrating differential equations in nonlinear mechanics]. *Dokl. RAN*, 1997, vol. 354, no. 4, pp. 446–448. (In Russian)

11. Gonzalez C., Ostermann A., Palencia C., Thalhammer M. Backward Euler discretization of fully nonlinear parabolic problems. *Mathematics of Computation*, 2002, vol. 71, no. 237, pp. 125–145.

12. Merlet B., Pierre M. Convergence to equilibrium for the backward Euler scheme and applications. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2010, vol. 9, no. 3, pp. 685–702.

13. Acary V., Brogliato B. Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems. *Systems and Control Letters*, 2010, vol. 59, pp. 284–293.

14. Efimov D., Polyakov A., Levant A., Perruquetti W. Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 11, pp. 5962–5969.

15. Brogliato B., Polyakov A., Efimov D. The implicit discretization of the supertwisting sliding-mode control algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, vol. 65. no. 8, pp. 3707–3713.

16. Efimov D., Polyakov A., Aleksandrov A. Discretization of homogeneous systems using Euler method with a state-dependent step. *Automatica*, 2019, vol. 109, Art. no. 108546.

17. Brogliato B., Polyakov A. Digital implementation of sliding-mode control via the implicit method: A tutorial. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, vol. 31, no. 9, pp. 3528–3586.

18. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. Ob ustoichivosti reshenii odnogo klassa nelineinykh raznostnykh sistem [On the stability of solutions of a class of nonlinear difference systems]. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 1217–1225. (In Russian)

19. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. O sokhranenii ustoichivosti pri diskretizatsii sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [On the preservation of stability under discretization of systems of ordinary differential equations]. *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 3, pp. 481–497. (In Russian)

20. Persidskii S. K. Problem of absolute stability. *Automation and Remote Control*, 1969, no. 12, pp. 1889–1895.

21. Kaszkurewicz E., Bhaya A. *Matrix diagonal stability in systems and computation.* Boston, Basel, Berlin, Birkhauser Press, 1999, 267 p.

22. Hofbauer J., Sigmund K. *Evolutionary games and population dynamics.* Cambridge, Cambridge University Press, 1998, 323 p.

23. Erickson K., Michel A. Stability analysis of fixed-point digital filters using computer generated Lyapunov functions. Pt I: Direct form and coupled form filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1985, vol. 32, pp. 113–132.

24. Hopfield J., Tank D. Computing with neural circuits: a model. *Science*, 1986, vol. 233, pp. 625–633.

25. Sandberg I. W., Willson A. N. Some theorems on properties of DC equations of nonlinear networks. *The Bell System Technical Journal*, 1969, vol. 48, pp. 1–34.

26. Aleksandrov A. Yu. Ob ustoichivosti po nelineinomu priblizheniiu odnogo klassa neavtonomnykh sistem [On stability in nonlinear approximation of a class of nonautonomous systems]. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 993–995. (In Russian)

27. Lurie A. I. *Nekotorye nelineinye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniia* [*Some nonlinear problems in the theory of automatic control*]. Moscow, Gostehizdat Publ., 1951, 216 p. (In Russian)

28. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability theory by Liapunov's direct method.* New York, Springer Publ., 1977, 396 p.

29. Liao X., Yu P. *Absolute stability of nonlinear control systems.* New York, Springer Publ., 2008, 384 p.

30. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. Asymptotic stability conditions and estimates of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2016, vol. 35, pp. 3531–3554.

31. Aleksandrov A., Aleksandrova E. Delay-independent stability conditions for a class of nonlinear difference systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, pp. 3367–3380.

32. Aleksandrov A. Yu. Ob asimptoticheskoi ustoichivosti reshenii nelineinykh neavtonomnykh sistem [On the asymptotic stability of solutions of nonlinear nonautonomous systems]. *Proceedings of RAN. Theory and control systems*, 1999, no. 2, pp. 5–9. (In Russian)

33. Merkin D. R. *Vvedenie v teoriiu ustoichivosti* [*Introduction to the stability theory*]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 320 p. (In Russian)

Received: February 15, 2023.
Accepted: June 8, 2023.

A u t h o r's i n f o r m a t i o n:

Alexander Yu. Aleksandrov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; a.u.aleksandrov@spbu.ru