

Компьютерный анализ модели синхронного электромотора, не содержащей электрических токов

Б. И. Коносевиц, Ю. Б. Коносевиц

Институт прикладной математики и механики,
Российская Федерация, 283050, Донецк, ул. Р. Люксембург, 74

Для цитирования: Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Компьютерный анализ модели синхронного электромотора, не содержащей электрических токов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 499–515. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.305>

Рассматривается упрощенная модель синхронного электромотора, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим электрических токов. Как установил Ф. Трикоми, фазовый портрет этого уравнения относится к одному из трех типов в зависимости от того, будет ли входящий в него коэффициент демпфирования больше, меньше или равен некоторому критическому значению. Для критического значения не существует явного выражения, и поэтому усилия многих математиков были направлены на получение для него в явном виде верхних и нижних аналитических оценок. В данной работе с помощью компьютера получены фазовые портреты этого уравнения и отмечены свойства его фазовых траекторий, которые трудно заметить на известных фазовых портретах, полученных аналитическими методами. Путем расчета на компьютере построен также график кривой, изображающей критическое значение коэффициента демпфирования в этом уравнении в зависимости от главного стационарного значения угловой переменной. Предложены линейная и синусоидальная аппроксимации этой кривой, вычислены абсолютные и относительные погрешности таких аппроксимаций.

Ключевые слова: синхронный электромотор, фазовый портрет, критическое значение, глобальная устойчивость, метод сведения.

1. Введение. В теории фазовых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. систем с угловыми переменными) важное место занимает дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает вращение ротора синхронного электромотора под действием линейного демпфирующего и синусоидального вращающего момента и не содержит электрических токов [1]. Это уравнение играет ключевую роль в разработанном Г. А. Леоновым методе сведения [2, 3], который дает условия, когда из глобальной асимптотической устойчивости одного такого уравнения следует глобальная асимптотическая устойчивость многомерной фазовой системы (т. е. любое ее решение с течением времени стремится к одному из стационарных состояний [3]).

Так, в [4] с использованием такого уравнения в рамках метода сведения получено легкопроверяемое достаточное условие глобальной устойчивости модели синхрон-

ного электромотора, которая при нелинейном моменте демпфирования описывается системой дифференциальных уравнений, включающей уравнения для электрических токов.

Подробный анализ уравнения упрощенной модели синхронного электромотора методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений провел Ф. Трикоми [5]. Он установил, что для коэффициента линейного демпфирования, входящего в это уравнение, существует критическое значение, которое отделяет случай, когда для данного уравнения имеет место глобальная устойчивость, от двух случаев, когда глобальной устойчивости нет. Для каждого из этих случаев Ф. Трикоми указал качественную структуру фазового портрета рассматриваемого уравнения. Эти исследования были продолжены рядом математиков [6]. Ими были найдены аналитические оценки критического значения сверху и снизу.

Упрощенная модель синхронного электромотора, не содержащая электрических токов, используется не только в рамках метода сведения [2–4], но она применяется также в работах по теории гироскопа в кардановом подвесе [7, 8]. При этом в [7] рассматривается линейная формула для момента M , действующего на гироскоп (ротор) со стороны внутреннего элемента подвеса (статора), а в [8] в рамках упрощенной модели на основе соответствующей нелинейной формулы получено необходимое и достаточное условие устойчивости стационарных движений прибора. В [9, 10] показано, что это условие устойчивости сохраняется и для более сложной модели [11], когда момент M зависит от электрических токов, изменение которых описывается дифференциальными уравнениями. Это свидетельствует об адекватности упрощенной модели.

При записи в безразмерном виде дифференциальное уравнение упрощенной модели синхронного электромотора содержит только два параметра, что позволяет с помощью современной компьютерной техники изучать общие свойства его решений. В данной работе путем расчетов на компьютере получены фазовые портреты этого уравнения для всех трех качественно различных случаев и отмечены свойства его решений, которые представляют интерес в плане дальнейшего развития метода сведения. Полученный с помощью компьютера график зависимости критического значения от главного стационарного значения угловой переменной позволил предложить в [12] простые аппроксимации этой зависимости в виде линейной и синусоидальной функций. В данной работе представлены методы расчета параметров таких аппроксимаций, которые дают возможность более точно вычислить эти параметры и определить не только абсолютные, но и относительные погрешности аппроксимаций.

2. Упрощенная модель синхронного электромотора. Синхронный электромотор состоит из двух основных частей — статора и вращающегося в нем динамически и статически уравновешенного ротора. В статоре имеются обмотки провода, на которые подается переменный электрический ток, создающий магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого постоянен по модулю и вращается вокруг оси ротора с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$. В роторе синхронного электромотора также имеются обмотки провода, на которые через угольные щетки подается электрический ток. Поэтому момент M сил, действующих на ротор со стороны статора, зависит не только от угла φ поворота ротора и его производной по времени $\dot{\varphi}$, но и от токов в обмотках ротора. Вследствие этого динамика синхронного электромотора описывается системой обыкновенных дифференциальных

уравнений, включающей уравнения для электрических токов в обмотках ротора [3, 11].

В рамках упрощенной модели синхронного электромотора, описывающей его динамику при нелинейном моменте нагрузки, для суммарного момента M принимается выражение $M = M_d(\dot{\varphi}) - b_0 \sin(\varphi - \omega t)$, не содержащее электрических токов. Здесь $M_d(\dot{\varphi})$ — диссипативный момент сил сопротивления относительно оси ротора (момент нагрузки), который предполагается нечетной функцией его угловой скорости, монотонно убывающей вне малой окрестности нуля, $b_0 > 0$ — постоянная величина. Полученная таким путем упрощенная модель синхронного электромотора описывается дифференциальным уравнением $J\dot{\gamma} = \Delta M_d(\dot{\gamma}) - b_0 \sin \gamma - c_0$. Здесь J — осевой момент инерции ротора; $\gamma = \varphi - \omega t$ — угол рассогласования магнитных полей ротора и статора; $c_0 = -M_d(\omega) > 0$ — постоянная, а момент $\Delta M_d(\dot{\gamma}) = M_d(\dot{\gamma} + \omega) - M_d(\omega)$ при $\dot{\gamma} \neq 0$ имеет знак, противоположный знаку $\dot{\gamma}$, и поэтому является диссипативным. В линейном приближении имеем $\Delta M_d(\dot{\gamma}) = -a_0 \dot{\gamma}$ ($a_0 > 0$).

В теории фазовых систем вместо угла γ обычно используют угол $\theta = -\gamma$. Тогда, вводя безразмерные положительные параметры $a = a_0/\sqrt{b_0 J}$, $c = c_0/b_0$ и обозначая штрихом дифференцирование по переменной $\tau = t\sqrt{b_0/J}$, в случае линейного диссипативного момента получаем для описания упрощенной модели синхронного электромотора следующее уравнение:

$$\theta'' = -a\theta' - \sin \theta + c. \quad (1)$$

В основной теореме метода сведения [3, теорема 4.4.1] рассматривается дифференциальное уравнение, которое отличается от уравнения (1) только тем, что в нем вместо функции $\sin \theta - c$ ($c \in (0, 1)$) для общности рассматривается функция $\psi(\theta)$ с аналогичными свойствами — она периодична, имеет два нуля на периоде и не обращается в нуль вместе со своей производной.

3. Фазовые портреты уравнения упрощенной модели синхронного электромотора. Рабочий режим равномерного вращения ротора электромотора с угловой скоростью ω соответствует стационарному решению уравнения (1), в котором $\theta' = 0$, а значение угла θ определяется уравнением $\sin \theta = c$. При $c > 1$ стационарные решения не существуют. Отбрасывая особый случай, когда $c = 1$, будем предполагать, что $c \in (0, 1)$. Тогда уравнение (1) имеет два счетных семейства стационарных решений при значениях $\theta_n^{(0)}$, $\theta_n^{(1)}$ угла θ , равных

$$\theta_n^{(0)} = \theta_0 + 2\pi n, \quad \theta_n^{(1)} = \theta_1 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Здесь

$$\theta_0 = \arcsin c \in (0, \pi/2), \quad \theta_1 = -\pi - \theta_0 \in (-3\pi/2, -\pi). \quad (3)$$

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно показать, что решениям первого семейства соответствуют асимптотически устойчивые стационарные точки уравнения (1) — устойчивый фокус или устойчивый узел, а решениям второго семейства соответствуют неустойчивые седловые стационарные точки.

Глобальный анализ уравнения (1) методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений провел Ф. Трикоми [5]. Он установил, что существует критическое значение коэффициента демпфирования a , которое является непрерывной монотонно возрастающей функцией $a_{cr}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает

тем свойством, что уравнение (1) имеет качественно различные фазовые портреты в случаях $a > a_{\text{cr}}(c)$, $a = a_{\text{cr}}(c)$ и $a < a_{\text{cr}}(c)$. Эти фазовые портреты приведены в [1, рис. 5–7] и в [6, рис. 20, 22, 23].

Они показывают, что в случае $a > a_{\text{cr}}$ через каждую седловую точку уравнения (1) проходит фазовая кривая, которая состоит из трех фазовых траекторий — самой этой точки из двух примыкающих к ней сепаратрис, неограниченных по θ, θ' в том смысле, что на них $\theta(\tau) \rightarrow \mp\infty$ при $\tau \rightarrow -\infty$, и при этом $\theta' \rightarrow \pm\infty$, когда $\theta \rightarrow \mp\infty$. На этих сепаратрисах решения уравнения (1) при $\tau \rightarrow +\infty$ стремятся к соответствующим седловым точкам. Такие неограниченные по θ, θ' фазовые кривые в случае $a > a_{\text{cr}}$ делят фазовую плоскость уравнения (1) на области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек. Поэтому в случае $a > a_{\text{cr}}$ каждое решение уравнения (1) при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к одной из двух его стационарных точек, существующих на каждом периоде, так что, согласно данному в [1, с. 67] определению, имеет место глобальная устойчивость этого уравнения.

В случаях, когда $a = a_{\text{cr}}$ или $a < a_{\text{cr}}$, области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек не заполняют всю фазовую плоскость. В этих случаях существуют решения, на которых переменная θ' ограничена, а переменная θ неограниченно возрастает при $\tau \rightarrow +\infty$, так что глобальная устойчивость отсутствует. Одно из этих неограниченных по θ решений является периодическим, а остальные стремятся к нему при $\tau \rightarrow +\infty$ [6, с. 81].

На рис. 1, *a*, *б*, *в* показаны фазовые портреты уравнения (1), построенные на компьютере. На них θ_0, θ_1 — значения угла θ , определенные в (3), $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$. Участки фазовых траекторий уравнения (1), лежащие вне окрестностей стационарных точек, строятся с помощью его численного интегрирования по переменной τ . Чтобы определить сепаратрисы вблизи седловых точек, достаточно воспользоваться тем, что фазовые траектории уравнения (1) являются решениями соответствующего уравнения интегральных кривых

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = -a - \frac{\sin\theta - c}{\theta'}. \quad (4)$$

Для интегральных кривых $\theta' = \theta'(\theta)$, содержащих седловую точку $(\theta_1, 0)$, соответствующая этой точке особенность типа $0/0$ в правой части уравнения (4) является устранимой. Поэтому в малой окрестности седловой точки $(\theta_1, 0)$ вместо численного интегрирования уравнения (1) в расчетах достаточно воспользоваться линейной аппроксимацией $\theta'(\theta) = \lambda(\theta - \theta_1)$ двух фазовых кривых, проходящих через эту точку. Подставив такое выражение в уравнение (4), устанавливаем, что коэффициент λ удовлетворяет характеристическому уравнению $\lambda^2 + a\lambda + \cos\theta_1 = 0$. Это уравнение имеет два корня

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos\theta_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \cos\theta_1}. \quad (5)$$

Поскольку $\theta_1 \in (-3\pi/2, -\pi)$, то $\cos\theta_1 < 0$, и поэтому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Фазовый портрет уравнения (1) на рис. 1, *a* соответствует случаю его глобальной устойчивости, когда $a > a_{\text{cr}}(c)$. Он получен при $c = 0.25$, $a = 1.8 \cdot a_{\text{cr}}(c) = 0.356864$, где $a_{\text{cr}}(c) = 0.198258$, согласно рассмотренной ниже синусоидальной аппроксимации критических значений.

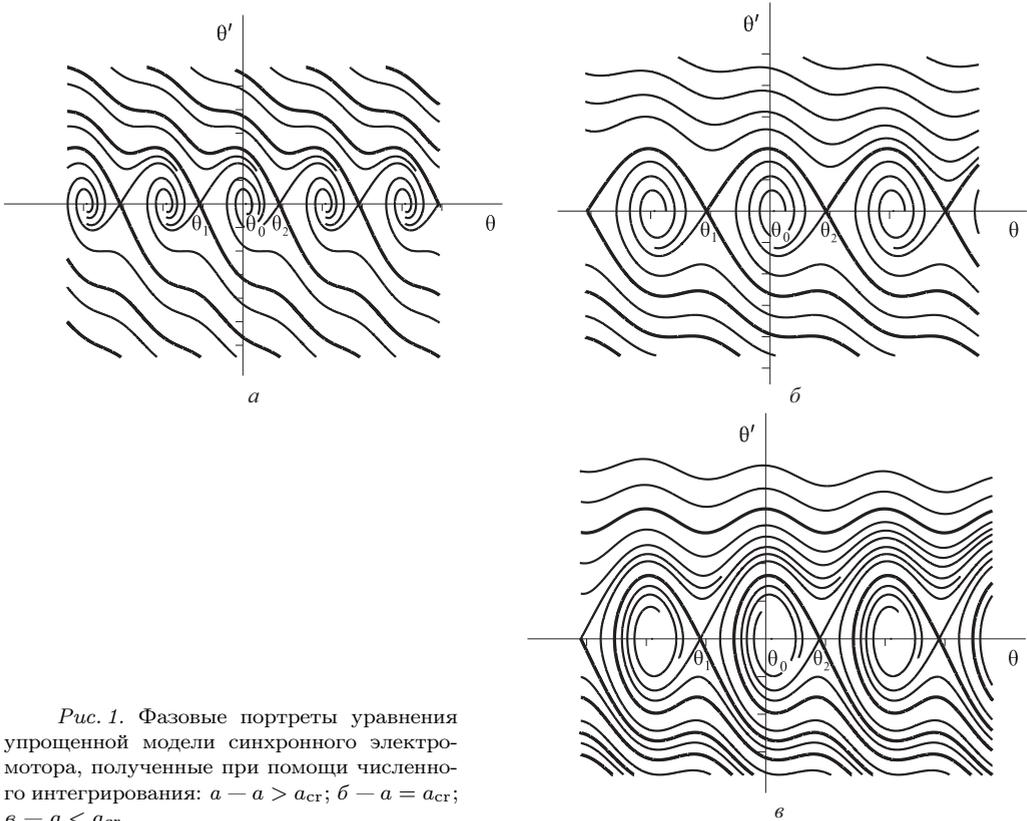


Рис. 1. Фазовые портреты уравнения упрощенной модели синхронного электродвигателя, полученные при помощи численного интегрирования: $a - a > a_{cr}$; $б - a = a_{cr}$; $в - a < a_{cr}$.

На рис. 1, б изображен фазовый портрет уравнения (1), полученный на компьютере для случая, когда $a = a_{cr}(c)$, и поэтому глобальная устойчивость отсутствует. Он соответствует значениям $c = 0.2$, $a = a_{cr}(c) = 0.158039$.

На рис. 1, в показан фазовый портрет уравнения (1) для случая, когда $a < a_{cr}(c)$, так что глобальная устойчивость здесь также отсутствует. Он получен при $c = 0.3$, $a = 0.4 \cdot a_{cr}(c) = 0.0955898$, где $a_{cr}(c) = 0.238974$.

На рис. 1, а-в утолщенными линиями изображены сепаратрисы неустойчивых седловых стационарных точек уравнения (1), ограничивающие области притяжения асимптотически устойчивых стационарных точек.

В случае $a < a_{cr}(c)$, показанном на рис. 1, в, верхняя полуплоскость заполнена фазовыми траекториями, вдоль которых $\theta \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Периодическая фазовая траектория, к которой неограниченно приближаются все эти фазовые траектории при $\theta \rightarrow \infty$, показана на рис. 1, в утолщенной линией. Она соответствует начальному условию $\theta(0) = \theta_0 - 4\pi = -9.72947$, $\theta'(0) = 2.82444$. В случае $a = a_{cr}(c)$, показанном на рис. 1, б, роль такой периодической фазовой траектории играет кривая, состоящая из гомоклинических фазовых траекторий, соединяющих соседние седловые точки.

На рис. 1 видны детали поведения фазовых траекторий, которые трудно заметить на фазовых портретах, полученных теоретически. Это «волны» на фазовых кривых, незаметные на приведенных в [1, б] фазовых портретах, и, что важнее,

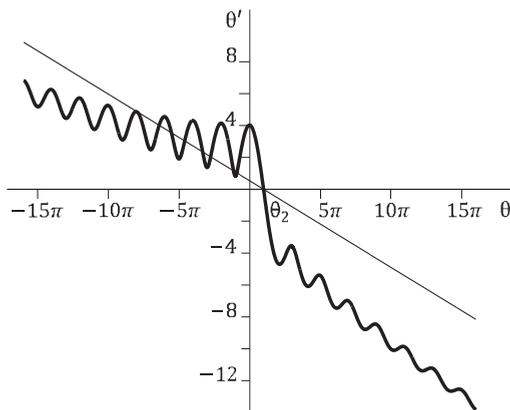


Рис. 2. Неограниченные сепаратрисы седловой точки $(\theta, \theta') = (\theta_0, 0)$ в случае $a > a_{cr}(c)$.

асимптотика поведения сепаратрис, уходящих на $+\infty$ при $\theta \rightarrow -\infty$ (рис. 1, *a*) и уходящих на $-\infty$ при $\theta \rightarrow +\infty$ (рис. 1, *a-б*). Из фазовых портретов, приведенных в [1, 6], создается впечатление, что такие неограниченные сепаратрисы при $|\theta| \rightarrow +\infty$ неограниченно приближаются к параллельным прямым с отрицательным угловым коэффициентом. Рис. 1 показывает, что такого приближения нет.

Это ясно видно из рис. 2, на котором отдельно показана изображенная на рис. 1, *a* неограниченная при $\theta \rightarrow -\infty$ и при $\theta \rightarrow +\infty$ интегральная кривая, состоящая из седловой точки $(\theta_2, 0)$ и двух примыкающих к этой точке неограниченных сепаратрис. Из рис. 2 видно, что обе бесконечные ветви этой кривой при $|\theta| \rightarrow +\infty$ удаляются вниз от прямой $\theta' = -a(\theta - \theta_2)$, не стремясь к параллельной ей прямой. Существование таких неограниченных при $\theta \rightarrow -\infty$ и при $\theta \rightarrow +\infty$ интегральных кривых в случае *A* глобальной устойчивости уравнения вида (1) лежит в основе доказательства основной теоремы метода сведения Г. А. Леонова в [3, теорема 4.4.1]. Поэтому представляет интерес изучение асимптотического поведения таких интегральных кривых методами теории дифференциальных уравнений. Таким образом, применение компьютера не только дает возможность уточнить некоторые детали в поведении фазовых траекторий уравнения (1), но и позволяет поставить задачи для теоретического исследования.

4. Применение методов половинного деления для численного решения конечного уравнения и вычисления экстремума функции одной переменной. Далее будут рассмотрены задачи о вычислении критических значений и их наилучшей аппроксимации. Решение этих задач сводится к решению конечного уравнения с одним неизвестным и к вычислению максимума или минимума функции одной переменной.

Решение конечного уравнения. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0, \tag{6}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция переменной x . Для вычисления решения x^* такого уравнения с гарантированными абсолютной и относительной погрешностью далее используется итерационный метод половинного деления.

На каждом шаге этого метода рассматривается отрезок $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, на котором функция $f(x)$ строго монотонна и принимает на его концах значения разных знаков. Тогда $x^* \in [x_1, x_2]$. Середина этого отрезка $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ принимается в качестве текущего приближения для x^* . Из двух отрезков $[x_1, x_3]$, $[x_3, x_2]$ в качестве нового отрезка $[x_1, x_2]$ выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков.

Вычисление точки максимума или минимума функции одной переменной. Рассмотрим теперь задачу о вычислении точки минимума или максимума непрерывной функции одной переменной. Для решения этой задачи воспользуемся методом половинного деления для удачных троек.

Следуя [13, с. 136–137], непрерывную функцию $f(x)$, определенную на некотором отрезке, назовем \min -униmodalной (\max -униmodalной) на этом отрезке, если она имеет на нем единственную точку минимума x^* (максимума) и строго монотонно изменяется слева и справа от этой точки.

Упорядоченную тройку $x_1 < x_2 < x_3$ значений аргумента функции $f(x)$ назовем \min -удачной, если для значений f_1, f_2, f_3 этой функции в точках x_1, x_2, x_3 выполнены неравенства $f_2 \leq \min(f_1, f_3)$, $f_2 < \max(f_1, f_3)$. Второе из них означает, что точки (x_1, f_1) , (x_2, f_2) , (x_3, f_3) графика функции $f(x)$ не лежат на одной горизонтальной прямой, и оно всегда выполнено для \min -униmodalной функции.

Аналогичным образом для непрерывной функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке и имеющей на нем единственную точку максимума x^* , вводится понятие ее \max -униmodalности, и \max -удачная тройка $x_1 < x_2 < x_3$ определяется условиями $f_2 \geq \max(f_1, f_3)$, $f_2 > \min(f_1, f_3)$.

Основное свойство удачных троек $x_1 < x_2 < x_3$ для униmodalных функций состоит в том, что отрезок $[x_1, x_3]$ заведомо содержит точку минимума \min -униmodalной функции и точку максимума \max -униmodalной функции. Это свойство позволяет получить итерационный метод вычисления точки экстремума x^* функции $f(x)$ с гарантированной точностью путем построения последовательности \min (или \max) удачных троек, стягивающейся к этой точке.

Для применения такого метода следует сначала путем предварительного расчета установить, что функция $f(x)$ имеет точку x^* минимума (или максимума) и является униmodalной в окрестности этой точки.

На каждом шаге этого метода определена удачная тройка $x_1 < x_2 < x_3$ ($x_2 = (x_1 + x_3)/2$). Точка x_2 принимается в качестве текущего приближения для x^* . Далее функция $f(x)$ вычисляется в серединах $x_4 = (x_1 + x_2)/2$, $x_5 = (x_2 + x_3)/2$ отрезков $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Тогда хотя бы одна из трех троек $x_1 < x_4 < x_2$, $x_4 < x_2 < x_5$, $x_2 < x_5 < x_3$ длины $(x_3 - x_1)/2$ содержит точку экстремума x^* и поэтому является \min (или \max) удачной. Она принимается на данном шаге в качестве новой тройки $x_1 < x_2 < x_3$.

5. Вычисление критических значений. Для функции $a_{\text{cr}}(c)$ не существует явного выражения, и поэтому усилия многих математиков были направлены на получение для нее аналитических оценок сверху и снизу (см. [6, с. 122–123]).

Согласно (2), (3), главное стационарное значение угла θ , определяющее асимптотически устойчивую стационарную точку $(\theta_0, 0)$, равно $\theta_0 = \arcsin c \in (0, \pi/2)$. Так как $c = \sin \theta_0$, то уравнение (1) записывается в виде $\theta'' = -a\theta' - \sin \theta + \sin \theta_0$, а функции $a_{\text{cr}}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ соответствует функция $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$.

Получим уравнение, определяющее величину $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ при заданном $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. Для этого на фазовой плоскости (θ, θ') рассмотрим две неустойчивые седловые точки $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_2, 0)$, между которыми расположена асимптотически устойчивая стационарная точка $(\theta_0, 0)$. Согласно (3), здесь $\theta_1 = -\pi - \theta_0 \in (-3\pi/2, -\pi)$, $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi \in (\pi/2, \pi)$.

При заданном значении $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ и известном значении $a > 0$ рассмотрим интегральную кривую уравнения (1), состоящую из левой седловой точки $(\theta_1, 0)$ и сепаратрисы, примыкающей к данной седловой точке в ее первом квадранте. Пусть $\theta' = F_1(\theta, \theta_0, a)$ — уравнение этой интегральной кривой. Пусть $\theta' = F_2(\theta, \theta_0, a)$ — уравнение интегральной кривой, состоящей из правой седловой точки $(\theta_2, 0)$ уравнения (1) и сепаратрисы, примыкающей к этой седловой точке в ее втором квадранте. При любых значениях $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a > 0$ функция $F_1(\theta, \theta_0, a)$, рассматриваемая как функция переменной θ , однозначно определена на отрезке $[\theta_1, \theta_0]$, а функция $F_2(\theta, \theta_0, a)$ однозначно определена на отрезке $[\theta_0, \theta_2]$. При $a = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ значения этих функций в точке $\theta = \theta_0$ совпадают, так что фазовые траектории $\theta' = F_1(\theta, \theta_0, a)$ и $\theta' = F_2(\theta, \theta_0, a)$ объединяются в одну гомоклиническую траекторию с концами в рассматриваемых седловых точках $(\theta_1, 0)$, $(\theta_2, 0)$ (см. рис. 1, б). Поэтому при заданном значении $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ критическое значение $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ параметра a определяется уравнением $D(a, \theta_0) = 0$, где функция $D(a, \theta_0) = F_1(\theta_0, \theta_0, a) - F_2(\theta_0, \theta_0, a)$ определена при всех $a > 0$.

Для численного решения уравнения $D(a, \theta_0) = 0$ при заданном $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ достаточно воспользоваться методом половинного деления (см. п. 4). При этом для каждого значения $a > 0$ соответствующие значения $F_1, F_2(\theta_0, \theta_0, a)$, входящие в определение функции $D(a, \theta_0)$, находятся путем прямого и обратного численного интегрирования уравнения интегральных кривых (4) на отрезках $[\theta_1, \theta_0]$, $[\theta_0, \theta_2]$ при начальных данных $\theta'(\theta_1) = 0$ и $\theta'(\theta_2) = 0$, соответствующих седловым точкам $(\theta_1, 0)$, $(\theta_2, 0)$.

Расчеты проводятся с шестнадцатью десятичными знаками. Максимальные абсолютная и относительная погрешности на шаге численного интегрирования принимаются равными 10^{-12} и 10^{-13} . Такими же выбираются максимальные абсолютная и относительная погрешности метода половинного деления при решении уравнения $D(a, \theta_0) = 0$. Для контроля выполняются вычисления и с другими заданными погрешностями.

В седловых точках $(\theta_1, 0)$, $(\theta_2, 0)$ числитель и знаменатель дроби в (4) равны нулю. С учетом этого при проведении расчетов в малой окрестности седловых точек кривые F_1, F_2 аппроксимируются касательными к ним в этих точках: $\theta' = \lambda_1(\theta - \theta_1)$, $\theta' = \lambda_2(\theta - \theta_2)$. Здесь угловые коэффициенты $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ равны определенным в (5) корням характеристического уравнения для седловых точек. Тогда при заданном значении θ_0 для численного решения уравнения $D(a, \theta_0) = F_1(\theta_0, \theta_0, a) - F_2(\theta_0, \theta_0, a) = 0$ относительно a достаточно выбрать малое число $h > 0$ (в расчетах оно принималось равным $h = 10^{-9}$) и определять значения $F_1, F_2(\theta, \theta_0, a)$ при $\theta = \theta_0$ путем прямого и обратного численного интегрирования уравнения (4) на отрезках $[\theta_1 + h, \theta_0]$ и $[\theta_0, \theta_2 - h]$ из начальных точек $(\theta_1 + h, \lambda_1 h)$ и $(\theta_2 - h, -\lambda_2 h)$.

В случае, когда $\theta_0 = 0$, уравнение (1) принимает вид уравнения движения маятника под действием силы тяжести и момента $-a\theta'$ и имеет такие же два счетных набора (2) стационарных решений, как и при $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. Если $a > 0$, то момент $-a\theta'$ в этом уравнении является демпфирующим, и поэтому при $\theta_0 = 0$ и $a > 0$ всякое решение рассматриваемого уравнения с течением времени стремится к од-

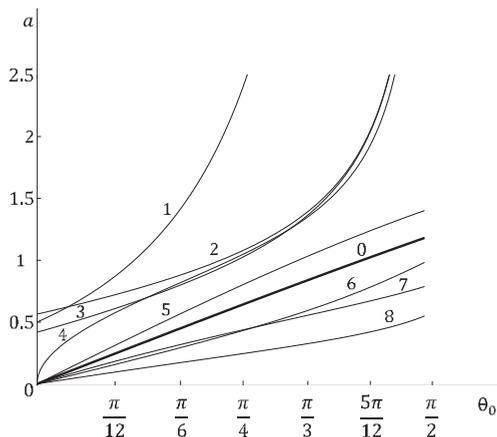


Рис. 3. График вычисленной зависимости $a_{cr}(\theta_0)$ (утолщенная кривая) и графики правых частей ее теоретических оценок.

ному из его стационарных решений. Если $a = 0$, то при $\theta_0 = 0$ это уравнение имеет неограниченные по θ решения, соответствующие периодическим вращательным движениям маятника. Следовательно, в случае, когда $\theta_0 = 0$, критическое значение $a_{cr}(\theta_0)$ определено и равно нулю.

В случае, когда $\theta_0 = \pi/2$, поведение решений уравнения (1) качественно отличается от их поведения при $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. Поэтому при значениях $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, превышающих 89.7 град., программа расчета критических значений на компьютере дает сбой. С учетом этого в данной работе вычисление значений функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ осуществляется на отрезке $[0, \theta_{0\max}]$, где $\theta_{0\max}$ соответствует 89 град. Отрезок $[0, \theta_{0\max}]$ делится на большое число N равных отрезков (в расчетах $N = 200$ и 500), и функция $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ вычисляется с мелким шагом $h_{\theta_0} = \theta_{0\max}/N$ в узловых точках $\theta_{0i} = ih_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$), соответствующих концам этих отрезков.

На рис. 3 утолщенной линией изображен график функции 0: $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ на отрезке от 0 до 89 град., полученный путем вычисления значений этой функции на компьютере в узловых точках [12]. Выше этой расчетной кривой лежат графики правых частей верхних теоретических оценок функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$, найденных: 1-й — Л. Америо (L. Amerio), 2-й — Ф. Трикоми (F. Tricomi), 3-й — В. Табуевой, 4-й — Г. Зайфертом (G. Siefert), 5-й — К. Бёмом (C. Böhm). Ниже расчетной кривой лежат графики правых частей нижних теоретических оценок критических значений, полученные: 6-й — К. Бёмом, 7-й — В. Хейзом (W. Hayes), 8-й — Ф. Трикоми. Все эти оценки, за исключением верхней оценки 1 (Л. Америо), взяты из книги [6]. Оценка Л. Америо дана в [6] с опечаткой, и поэтому при построении графика ее правой части на рис. 3 она взята в виде, указанном в [14]: $a_{cr}(\theta_0) < (1 + \sin \theta_0)[2(2 \cos \theta_0 - (\pi - 2\theta_0) \sin \theta_0)]^{-1/2}$.

Из рис. 3 следует, что среди верхних оценок критического значения наименьшую погрешность его вычисления обеспечивает оценка 5 (К. Бём), а среди нижних оценок наилучшими являются оценки 6 и 7 (К. Бём и В. Хейз). При численном решении уравнения $D(a, \theta_0) = 0$ при заданном значении θ_0 в качестве исходного отрезка, содержащего критическое значение $a = a_{cr}(\theta_0)$, удобно брать отрезок, определяемый нижней оценкой 7 (В. Хейз) и верхней оценкой 5 (К. Бём).

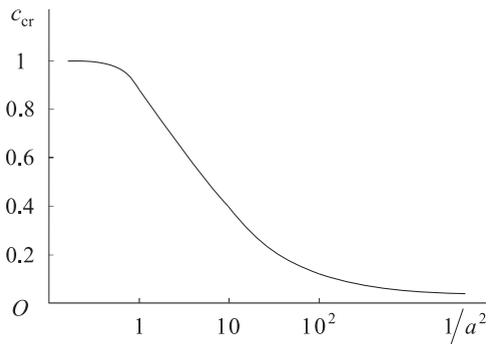


Рис. 4. График зависимости критического значения величины $c = \sin \theta_0$ от $1/a^2$.

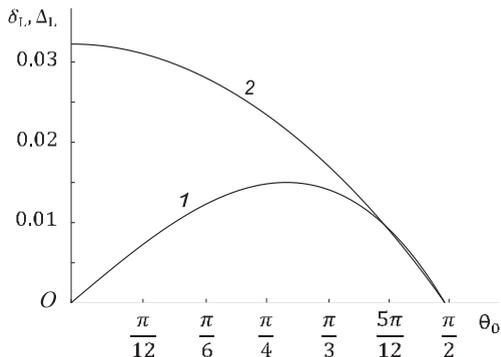


Рис. 5. Графики абсолютной и относительной погрешностей $\delta_L, \Delta_L(\theta_0)$ L -аппроксимации.

Вопрос о вычислении на компьютере критических значений для уравнения (1) и уравнений более общего вида рассматривался в литературе (см. [1, 3]). При этом вместо зависимостей $a_{cr}(\theta_0)$, $a_{cr}(c)$ или обратных к ним зависимостей $\theta_{0cr}(a)$, $c_{cr}(a)$ вычислялась функция $c_{cr}(C/a^2)$, где $C > 0$ — масштабный коэффициент. На рис. 4 изображен полученный путем расчетов график кривой $c_{cr}(1/a^2)$ для уравнения (1), приведенный в [3, с. 268] в качестве примера. Для такой кривой трудно подобрать простую и точную аппроксимацию. Для полученной в данной работе кривой $a_{cr}(\theta_0)$ ниже даны две такие аппроксимации.

6. Линейная аппроксимации критических значений. Рис. 3 показывает, что вычисленная кривая $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ близка к прямой. Проведя прямую через начальную и конечную точки $(0, 0)$ и $(\theta_{0max}, a_{cr}(\theta_{0max}))$ вычисленной кривой, получаем для функции $a_{cr} = a_{cr}(\theta_0)$ линейную аппроксимацию (L -аппроксимацию)

$$a_L(\theta_0) = K_L \theta_0 \quad (K_L = 0.760087) \quad (7)$$

на рассматриваемом отрезке $[0, \theta_{0max}]$. На рис. 5 изображен график абсолютной погрешности $\delta_L(\theta_0) = a_{cr}(\theta_0) - K_L \theta_0$ такой аппроксимации, полученный путем ее вычисления в узловых точках $\theta_{0i} = ih_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$) (кривая 1). Этот график показывает, что функция $\delta_L(\theta_0)$ является на отрезке $[0, \theta_{0max}]$ неотрицательной и макс-униmodalной согласно определению п. 4.

При вычислении значений этой функции в узловых точках определяются три последовательные узловые значения ее аргумента θ_0 , которые образуют макс-удачную тройку $\theta_{01} < \theta_{02} < \theta_{03}$. Поэтому отрезок $[\theta_{01}, \theta_{03}]$ содержит точку θ_{0L} , в которой модуль абсолютной погрешности L -аппроксимации критических значений достигает своего максимума δ_L на промежутке $[0, \theta_{0max}]$. Середина θ_{02} отрезка $[\theta_{01}, \theta_{03}]$ является исходным приближением для этой точки максимума.

Для вычисления максимума модуля абсолютной погрешности L -аппроксимации с заданной точностью используется итерационный метод половинного деления для удачных троек (п. 4). На каждом его шаге этого метода для уже найденной макс-удачной тройки $\theta_{01} < \theta_{02} < \theta_{03}$ находится новая макс-удачная тройка вдвое меньшей длины, а ее средняя точка θ_{02} выбирается в качестве текущего приближения к точке максимума θ_{0L} . Чтобы определить точку θ_{0L} с гарантированной относительной погрешностью, итерационный процесс продолжается до выполнения условия $(\theta_{02} - \theta_{01})/\theta_{01} \leq 10^{-7}$.

В результате для максимума модуля δ_L абсолютной погрешности L -аппроксимации (7) критических значений на рассматриваемом отрезке $[0, \theta_{0\max}]$ находится числовое значение $\delta_L = 0.0149876$. Оно достигается при значении угла θ_0 , равном $\theta_{0L} = 0.894376$ (или, в градусах, $\theta_{0L}^\circ = 51.2440$). Все шесть десятичных знаков здесь верны с точностью до округления в последнем знаке.

Кроме графика абсолютной погрешности $\delta_L(\theta_0)$, на рис. 6 изображен график относительной погрешности $\Delta_L(\theta_0) = (a_{\text{cr}}(\theta_0) - K_L\theta_0)/a_{\text{cr}}(\theta_0)$ L -аппроксимации критических значений, полученный путем ее вычисления в узловых точках $\theta_{0i} = ih_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$) (кривая 2). Этот график показывает, что модуль относительной погрешности достигает своего максимума Δ_L на отрезке $[0, \theta_{0\max}]$ в точке $\Theta_L = 0$.

В данной точке в формуле для $\Delta_L(\theta_0)$ имеется особенность типа $0/0$. Она устраняется путем замены функций $a_{\text{cr}}(\theta_0)$, $K_L\theta_0$, входящих в эту формулу, их производными при $\theta_0 = 0$. Для вычисления производной функции $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ при $\theta_0 = 0$ достаточно воспользоваться ее параболической интерполяцией по точкам $\theta_{01} = 0$, $\theta_{02} = \rho$, $\theta_{03} = 2\rho$, полагая $\rho = 10^{-5}$. Значение Δ_L модуля функции $\Delta_L(\theta_0)$ при $\theta_0 = 0$ можно также вычислить путем ее параболической экстраполяции по точкам $\theta_{01} = \rho$, $\theta_{02} = 2\rho$, $\theta_{03} = 3\rho$. При учете шести десятичных знаков оба способа дают для максимума модуля относительной погрешности L -аппроксимации (7) одно и то же значение $\Delta_L = 0.0322269$.

7. Синусоидальная аппроксимация критических значений. Рис. 3 позволяет предложить аппроксимацию критических значений $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ на отрезке $[0, \theta_{0\max}]$ в классе синусоидальных функций вида $a_S(\theta_0) = A \sin(\Omega\theta_0)$, где $A, \Omega > 0$. На левом конце $\theta_0 = 0$ этого отрезка значение такой функции совпадает с нулевым критическим значением. Потребуем, чтобы и на правом его конце эти значения совпадали. Тогда рассматриваемая синусоидальная аппроксимация (S -аппроксимация) однозначно определяется параметром Ω и выражается по формуле

$$a_S(\theta_0) = A(\Omega) \sin(\Omega\theta_0), \quad (8)$$

где

$$A(\Omega) = a_{\text{cr}}(\theta_{0\max}) / \sin(\Omega\theta_{0\max}). \quad (9)$$

Периодическая по θ_0 функция (8) имеет на положительной полуоси первый максимум при $\theta_0 = \pi/(2\Omega)$. При стремлении Ω к 0 эта точка максимума стремится к $+\infty$, а при стремлении Ω к $+\infty$ точка максимума стремится к 0. Функция $a_{\text{cr}}(\theta_0)$, как это установлено теоретически и видно из ее графика (см. рис. 3), строго монотонно возрастает на рассматриваемом промежутке $[0, \theta_{0\max}]$ изменения угла θ_0 , т. е. она не имеет максимума внутри этого промежутка. Для того чтобы аппроксимирующая ее функция (8) обладала таким свойством, потребуем, чтобы первая точка максимума аппроксимирующей функции лежала правее правой границы $\theta_{0\max}$ рассматриваемого промежутка изменения угла θ_0 или на этой границе, то есть чтобы выполнялось неравенство $\pi/(2\Omega) \geq \theta_{0\max}$. Оно выполняется при $\Omega \leq \Omega_{\max}$, где $\Omega_{\max} = \pi/(2\theta_{0\max})$. С учетом этого при проведении расчетов рассматриваются значения Ω из промежутка $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$, где величина Ω_{\max} определена выше, а величина $\Omega_{\min} > 0$ численно мала по сравнению с Ω_{\max} (в расчетах $\Omega_{\min} = 10^{-7}$). Тогда для принятого здесь значения $\theta_{0\max}$, соответствующего 89 град., имеем

$$[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}] = [10^{-7}, 1.01124]. \quad (10)$$

Обозначим через $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ и $\Delta_S(\theta_0, \Omega)$ абсолютную и относительную погрешности S -аппроксимации (8) при заданных $\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]$, $\Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$:

$$\delta_S(\theta_0, \Omega) = a_{\text{cr}}(\theta_0) - A(\Omega) \sin(\Omega \theta_0), \quad (11)$$

$$\Delta_S(\theta_0, \Omega) = \frac{a_{\text{cr}}(\theta_0) - A(\Omega) \sin(\Omega \theta_0)}{a_{\text{cr}}(\theta_0)}. \quad (12)$$

Через $\delta_S^*(\Omega)$ и $\Delta_S^*(\Omega)$ обозначим максимумы модулей абсолютной и относительной погрешностей S -аппроксимации на отрезке $[0, \theta_{0 \max}]$ при $\Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$:

$$\delta_S^*(\Omega) = \max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} |a_{\text{cr}}(\theta_0) - A(\Omega) \sin(\Omega \theta_0)|, \quad (13)$$

$$\Delta_S^*(\Omega) = \max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} \frac{|a_{\text{cr}}(\theta_0) - A(\Omega) \sin(\Omega \theta_0)|}{|a_{\text{cr}}(\theta_0)|}. \quad (14)$$

Чтобы построить график функции $\delta_S^*(\Omega)$, вычисляем ее значения в достаточно большом числе N_Ω узловых точек $\Omega_j = j h_\Omega$ ($j = 0, 1, \dots, N_\Omega$), расположенных на основном отрезке $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ с шагом $h_\Omega = (\Omega_{\max} - \Omega_{\min})/N_\Omega$ (для N_Ω берутся значения 200 и 500). В этих расчетах при каждом узловом значении величины Ω рассматриваемая функция вычисляется по формуле (13), в которой вместо максимума по θ_0 на всем отрезке $[0, \theta_{0 \max}]$ берется максимум по выбранным на этом отрезке в п. 5 узловым значениям $\theta_{0i} = i h_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$), где $h_{\theta_0} = \theta_{0 \max}/N$. Полученный график функции $\delta_S^*(\Omega)$ имеет клявообразный вид с острием, направленным вниз. Это означает, что данная функция является \min -унимодальной в смысле определения п. 4. Расчеты, проведенные в процессе построения графика этой функции, определяют для значений ее аргумента \min -удачную тройку $\Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_3$, где $\Omega_1 = 0.278$, $\Omega_2 = 0.283$, $\Omega_3 = 0.288$. Таким образом, функция $\delta_S^*(\Omega)$ имеет на основном отрезке (10) точку Ω_S абсолютного минимума, принадлежащую отрезку $[\Omega_1, \Omega_3]$.

Это позволяет предложить способ синусоидальной аппроксимации (8) критических значений, при котором параметр Ω выбирается равным Ω_S , т. е. он определяется условием, что максимум модуля $\delta_S^*(\Omega)$ абсолютной погрешности такой аппроксимации при $\Omega = \Omega_S$ достигает своего минимума $\delta_S = \min_{\Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]} \delta_S^*(\Omega)$. Тогда $\delta_S = \delta_S^*(\Omega_S)$, т. е., согласно (11), (13), значение δ_S выражается формулой $\delta_S = \max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} |\delta_S(\theta_0, \Omega_S)|$. Значение θ_0 , при котором достигается максимум в этой формуле, обозначим через θ_{0S} .

Анализ графиков зависимости абсолютной погрешности $\delta_S(\theta_0, \Omega)$, а также ее модуля $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ от угла θ_0 при разных значениях Ω из основного отрезка $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ позволяет установить свойства задачи об определении точки Ω_S минимума функции $\delta_S^*(\Omega) = \max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} |\delta_S(\theta_0, \Omega)|$, которые позволяют свести ее к более простой задаче об определении величины Ω_S как решения конечного уравнения. Эти свойства не видны на графиках, полученных для ряда значений параметра Ω , взятых из всего основного отрезка $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$. В связи с этим на рис. 6 и 7 приведены графики зависимости абсолютной погрешности $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ и ее модуля $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ от угла θ_0 при восьми значениях $\Omega_j = j h_{\Omega_0}$ ($j = 0, 1, \dots, 7$) параметра Ω из отрезка $[\Omega_{\min 0}, \Omega_{\max 0}] = [0.2828, 0.2848]$ относительно малой длины, содержащего точку Ω_S минимума функции $\delta_S^*(\Omega)$. Эти графики занумерованы числами от 1 до 8 в порядке возрастания Ω_S .

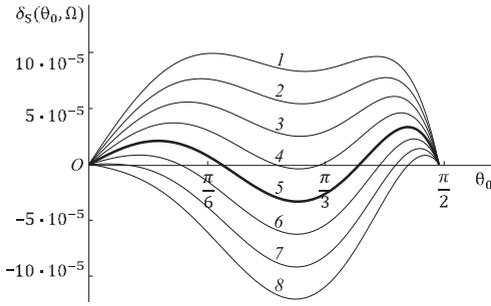


Рис. 6. Графики зависимости $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ от θ_0 при значениях $\Omega \in [0.2828, 0.2848]$.

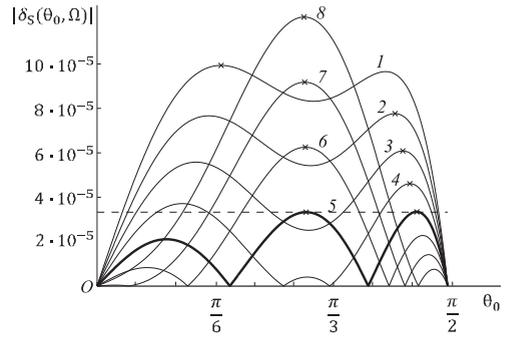


Рис. 7. Графики зависимости $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ от θ_0 при значениях $\Omega \in [0.2828, 0.2848]$.

Как показывает рис. 6, при значениях Ω , близких к $\Omega_{\min 0}$, функция $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ имеет на промежутке $[0, \theta_{0 \max}]$ два положительных внутренних локальных максимума по θ_0 , положительный локальный минимум между ними и абсолютный граничный минимум, равный нулю. При увеличении Ω до $\Omega_{\max 0}$ левый и правый локальные максимумы монотонно убывают до нуля, приближаясь к границам рассматриваемого промежутка. Внутренний локальный минимум функции $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ при этом монотонно убывает, становится отрицательным и продолжает убывать при дальнейшем увеличении Ω .

На рис. 7 изображены графики зависимости функции $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ от $\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]$ при тех же восьми значениях Ω из промежутка $[\Omega_{\min 0}, \Omega_{\max 0}]$. Из этого рисунка видно, что при значениях Ω , близких к $\Omega_{\min 0}$, функция $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ имеет два положительных локальных максимума по θ_0 , совпадающих с максимумами функции $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ на рис. 6, причем наибольшим (абсолютным) является крайний левый локальный максимум. При увеличении Ω до $\Omega_{\max 0}$ абсолютным сначала становится крайний правый локальный максимум, который убывает с возрастанием Ω . При этом появляется средний локальный максимум, который равен отрицательному минимуму функции $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ на рис. 6, взятому со знаком плюс. Этот средний локальный максимум возрастает при увеличении Ω до $\Omega_{\max 0}$, и при некотором значении $\Omega = \Omega_S$ он становится равным правому максимуму. При дальнейшем увеличении Ω абсолютным остается средний максимум. Точки абсолютного максимума функции $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ по θ_0 при рассматриваемых восьми значениях $\Omega \in [\Omega_{\min 0}, \Omega_{\max 0}]$ отмечены на рис. 7 знаком \times .

Таким образом, значение $\Omega = \Omega_S$, при котором абсолютный максимум $\delta_S^*(\Omega)$ функции $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ по $\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]$ принимает свое минимальное значение на основном отрезке $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$, является решением конечного уравнения

$$\max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} \delta_S(\theta_0, \Omega) + \min_{\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]} \delta_S(\theta_0, \Omega) = 0 \quad (15)$$

на определенном выше отрезке $[\Omega_{\min 0}, \Omega_{\max 0}]$ меньшей длины. Функция $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ определена формулой (11).

Для решения уравнения (15) с абсолютной и относительной погрешностями, не превосходящими 10^{-8} и 10^{-9} , воспользуемся методом половинного деления (п. 4). При этом для вычисления входящих в левую часть этого уравнения максимума и минимума функции $\delta_S(\theta_0, \Omega)$ по $\theta_0 \in [0, \theta_{0 \max}]$ сначала находим для этой функции

min и max удачную тройку значений θ_0 путем перебора ее значений в узловых точках $\theta_{0i} = ih_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$). Затем, пользуясь методом половинного деления для удачных троек (п. 4), с заданной относительной погрешностью вычисляем здесь точки максимума и минимума функции $\delta_S(\theta_0, \Omega)$, ее значения в этих точках и левую часть уравнения (15).

В результате устанавливаем, что максимум по $\theta_0 \in [0, \theta_{0\max}]$ модуля $|\delta_S(\theta_0, \Omega)|$ абсолютной погрешности синусоидальной аппроксимации (8) принимает наименьшее значение $\delta_S = 3.33626 \cdot 10^{-5}$ при $\Omega_S = 0.283886$. При $\Omega = \Omega_S$ входящий в формулу (8) параметр $A(\Omega)$, согласно (9), равен $A_S = 2.76621$.

Из (14) следует, что для полученной S -аппроксимации критических значений максимум модуля ее относительной погрешности выражается через параметр Ω_S по формуле $\Delta_S = \Delta_S^*(\Omega_S) = \max_{\theta_0 \in [0, \theta_{0\max}]} |\Delta_S(\theta_0, \Omega_S)|$, в которой относительная погрешность $\Delta_S(\theta_0, \Omega_S)$ определена в (12). График зависимости функции $|\Delta_S(\theta_0, \Omega_S)|$ от θ_0 , полученный путем ее вычисления в узловых точках $\theta_{0i} = ih_{\theta_0}$ ($i = 0, 1, \dots, N$), показывает, что эта функция достигает своего максимума Δ_S на отрезке $[0, \theta_{0\max}]$ в точке $\Theta_S = 0$.

В этой точке в формуле (12), определяющей $\Delta_S(\theta_0, \Omega_S)$, обращаются в нуль числитель и знаменатель. Эта особенность типа $0/0$ устраняется путем замены функций, входящих в числитель и знаменатель, их производными при $\theta_0 = 0$. Для вычисления производной функции $a_{cr}(\theta_0)$ при $\theta_0 = 0$ достаточно воспользоваться ее параболической интерполяцией по точкам $\theta_{01} = 0, \theta_{02} = \rho, \theta_{03} = 2\rho$, полагая $\rho = 10^{-5}$.

При учете шести десятичных знаков находим для максимума модуля относительной погрешности S -аппроксимации (12) значение $\Delta_S = 1.35227 \cdot 10^{-4}$.

8. Выводы. Упрощенная модель синхронного электромотора характеризуется тем, что момент, создаваемый относительно оси ротора электромотора силами, действующими на него со стороны статора, является суммой нелинейного демпфирующего и синусоидального вращающего моментов и не зависит от электрических токов. Такое представление суммарного момента нашло применение в задачах динамики гироскопа в кардановом подвесе. В теории фазовых систем используется дифференциальное уравнение, которое описывает вращение ротора синхронного электромотора в рамках упрощенной модели в случае линейного демпфирующего момента. Оно применяется в качестве эталонного в методе сведения Г. А. Леонова.

В статье с помощью компьютера получены фазовые портреты этого уравнения и отмечены свойства его фазовых траекторий, которые не видны на фазовых портретах, полученных аналитическими методами. Путем расчета на компьютере построен также график кривой $a_{cr}(\theta_0)$, изображающей критическое значение коэффициента демпфирования в зависимости от главного стационарного значения θ_0 угловой переменной. Для этой кривой предложены линейная (L) и синусоидальная (S) аппроксимации $a_L(\theta_0) = K_L \theta_0, a_S(\theta_0) = A_S \sin(\Omega_S \theta_0)$.

Характеристики L и S аппроксимаций критических значений

	K_L	–	δ_L	θ_{0L}	θ_{0L}°	Δ_L	Θ_{0L}
	A_S	Ω_S	δ_S	θ_{0S}	θ_{0S}°	Δ_S	Θ_{0S}
L	0.760087	–	0.0149876	0.894376	51.2440	0.0322269	0
S	2.76621	0.283886	$3.33626 \cdot 10^{-5}$	0.9267	53.10	$1.35227 \cdot 10^{-4}$	0

В таблице приведены полученные в расчетах параметры K_L, A_S, Ω_S этих аппроксимаций, указаны максимумы модулей δ_L, δ_S их абсолютных погрешностей, максимумы модулей Δ_L, Δ_S их относительных погрешностей и значения угла θ_0 , при которых эти погрешности достигаются. Полученные значения этих погрешностей свидетельствуют о высокой точности предложенных аппроксимаций. Таким образом, для дифференциального уравнения упрощенной модели синхронного электромотора поставлена и решена задача о явном приближенном представлении критических значений.

Литература

1. Леонов Г. А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения. *Автоматика и телемеханика* **10**, 47–85 (2006).
2. Леонов Г. А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации. *Прикладная математика и механика*. **40** (2), 238–244 (1976).
3. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия*. Москва, Наука (1978).
4. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 1, 74–85 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.109>
5. Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presentasi in electrotechnica. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa* **2** (2), 1–20 (1933).
6. Барбашин Е. А., Табуева В. А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством*. Москва, Наука (1969).
7. Климов Д. М., Харламов С. А. *Динамика гироскопа в кардановом подвесе*. Москва, Наука (1978).
8. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем. *Известия РАН. Механика твердого тела* **3**, 57–73 (2013).
9. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. I. *Известия РАН. Механика твердого тела* **2**, 124–141 (2020).
10. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. II. *Известия РАН. Механика твердого тела* **1**, 50–68 (2021). <https://doi.org/10.31857/S0572329920020075>
11. Леонов Г. А., Зарецкий А. М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 18–27 (2012).
12. Коносевиц Б. И., Коносевиц Ю. Б. Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора. *Труды Института прикладной математики и механики* **29**, 121–126 (2014).
13. Карманов В. Г. *Математическое программирование*. 2-е изд. Москва, Наука (1980).
14. Amerio L. Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di un'equazione interessante l'elettrotecnica. *Ann. Mat. pura ed appl.* **2** (2), 75–90 (1949).

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2022 г.;
доработана 14 февраля 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Коносевиц Борис Иванович — д-р физ.-мат. наук; konos.donetsk@yandex.ru

Коносевиц Юлия Борисовна — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; konos.donetsk@yandex.ru

Computer analysis of the differential equation of the model of the synchronous electric motor that does not include electric currents

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
74, ul. R. Luxemburg, Donetsk, 283050, Russian Federation

For citation: Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Computer analysis of the differential equation of the model of the synchronous electric motor that does not include electric currents. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 499–515. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.305> (In Russian)

Phase portraits of the well-known equation of the no-current model of the synchronous electric motor are obtained with use of computer, and some properties of its solutions are noted, which are imperceptible at the phase portraits, obtained analytically. With use of computer, a graph is built for the curve, representing the critical value versus the principal stationary value of the angular variable. Linear and sinusoidal approximations are proposed for this curve, maximum absolute and relative errors of these approximations are calculated.

Keywords: synchronous electric motor, phase portrait, critical value, global stability, reduction method.

References

1. Leonov G. A. Phase synchronization. Theory and applications. *Automatics and Telemechanics* 10, 47–85 (2006). (In Russian)
2. Leonov G. A. Lyapunov's second method in the theory of phase synchronization. *Applied Mathematics and Mechanics* 40 (2), 238–244 (1976). (In Russian)
3. Gel'fand A. Kh., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state*. Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)
4. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* 5 (63), iss. 1, 74–85. (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.109> (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* 51, iss. 1, 57–65 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118010053>].
5. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in elettrotecnica. *Annali della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa* 2 (2), 1–20 (1933).
6. Barbashin E. A., Tabueva V. A. *Dynamical systems with the cylindrical phase space*. Moscow, Nauka Publ. (1969). (In Russian)
7. Klimov D. M., Kharlamov S. A. *Dynamics of a gimbals mounted gyroscope*. Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)
8. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. On stability of steady-state motions of a gimbals mounted gyroscope supplied with the electric motor. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* 3, 57–73 (2013). (In Russian) [Engl. trans.: *Mechanics of Solids* 48 (3), 285–297 (2013). <https://doi.org/10.3103/S0025654413030059>].
9. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. I. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* 2, 124–141 (2020) (In Russian) [Engl. trans.: *Mechanics of Solids* 55 (2), 258–272 (2020). <https://doi.org/10.3103/S0025654420020119>].
10. Konosevich B. I., Konosevich Yu. B. Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. II. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* 1, 50–68 (2021). <https://doi.org/10.31857/S0572329920020075> (In Russian) [Engl. trans.: *Mechanics of Solids* 56 (1), 40–54 (2021). <https://doi.org/10.3103/S0025654421010088>].
11. Leonov G. A., Zaretskiy A. M. Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* 4, 18–27 (2012). (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* 45 (4), 157–163 (2012)].

12. Konosevich B.I., Konosevich Yu.B. Approximation of the critical value of the damping parameter for the synchronous electric motor. *Proceedings of the Institute of applied mathematics and mechanics* **29**, 121–126 (2014). (In Russian)
13. Karmanov V.G. *Mathematical programming*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1980. (In Russian)
14. Amerio L. Determinazione delle condizioni di stabilità per gli integrali di un'equazione interessante l'elettrotecnica. *Ann. Mat. pura ed appl.* **2** (2), 75–90 (1949).

Received: February 26, 2022

Revised: February 14, 2023

Accepted: February 16, 2023

Authors' information:

Boris I. Konosevich — konos.donetsk@yandex.ru

Yuliya B. Konosevich — konos.donetsk@yandex.ru

ХРОНИКА

7 декабря 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили доктор техн. наук, профессор Е. Л. Лебедев и адъюнкт А. О. Решин (ВКА им. А. Ф. Можайского) с докладом на тему «Методика ускоренных испытаний и способов обеспечения требуемого ресурса силовых гироскопических систем».

Краткое содержание доклада:

Развитие малых космических аппаратов (КА) приводит к требованиям по уменьшению габаритов гиродинов, входящих в системы управления КА. При этом требуемый кинетический момент гиродин обеспечивается за счет повышения частоты вращения ротора, что достигается путем создания вакуума внутри корпуса гиродин. Однако использование вакуума в корпусе гиродин негативно сказывается на ресурсе шарикоподшипниковых опор ротора. В настоящее время отсутствуют методики ускоренных испытаний данных гиродинов, позволяющие обосновать их ресурс долговечности. В докладе обоснованы условия ускоренных испытаний высокооборотистых малогабаритных гиродинов с вакуумным исполнением корпуса и методики контроля качества сборки опор их роторов. Разработана модель баланса мощностей ротора в условиях теплообмена при вакуумном исполнении гиродин. Представлена аналитическая зависимость, позволяющая определять ресурс гиродин по результатам форсированных испытаний. Обоснован способ контроля качества сборки подшипников гиродин по значению их собственных частот в состоянии покоя с комплексным применением ультразвукового и акустико-эмиссионного методов контроля.