Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории экономических решений

Попова Алёна Александровна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Оптимизация стохастической динамики результатов финансово-экономической деятельности компании (на примере ПАО«ГМК«Норильский никель»)

Направление 010400
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Колбин В. В.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Введение

В настоящее время необходимо оценивать будущие результаты финансово – экономической деятельности. Это позволяет вовремя изменить политику компании и не потерять слишком много или наоборот — приобрести еще больше. Поэтому крупные компании создают специальные аналитические отделы, по результатам работы которых руководители принимают важные решения. Потенциальным инвесторам необходимо оценивать эффективность работы компании, поэтому для них рассчитываются показатели эффективности.

На российском рынке компания «Норильский никель» занимает лидирующие позиции по производству металлов. Его доля на отечественном рынке по производству никеля составляет 96%, меди — 55%, металлов платиновой группы — более 90%. На долю на мировом рынке по производству никеля приходится 22%, меди — 3%, палладия — 38%, платины — 9%. Акции данной компании представлены на Московской, Лондонской, Франкфуртской и Берлинской биржах, уровень капитализации составляет 1 447,95 млрд. рублей (на 14.04.2016, Московская биржа).

Целью данной работы является прогнозирование оптимального результата финансово – экономической деятельности компании.

В данной работе проводится анализ результатов деятельности компании в период с 2009 года по первую половину 2015 года. Ставятся такие задачи:

- выявление зависимости общей выручки компании от выручки по основным металлам, таким как никель, медь, палладий и платина;
- прогнозирование возможных значений величины выручки для следующего периода деятельности компании;
- оптимизация решений относительно показателей эффективности компании.

В первой главе рассматривается решение первых двух вопросов. С помощью теории производственных функций выявляется необходимая зависимость, на основе которой с применением критериев принятия решений в условиях неопределенности определяются оптимальные решения.

Во второй главе рассматривается общая эффективность компании по таким показателям, как рентабельность реализации продукции и фондоотдача. С привлечением теории нечетких множеств между собой сравниваются решения, полученные в соответствии с различными критериями, по величине показателя эффективности и степени риска, связанной с отклонением от ожидаемого значения. Проводятся свертки критериев оптимальности.

Обзор литературы

В попытках работать конструктивно многие компании все больше и больше внимания уделяют бизнес-планированию и финансовому анализу. Финансовый анализ может быть произведен с привлечением нечетких множеств и производственных функций [1–3].

Понятие классической вероятности возникло при анализе ситуаций в азартных играх. Предполагалось, что все исходы равновозможны, а вероятность есть отношение благоприятного исхода ко всевозможным исходам. Позже появилась частотная интерпретация вероятности, одним из основателей которой был Дж. Венн. Согласно этой интерпретации вероятность определяется как предел относительной частоты появления случайного события при большом числе испытаний. В 1926 году Ф. Рамсей сформулировал понятие субъективной интерпретации вероятности. За основу субъективной вероятности было взято множество степеней веры, присущих реальным людям.

При принятии решения важно знать, к какому результату оно приведет. Если этот результат неизвестен, то такую ситуацию называют условиями неопределенности. Наиболее известные критерии для разрешения проблем в условиях неопределенности являются критерии Лапласа, Гурвица, Вальда и Сэвиджа. Их описания встречаются во многих книгах по риску и принятию решений при неопределенности (например, [4–6]).

Нечеткая логика является одним из наилучших способов моделирования и прогнозирования экономических процессов. В 1965 году термин «нечеткое множество» ввел профессор Калифорнийского университета Лотфи Заде. Причиной появления новой теории стала необходимость в приближенных, нечетких рассуждениях при описании различных процессов и объектов. Ученые современности находят множество областей применения нечетко-множественного анализа (например, [7] и [8]).

Глава 1. Принятие решений в условиях неопределенности

1.1. Построение производственных функций

Определение 1. Производственная функция q — это зависимость между размером производства и факторами производства $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Факторами производства являются переменные во времени величины, т.е. $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), x_4 = x_4(t)$. Будем подразумевать данную зависимость при дальнейших рассуждениях.
Ниже приведены основные виды производственных функций:

- Линейная — $q = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$.
- CES–функция — $q = (a_1x_1^p + a_2x_2^p + a_3x_3^p + a_4x_4^p)^{\frac{1}{p}}$.
- Экспоненциальная — $q = e^{(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)}$.
- Функция Кобба - Дугласа — $q = x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}$.

Выбирать наилучшую функцию будем из расчета минимизации стандартной ошибки регрессии ($Std.Error$) и суммы квадратов остатков (θ).

Определение 2. Стандартную ошибку регрессии можно записать следующим образом:

$$Std.Error = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \overline{q})^2}{(n-k-1)}},$$

где n — число наблюдений, q_i — наблюдаемая величина в момент времени i, $\overline{q}$ — средняя величина, n — количество испытаний, k — количество объясняющих переменных.

Определение 3. Сумма квадратов остатков — это величина

$$\theta = \sum_{i=1}^{n}(q_i - \overline{q})^2,$$

где q_i и $\overline{q}$ те же, что и выше.

Будем рассматривать зависимость общей выручки компании от выручки от реализации никеля, меди, палладия и платины. Обозначим данные переменные за x_1, x_2, x_3 и x_4 соответственно. Общую выручку компании обозначим за q.

В приложении 1 представлены данные о выручке от реализации металлов ГМК «Норильский никель» в период с 2009 по первую половину 2015 года. Все приведенные данные измеряются в миллионах долларов США (приведены с учетом индекса USDX) за тонну (в случае никеля и меди) и за унцию (в случае палладия и платины). Данные получены с официального сайта компании [9]. Для построения производственных функций был использован пакет "Eviews".

1. Линейная :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,8829x_1 + 1,1565x_2 + 1,2435x_3 + 1,04x_4.$$

   $Std.Error = 0,510933$, $\theta = 2,343538$.

2. CES-функция :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(0,6022x_1^{\frac{1}{2}} + 0,5921x_2^{\frac{1}{2}} + 0,4916x_3^{\frac{1}{2}} + 0,3181x_4^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

   $Std.Error = 4,614006$, $\theta = 191,6015$.

3. Экспоненциальная :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{10^{-5}(-0,647x_1+5,76x_2+1,97x_3+15,8x_4)}.$$

   $Std.Error = 1,501573$, $\theta = 20,29248$.

4. Функция Кобба - Дугласа :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{0,402}x_2^{0,3569}x_3^{0,195}x_4^{0,1664}.$$

   $Std.Error = 0,026007$, $\theta = 0,006087$.

Функцией с наименьшими значениями $Std.Error$ и θ является функция Кобба - Дугласа, поэтому ее и назовем наилучшей. Аппарат производственных функций широко используется при анализе деятельности компании, так как имеет большое количество прикладных характеристик [10]:

- Предельные эффективности ресурсов.
  Данные показатели характеризуют, как изменится выручка компании в целом при изменении выручки от реализации какого-либо конкретного металла.

$q_{x_1} = 0,402x_1^{-0,698}x_2^{0,3569}x_3^{0,195}x_4^{0,1664}$;
$q_{x_2} = 0,3569x_1^{0,402}x_2^{-0,6431}x_3^{0,195}x_4^{0,1664}$;
$q_{x_3} = 0,195x_1^{0,402}x_2^{0,3569}x_3^{-0,805}x_4^{0,1664}$;
$q_{x_4} = 0,1664x_1^{0,402}x_2^{0,3569}x_3^{0,195}x_4^{-0,8336}$.

- Эластичность выпуска по ресурсам.

  По этому показателю можно сказать, на сколько процентов вырастет общая выручка, если выручка по определенному ресурсу увеличится на 1%.
  $\varepsilon(q, x_1) = 0,402$;
  $\varepsilon(q, x_2) = 0,3569$;
  $\varepsilon(q, x_3) = 0,195$;
  $\varepsilon(q, x_4) = 0,1664$.

- Предельная норма замещения.

  Этот показатель определяет на сколько можно уменьшить/увеличить один фактор производства при увеличении/уменьшении другого на единицу при постоянном выпуске.
  $MRS_{12} = -1,1264\frac{x_2}{x_1}$;
  $MRS_{13} = -2,0615\frac{x_3}{x_1}$;
  $MRS_{14} = -2,4159\frac{x_4}{x_1}$;
  $MRS_{23} = -1,8303\frac{x_3}{x_2}$;
  $MRS_{24} = -2,1448\frac{x_4}{x_2}$;
  $MRS_{34} = -1,1719\frac{x_4}{x_3}$.

- Эластичность замены равна единице. Следовательно, если соотношение факторов изменится на 1% , то при постоянном выпуске предельная норма замещения ресурсов также изменится на 1% .

- Показатель отдачи от масштаба $\gamma = 1,1203$, следовательно, имеет место возрастающая отдача от масштаба, т.е. пропорциональное увеличение всех факторов производства приводит ко все большему увеличению объема выпуска.

Рассмотрим выбранную нами функцию как функцию полезности. Введем в рассмотрение векторы $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$, где x и $\overline{x}$ — векторы значений величин выручки от реализации отдельных металлов.

Определение 4. q — функция полезности, если $\forall x, \overline{x} \in X$:

$$x \succeq \overline{x} \Leftrightarrow q(x) \geq q(\overline{x}).$$

Для условия строгой монотонности необходимо выполнение условия $\frac{\partial q}{\partial x_i} > 0, \forall i = \overline{1,4}$. Оно выполнено, функция возрастает по каждому из аргументов, а это значит, что увеличение количества каждого из ресурсов увеличивает полезность всего набора. Из условия отрицательности второй производной $\frac{\partial^2 q}{\partial^2 x_i} < 0, \forall i = \overline{1,4}$ следует, что функция вогнута и обладает свойством убывающей предельной полезности.

При наличии вероятностного распределения можно перейти от полезности к ожидаемой полезности. В этом случае можно прогнозировать результаты деятельности компании на небольшие промежутки времени.

1.2. Критерии принятия решений

Рассмотрим выручки от реализации отдельных металлов как случайные величины ξ^i. По данным о выручке и используя критерий согласия Пирсона получено, что случайные величины распределены нормально ($\xi^i \sim N(a^i, (\sigma^i)^2)$). Построим доверительные интервалы для математического ожидания для случайных величин ξ^i:

- никель — $[183895; 234237]$;
- медь — $[99773; 120776]$;
- палладий — $[59519; 84492]$;
- платина — $[36794; 44473]$.

Из этих интервалов найдем k равноотстоящих друг от друга точек, эти точки назовем возможными решениями — $\{x_j\}_{j=1}^k$ (приложение 2), где $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4)$. Подставляя данные значения в производственную функцию, можем получить и множество «ситуаций» $S_1, ..., S_k$, где $S_i = q(x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4)$.

Для применения критерия, основанного на частотной интерпретации вероятности, рассмотрим область изменения величины выручки от реализации i-того металла и поделим ее на 9 равных отрезков — $[b_k^i, c_k^i]$. Частоту попадания x_i в интервал j назовем p_{ji}. Таким образом, получим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{14} \\ & & \dots & & \\ p_{j1} & \dots & p_{ji} & \dots & p_{j4} \\ & & \dots & & \\ p_{91} & \dots & p_{9i} & \dots & p_{94} \end{pmatrix},$$

составленную из частот попадания разных последовательностей переменных в разные интервалы. Выбрав в качестве меры риска функцию $\mu = \frac{1}{p_{ji}}$, зависящую от частоты p_{ji}, выбираем тот интервал, которому соответствует минимальное значение риска. Из возможных решений, попадающих в этот интервал, находим среднее — это будет окончательное решение. Результат представлен в таблице 1.

Таблица 1: Выручка компании в результате применения критерия с использованием частотной интерпретации вероятности (в млн. долл. США с учетом индексации)

Общая	Никель	Медь	Палладий	Платина
487320	228643	116108	79123	42767

Рассмотрим следующие критерии [4], [5]:

- Критерий оптимизма Лапласа. Лаплас полагал, что в условиях неопределенности можно принять все события равновероятными. Поэтому критерий выбора выглядит следующим образом:

$$W_L = \max_i \{\frac{1}{n} \sum_j w_{ij}\}.$$

  Выбор делается из ожидаемого выигрыша с условием равновероятных исходов.

- Критерий максимина Вальда. Данный критерий иногда также называют критерием крайнего пессимизма. Он подходит для рискофоба, то есть для того лица принимающего решение (ЛПР), который не хочет рисковать. Выбранный результат является перестраховочным, выбирается лучший вариант из худших. Математически это можно записать так:

$$W_V = \max_i \min_j w_{ij}.$$

- Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица. Данный критерий можно также назвать компромиссом между двумя предыдущими критериями.

$$W_{Gr} = \max_i\{\alpha \max_j w_{ij} + (1-\alpha)\min_j w_{ij}\}, 0 < \alpha < 1.$$

  Другими словами, наилучшее событие наступает с вероятностью α, а наихудшее – с вероятностью $1-\alpha$. Критерий Гурвица очень гибкий за счет произвольного изменения параметра α. Этот выбор полностью зависит от ЛПР.

- Критерий сожалений Сэвиджа. Сожалениями принято считать упущенные возможности. В данном критерии из исходной матрицы строится матрица сожалений D, к которой применяется критерий минимакса.

$$D = \max_j w_{ij} - w_{ij}, W_S = \min_i \max_j d_{ij}.$$

Для применения критериев Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа введем функционал, который будет зависеть от параметров $\{x_j\}_{j=1}^k$ и ситуаций $S_1, \dots, S_k$. На основе данного функционала $F(x_i, S_j)$ будет формироваться матрица W по следующему правилу:

$$W = \begin{pmatrix} F(x_1,S_1) & ... & F(x_1,S_l) & ... & F(x_1,S_k) \\ & & ... & & \\ F(x_l,S_1) & ... & F(x_l,S_l) & ... & F(x_l,S_k) \\ & & ... & & \\ F(x_k,S_1) & ... & F(x_k,S_l) & ... & F(x_k,S_k) \end{pmatrix}.$$

Поясним выбор функционала $F(x_i, S_j)$. На каждом уровне i аргумент j может принимать значения x_i^j и a^j, где a^j — точечная оценка математического ожидания случайной величины ξ^j, где $j = \overline{1,4}$. Множество всех размещений g аргументов для уровня i, исключая случаи (a^1, a^2, a^3, a^4) и $(x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4)$, обозначим за G_i. Во множество G_i, например, входят размещения $g_1 = (a^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4)$ и $g_2 = (x_i^1, a^2, a^3, x_i^4)$. Введем обозначение $M = q(a^1, a^2, a^3, a^4)$, что соответствует случаю, когда аргументы производственной функции принимают значения точечной оценки своего математического ожидания. $S_1, \dots, S_k$ соответствуют случаям, когда аргументы равны $(x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$,...,$(x_k^1, x_k^2, x_k^3, x_k^4)$. Введем функционал таким образом:

$$F(x_i, S_j) = \min_{G_i}\{||M - q(g)|| + ||S_j - q(g)||\}$$

(под нормой $||\cdot||$ понимается евклидова норма).

В таблице 2 представлены результаты применения описанных выше критериев. Все расчеты проведены в среде "Matlab".

Таблица 2: Выручка компании в результате применения критериев Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа (в млн. долл. США с учетом индексации)

Критерий	Общая	Никель	Медь	Палладий	Платина
Лаплас	433520	209066	99773	72006	40633
Вальд	470290	234237	110274	72006	40633
Гурвиц	426700	183895	110274	72006	40633
Сэвидж	450970	209066	111441	72006	40633

Глава 2. Показатели эффективности и нечетко – множественный анализ

Введем некоторые определения [11].

Определение 5. Нечеткое множество — это множество, для которого функция принадлежности μ элемента множества самому множеству принимает значения в промежутке $[0, 1]$.

Определение 6. Треугольное нечеткое число a — это такая тройка чисел $a = (a_1, a_2, a_3)$, для которой верно $\mu(a_1) = \mu(a_3) = 0, \mu(a_2) = 1$ (рис. 1).

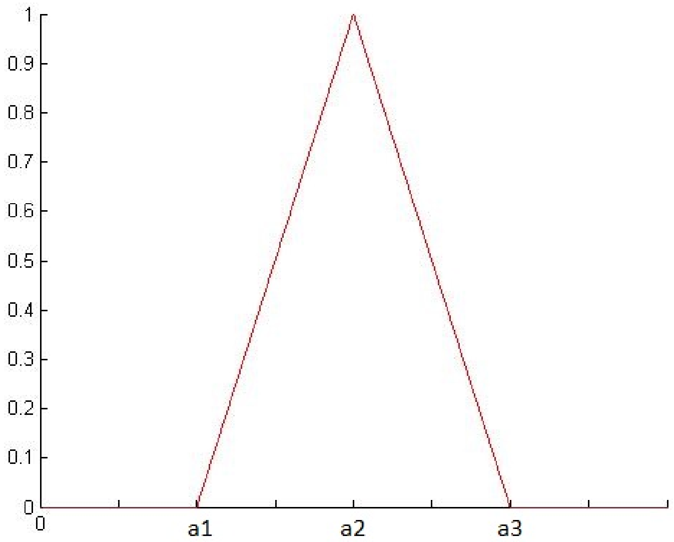

Рис 1. Треугольное число.

2.1. Рентабельность реализации продукции

Рентабельность реализации продукции (R_{prod}) характеризует долю прибыли на единицу реализованной продукции, выраженную в процентах, и определяется путем деления суммы прибыли от продаж (EAT) на чистую выручку от реализации продукции (S) по формуле: $R_{prod} = \frac{EAT \cdot 100\%}{S}$.

Рассмотрим подробнее используемые величины:

- EAT – прибыль от продаж. Применяя аппарат нечетко – множественного анализа данную величину представим в виде нечеткого треугольного числа следующим образом: EAT = (17075;121859;182003). Единицей измерения является млн.долл. США с учетом индексации (индексация аналогична описанной выше).

- S – выручка от реализации продукции, в нашем случае металлов. В предыдущей главе с помощью критериев принятия решений в условиях неопределенности были получены возможные значения этой величины (выражены в млн.долл. США с учетом индексации): по итогам применения критерия с использованием частотной интерпретации вероятности — $S_{Cl} = 487320$, критерия Лапласа — $S_L = 433520$, критерия Вальда — $S_V = 470290$, критерия Гурвица — $S_{Gr} = 426700$, критерия Сэвиджа — $S_S = 450970$.

Посчитаем соответствующие значения показателей рентабельности с учетом нечеткого числа EAT:

- $R_{prod_{Cl}} = (3,5\%; 25\%; 37,35\%)$
- $R_{prod_L} = (3,94\%; 28,11\%; 41,98\%)$
- $R_{prod_V} = (3,63\%; 25,91\%; 38,7\%)$
- $R_{prod_{Gr}} = (4\%; 28,56\%; 42,65\%)$
- $R_{prod_S} = (3,79\%; 27,02\%; 40,36\%)$

Исследуем на сколько отклоняются полученные значения от ожидаемых. Для этого представим ожидаемое значение рентабельности в виде треугольного числа — $R_{prod} = (4,1\%; 27,68\%; 42,93\%)$ (рис. 2).

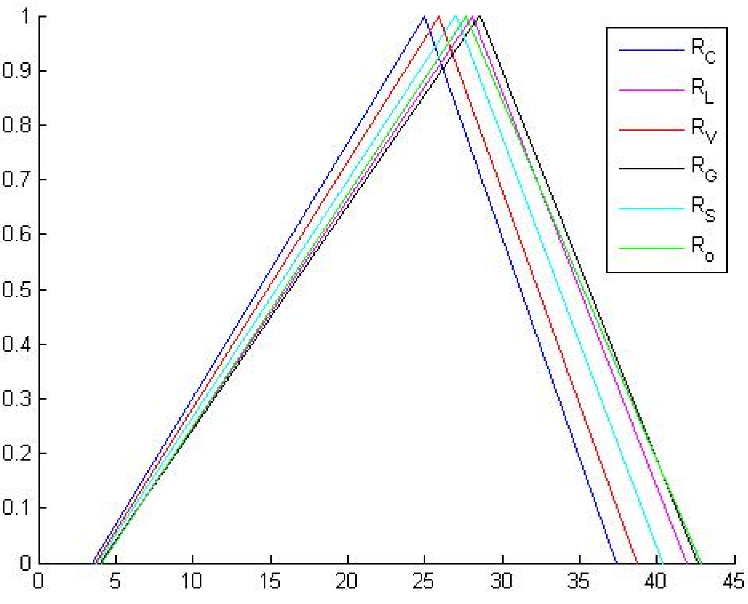

Рис 2. Показатель рентабельности.

Точки пересечения функции принадлежности R_{prod} с функциями принадлежности $R_{prod_{Cl}}, R_{prod_L}, R_{prod_V}, R_{prod_{Gr}}, R_{prod_S}$ будем классифицировать по линии уровня — $\mu = \mu_i$. Рассмотрим линию $\mu < \mu_i$. Будем проводить попарное сравнение ожидаемого значения показателя рентабельности с полученными значениями. Рассмотрим $R_{prod_{Cl}}$ и R_{prod} (рис. 3). На срезе $\mu = \mu^*$ показатель $R_{prod_{Cl}}$ принимает значения r_1 и r_2, а R_{prod} — R_1 и R_2. В этом случае можем найти зону нерентабельной реализации продукции путем нахождения площади многоугольника, ограниченного прямыми $y = R_1$, $y = R_2$, $x = r_1$, $x = r_2$ и $y = x$. Степенью риска нерентабельности назовем вероятностью попадания в зону неэффективности — на рисунке 4 она показана серым цветом.

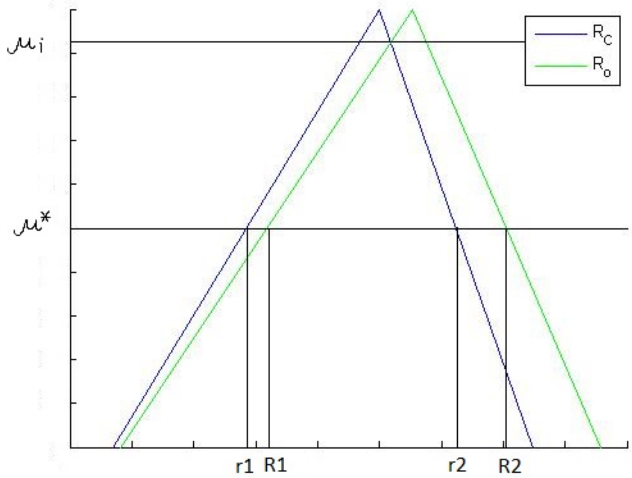

Рисунок 3. $R_{prod_{Cl}}$ и R_{prod}.

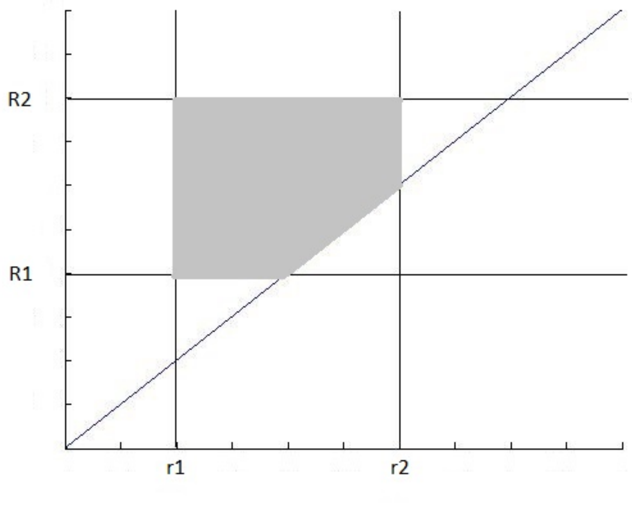

Рисунок 4. Зона неэффективности для $r_1 < R_1 < r_2 < R_2$.

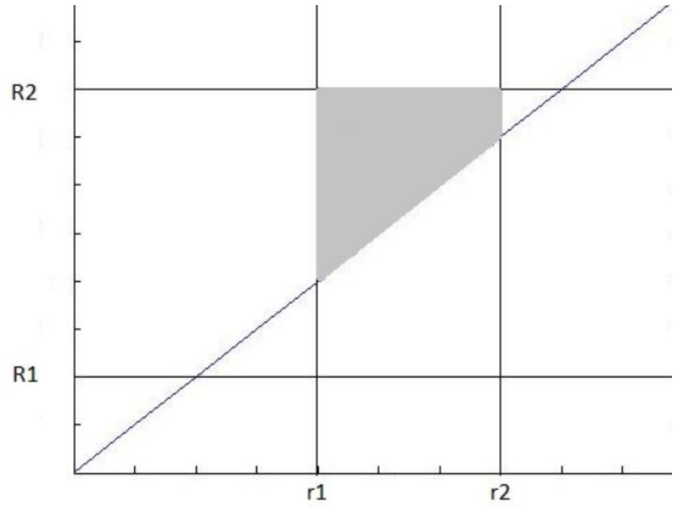

Рисунок 5. Зона неэффективности для $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

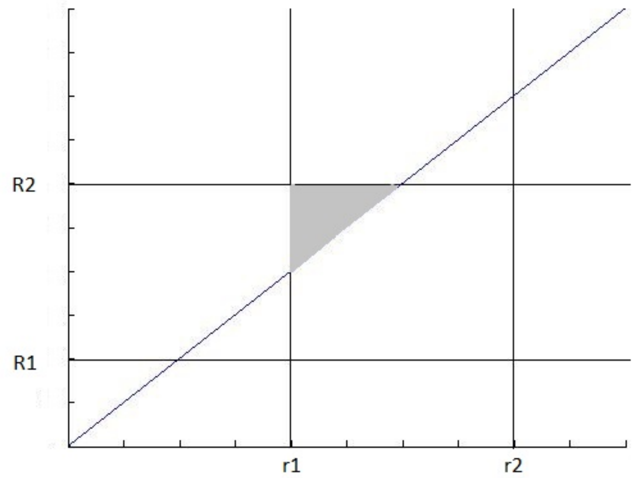

Рисунок 6. Зона неэффективности для $R_1 < r_1 < R_2 < r_2$.

Далее зададим зону нерентабельности и найдем геометрическую вероятность через отношение площадей. Аналогичную процедуру проведем с остальными показателями рентабельности.

Для любого значения $\mu < \mu_i$ верно $r_1 < R_1 < r_2 < R_2$, за исключением критериев Гурвица и Лапласа, и площадь зоны нерентабельности $S = (r_2 - r_1)(R_2 - R_1) - \frac{1}{2}(r_2 - R_1)^2$. Площадь всего прямоугольника $S_B = (r_2 - r_1)(R_2 - R_1)$. В случае критериев Гурвица и Лапласа надо отдельно рассматривать три промежутка:

- при $0 < \mu < \mu_1$ $r_1 < R_1 < r_2 < R_2$. $S = (r_2 - r_1)(R_2 - R_1) - \frac{1}{2}(r_2 - R_1)^2$ (рис. 4);
- при $\mu_1 < \mu < \mu_2$ $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. $S = (r_2 - r_1)(R_2 - r_2) + \frac{1}{2}(r_2 - r_1)^2$ (рис. 5);

- при $\mu_2 < \mu < \mu_3$ $R_1 < r_1 < R_2 < r_2$. $S = \frac{1}{2}(R_2 - r_1)^2$ (рис. 6).

Степень риска определяется по следующей формуле $p = \frac{S}{S_B}$ для каждого среза $\mu = \mu^*$. В качестве итоговой степени риска нужно взять совокупный риск при всех возможных значениях параметра μ, то есть $\int_0^{\mu_i} p(\mu) d\mu$.

Найдем значения μ_i. Для этого найдем функции предпочтения.

$$\mu R = \begin{cases} 0,042x - 0,174, x \in [4,1; 27,68] \\ -0,066x + 2,81, x \in (27,68; 42,93] \end{cases}$$

$$\mu R_{Cl} = \begin{cases} 0,046x - 0,163, x \in [3,5; 25] \\ -0,081x + 3,026, x \in (25; 37,35] \end{cases}$$

$$\mu R_L = \begin{cases} 0,041x - 0,163, x \in [3,63; 25,91] \\ -0,072x + 3,026, x \in (25,91; 38,7] \end{cases}$$

$$\mu R_V = \begin{cases} 0,045x - 0,163, x \in [3,63; 25,91] \\ -0,078x + 3,026, x \in (25,91; 38,7] \end{cases}$$

$$\mu R_{Gr} = \begin{cases} 0,041x - 0,163, x \in [4; 28,56] \\ -0,071x + 3,026, x \in (28,56; 42,65] \end{cases}$$

$$\mu R_S = \begin{cases} 0,043x - 0,163, x \in [3,77; 27,02] \\ -0,075x + 3,026, x \in (27,02; 40,36] \end{cases}$$

Точки пересечения функций принадлежности:

- μR и μR_{Cl} — $(25,92; 0,92)$;
- μR и μR_L — $(10,54; 0,27)$, $(27,85; 0,99)$ и $(32,43; 0,69)$;
- μR и μR_V — $(26,53; 0,95)$;
- μR и μR_S — $(27,25; 0,98)$;
- μR и μR_{Gr} — (6,47;0,1), (28,02;0,98) и (39,28;0,24).

Функция $p(\mu)$ не зависит от μ в явном виде, но функции принадлежности показывают зависимости $\mu = \mu(r_1)$, $\mu = \mu(r_2)$, $\mu = \mu(R_1)$, $\mu = \mu(R_2)$. Можем найти обратные функции и зависимости $r_1 = r_1(\mu)$ и т.д. Таким образом, для функции p получим зависимость от μ в явном виде.

1. Случай сравнения μR и μR_{Cl}.
   $r_1 = 21,5\mu + 3,5$

$r_2 = -12,34\mu + 37,35$

$R_1 = 23,58\mu + 4,1$

$R_2 = -15,25\mu + 42,93$

В результате подстановки получили функцию:

$$p_{Cl}(a) = \frac{668,97\mu^2 - 1434\mu + 761,45}{1314,2\mu^2 - 2628,3\mu + 1314,2}.$$

Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,92} p_{Cl}(\mu)d\mu = 0,621004$.

2. Случай сравнения μR и μR_L.

   $r_1 = 24,17\mu + 3,94$

   $r_2 = -13,87\mu + 41,98$

   $R_1 = 23,58\mu + 4,1$

   $R_2 = -15,25\mu + 42,93$

   - при $0 < \mu < 0,27$

   $$p(\mu) = \frac{775,87\mu^2 - 1535,7\mu + 759.7}{1477,2\mu^2 - 2954,5\mu + 1477,2}.$$

   $\int_0^{0,27} p(\mu)d\mu = 0,138364$;

   - при $0,27 < \mu < 0,69$

   $$p(\mu) = \frac{-20,4\mu + 19,97}{-38,83\mu + 38,83}.$$

   $\int_{0,27}^{0,69} p(\mu)d\mu = 0,211159$;

   - при $0,69 < \mu < 0,99$

   $$p(\mu) = \frac{776,99\mu^2 - 1537,1\mu + 760,16}{1477,2\mu^2 - 2954,5\mu + 1477,2}.$$

   $\int_{0,69}^{0,99} p(\mu)d\mu = 0,121674$.

   Итоговый риск получается $\int_0^{0,27} p(\mu)d\mu + \int_{0,27}^{0,69} p(\mu)d\mu + \int_{0,69}^{0,99} = 0,471197$

3. Случай сравнения μR и μR_V.

   $r_1 = 22,28\mu + 3,63$

   $r_2 = -12,79\mu + 38,7$

   $R_1 = 23,58\mu + 4,1$

   $R_2 = -15,25\mu + 42,93$

   В результате подстановки получили функцию:

   $$p_V(\mu) = \frac{700,4\mu^2 - 1465,1\mu + 763,16}{1361,7\mu^2 - 2723,5\mu + 1361,7}.$$

Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,95} p_V(\mu)d\mu = 0,609649$.

4. Случай сравнения μR и μR_{Gr}.
   $r_1 = 24,56\mu + 4$
   $r_2 = -14,09\mu + 42,65$
   $R_1 = 23,58\mu + 4,1$
   $R_2 = -15,25\mu + 42,93$

   - при $0 < \mu < 0,1$
   $$p(\mu) = \frac{791,15\mu^2 - 1549,2\mu + 757,67}{1500,9\mu^2 - 3001,7\mu + 1500,9}.$$
   $\int_0^{0,1} p(\mu)d\mu = 0,0503598$;
   - при $0,1 < \mu < 0,24$
   $$p(\mu) = \frac{-20,481\mu + 19,602}{-38,83\mu + 38,83}.$$
   $\int_{0,1}^{0,24} p(\mu)d\mu = 0,070016$;
   - при $0,24 < \mu < 0,98$
   $$p(\mu) = \frac{792,29\mu^2 - 1549,6\mu + 757,71}{1500,9\mu^2 - 3001,7\mu + 1500,9}.$$
   $\int_{0,24}^{0,98} p(\mu)d\mu = 0,318396$.

   Итоговый риск получается $\int_0^{0,1} p(\mu)d\mu + \int_{0,1}^{0,24} p(\mu)d\mu + \int_{0,24}^{0,98} = 0,4387718$

5. Случай сравнения μR и μR_S.
   $r_1 = 23,23\mu + 3,79$
   $r_2 = -13,34\mu + 40,36$
   $R_1 = 23,58\mu + 4,1$
   $R_2 = -15,25\mu + 42,93$

   В этом случае функция выглядит следующим образом:
   $$p_S(\mu) = \frac{738,67\mu^2 - 1501,6\mu + 762,76}{1420,1\mu^2 - 2840,2\mu + 1420,1}.$$
   Итоговый риск — $\int_0^{0,98} p_S(\mu)d\mu = 0,570715$.

2.2. Фондоотдача

Рассмотрим такой показатель как фондоотдача. Он определяется отношением выручки от реализации продукции к средней стоимости основных средств за период:

$$FO = \frac{S}{OC}.$$

Построим треугольное нечеткое число для основных средств — $OC = (566498; 837311; 909199)$.

Проведем анализ эффективности по показателю фондоотдачи аналогично рентабельности реализации продукции. Показатели фондоотдачи, посчитанные для тех же случаев выручки, равны:

- $FO_{Cl} = (0,54; 0,58; 0,86)$,
- $FO_L = (0,48; 0,52; 0,76)$,
- $FO_V = (0,52; 0,56; 0,83)$,
- $FO_G = (0,47; 0,51; 0,75)$,
- $FO_S = (0,5; 0,54; 0,8)$.

Ожидаемая фондоотдача – $FO = (0,31; 0,5; 0,71)$ (рис. 7).

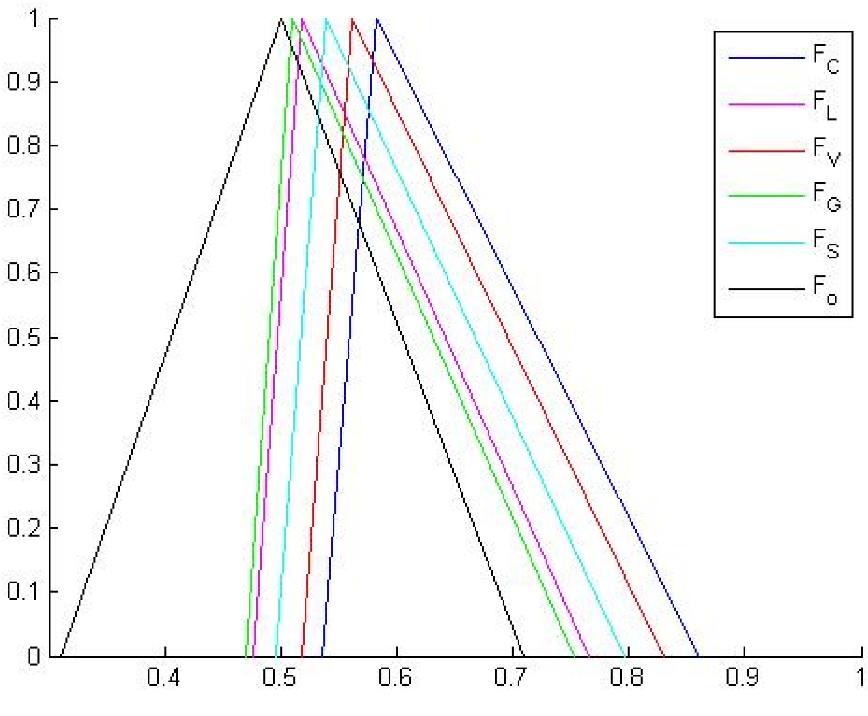

Рисунок 7. Показатели фондоотдачи.

Найдем функции принадлежности:

$$\mu FO = \begin{cases} 5,26x - 1,63, x \in [0,31; 0,5] \\ -4,76x + 3,38, x \in (0,5; 0,71] \end{cases}$$

$$\mu FO_{Cl} = \begin{cases} 21,73x - 11,65, x \in [0,53; 0,58] \\ -3,59x + 3,09, x \in (0,58; 0,86] \end{cases}$$

$$\mu FO_{L} = \begin{cases} 24,43x - 11,65, x \in [0,55; 0,6] \\ -4,04x + 3,09, x \in (0,6; 0,88] \end{cases}$$

$$\mu FO_{V} = \begin{cases} 22,52x - 11,65, x \in [0,55; 0,6] \\ -3,72x + 3,09, x \in (0,6; 0,88] \end{cases}$$

$$\mu FO_{G} = \begin{cases} 24,82x - 11,65, x \in [0,55; 0,6] \\ -4,1x + 3,09, x \in (0,6; 0,88] \end{cases}$$

$$\mu FO_{S} = \begin{cases} 23,48x - 11,65, x \in [0,5; 0,54] \\ -3,88x + 3,09, x \in (0,54; 0,8] \end{cases}$$

Точки пересечений функций принадлежности:

- μFO_{Cl} и μFO — $(0,57; 0,68)$;
- μFO_{L} и μFO — $(0,51; 0,93)$;
- μFO_{V} и μFO — $(0,55; 0,76)$;
- μFO_{G} и μFO — $(0,51; 0,96)$;
- μFO_{S} и μFO — $(0,53; 0,85)$.

Рассмотрим горизонтальный срез $\mu = \mu^*$ и обозначим за R_1 и R_2 точки пересечения ожидаемого значения фондоотдачи с прямой $\mu = \mu^*$, а за r_1 и r_2 — значения точек пересечения прямой $\mu = \mu^*$ с фондоотдачей FO_{Cl}, FO_L, FO_V, FO_G или FO_S.

Аналогично с показателем рентабельности реализации продукции находим степень риска попадания в неэффективную зону по показателю фонтоодачи (на рисунке 6 показана серым цветом) для среза $\mu = \mu^*$:

$$p = \frac{\frac{1}{2}(R_2 - r_1)^2}{(R_2 - R_1)(r_2 - r_1)}.$$

Посчитаем совокупную степень риска для каждого случая в отдельности:

1. Случай сравнения μFO и μFO_{Cl}.
   $r_1 = 0,05\mu + 0,54$
   $r_2 = -0,28\mu + 0,86$

$R_1 = 0,19\mu + 0,31$

$R_2 = -0,21\mu + 0,71$

В результате подстановки получили функцию:

$$p_{Cl}(\mu) = \frac{0,033\mu^2 - 0,044\mu + 0,015}{0,13\mu^2 - 0,259\mu + 0,13}.$$

Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,68} p_{Cl}(\mu)d\mu = 0,0424707$.

2. Случай сравнения μFO и μFO_L.

   $r_1 = 0,04\mu + 0,48$

   $r_2 = -0,25\mu + 0,76$

   $R_1 = 0,19\mu + 0,31$

   $R_2 = -0,21\mu + 0,71$

   В результате подстановки получили функцию:

   $$p_L(\mu) = \frac{0,031\mu^2 - 0,058\mu + 0,027}{0,115\mu^2 - 0,231\mu + 0,115}.$$

   Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,93} p_L(\mu)d\mu = 0,169294$.

3. Случай сравнения μFO и μFO_V.

   $r_1 = 0,04\mu + 0,52$

   $r_2 = -0,27\mu + 0,83$

   $R_1 = 0,19\mu + 0,31$

   $R_2 = -0,21\mu + 0,71$

   В результате подстановки получили функцию:

   $$p_V(\mu) = \frac{0,032\mu^2 - 0,049\mu + 0,018}{0,125\mu^2 - 0,252\mu + 0,125}.$$

   Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,76} p_V(\mu)d\mu = 0,0657168$.

4. Случай сравнения μFO и μFO_G.

   $r_1 = 0,04\mu + 0,47$

   $r_2 = -0,24\mu + 0,75$

   $R_1 = 0,19\mu + 0,31$

   $R_2 = -0,21\mu + 0,71$

   В результате подстановки получили функцию:

   $$p_G(\mu) = \frac{0,031\mu^2 - 0,06\mu + 0,03}{0,113\mu^2 + 0,227\mu + 0,113}.$$

   Следовательно, итоговый риск — $\int_0^{0,96} p_G(\mu)d\mu = 0,206518$.

5. Случай сравнения μFO и μFO_S.
   $r_1 = 0,04\mu + 0,5$
   $r_2 = -0,26\mu + 0,8$
   $R_1 = 0,19\mu + 0,31$
   $R_2 = -0,21\mu + 0,71$

   В этом случае функция выглядит следующим образом:

$$p_S(\mu) = \frac{0,032\mu^2 - 0,054\mu + 0,023}{0,12\mu^2 - 0,24\mu + 0,12}.$$

   Итоговый риск — $\int_0^{0,85} p_S(\mu) d\mu = 0,10701$.

2.3. Совокупный критерий

В данной работе выбор наилучшего решения является оптимизацией работы компании по финансовой деятельности. Приведенные в этой главе показатели эффективности сведем в один совокупный критерий, а степени риска — в другой [12].

Будем рассматривать линейную свертку критериев — $K = \sum_i \alpha_i f_i$. Критериями f_i в данной задаче являются показатели эффективности — R (рентабельность), F (фондоотдача) и степени риска неэффективности — rR и rF. При этом показатели эффективности и степени риска будем рассматривать в разных критериях, то есть $K_1 = \alpha_1 R + \alpha_2 F$ и $K_2 = \overline{\alpha}_1 rR + \overline{\alpha}_2 rF$. Для каждого ЛПР векторы предпочтений $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$ являются своими. Коэффициенты $\alpha_i, \overline{\alpha}_i \in [0,1], i = 1,2$ должны удовлетворять условиям $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = 1$.

В приложении приведен результат работы программы, которая рассчитывает значение совокупных критериев для пяти случаев выручки при разных значениях вектора α.

Выводы и результаты

- Построены зависимости общей выручки компании от выручки по отдельным видам металлов, таких как никель, медь, палладий и платина. По показателям стандартной ошибки регрессии и суммы квадратов остатков выявлена наилучшая функция. Исследованы ее характеристики и обоснован переход к функции полезности.

- Построено множество возможных решений, рассмотрены критерии принятия решений в условиях неопределенности. Разработан функционал для применения критериев Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа. Приведены результаты применения всех критериев для исходных данных.

- Рассмотрены показатели эффективности компании — рентабельность реализации продукции и фондоотдача. В силу того, что многие показатели компании не известны заранее, был применен аппарат нечетко – множественного анализа. Рассчитаны степени риска неэффективности по каждому показателю относительно их ожидаемого значения.

- Рассмотрены свертки критериев выбора оптимального решения. Приведены результаты применений совокупных критериев при различных значениях параметра свертки — вектора предпочтений.

Оптимальные решения найдены для величины выручки от реализации металлов. При наличии сведений о возможных значениях цен на металлы через найденные оптимальные значения выручки могут быть найдены оптимальные значения объемов реализации металлов, которые могут быть учтены при планировании будущих объемов добычи. В данной работе не ставилась задача о прогнозировании возможного значения рыночной цены в силу невозможности получения достаточного количества данных.

Список литературы

1. Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политиздат, 1990. 415 с.

2. Пелих А. С. Терехов Л. Л., Терехова Л. А. Экономико – математические методы и модели в управлении производством. Ростов Н/Д: Феникс,2005. 248 с.

3. Баркалов Н. Б. Производственные функции в моделях экономического роста. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1981. 126 с.

4. Уткин Л. В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб.: Наука, 2007. 404 с.

5. Колбин В. В. Теория риска. Часть 2. Спб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та,2012. 237 с.

6. Шоломинский А. Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ,2005. 399 с.

7. Недосекин А. О. Нечетко – множественный анализ фондовых инвестиций. СПб: Сезам, 2002. 181 с.

8. Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. М.: Машиностроение – 1, 2004. 212 с.

9. Официальный сайт компании ПАО «ГМК«Норильский никель». http://www.nornik.ru/.

10. Колбин В. В. Производственная функция и ее свойства.
Часть 1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 97 с.

11. Абдукаримов И. Т., Тен Н. В. Эффективность и финансовые результаты хозяйственной деятельности предприятия: критерии и показатели их характеризующие, методика оценки и анализа.//Социально-экономические явления и процессы. Выпуск №5-6/2011, с. 11-21.

12. Моор Д. А., Мухлисуллина Д. Т. Анализ эффективности различных сверток критериев оптимальности в задаче многокритериальной опти-

мизации//Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Выпуск № 04 / 2010, с. 9 - 21.

Приложение

Приложение 1. Данные о выручке компании

	1пол2009	2пол2009	1пол2010	2пол2010	1пол2011	2пол2011	1пол2012	2пол2012	1пол2013	2пол2013
Никель	138658,2	198000,9	252957,8	273140	276059,7	236008,2	214913,7	205126,8	182570,6	170839,6
Медь	66761,3	107993,5	104392,6	134843,3	115289,3	133540,1	104810,5	126157,4	104020,9	117639,2
Палладий	34938,1	38365,1	64025,3	56619,7	81442,9	69931,2	69045	69451,1	78385,4	79315,5
Платина	31402,2	47010,7	55918,7	32927,8	45783,3	41557,8	42261	40412,3	40178,7	37757,7
Итог	276895,4	397700	484077,4	503875,4	525525,8	488901,7	439690,9	449940,1	413125,6	434901,1

	1пол2014	2пол2014	1пол2015
Никель	175571,8	217847,4	176167,9
Медь	99859	113270,3	104989,9
Палладий	92001,3	100445,6	102108,2
Платина	38388,4	37269	37366
Итог	425792,4	490092,1	440996,1

Приложение 2. Возможные решения в условиях неопределенности

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Никель	183895	189489	195082	200676	206270	211863	217457	223050	228644	234237
Медь	99773	102106	104440	106774	109107	111441	113775	116109	118442	120776
Палладий	59519	62294	65069	67843	70618	73393	76168	78943	81718	84492
Платина	36794	37647	38500	39353	40207	41060	41913	42766	43620	44473

Приложение 3. Совокупный критерий показателей эффективности

Вектор α	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4	Случай 5
(0.474, 0.526)	(1.94, 12.1, 18.1)	(2.12, 13.6, 20.3)	(1.99, 12.6, 18.8)	(2.14, 13.8, 20.6)	(2.05, 13.1, 19.5)
(0.122, 0.878)	(0.898, 3.56, 5.31)	(0.899, 3.89, 5.8)	(0.897, 3.66, 5.45)	(0.9, 3.93, 5.87)	(0.898, 3.77, 5.63)
(0.866, 0.134)	(3.11, 21.7, 32.5)	(3.48, 24.4, 36.5)	(3.21, 22.5, 33.6)	(3.53, 24.8, 37.1)	(3.35, 23.5, 35.1)
(0.337, 0.663)	(1.54, 8.82, 13.2)	(1.64, 9.83, 14.7)	(1.57, 9.12, 13.6)	(1.66, 9.97, 14.9)	(1.61, 9.47, 14.1)
(0.498, 0.502)	(2.01, 12.7, 19.0)	(2.2, 14.3, 21.3)	(2.07, 13.2, 19.7)	(2.23, 14.5, 21.6)	(2.13, 13.7, 20.5)
(0.14, 0.86)	(0.951, 3.99, 5.96)	(0.96, 4.37, 6.52)	(0.952, 4.1, 6.12)	(0.963, 4.43, 6.61)	(0.956, 4.24, 6.32)
(0.664, 0.336)	(2.51, 16.8, 25.1)	(2.77, 18.8, 28.1)	(2.58, 17.4, 26.0)	(2.81, 19.1, 28.6)	(2.68, 18.1, 27.0)
(0.849, 0.151)	(3.06, 21.3, 31.9)	(3.42, 24.0, 35.8)	(3.16, 22.1, 33.0)	(3.47, 24.3, 36.3)	(3.29, 23.0, 34.4)
(0.315, 0.685)	(1.47, 8.28, 12.4)	(1.57, 9.22, 13.8)	(1.5, 8.56, 12.8)	(1.58, 9.35, 14.0)	(1.53, 8.89, 13.3)
(0.452, 0.548)	(1.88, 11.6, 17.4)	(2.04, 13.0, 19.4)	(1.93, 12.0, 18.0)	(2.07, 13.2, 19.7)	(1.98, 12.5, 18.7)
(0.948, 0.0516)	(3.35, 23.7, 35.5)	(3.76, 26.7, 39.9)	(3.47, 24.6, 36.7)	(3.82, 27.1, 40.5)	(3.62, 25.7, 38.3)
(0.476, 0.524)	(1.95, 12.2, 18.2)	(2.13, 13.7, 20.4)	(2.0, 12.6, 18.9)	(2.15, 13.9, 20.7)	(2.06, 13.1, 19.6)
(0.473, 0.527)	(1.94, 12.1, 18.1)	(2.11, 13.6, 20.2)	(1.99, 12.5, 18.7)	(2.14, 13.8, 20.6)	(2.05, 13.1, 19.5)
(0.655, 0.345)	(2.48, 16.6, 24.7)	(2.74, 18.6, 27.7)	(2.56, 17.2, 25.6)	(2.78, 18.9, 28.2)	(2.65, 17.9, 26.7)

Вектор α	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4	Случай 5
(0.793, 0.207)	(2.89, 19.9, 29.8)	(3.22, 22.4, 33.4)	(2.99, 20.7, 30.9)	(3.27, 22.8, 34.0)	(3.1, 21.5, 32.2)
(0.957, 0.0431)	(3.38, 24.0, 35.8)	(3.79, 26.9, 40.2)	(3.5, 24.8, 37.1)	(3.85, 27.3, 40.8)	(3.64, 25.9, 38.7)
(0.857, 0.143)	(3.08, 21.5, 32.1)	(3.44, 24.2, 36.1)	(3.19, 22.3, 33.3)	(3.5, 24.6, 36.7)	(3.32, 23.2, 34.7)
(0.106, 0.894)	(0.849, 3.16, 4.71)	(0.842, 3.43, 5.11)	(0.846, 3.24, 4.83)	(0.842, 3.47, 5.17)	(0.843, 3.33, 4.97)
(0.687, 0.313)	(2.57, 17.4, 25.9)	(2.85, 19.5, 29.1)	(2.66, 18.0, 26.8)	(2.89, 19.8, 29.5)	(2.76, 18.7, 28.0)
(0.965, 0.035)	(3.4, 24.2, 36.1)	(3.82, 27.1, 40.5)	(3.52, 25.0, 37.4)	(3.88, 27.6, 41.2)	(3.67, 26.1, 39.0)
(0.535, 0.465)	(2.12, 13.6, 20.4)	(2.33, 15.3, 22.8)	(2.18, 14.1, 21.1)	(2.36, 15.5, 23.2)	(2.26, 14.7, 22.0)
(0.49, 0.51)	(1.99, 12.6, 18.8)	(2.17, 14.1, 21.0)	(2.04, 13.0, 19.4)	(2.2, 14.3, 21.3)	(2.11, 13.5, 20.2)
(0.276, 0.724)	(1.36, 7.33, 10.9)	(1.43, 8.14, 12.1)	(1.38, 7.56, 11.3)	(1.44, 8.26, 12.3)	(1.4, 7.85, 11.7)
(0.408, 0.592)	(1.75, 10.5, 15.8)	(1.89, 11.8, 17.6)	(1.79, 10.9, 16.3)	(1.91, 12.0, 17.9)	(1.84, 11.3, 16.9)
(0.485, 0.515)	(1.97, 12.4, 18.5)	(2.15, 13.9, 20.7)	(2.03, 12.8, 19.2)	(2.18, 14.1, 21.1)	(2.09, 13.4, 20.0)
(0.289, 0.711)	(1.39, 7.64, 11.4)	(1.48, 8.49, 12.7)	(1.42, 7.88, 11.8)	(1.49, 8.61, 12.9)	(1.45, 8.19, 12.2)
(0.801, 0.199)	(2.91, 20.1, 30.1)	(3.25, 22.6, 33.8)	(3.01, 20.9, 31.2)	(3.3, 23.0, 34.3)	(3.13, 21.8, 32.5)
(0.193, 0.807)	(1.11, 5.29, 7.89)	(1.14, 5.84, 8.71)	(1.12, 5.45, 8.13)	(1.15, 5.92, 8.83)	(1.13, 5.64, 8.42)
(0.738, 0.262)	(2.73, 18.6, 27.8)	(3.03, 20.9, 31.2)	(2.82, 19.3, 28.8)	(3.08, 21.2, 31.7)	(2.92, 20.1, 30.0)
(0.723, 0.277)	(2.68, 18.2, 27.3)	(2.98, 20.5, 30.6)	(2.77, 18.9, 28.2)	(3.02, 20.8, 31.1)	(2.88, 19.7, 29.4)

Приложение 4. Совокупный критерий риска неэффективности

Вектор α	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4	Случай 5
(0.335, 0.665)	0.236	0.169	0.248	0.284	0.263
(0.44, 0.56)	0.297	0.217	0.305	0.308	0.311
(0.637, 0.363)	0.411	0.306	0.412	0.354	0.402
(0.481, 0.519)	0.321	0.236	0.328	0.318	0.33
(0.234, 0.766)	0.178	0.123	0.194	0.261	0.216
(0.238, 0.762)	0.18	0.125	0.195	0.261	0.217
(0.208, 0.792)	0.162	0.111	0.179	0.254	0.203
(0.64, 0.36)	0.413	0.308	0.414	0.355	0.404
(0.29, 0.71)	0.21	0.148	0.224	0.273	0.241
(0.574, 0.426)	0.374	0.277	0.378	0.34	0.373
(0.587, 0.413)	0.382	0.283	0.385	0.343	0.379
(0.375, 0.625)	0.259	0.187	0.27	0.293	0.281
(0.274, 0.726)	0.201	0.141	0.215	0.27	0.234
(0.665, 0.335)	0.427	0.319	0.428	0.361	0.415
(0.882, 0.118)	0.553	0.417	0.546	0.412	0.516
(0.0923, 0.908)	0.0954	0.0589	0.116	0.227	0.15
(0.455, 0.545)	0.305	0.223	0.313	0.312	0.318
(0.186, 0.814)	0.15	0.101	0.167	0.249	0.193
(0.975, 0.0247)	0.607	0.46	0.597	0.433	0.56
(0.675, 0.325)	0.433	0.324	0.433	0.363	0.42
(0.718, 0.282)	0.458	0.343	0.457	0.373	0.44
(0.761, 0.239)	0.483	0.363	0.48	0.383	0.46
(0.696, 0.304)	0.445	0.333	0.445	0.368	0.43
(0.487, 0.513)	0.324	0.238	0.331	0.319	0.333
(0.624, 0.376)	0.403	0.3	0.406	0.351	0.397