УДК 51-72:531.36
MSC 70-02, 70E05, 70E15, 70E17, 70E20, 70E40, 70E50, 70E55

Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 1

А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Тихонов А. А.* Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 457–486. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303

Несколько обзорных статей, посвященных 300-летию Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), представляют собой попытку анализа научных достижений санкт-петербургской школы математики и механики в области динамики твердого тела. Данная статья — первая часть обзора — охватывает основные достижения от основания СПбГУ до середины 1970-х годов. В силу юбилейного характера данной работы научные результаты, полученные в СПбГУ, рассматриваются в контексте событий, неразрывно связанных с основанием Академии наук, Университета и гимназии в 1724 г. и их дальнейшего развития в последующие 250 лет. Ввиду невозможности охватить даже кратко все публикации, вышедшие в свет в этот значительный отрезок времени, внимание акцентируется на наиболее важных общих направлениях научной мысли и на тех выдающихся ученых СПбГУ, чьими трудами эти направления обогатились.

Ключевые слова: твердое тело, динамика, вращательное движение, небесная механика, баллистика, гироскопические приборы.

1. Введение. Среди разнообразных направлений научных исследований, выполняемых в санкт-петербургской школе механики, причем с самого начала ее возникновения, явно выделяется направление, связанное с изучением динамики твердого дела и, в частности, задач, примыкающих к классической задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Пройдя немалый, фактически 300-летний путь развития, это направление классической механики обогатилось огромным количеством результатов, вызванных существенным расширением областей приложения и соответствующими запросами практики с постоянно появляющимися новыми постановками задач, неизбежно выходящими за рамки собственно механики и требующими привлечения знаний из смежных областей науки. К числу этих результатов относятся не только искомые качественные и количественные выводы о движении тела, но и, что не менее важно, те методы решения задач, которые были для этого специально разработаны и зародились на стыке механики, прикладной математики, теории управления, устойчивости движения, математического и компьютерного моделирования, которые сами обогатили науку и без которых было бы невозможно получение прикладных результатов. Рассмотрению некоторых из этих результатов, достигнутых в первые 250 лет существования СПбГУ (далее — Университет) и относящихся как к методам исследований, так и к приложениям, посвящена первая часть обзора, не претендующего на исчерпывающую полноту в освещении вопроса и в анализе отечественных и зарубежных библиографических источников. Основное внимание уделяется достаточно узкому кругу проблем динамики твердого тела, а именно тем из них, которые примыкают к классической задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Многие важные исследования по баллистике, небесной механике, динамике электромеханических систем и другим направлениям динамики твердого тела, выполненные ранее в Университете и остающиеся в круге научных интересов современных ученых, будут упомянуты лишь вскользь, по мере необходимости. Иные направления динамики твердого тела, такие как динамика тел переменной массы, теория удара, робототехника, динамика неголономных систем, также широко представленные в трудах ученых Университета, практически вовсе остаются за рамками данного обзора.

2. Динамика твердого тела в традициях санкт-петербургской школы математики и механики. Идея создания в России триединой структуры, включающей Академию наук, Университет и Академическую гимназию, принадлежит Г. В. Лейбницу (Gottfried Wilhelm Leibniz) (1646–1716). Сформулирована им в записке 1697 г., предназначенной для передачи русскому царю Петру I (1672–1725), находившемуся в то время в Западной Европе в составе Великого посольства [1]. Записка показывает, что Г. В. Лейбниц с самого начала принял близко к сердцу дело преобразования России и готов был служить ему. Она представляет программу всего того, что Г. В. Лейбниц считал необходимым, чтобы ввести в Россию европейское образование, и проникнута живым впечатлением, которое произвела на Г. В. Лейбница личность молодого государя, поставившего себе целью цивилизовать свой народ [2].

В то время военно-политическая обстановка в Европе отнюдь не способствовала делу «образования народа». Тем не менее даже в условиях долгой и тяжелой Северной войны (1700–1721), когда русская армия постепенно отвоевывала прибалтийские территории, захваченные Швецией в период крайнего ослабления России, известный как Смутное время, Петр I продолжал контактировать с Г. В. Лейбницем как через российского посла в Австрии (1708), так и лично (встречи в Торгау (1711), в Карлсбаде, Теплице и Дрездене (1712), в Пирмонте и Герренгаузене (1716)) по поводу введения наук в России. В письме Г. В. Лейбница к Петру I, датированном декабрем 1708 г., содержится конструктивный и дружественный для России план развития науки, техники и педагогики с целью налаживания торговых и экономических связей между Европой и Азией на огромном пространстве Северного полушария [3]. При этом Г. В. Лейбниц ссылается на свой положительный опыт организации Берлинской академии наук (1700), которую сам и возглавил; советует не дожидаться окончания Северной войны и незамедлительно приступить к введению наук в России, указывая на необходимость учреждения в Москве, Астрахани, Киеве и Петербурге университетов, академий и школ (причем начать с Петербурга ввиду его близости к Берлинской академии наук) и подчеркивая важность принятия хороших мер для воспитания юношества. Вполне обоснованно в 1712 г. Г. В. Лейбниц был принят на русскую службу в чине тайного советника юстиции с жалованием 1000 талеров в год.

11 июня 1718 г. на представленном царю докладе, в котором развивался план организации высшей коллегии наук по подобию того, который много раз предлагал Г. В. Лейбниц, Петр I написал резолюцию: «Сделать Академию» [4]. В том же году началось строительство всемирно известного здания Санкт-Петербургской академии наук (РАН)*, стали открываться направления исследований, начался подбор и приглашение будущих членов РАН. Наконец, Сенатским указом № 444 от 22 января 1724 г. была официально учреждена РАН и в ее составе Университет и Академическая гимназия. В 1725 г. на берегах Невы приступили к работе профессора из Западной Европы: физик Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli) (1700–1782), механик Николай Бернулли (Nikolaus II. Bernoulli) (1695–1726), математик и механик Якоб Герман (Jakob Hermann) (1678–1733), физик Георг Бернгард Бильфингер (Georg Bernhard Bilfinger) (1693–1750), астроном Жозеф-Никола Делиль (Joseph-Nicolas De L'Isle) (1688–1768), математик и механик Леонард Эйлер (Leonhard Euler) (1707–1783) и др. Все они были к тому времени известными учеными. Так, Н. Бернулли, занявший в РАН кафедру механики, уже был известен среди математиков как автор решения задачи Лейбница об ортогональных траекториях, т. е. линиях, пересекающих заданное семейство кривых $g(x, y) = \text{const}$ под прямым углом. В современных обозначениях искомые ортогональные траектории $f(x, y)$ могут быть представлены как решения системы дифференциальных уравнений:

$$\nabla f(x,y) \cdot \nabla g(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

РАН заняла достойное место среди европейских академий. Однако стоявшие во главе ее чиновники откровенно срывали подготовку русских ученых, безнаказанно нарушая именной указ императора Петра I, а затем и устав Академии в условиях отсутствия железной воли императора Петра I. От масштабных злоупотреблений сложилась невыносимая обстановка. Лучшие западные профессора по большей части покинули Академию до 1741 г. От этого пострадали как наука, так и образование. Потребовался научный и организационный гений М. В. Ломоносова, фактически положившего всю свою жизнь за дело преобразования организованных Петром I Академии наук и Университета, чтобы превратить их в подлинно отечественные организации, работающие, как было задумано изначально и позднее прописано в Уставе, на пользу России. В 1736 г. М. В. Ломоносов был зачислен в Университет, в 1745 г. он стал первым русским академиком, а в 1758 г. — ректором Университета [5]. В результате его титанических усилий по возвращению Академии наук и Университета к нормальной жизни на благо Отечества вновь стал повышаться и международный авторитет науки и образования в России. К 1760-м годам интеллектуальный центр развития физики, механики и астрономии переместился в Россию [6].

С самого начала существования санкт-петербургской школы математики и механики, восходящей к Я. Герману, Д. Бернулли и Л. Эйлеру, в Университете неизменно уделялось внимание динамике твердого тела. Эта закономерность является вполне естественной, если учесть, что деятельность ведущих математиков, в том числе и тех, которые, приехав в Россию, составили первоначальное ядро РАН, была

*Здесь и далее вместо официального названия «Императорская академия наук в Санкт-Петербурге» используется аббревиатура РАН. Вообще официальные названия Академии изменялись: 1747 — Императорская академия наук и художеств в Санкт-Петербурге, 1803 — Императорская академия наук, 1836 — Императорская Санкт-Петербургская академия наук, 1917 — Российская академия наук (РАН), 1925 — Академия наук СССР, 1991 — Российская академия наук (РАН).

сосредоточена в области математического анализа и его приложений в механике и астрономии. Так, в протоколе заседаний РАН от 13.01.1725 г. отмечено: «*Герман сфероидальную форму Земли, у коей меньшая ось проходит через полюсы, форму, доказанную Ньютоном в математических началах физики, синтетически вывел аналитическим методом. Возражал Бильфингер, что эти доказательства имеют место, если, прежде чем вращаться вокруг оси, Земля была шарообразна, но в этом именно возможно сомневаться*» [5].

Вообще динамика твердого тела, как раздел механики, является в то же время неотъемлемой частью многих направлений в науке — от древних баллистики и астрономии до современных робототехники, космодинамики и мехатроники. После постановки на могучий фундамент математического анализа, заложенный в трудах И. Ньютона (Isaac Newton) (1643–1727) и Г. В. Лейбница и развитый в трудах Л. Эйлера, А. К. Клеро (Alexis Claude Clairaut) (1713–1765), Ж. Л. Д'Аламбера (Jean-Baptiste le Rond D'Alembert) (1717–1783), П. Л. Мопертюи (Pierre Louis Moreau de Maupertuis) (1698–1759) и их многочисленных последователей, динамика твердого тела прочно и неизменно присутствует в современной механике, а также в естественных и технических науках, опирающихся на методы классической механики.

Классическая задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки была сформулирована Л. Эйлером [7]. Выведенные им кинематические уравнения (1)

$$\begin{cases}\omega_x = \dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi,\\ \omega_y = -\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi,\\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta\end{cases} \tag{1}$$

относительно углов конечного поворота ψ, φ, ϑ, называемых углами Эйлера, и динамические уравнения (2)

$$\begin{cases}A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z = M_x,\\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = M_y,\\ C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y = M_z,\end{cases} \tag{2}$$

описывающие вращение твердого тела вокруг центра масс или около неподвижной точки, имели решающее значение для понимания гироскопических явлений. Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости тела на главные центральные оси инерции Ox, Oy, Oz.

Л. Эйлер показал, что в случае, когда момент $\vec{M}$ приложенных к телу внешних сил равен нулю («случай Эйлера»), точное решение уравнений (1), (2), т. е. нахождение углов ψ, φ, ϑ как функций времени, сводится к эллиптическим интегралам. Заметим, что условие $\vec{M} = \vec{0}$ соблюдается с большой точностью, если исследуется вращательное движение небесных тел.

В последующие годы Л. Эйлер продолжал развивать тему динамики твердого тела. В частности, в его работе [8] впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы изменения количества движения и момента количества движения:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} \int dM\frac{d^2x}{dt^2} = P; \qquad &&\text{IV.} \quad \int zdM\frac{d^2y}{dt^2} - \int ydM\frac{d^2z}{dt^2} = S;\\
&\text{II.} \int dM\frac{d^2y}{dt^2} = Q; \qquad &&\text{V.} \quad \int xdM\frac{d^2z}{dt^2} - \int zdM\frac{d^2x}{dt^2} = T;\\
&\text{III.} \int dM\frac{d^2z}{dt^2} = R; \qquad &&\text{VI.} \quad \int ydM\frac{d^2x}{dt^2} - \int xdM\frac{d^2y}{dt^2} = U.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Здесь опущен имеющийся в оригинале несущественный множитель, относящийся к масштабированию времени для измерения компонент сил P, Q, R и внешних моментов S, T, U. Появление в этой работе Эйлера впервые в истории механики обоих законов в качестве «фундаментальных, общих и независимых законов механики» дает основания называть совокупность этих законов «законами механики Эйлера» [9].

В дальнейшем, опираясь на основополагающие труды Л. Эйлера, задачей о движении твердого тела вокруг точки занимались такие знаменитые ученые, как акад. И. И. Сомов (1815–1876) и акад. П. Л. Чебышёв (1821–1894), сформировавшие санкт-петербургскую школу теоретической и прикладной механики.

И. И. Сомову принадлежат две работы по исследованию вращения твердого тела около неподвижной точки. В них эффективно используется теория эллиптических функций, по которым И. И. Сомовым была выпущена в 1850 г. первая книга на русском языке [10]. В последнем разделе монографии [10] И. И. Сомов рассмотрел задачу об интегрировании дифференциальных уравнений (2) при $M_x = M_y = M_z = 0$ с помощью эллиптических функций Якоби третьего рода, но с мнимым параметром ai. Воспользовавшись равенствами (в ранних обозначениях Якоби)

$$
\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},
$$

И. И. Сомов получает выражения для проекций угловой скорости тела, для углов Эйлера и для направляющих косинусов через тэта-функции Якоби. Например, для угла прецессии он приводит следующее выражение (в обозначениях автора):

$$
\psi = -n'u \pm \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)}, \quad \text{где} \quad n' = \pm\left[\frac{C}{A-C}\frac{d\log H(ai)}{da} - \frac{A}{A-C}\frac{d\log\Theta(ai)}{da}\right].
$$

С современной точки зрения представление эллиптических интегралов через тэта-функции имеет большое значение, поскольку тэта-функции раскладываются в быстросходящиеся тригонометрические ряды и вследствие этого удобны для вычисления.

Преемником И. И. Сомова, работавшего на кафедре механики Университета до 1876 г., стал акад. Д. К. Бобылев (1842–1917), имя которого навсегда вошло в историю науки, в частности в связи с исследованием динамики твердого тела [11]. Частный случай движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки в однородном поле силы тяжести, допускающий полный набор первых интегралов в уравнениях (1), (4)

$$
\begin{cases}
A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z = mg(y_G z - z_G y),\\
B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = mg(z_G x - x_G z),\\
C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y = mg(x_G y - y_G x)
\end{cases} \tag{4}
$$

и реализующийся, если $B = 2A$ и центр масс тела лежит на второй главной оси инерции, носит название «случай Бобылева — Стеклова» [12]. Здесь x_G, y_G, z_G — координаты центра масс тела в системе координат $Oxyz$, а x, y, z — проекции орта, направленного против силы тяжести, на оси Ox, Oy, Oz.

Многотомный учебник «Курс теоретической механики» (1881–1883) Д. К. Бобылева стал самым подробным и систематическим курсом механики и первым большим систематическим курсом этой науки на русском языке. На этом курсе воспитывались русские механики-аналитики и в первую очередь такие знаменитые ученики Д. К. Бобылева и П. Л. Чебышёва, деятельность которых была связана с Университетом, как акад. А. М. Ляпунов (1857–1918), Г. К. Суслов (1857–1935), И. В. Мещерский (1859–1935), Г. В. Колосов (1867–1936), Е. Л. Николаи (1880–1950).

По окончании Университета (1880) А. М. Ляпунов по представлению проф. Д. К. Бобылева был оставлен на кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, А. М. Ляпунов по совету П. Л. Чебышёва занялся следующей задачей: «Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов» [13, с. 328]. Над этой сложной темой, которой занимались И. Ньютон, К. Маклорен (Colin Maclaurin), К. Якоби (Carl Gustav Jacob Jacobi), Ж. Лиувилль (Joseph Liouville), Б. Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann) и У. Томсон (William Thomson, 1st Baron Kelvin), А. М. Ляпунов работал не только при подготовке магистерской диссертации [14], которую защитил в 1885 г. и с которой началась его мировая известность, но фактически всю свою жизнь, вплоть до трагической кончины.

Защита магистерской диссертации дала право А. М. Ляпунову на преподавательскую деятельность. В 1885 г. он был утвержден в звании приват-доцента Университета, но, получив предложение занять вакантную кафедру механики Харьковского университета, в 1885 г. переехал в Харьков и начал в том же звании приват-доцента чтение лекций по всем (!) курсам кафедры механики. При этом он проявил свой исследовательский талант и в области динамики твердого тела, исследовав устойчивость постоянных винтовых движений твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости [15]. Занимаясь этой задачей, А. М. Ляпунов обнаружил новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения [16]. Уравнения движения твердого тела в жидкости при отсутствии внешних сил и при некоторых предположениях о характере движения жидкости А. М. Ляпунов записывает в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} \qquad (1 \to 2 \to 3), \tag{5}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} \quad (1 \to 2 \to 3), \tag{6}$$

где T — квадратичная форма переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ с постоянными коэффициентами, а символ $1 \to 2 \to 3$ означает, что остальные два уравнения получаются из данного круговой перестановкой индексов. Уравнения (5), (6) допускают три независимых первых интеграла:

$$T, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{7}$$

И «всякий раз, когда будет найден четвертый интеграл, подобно указанным сейчас, не зависящий от t и не приводящийся к их функции, принцип последнего множителя, очевидно, приложимый к рассматриваемой системе дифференциальных уравнений, позволит интегрирование ее выполнить посредством квадратур» [16].

А. Клебш (Alfred Clebsch) указал три случая, когда такой интеграл может быть найден в виде целой функции переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ не выше второй степени. Все эти случаи относятся к следующему типу формы T:

$$T = \frac{1}{2}(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2) + b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2 + b_3x_3y_3 + \frac{1}{2}(c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + c_3y_3^2).$$

Найденный В. А. Стекловым новый случай интегрируемости определяется условиями

$$a_1 = \sigma^2 c_1(c_2^2 + c_3^2), \quad b_1 = \sigma c_2 c_3 \quad (1 \to 2 \to 3), \tag{8}$$

при выполнении которых уравнения (5), (6) допускают следующий интеграл:

$$\sigma^2 \mathbf{S}(c_2 - c_3)^2 x_1^2 - 2\sigma \mathbf{S} c_1 x_1 y_1 + \mathbf{S} y_1^2, \tag{9}$$

где $\mathbf{S}$ — суммирование трех членов, получаемых из написанного круговой перестановкой $1 \to 2 \to 3$. Для того чтобы условиями (8) определялся новый случай, не заключающийся в трех известных, найденных Клебшем, постоянная σ не должна быть нулем, а коэффициенты должны быть все различными. При этом последнем условии интеграл (9) не будет функцией трех известных интегралов (7).

К перечисленным случаям интегрируемости А. М. Ляпунов добавляет еще один, характеризуемый условиями

$$c_1 = c_2 = c_3 = c, \quad a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c},$$

при которых уравнения (5), (6) допускают интеграл

$$\mathbf{S} b_1[(b_2 + b_3)x_1 + cy_1]^2,$$

не приводящийся к функции трех известных интегралов (7), если между величинами b_1, b_2, b_3 существуют различные. Далее А. М. Ляпунов доказывает, что если b_1, b_2, b_3 все различны, то найденный им случай «не заключается ни в одном из предыдущих. Но если случай В. А. Стеклова надлежащим образом обобщить, указанный сейчас будет выводиться из него как предельный» [16]. В заключение работы [16] А. М. Ляпунов отмечает, что оба случая (Стеклова и Ляпунова) могут быть заменены одним, который характеризуется условиями

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c}, \tag{10}$$

$$\frac{b_2 - b_3}{c_1} + \frac{b_3 - b_1}{c_2} + \frac{b_1 - b_2}{c_3} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, найденный А. М. Ляпуновым случай интегрируемости является дополнительным к случаю, который вывел В. А. Стеклов в своей магистерской диссертации, устранив некоторую неполноту анализа в работе Клебша, обнаружившего первые нетривиальные случаи интегрируемости в задаче о динамике тела в жидкости. Интересно, что и сам А. М. Ляпунов обнаружил свой случай интегрируемости после того, как им были отмечены некоторые пробелы в вычислениях В. А. Стеклова [17], подготовившего свою магистерскую диссертацию под руководством А. М. Ляпунова.

Кроме упомянутых работ, у А. М. Ляпунова имеются еще два неопубликованных при жизни исследования, посвященные анализу движения тела в жидкости. Анализ этих исследований, хранящихся в рукописном виде в Архиве РАН в Санкт-Петербурге и ныне опубликованных в [18], содержится также в статьях [19, 20].

Еще один знаменитый ученик Д. К. Бобылева и П. Л. Чебышёва — это Г. К. Суслов. Ровесник А. М. Ляпунова, Г. К. Суслов в 1880 г. окончил Университет с золотой медалью и был точно так же, как А. М. Ляпунов, по представлению профессора Д. К. Бобылева оставлен на кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. В 1888 г. защитил магистерскую диссертацию, после чего был допущен к чтению лекций по графической статике на физико-математическом факультете Университета[1]. Однако этот курс он, вероятно, не успел прочитать, поскольку в том же 1888 г. был назначен исполняющим обязанности экстраординарного профессора по кафедре теоретической механики Императорского университета св. Владимира в Киеве. В 1890 г. защитил докторскую диссертацию, а в 1897 г. возглавил кафедру механики Киевского университета. Среди его учеников киевского периода такие крупные ученые, как О. Ю. Шмидт, П. В. Воронец, А. Д. Билимович, Л. И. Кордыш. В 1919 г. Г. К. Суслов приехал в Одессу и стал заведующим кафедрой теоретической механики Одесского политехнического института (ОПИ). В 1921–1928 гг. был ректором ОПИ.

Работы Г. К. Суслова посвящены различным проблемам аналитической механики, включая динамику твердого тела. Итогом и обобщением научной деятельности стал его двухтомник «Основы аналитической механики» [21, 22], который является одним из наиболее полных в мировой литературе изложений классической механики. В разделе «Динамика», отличающемся полнотой и глубоким анализом, автор подробно останавливается на аналитическом исследовании различных типов связей, что является характерной особенностью его курса. В частности, рассматривается несвободное твердое тело, подчиненное в общем случае неудерживающим связям: голономным

$$f_\alpha(x_A, y_A, z_A, \varphi, \psi, \theta, t) \geqslant 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, a)$$

и неголономным

$$\Phi_\beta = u_{\beta x}\dot{x}_A + u_{\beta y}\dot{y}_A + u_{\beta z}\dot{z}_A + u_{\beta\varphi}\dot{\varphi} + u_{\beta\psi}\dot{\psi} + u_{\beta\theta}\dot{\theta} + u_\beta \geqslant 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, b).$$

Дифференциальные уравнения движения несвободного тела строятся в виде уравнений Лагранжа (Joseph-Louis de Lagrange) с множителями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial T}{\partial x_A} = F_x + \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_A} + \sum_{\beta=1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \dot{x}_A} \quad (x \to y \to z \to \varphi \to \psi \to \theta).$$

Излагается общий ход интегрирования этих уравнений. Подробно анализируется движение твердого тела вокруг неподвижной точки. В связи с этим редакторы (проф. Н. Н. Бухгольц и В. К. Гольцман) третьего (однотомного) издания пишут:

[1] ЦГИА. СПб. Ф. 14. Оп. 1. Д. 8932. О допущении магистра Суслова к чтению лекций в качестве приват-доцента (1888).

«Особенное развитие в книге Г. К. Суслова получила динамика твердого тела; нет ни одного трактата или курса по теоретической механике, где бы этот отдел был изложен с такой, почти исчерпывающей, полнотой. Кроме классических интегрируемых случаев движения твердого тела вокруг неподвижной точки, автор излагает еще некоторые случаи, допускающие частные интегралы (случаи Гесса и Бобылева — Стеклова), а также и некоторые примеры на движение неголономных систем» [23].

Действительно, раздел, посвященный динамике твердого тела и занимающий 117 страниц, дает представление не только об аналитических, но и о геометрических методах изучения динамики твердого тела. Г. К. Суслов приводит геометрическую интерпретацию Пуансо и интерпретацию Мак-Куллага (Jammes MacCullagh) движения твердого тела в случае Эйлера, дает вторую геометрическую интерпретацию Пуансо (Louis Poinsot), обсуждает сопряженные движения Дарбу (Jean Gaston Darboux), прямое и обращенное движения Пуансо, формулирует и доказывает теорему Якоби о разложении движения симметричного гироскопа на прямое и обращенное движения Пуансо в связи с рассмотрением классического случая Лагранжа движения твердого тела. Столь же подробная геометрическая интерпретация приводится для случая Ковалевской и для частного случая Гесса (Otto Hesse) (со ссылкой на Н. Е. Жуковского). Для интерпретации случая Ковалевской ($J_{\xi\xi} = J_{\eta\eta} = 2J_{\zeta\zeta}$ в обозначениях Г.К. Суслова) делается замена времени так, чтобы выполнялось равенство $J_{\zeta\zeta} = Mg\xi_C$. Тогда динамические уравнения Эйлера примут более простой вид:

$$2\dot{\omega}_\xi = \omega_\eta\omega_\zeta, \quad 2\dot{\omega}_\eta = -\omega_\xi\omega_\zeta + a_{33}, \quad \dot{\omega}_\zeta = -a_{32}.$$

Совместно с кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{a}_{31} = \omega_\zeta a_{32} - \omega_\eta a_{33},\ \dot{a}_{32} = \omega_\xi a_{33} - \omega_\zeta a_{31},\ \dot{a}_{33} = \omega_\eta a_{31} - \omega_\xi a_{32}$$

они допускают интеграл энергии и интеграл кинетического момента

$$2(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \omega_\zeta^2 = -2a_{31} + 2h, \quad 2(\omega_\xi a_{31} + \omega_\eta a_{32}) + \omega_\zeta a_{33} = 2l$$

и геометрическое соотношение $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$. Далее Г.К. Суслов вводит новые переменные:

$$\xi = \omega_\zeta^2 - \omega_\eta^2 - a_{31}, \quad \eta = 2\omega_\xi\omega_\eta - a_{32}, \quad 2\zeta = \omega_\zeta^2 + 4\omega^2,$$

которые изменяются в зависимости от времени согласно уравнениям

$$\dot{\xi} = \omega_\zeta\eta, \quad \dot{\eta} = -\omega_\zeta\xi, \quad \dot{\zeta} = \omega_\zeta\eta,$$

допускающим первые интегралы

$$\zeta - \xi = D, \tag{12}$$
$$\xi^2 + \eta^2 = k^2. \tag{13}$$

Интеграл (12) совпадает с интегралом энергии при $D = 2h$, а интеграл (13) — новый, независимый от найденных выше, и называется обычно интегралом Ковалевской. Равенства (12), (13) означают, что точка N с координатами ξ, η, ζ движется по эллипсу, являющемуся пересечением цилиндра (13) с плоскостью (12).

В книге [23] обсуждается также известная «задача Суслова», в которой твердое тело с неподвижной точкой движется в условиях неголономной связи, обеспечивающей равенство нулю проекции угловой скорости тела на неподвижную в этом теле ось.

3. Динамика твердого тела в работах ученых Университета по теории гироскопических систем и баллистике. В данном разделе рассмотрим труды И. В. Мещерского, Г. В. Колосова, Е. Л. Николаи, а также их современников и учеников, в той области динамики твердого тела, которая примыкает к теории гироскопических систем и баллистике.

По окончании Университета в 1882 г. со степенью кандидата И. В. Мещерский был оставлен проф. Д. К. Бобылевым при кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. В 1888 г. он был назначен хранителем кабинета практической механики, а в 1890 г. зачислен в состав приват-доцентов кафедры теоретической и практической механики и допущен к чтению лекций по механике. Одновременно с началом педагогической деятельности И. В. Мещерский стал заниматься теорией движения тел переменного состава. Начав разработку темы с частного случая, когда относительная скорость отделяющихся от тела частиц равна нулю и, следовательно, тело не подвергается воздействию реактивной силы, он доложил свои первые результаты Петербургскому математическому обществу 15 января 1893 г. Также им была решена одна задача небесной механики о движении двух тел переменной массы [24].

Основное уравнение движения материальной точки переменной массы при любом законе изменения массы и любой относительной скорости выбрасываемых частиц получено и исследовано И. В. Мещерским в его диссертации 1897 г. [25]. В 1904 г. И. В. Мещерский дал подробное исследование движения тела переменной массы в том случае, когда одновременно происходит присоединение и отделение частиц [26]. Уравнение И. В. Мещерского обычно записывается в виде

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}_1(t)\frac{dm_1}{dt} - \vec{u}_2(t)\frac{dm_2}{dt} + \vec{F},$$

где $M(t)$ — масса материальной точки, изменяющаяся с течением времени t за счет обмена частицами с окружающей средой; $\vec{v}$ — скорость движения материальной точки переменной массы; $\vec{F}$ — главный вектор внешних сил, действующих на материальную точку переменной массы; $\vec{u}_1(t) = \vec{v}_1 - \vec{v}$ — относительная скорость присоединяющихся частиц; $\vec{u}_2(t) = \vec{v}_2 - \vec{v}$ — относительная скорость отделяющихся частиц; $\dfrac{dm_1}{dt} > 0$ и $\dfrac{dm_2}{dt} > 0$ — скорости массообмена присоединяющихся и отделяющихся частиц. Актуальность полученного уравнения, казавшаяся сомнительной современникам И. В. Мещерского, стала очевидной позднее, в связи с развитием авиации.

Предположения И. В. Мещерского о характере изменения массы небесных тел, сделанные еще в работах 1897 и 1902 гг., были подвергнуты обстоятельному исследованию крупнейшими астрономами, и сейчас эти гипотезы носят в литературе название «законов Мещерского» [27]. И. В. Мещерский известен как классик русской науки, основоположник динамики массоизменяемых и конфигурационно изменяемых механических объектов [27], создатель теории реактивного движения [28] и, в частности, ракетодинамики. Он первый вывел строгое уравнение вертикального движения ракеты и показал, в каких частных случаях решение этого уравнения можно довести до численного результата. Среди работ И. В. Мещерского по динамике твердого тела находим не только работы, развивающие теорию движения точки переменной массы применительно к твердому телу переменного состава [29], но и исследования систем гиростабилизации вагонов для монорельсовой дороги, выполненные в классическом стиле динамики твердого тела. В работе [30] И. В. Мещерский составил точные дифференциальные уравнения движения гиростабилизируемого вагона монорельсовой дороги и определил с помощью этих уравнений величины погрешностей, возникающих при использования линеаризованных уравнений движения вагона.

Младшим современником и учеником И. В. Мещерского был русский и советский математик, механик, чл.-корр. АН СССР (1931) Г. В. Колосов. По окончании Университета в 1899 г. Г. В. Колосов был оставлен проф. Д. К. Бобылевым при кафедре механики для подготовки к профессорской деятельности. В 1916 г. он занял кафедру теоретической механики в Университете и возглавлял ее в годы революционного лихолетья до 1930 г. [31].

Научное наследие Г. В. Колосова включает серию работ по динамике твердого тела, которой он почти исключительно занимался примерно до 1908 г. [32]. В 1898 г. он открыл новый интегрируемый случай движения волчка по гладкой плоскости, аналогичный случаю Гесса. В статье [33] Г. В. Колосов дает новую интерпретацию случая Ковалевской. При этом он делает замену времени и, по аналогии с известным приемом из небесной механики, осуществляет нелинейное преобразование фазовых переменных, сводящее задачу Ковалевской к задаче динамики материальной точки на плоскости с потенциалом, допускающим разделение переменных. В работе [34] Г. В. Колосов, используя метод Якоби, выводит четвертый интеграл (полученный независимо от него С. А. Чаплыгиным) как обобщение случая Д. Н. Горячева, который вводил условия $A = B = 4C$.

Логическим развитием и продолжением этих работ является магистерская диссертация Г. В. Колосова [35], защищенная им в Университете в 1903 г., в которой он, исходя из предложенного Раусом приема игнорирования координат в функции Лагранжа, существенно обобщает этот прием, показав возможность пользоваться при видоизменении функции Лагранжа и «частными решениями» (термин автора), что позволяет получать различные частные решения задачи динамики. Фактически Г. В. Колосов развил метод Гамильтона — Якоби для интегрирования задач динамики твердого тела и применил его к случаям Горячева — Чаплыгина, Клебша, Бобылева — Стеклова. Записав уравнения в канонической гамильтоновой форме по аналогии с движением материальной точки, Г. В. Колосов ищет канонические преобразования в фазовом пространстве, разделяющие переменные, обобщая тем самым свои результаты, относящиеся к случаю Ковалевской.

Примененная Г. В. Колосовым идея использования в динамике твердого тела некоторых приемов из небесной механики получила развитие в [36], где техника введения канонических переменных типа действие — угол, использующая уравнения Абеля — Якоби, по существу развивает наблюдения Г. В. Колосова.

Из более поздних работ Г. В. Колосова по движению твердого тела в несжимаемой жидкости назовем работу [37], в которой автор нашел четвертый интеграл уравнений движения системы с гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(c_i M_i^2 + 2b_i M_i \gamma_i + a_i \gamma_i^2)$$

при следующих условиях на постоянные a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\frac{c_1(c_2 - c_3)}{b_3 - b_2} = \frac{c_2(c_3 - c_1)}{b_1 - b_3} = \frac{c_3(c_1 - c_2)}{b_2 - b_1}, \tag{14}$$

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3}. \tag{15}$$

Интеграл имеет вид

$$F = \frac{b_3 - b_1}{c_2}\left(M_1 - \frac{b_3 - b_2}{c_1}\gamma_1\right)^2 + \frac{b_3 - b_2}{c_1}\left(M_2 - \frac{b_3 - b_1}{c_2}\gamma_2\right)^2.$$

Показав, что условия (10), (11) реализации случаев Стеклова и Ляпунова являются частными случаями условий (14), (15), Г. В. Колосов включил все три случая в единое семейство, называемое иногда «случаем Ляпунова — Стеклова — Колосова» [36].

В 1930 г. Г. В. Колосов стал заведовать кафедрой теории упругости, а заведующим кафедрой аналитической механики был назначен проф. Н. В. Розе (1890–1942) — выпускник Университета (1912), магистр математики (1917), активный участник изучения Арктики и Северного морского пути, выдающийся гидролог, магнитолог и механик.

В 1932–1933 гг. проф. Н. В. Розе совместно с И. Д. Жонголовичем, А. Я. Лисютиным и М. И. Золотухиным опубликовал курс теоретической механики, очень хорошо построенный в методическом отношении, а через год — книгу «Динамика твердого тела». В 1938 г. в Издательстве университета вышли «Лекции по аналитической механике» проф. Н. В. Розе, содержащие весьма подробное изложение вариационных принципов механики и разделов, посвященных интегрированию уравнений механики. В этих книгах автор уделил много внимания примерам из динамики твердого тела: лунно-солнечной прецессии и нутации земной оси, гироскопическому компасу и др.

Ровесником Н. В. Розе и видным ученым, также работавшим на физико-математическом факультете, был чл.-корр. АН СССР Ю. А. Крутков (1890–1952). Первые работы Ю. А. Круткова непосредственно примыкали к исследованиям его учителя П. С. Эренфеста (Paul Ehrenfest) и касались актуальных проблем квантовой теории. Ю. А. Крутков разработал общий метод нахождения адиабатических инвариантов. После 1921 г., когда Ю. А. Крутков стал профессором Университета, его научные интересы стали склоняться в сторону механики и статистической механики. Оба эти курса он читал в Университете в 1920–1930-х годах. Большую известность получила серия работ Ю. А. Круткова по исследованию движения при наличии «случайных» сил. В частности, методы теории вероятностей были им впервые применены к задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки при наличии «случайных» моментов.

Помимо этого, Ю. А. Крутков, так же как и Е. Л. Николаи, занимался вопросами, связанными с динамикой гироскопов. В 1932 г. вышла в свет монография [38], в которой А. Н. Крылову принадлежит изложение аналитической теории гироскопов, а Ю. А. Круткову — изложение той же теории в векторно-геометрической форме. Ценность подхода, примененного Ю. А. Крутковым, в том, что, исходя из векторного уравнения движения гироскопа, можно дать динамическое истолкование поведения гироскопа без полного и весьма трудоемкого аналитического исследования той или иной практически важной задачи. Некоторые вопросы, не нашедшие отражения в монографии [38], были опубликованы Ю. А. Крутковым в статьях [39, 40]. В первой из них автор отмечает: «В продолжении нескольких лет я пользуюсь при изложении гиростатических задач динамики специальной формой дифференциальных уравнений движения волчка» [39, с. 489] (в обозначениях, сохраняющих преемственность с (2) и (4)):

$$A\dot{\vec{v}} = C\omega_z\vec{k} \times \vec{v} - Av^2\vec{k} - \vec{k} \times \vec{M}, \tag{16}$$

$$C\dot{\omega}_z = \vec{M} \cdot \vec{k}, \tag{17}$$

где A и C — экваториальный и осевой моменты инерции; $\vec{k}$ — орт оси волчка из неподвижной точки O или центра масс G; $\vec{v}$ — скорость конца орта $\vec{k}$-«вершины» волчка. По поводу уравнений (16), (17), названных в статье уравнениями движения «вершины» волчка, Ю. А. Крутков дает примечание: «Уравнению (16) можно дать название уравнения A. Föppl'я (August Föppl) (см. [41]). Вывод Föppl'я предполагает, однако, что $\omega_z = \mathrm{const}$ и, чтобы стать строгим, требует незначительного дополнения» [39, с. 489]. Исходя из вышеизложенного представляется справедливым называть уравнение (16) уравнением Круткова.

Научная работа кафедры механики (как и других кафедр) планировалась и направлялась в те годы отделом механики научно-исследовательского института математики и механики (НИММ) Университета. Этот отдел был организован в 1930 г. и заведовал им вплоть до 1935 г. проф. Е. Л. Николаи.

С началом Великой Отечественной войны из блокадного Ленинграда удалось эвакуировать в г. Елабуга небольшую группу математиков и механиков, которая стала вести научную работу под руководством чл.-корр. (с 1943 г. — акад.) АН СССР В. И. Смирнова (1887–1974). Основная часть универсантов оставалась в блокированном Ленинграде до марта 1942 г. В том же году в застенках НКВД трагически оборвалась жизнь Н. В. Розе, арестованного по сфабрикованному делу вместе с группой ученых. В 1943 г. кафедру механики возглавил проф. Е. Л. Николаи (1880–1950) и заведовал ею до конца своей жизни. С именем проф. Е. Л. Николаи связаны важные достижения в теории и практике гироскопических систем. По мере роста требований к точности свободных гироскопов и уменьшения их инструментальных погрешностей становилось все более актуальным изучение ошибок следующего порядка малости, считавшихся ранее несущественными. В связи с этим большое значение имели работы Е. Л. Николаи, в которых рассматривалась задача о накоплении уходов гироскопа, вызванных инерционностью подвеса. В 1939 г. Е. Л. Николаи составил полную систему уравнений движения прибора, учитывающую инерцию кардановых колец. Механическая система, включающая ротор гироскопа, поворачивающийся на угол собственного вращения φ, внутреннее кольцо, поворачивающееся на угол нутации β, и внешнее кольцо, поворачивающееся на угол прецессии α, имеет три степени свободы. Соответственно этому записываются три уравнения моментов, а именно:

1) для одного ротора относительно его оси симметрии z

$$C\dot{r} = L_z, \tag{18}$$

2) для системы ротор + внутреннее кольцо, относительно оси вращения N внутреннего кольца

$$(A + A_1)\ddot{\beta} - Cr\dot{\alpha}\cos\beta - (C_1 - A - B_1)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta = -L_N, \tag{19}$$

3) для системы ротор + внутреннее кольцо + внешнее кольцо относительно оси вращения ζ внешнего кольца

$$[(A + B_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta + A_2]\ddot{\alpha} + Cr\dot{\beta}\cos\beta + \\ + 2(C - A - B_1)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta = L_\zeta - L_z\sin\beta. \quad (20)$$

Здесь C — момент инерции ротора относительно оси z; $A_1 = C_1$ и B_1 — соответственно экваториальные и осевой моменты инерции внутреннего кольца; A_2 — момент инерции внешнего кольца относительно неподвижной оси ζ. На базе уравнений (18)–(20) Николаи исследовал устойчивость движения при быстром вращении ротора.

Значительный интерес представляют также исследования Е. Л. Николаи, посвященные влиянию сил трения на поведение гироскопа в кардановом подвесе. В 1943 г., находясь в Саратове, Е. Л. Николаи закончил работу «К теории девиации гирокомпаса». В послевоенные годы им были изданы замечательные монографии [42, 43] по теории гироскопов, включающие ранее полученные результаты. В частности, выведены уравнения движения гирокомпаса с учетом движения основания прибора и выяснено влияние силовых факторов, обусловленных движением основания, на погрешности (девиации) в показаниях гирокомпаса. Например, для корабля, движущегося со скоростью v на широте ψ с курсовым углом γ по поверхности Земли с радиусом R, найдена курсовая девиация гирокомпаса в виде

$$\alpha = -v\cos\gamma/(R\Omega\cos\psi).$$

Получив эту формулу, Е. Л. Николаи отмечает: «В курсовой девиации гирокомпаса обнаруживается влияние на показания прибора такого незначительного фактора, как кривизна земной поверхности. В этом мы не можем не усматривать поразительной чувствительности и точности гироскопического компаса» [43].

К военным и послевоенным годам относится творческий расцвет воспитанника Университета, выдающегося ученого в области баллистики, основателя Ленинградской баллистической школы, профессора Б. Н. Окунева (1897–1961). В области внешней баллистики Б. Н. Окунев обобщил аналитические методы решения основной задачи, развил теорию вращательного движения артиллерийского снаряда, уточнил условия устойчивости снаряда в полете, создал теорию поправок на дальность стрельбы, сформулировал свойства траектории снаряда в воздухе, усовершенствовал численные методы интегрирования дифференциальных уравнений [44]. Из трудов Б. Н. Окунева по динамике твердого тела отметим его монографию [45].

На кафедре теоретической механики Университета в первые послевоенные годы наряду с ее заведующим — проф. Е. Л. Николаи — преподавали Г. Н. Бухаринов (1907–1980), В. Г. Жуйкова, Н. И. Идельсон, Б. Н. Окунев. Вскоре к ним присоединился и Ю. А. Крутков, отбывший 10 лет в заключении как «враг народа» и освобожденный в марте 1947 г. Студентами кафедры стали вернувшиеся с фронтов Великой Отечественной войны будущие сотрудники и доценты этой же кафедры — А. Ю. Львович (1919–1994), Л. И. Кузнецов (1924–1993), А. А. Тихонов (1925–2003). Все они работали до последних лет жизни и внесли существенный вклад в теорию электромеханических систем, в теорию нелинейных колебаний, динамику твердых и упругих тел, космодинамику и устойчивость движения. В частности, кандидатская диссертация Л. И. Кузнецова [46], посвященная анализу динамики системы твердых тел, содержит решение задачи предотвращения преждевременного срабатывания взрывателя артиллерийского снаряда, а его последующие работы непосредственно связаны с динамикой космических аппаратов.

После кончины проф. Е. Л. Николаи (1950) заведование кафедрой перешло к проф. Ю. А. Круткову. В 1952 г. Ю. А. Круткову была присуждена Государственная премия, о чем он узнал в больнице, где вскоре и скончался. В том же 1952 г. кафедру теоретической механики возглавил и руководил ею в течение 25 лет проф. Н. Н. Поляхов (1906–1987) — замечательный ученый, педагог и энциклопедист, общепризнанный авторитет в области гидроаэромеханики, автор трудов по теории упругости, динамике полета, теории управления, электромеханике, истории механики.

Таким образом, в истории Университета от самого начала его становления и вплоть до начала космической эры (1957) не обнаруживается такого исторического периода, в который научная мысль не обращалась бы к задачам динамики твердого тела.

4. Первые годы космической эры и связанные с нею новые задачи динамики твердого тела в трудах ученых Университета. Не умаляя значимости многочисленных технических наук, имеющих непосредственное отношение к наступлению космической эры, открывшейся запуском в СССР первого искусственного спутника Земли (ИСЗ) (04.10.1957), остановимся на фундаментальных разделах естественных наук, лежащих в основе научного направления, обычно называемого в настоящее время «динамика космических аппаратов» или кратко «космодинамика». Траекторные задачи космодинамики берут свое начало в небесной механике, изучающей движения небесных тел, рассматриваемых как материальные точки, в гравитационных полях. В этом плане космодинамика имеет давние и прочные традиции в Университете [47].

Наряду с траекторными задачами, входящими ныне в комплекс баллистико-навигационных проблем космодинамики, составляющих первое из основных направлений в данной науке, не менее важным для космодинамики является второе направление, связанное с изучением углового движения космического аппарата (КА) относительно его центра масс. Формально это направление также представлено в круге задач небесной механики. Однако по-настоящему бурное его развитие связано с резким ростом разнообразных задач, возникших с началом космической эры, для решения которых, как и ранее в небесной механике, стали развиваться известные и создаваться новые методы классической теоретической механики. Еще одним важным направлением исследований, непосредственно связанным с космодинамикой, стала теория управления и примыкающая к ней теория устойчивости управляемого движения.

Поэтому в 1950–1960-е годы в Университете стали читаться общие и специальные курсы, предназначенные для развития космодинамики. Так, Л. И. Кузнецов читал спецкурсы «Нелинейные колебания», «Теория гироскопов», «Динамика космического аппарата». Динамика твердого тела и динамика гироскопических систем оставались в круге научных интересов кафедры, сформировавшихся под влиянием работ проф. Ю. А. Круткова, и приобрели особую актуальность, поскольку стали важными для аналитических исследований динамики вращательного движения КА относительно центра масс и для исследований динамики гироприборов, установленных на КА и представляющих собой основной элемент системы управления угловым положением КА.

Например, в работе Л. И. Кузнецова [48] изучается движение гироскопа весом P в кардановом подвесе в сопротивляющейся среде с учетом трения в подвесе. Выбираются координаты центра масс в системе Резаля (Resal): $x = 0$, $y = 0$, $z = -l$. Положение оси гироскопа определяется углами Резаля θ_1 и θ_2, где θ_1 — угол отклонения перпендикуляра к плоскости внешнего кольца от вертикали, а θ_2 — угол между указанным перпендикуляром и осью z. Углы θ_1 и θ_1 считаются малыми. Пренебрегая массами колец по сравнению с массой ротора и не учитывая сопротивления среды и трения в подвесе, имеем дифференциальные уравнения свободного движения гироскопа [45]:

$$A\ddot{\theta}_1 + Cr\dot{\theta}_2 + Pl\theta_1 = 0, \quad A\ddot{\theta}_2 - Cr\dot{\theta}_1 + Pl\theta_2 = 0, \quad r = r_0, \tag{21}$$

где A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции ротора. Эта система эквивалентна одному уравнению в комплексной форме:

$$\ddot{\theta} - ik\dot{\theta} + n\theta = 0, \tag{22}$$

где $\theta = \theta_1 + i\theta_2$; $k = Cr_0/A$; $n = pl/A$. Решение уравнения (22)

$$\theta = A_1 \exp\{i(\omega_1 t + \alpha_1)\} + A_2 \exp\{i(\omega_2 t + \alpha_2)\} \tag{23}$$

зависит от параметров ω_1 и ω_2, удовлетворяющих уравнению $-\omega^2 + k\omega + n = 0$, и постоянных $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$, α_1, α_2, зависящих от начальных условий. Как показал Н. Г. Четаев [49], необходимым и достаточным условием устойчивости вертикального положения оси гироскопа (т. е. $\theta_1 = \theta_2 = 0$) является неравенство $k^2 + 4n > 0$. Это условие всегда выполнено при $l \geqslant 0$, а в случае $l < 0$ выполняется при достаточно большом значении r_0.

Далее Л. И. Кузнецов рассматривает эту задачу в более общей постановке, допуская, что на устойчивый гироскоп в идеальных условиях действуют сопротивление среды и трение в подвесе. Сопротивление моделируется двумя моментами, первый из которых, следуя Клейну (Klein) и Зоммерфельду (Sommerfeld), пропорционален экваториальной составляющей угловой скорости гироскопа, а второй равен некоторой функции $f(r) \geqslant 0$ осевой составляющей r. Силы трения в подвесе сводятся к трем парам, моменты которых M_1, M_2, M_3 считаются постоянными и направленными вдоль осей x, η, z. Тогда дифференциальные уравнения движения гироскопа могут быть записаны в виде [48]

$$\begin{gathered}
A\ddot{\theta}_1 + Cr\dot{\theta}_2 + Pl\theta_1 = -\nu\dot{\theta}_1 - M_1 \operatorname{sign}\dot{\theta}_1, \\
A\ddot{\theta}_2 - Cr\dot{\theta}_1 + Pl\theta_2 = -\nu\dot{\theta}_2 - M_2 \operatorname{sign}\dot{\theta}_2, \\
C\dot{r} = -(f(r) + M_3).
\end{gathered} \tag{24}$$

Из последнего уравнения системы (24) находится $r = r(t) = r_0 - \psi(t)$, где $0 \leqslant \psi(t) \leqslant r_0$ — монотонно возрастающая функция. Предполагая для простоты, что $M_1 = M_2 = M$, и считая, что силы сопротивления и трения малы, дифференциальное уравнение, эквивалентное системе (24), можно представить в виде

$$\ddot{\theta} - ik\dot{\theta} + n\theta = -\mu F(\dot{\theta}, t), \tag{25}$$

где μ — малый параметр; $F(\dot{\theta}, t) = (q + i\varphi(t))\dot{\theta} + m(\operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\dot{\theta})) + i \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(\dot{\theta})))$; $\nu = \mu q A$; $M = \mu m A$; $C\psi(t) = \mu\varphi(t)A$. Далее это дифференциальное уравнение вращательного движения гироскопа анализируется с использованием метода усреднения. Установлено, что если $l < 0$, то амплитуда и частота прецессионных колебаний будут возрастать, а нутация и ее частота будут затухать. Устойчивое в пустоте вертикальное положение гироскопа под влиянием сопротивления среды и трения в подвесе становится неустойчивым. Если $l = 0$, то прецессия отсутствует, а нутация затухает с переменной (убывающей) частотой. Нутация затухает за конечный промежуток времени, который также найден в [48]. Вертикальное положение оси гироскопа устойчиво. Если $l > 0$, то и нутация и прецессия затухают. Частота прецессии возрастает, а частота нутации убывает. Вертикальное положение оси гироскопа асимптотически устойчиво. При большом значении r_0 нутация затухает быстрее прецессии. Таким образом, сделаны выводы о влиянии трения и сопротивления на поведение амплитуды и частоты прецессионных и нутационных колебаний гироскопа. Методика исследования, примененная Л. И. Кузнецовым в работе [48], оказалась весьма эффективной и не устарела за 60 лет, прошедшие после опубликования статьи. Об этом свидетельствуют современные работы, в которых рассмотренная методика распространяется на управляемые системы со многими степенями свободы (см., например, [50]).

В работе [51] рассматриваются вынужденные колебания оптического прибора для измерения вибраций. Прибор, представляющий собой диск с оптической трубкой, закреплен на четырех симметрично расположенных амортизаторах на некотором основании, колеблющемся по закону $x_0 = a \sin\varepsilon \sin\nu t$, $y_0 = a\cos\varepsilon \sin\nu t$, $z_0 = b \sin\nu t$.

Учитывается жесткость амортизаторов на сжатие (c_i — соответствующая жесткость i-го амортизатора), кручение (c_i^* — соответствующая жесткость i-го амортизатора) и сдвиг (c_i^{**} — соответствующая жесткость i-го амортизатора). При этом $c_i = c + e_i$, где c — стандартное значение, а e_i — малый добавок ($i = \overline{1,4}$). Вследствие неточности балансировки и некоторого отклонения жесткости амортизаторов от стандарта, возникают угловые колебания оптической трубки, искажающие результаты наблюдений исследуемого процесса. Для учета этих искажений требуется определить амплитуды таких колебаний. Таким образом, ставится задача о нахождении амплитуд малых колебаний прибора, моделируемого твердым телом. Жестко с диском связана система координат ξ, η, ζ, начало которой помещено в центр диска. В осях ξ, η, ζ координаты центра масс тела ξ_c, η_c, ζ_c являются малыми величинами. Главные моменты инерции тела относительно двух осей ξ и η, ортогональных к продольной оси трубки, предполагаются близкими к среднему значению J и отличающимися от него на малые величины j_ξ и j_η: $J_\xi = J + j_\xi$, $J_\eta = J + j_\eta$. В качестве обобщенных координат системы выбираются три координаты центра масс тела x, y, z и два угла α, β, определяющие положение оси оптической трубки. Дифференциальные уравнения малых колебаний полученной системы с пятью степенями свободы строятся по методу Лагранжа 2-го рода. Эти уравнения зависят от девяти малых параметров: ξ_c, η_c, ζ_c, j_ξ, j_η, e_1, e_2, e_3, e_4.

Далее рассматривается порождающая дифференциальная система, полученная в предположении, что система точно сбалансирована и все малые параметры равны нулю. Соответствующие уравнения разделяются и легко интегрируются. Полученные вынужденные колебания имеют вид

$$x = k \sin\nu t, \quad y = n \sin\nu t, \quad z = p + q \sin\nu t, \quad \alpha = \beta = 0.$$

После этого вынужденные колебания исходной несбалансированной системы ищутся в виде

$$x = K\sin\nu t,\ y = N\sin\nu t,\ z = P + Q\sin\nu t,\ \alpha = \alpha^* + A\sin\nu t,\ \beta = \beta^* + B\sin\nu t,$$

где коэффициенты K, N, P, Q, α^*, β^*, A, B, являющиеся непрерывными функциями вышеуказанных девяти малых параметров, представимы в виде рядов по степеням этих параметров. В предположении, что точность задачи позволяет ограничиться первыми степенями малых параметров, неизвестные коэффициенты K, N, P, Q, α^*, β^*, A, B ищутся в виде конечных сумм, линейно зависящих от малых параметров. После подстановки этих сумм в исходные дифференциальные уравнения получается достаточно простая алгебраическая система, позволяющая найти неизвестные коэффициенты, а вместе с ними и искомые вынужденные колебания. Таким образом, предложен приближенный метод расчета, позволяющий избежать громоздких вычислений и обеспечивающий достаточную для практики точность.

В работе [52] Л. И. Кузнецов рассматривает механическую систему с голономными стационарными связями, имеющую в своем составе m гироскопов на подвижном основании. В предположении, что сумма моментов внешних сил относительно оси вращения каждого гироскопа равна нулю, положение системы относительно некоторой неподвижной системы координат определяется n позиционными координатами q_j и m циклическими координатами φ_k, где φ_k — углы собственных вращений гироскопов. Решается задача о построении оценок разностей между решениями, полученными по точным и приближенным дифференциальным уравнениям движения системы. Несложно понять актуальность этой работы, опубликованной в 1959 г., для развития систем управления угловым движением ИСЗ с помощью гироскопов в то время, когда недостаток средств компьютерного моделирования компенсировался тщательностью аналитических исследований, выполняемых с помощью приближенных методов, обеспечивающих прогнозируемую точность.

Как видим, для работ Л. И. Кузнецова, базирующихся на реальной хоздоговорной тематике, характерно стремление не просто решить поставленную задачу имеющимися методами, но вникнуть в самую суть методов, для того чтобы, во-первых, ясно осознать границы их применимости и, во-вторых, если возможностей известных методов недостаточно, то преобразовать, развить и модифицировать известные методы с тем, чтобы получить такой математический аппарат, который позволит решить поставленную задачу с прогнозируемой точностью. В этом видится характерный высокий стиль, сформированный в Санкт-Петербургской математической школе под влиянием ее основателя — великого русского ученого П. Л. Чебышёва.

Тот же стиль выполнения научных исследований просматривается и в последующих работах Л. И. Кузнецова [53–58]. В этих работах методам исследования и их развитию уделяется не меньшее внимание, чем самим прикладным задачам, решение которых является основной целью. Так, в работе [53] рассматривается ряд задач прикладной теории гироскопов. На примере гироскопического маятника анализируется вопрос о возможности использования прецессионных (или элементарных) уравнений движения гироскопа для определения девиаций гироскопических приборов. Уравнения Эйлера (2) для описания движения гироскопа имеют вид

$$\begin{cases} A(\dot p - qr') + Hq = M_x, \\ A(\dot q + pr') - Hp = M_y, \\ \qquad\qquad\quad \dot H = M_z, \end{cases} \tag{26}$$

где z — ось гироскопа; x, y — оси, которые расположены в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, построенного для точки опоры; A — экваториальный момент инерции гироскопа; H — собственный кинетический момент гироскопа; p, q — проекции угловой скорости гироскопа на оси x, y; r' — проекция угловой скорости трехгранника x, y, z на ось z. В прецессионной (или элементарной) теории считают приближенно, что кинетический момент гироскопа по величине равен H и направлен по оси гироскопа. Тогда получают уравнения

$$Hq = M_x, \quad -Hp = M_y, \quad \dot{H} = M_z. \tag{27}$$

Положение оси гироскопа в географически ориентированной системе координат ξ, η, ζ задается углами α, β. Составляющие угловой скорости трехгранника ξ, η, ζ будут

$$u_\xi = -V_N/R, \quad u_\eta = u\cos\varphi + V_E/R, \quad u_\zeta = u\sin\varphi + (V_E/R)\operatorname{tg}\varphi.$$

Здесь u — угловая скорость суточного вращения Земли; R — радиус Земли; φ — широта места; V_N и V_E — северная и восточная составляющие скорости точки подвеса по поверхности Земли. Считая, что α и β малы, можно приближенно положить

$$p = \dot{\alpha} - V_N/R, \quad q = \dot{\beta} + u\cos\varphi + V_E/R, \quad r_1 = u\sin\varphi + (V_E/R)\operatorname{tg}\varphi. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26) и считая, что $H = \mathrm{const}$, получим дифференциальную систему

$$\begin{cases} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = M_x + A\dot{V}_N/R - H(u\cos\varphi + V_E/R), \\ A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = M_y - A\dot{V}_E/R - HV_N/R. \end{cases} \tag{29}$$

Очевидно, что M_x и M_y здесь должны содержать и составляющие от сил инерции поступательного переносного движения. Если же подставить (28) в (27) и отметить α и β для отличия индексом, то получим дифференциальную систему

$$\begin{cases} \quad H\dot{\beta} = M_x - H(u\cos\varphi + V_E/R), \\ -H\dot{\alpha} = M_y - HV_N/R. \end{cases} \tag{30}$$

Далее можно ввести в рассмотрение комплексные переменные $\theta = \alpha + i\beta$, $V = V_E + V_N$, $\vartheta = \alpha_1 + i\beta_1$, $M = M_x + iM_y$. Тогда системы (29) и (30) соответственно сведутся к уравнениям

$$A\ddot{\theta} - iH\dot{\theta} = M - iA\dot{V}/R - HV/R - Hu\cos\varphi, \tag{31}$$

$$-iH\dot{\vartheta} = M - HV/R - Hu\cos\varphi. \tag{32}$$

Особый интерес для прикладной теории представляют частные решения уравнений (31) и (32), определяющие девиации гироскопических приборов. Поэтому далее Л. И. Кузнецов на примере гироскопического маятника анализирует вопрос о близости соответствующих частных решений друг к другу. Для гироскопов, обладающих определенной симметрией относительно углов α и β, что имеет место во многих случаях, момент M всегда можно представить в виде некоторой функции $\theta, \dot{\theta}, t$. При малых углах α и β можно принять $M = m_0 + m_1\theta + m_2\dot{\theta}$. Далее уравнения (31) и (32) выписываются с параметрами m_0, m_1, m_2, соответствующими гиромаятнику, строятся их общие решения $\theta(t)$ и $\vartheta(t)$ и оценивается разность $\varepsilon = \theta(t) - \vartheta(t)$ по порядку величины $1/H$ для нескольких характерных случаев. Установлено, что если точка подвеса гиромаятника движется равноускоренно, не меняя курса, то $\varepsilon = O(1/H)$, в то время как сама девиация будет величиной порядка H. Если точка подвеса гиромаятника движется по дуге большого круга, совершая гармонические колебания, то возможность использовать прецессионные уравнения зависит от частоты этих колебаний. В общем случае использовать прецессионные уравнения нельзя, однако указаны случаи, когда использовать эти уравнения можно. В частности, показано, что при выполнении условия теоремы Шуллера, т. е. при выполнении равенства $\omega^2 R = g$, где $\omega = Pl/H$, P — вес гироскопа, l — расстояние от центра масс гироскопа до точки его опоры, уравнения (27) не только можно использовать, но и показать, что они обеспечивают высокую точность: $\varepsilon = O(1/H^2)$. Рассмотрены также и другие важные для практики частные случаи. Сделаны выводы о том, когда можно и когда нельзя пользоваться уравнениями прецессионной теории гироскопов.

С 1952 по 1963 г. на кафедре теоретической механики Университета работал В. С. Новоселов (1926–2019) — сначала ассистентом, а затем доцентом и профессором. Оставленный для работы на кафедре теоретической механики после окончания (1951), он читал важные для развития космодинамики курсы: общий курс теоретической механики для астрономов и спецкурсы «Механика тел переменной массы», «Неголономная механика», «Оптимальные траектории». Все три спецкурса отражают научные интересы В. С. Новоселова и соответствующие основные направления его исследований. В 1952 г. В. С. Новоселов защитил кандидатскую диссертацию. В ней основные теоремы аналитической динамики были распространены на материальные системы переменного состава. В дальнейшем В. С. Новоселов продолжал исследования по динамике систем переменного состава, развивая идеи И. В. Мещерского и Ю. А. Круткова в части анализа динамики системы тел [59] и гироскопических систем.

Развивая работы Н. Г. Четаева по динамике неголономных систем с нелинейными связями, В. С. Новоселов создал общий подход к проблеме варьирования обобщенных скоростей. Полученный им фундаментальный результат состоял в обобщении известного принципа Гамильтона—Остроградского. По этой теме в 1959 г. в Московском государственном университете им была защищена докторская диссертация.

Динамика вращательного движения твердого тела также присутствует в круге научных интересов В. С. Новоселова. В работе [60] автор развивает теорию гироскопа переменной массы. Используя подход своего учителя — Ю. А. Круткова к описанию вращения гироскопа, В. С. Новоселов выводит уравнения, обобщающие уравнения (16), (17) на гироскоп переменной массы, в котором допускается внутреннее движение частиц и выбрасывание их в окружающее пространство:

$$A\dot{\vec{v}} = C\omega_z \vec{k} \times \vec{v} - Av^2\vec{k} + h\vec{k} \times (\vec{k} \times m\vec{g}) - (\mu_1 + \nu_1 + \dot{A})\vec{v}, \tag{33}$$

$$C\dot{\omega}_z + (\mu_1 + \nu_1 + \dot{C})\omega_z = K. \tag{34}$$

Здесь $A, C, h, m, \mu_1, \mu_2, \nu_1, K$ — функции времени, которые могут быть определены экспериментально. Уравнение (34) интегрируется в квадратурах, а уравнение (33) имеет частное решение:

$$\vec{k} = \vec{a}, \qquad \vec{v} = \vec{0}, \tag{35}$$

где $\vec{a}$ — орт вертикальной оси. Для исследования устойчивости вертикального положения (35) выводятся уравнения первого приближения. Полагая $\vec{k} = \vec{a} + \vec{R}$, В. С. Новоселов вводит неподвижную систему координат $oxyz$, имеющую начало o в конце вектора $\vec{a}$. Оси ox и oy горизонтальны, а ось oz направлена вертикально вниз. С учетом равенства $\vec{v} = \dot{\vec{R}}$, в результате проектирования уравнения (33) на оси ox и oy, в первом приближении относительно координат x, y и их производных получены уравнения

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \beta\dot{y} + \alpha x, \\ \ddot{y} = \beta\dot{x} - \gamma\dot{y} + \alpha y, \end{cases} \tag{36}$$

где $\alpha = mgh/A, \beta = C\omega_z/A, \gamma = \mu_1 + \nu_1 + \dot{A}$ — некоторые ограниченные функции времени. Далее автор проводит подробный анализ дифференциальной системы (36), учитывая, что в силу равенства $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ из устойчивости по величинам x, y и их производным следует, что движение по направлению z также будет устойчивым. Таким образом, путем введения переменных x, y, z автор проанализировал случаи, в которых имеет место устойчивость вертикального положения гироскопа переменной массы по линейному приближению. В настоящее время переменные x, y, z, называемые также наблюдаемыми переменными, используются в различных задачах динамики твердого тела [61].

В 1961 г. проф. В. С. Новоселов был избран заведующим кафедрой теоретической астрономии, позднее переименованной в кафедру небесной механики. В 1962 г. он организовал семинар по прикладным задачам небесной механики и создал лабораторию динамики в НИИММ. Несомненный успех кафедры и лаборатории проявился в том, что за 7 лет было подготовлено 15 кандидатов наук и один доктор наук.

В 1969 г. был открыт новый факультет — прикладной математики — процессов управления (ПМ — ПУ). Проф. В. С. Новоселов активно участвовал в создании факультета и кафедры механики управляемого движения, которую возглавил. Вместе с ним перешли на ПМ — ПУ и все сотрудники лаборатории динамики НИИММ. Около 50 выпускников новой кафедры защитили кандидатские и 7 сотрудников — докторские диссертации. Активная творческая работа В. С. Новоселова, его учеников и сотрудников сопровождалась появлением большого количества публикаций.

В работах [62, 63] А. Ю. Львович и В. С. Новоселов применили методы динамики твердого тела к исследованию установившихся и неустановившихся колебаний подвижной части измерительного механизма прибора. В монографии [64] В. С. Новоселов ввел абстрактное понятие точки переменной массы. Это позволило учесть поверхностное изменение массы и внутреннее движение частиц, приводящих к созданию реактивных сил. В монографии [65] и в обширном цикле статей В. С. Новоселовым построена общая схема аналитического решения вариационных задач движения в гравитационном поле с приложениями к механике космического полета. Проф. В. С. Новоселов внес существенный вклад в развитие аналитической механики, космодинамики и других направлений науки [66, 67]. Им проводились теоретические и прикладные исследования по аналитическим и численным алгоритмам динамики управляемого движения, гамильтоновым системам, методам численного интегрирования, оптимизации в нелинейных задачах механики. Некоторые из этих исследований, имеющие приложения в динамике КА, будут рассмотрены в следующей части обзора.

Однако вернемся в 1969 г. в связи с созданием нового факультета. Основателем и деканом факультета ПМ — ПУ стал проф. В. И. Зубов (1930–2000). Замечательный русский ученый В. И. Зубов, слепой с 1944 г., отличался выдающимися способностями. В 1953 г. он окончил математико-механический факультет ЛГУ. С 1955 г. — кандидат физ.-мат. наук, с 1960 г. — доктор физ.-мат. наук, с 1963 г. — профессор.

В 1957 г. В. И. Зубов стал штатным сотрудником ракетного центра. Вместе с крупнейшими специалистами страны по ракетной динамике молодой ученый приступил к конструированию нового вида оружия. В 1957 г. вышла его первая книга [68], сразу же переведенная и изданная за границей. В Университете с 1955 по 1962 г. В. И. Зубов — старший научный сотрудник НИИММ, с 1962 г. — руководитель лаборатории теории управляющих устройств и механизмов. В 1967 г. на базе лаборатории была открыта кафедра теории управления математико-механического факультета Университета, которую возглавил проф. В. И. Зубов и которой руководил до конца жизни. В 1968 г. В. И. Зубов стал лауреатом Государственной премии СССР. В 1971 г. по инициативе В. И. Зубова был учрежден Институт вычислительной математики и процессов управления, функционировавший под его неформальным руководством. В 1981 г. В. И. Зубов избран чл.-корр. АН СССР.

Помимо решения задач управления техническими объектами и технологическими процессами, В. И. Зубов и сотрудники кафедры теории управления внесли большой вклад в решение задач стабилизации и управления вращательным движением твердого тела, имеющих принципиально важное значение для космодинамики. Лично В. И. Зубову принадлежат выдающиеся по своей значимости результаты в качественной теории дифференциальных уравнений, динамике твердого тела, теории оптимального управления, теории электромагнитных полей. Он руководил разработкой широкого круга вопросов, связанных с общей теорией управляемых систем (вопросы устойчивости движения, нелинейные колебания в управляемых системах, навигация и надежность управляющих устройств, теория колебаний и квантования орбит).

В частности, В. И. Зубов внес существенный вклад в динамику твердого тела, причем в те ее области, которые были тщательно исследованы знаменитыми предшественниками и в которых трудно было ожидать появления оригинальных результатов. В книгах [69–71] рассматриваются вопросы динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки по следующим трем направлениям:

1) полная теория движения твердого тела в случае Эйлера — Пуансо;

2) полная теория движения твердого тела в случае Лагранжа — Пуассона;

3) теория движения тяжелого твердого тела в общем случае в постоянном однородном поле силы тяжести.

Все три направления давно стали классическими и имеют соответствующие решения [12]. Однако и после появления основополагающих результатов они неизменно вызывали интерес у многих исследователей, как при жизни В. И. Зубова, так и после его кончины. Вплоть до настоящего времени продолжают появляться работы, посвященные поиску интегрируемых частных случаев в динамике твердого тела. В большинстве из них анализируются чисто умозрительные конструкции, практическая значимость которых не обсуждается. На фоне этих работ труды В. И. Зубова по классической механике твердого тела отличаются практической направленностью, с одной стороны, и изяществом математического подхода, с другой стороны.

По первому из вышеуказанных направлений В. И. Зубовым сделано следующее: выяснен качественный характер поведения решений и установлена их аналитическая природа. При этом В. И. Зубов уделяет внимание не столько чисто математическим вопросам, относящимся к теории существования и единственности решений, сколько останавливается на тех аспектах решений дифференциальных уравнений Эйлера, которые имеют отношение к практике управляемого вращательного движения тела. В частности, его интересует вопрос о качественном поведении оси собственного вращения тела. В. И. Зубов вводит понятие движения твердого тела, устойчивого по отношению к ориентации [70].

Определение. Тело движется устойчиво по отношению к ориентации, если его главная ось Oz остается во все время движения в полупространстве, ограниченном плоскостью, перпендикулярной вектору момента количества движения и проходящей через точку O.

В случае Эйлера — Пуансо дифференциальные уравнения (2) имеют вид

$$A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z = 0, \quad B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = 0, \quad C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y = 0. \quad (37)$$

В. И. Зубов доказал, что функции $v_1 = \gamma\omega_x^2 - \alpha\omega_z^2$, $v_2 = \gamma\omega_y^2 - \beta\omega_z^2$, где $\alpha = (C-B)/A$, $\beta = (A-C)/B$, $\gamma = (B-A)/C$, являются первыми интегралами системы уравнений (37). В терминах v_1 и v_2 он сформулировал следующую теорему [70].

Теорема. Тело устойчиво по отношению к ориентации тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $\alpha\beta < 0$, $v_1 v_2 \leqslant 0$.

Перейдем к рассмотрению второго из вышеуказанных направлений. В случае Лагранжа центр масс тела (точка G) имеет координаты $(0, 0, z_G)$. Движение такого динамически симметричного ($A = B$) твердого тела с массой m в постоянном однородном поле силы тяжести с напряженностью $\vec{g}$ описывается уравнениями

$$A\dot{\omega}_x + (C-A)\omega_y\omega_z = -mgz_G y, \quad A\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = mgz_G x, \quad C\dot{\omega}_z = 0, \quad (38)$$

$$\dot{x} = \omega_z y - \omega_y z, \quad \dot{y} = -\omega_z x + \omega_x z, \quad \dot{z} = \omega_y x - \omega_x y. \quad (39)$$

Для этого случая также найдены необходимые и достаточные условия устойчивости твердого тела по отношению к ориентации [70].

В. И. Зубов установил, что в случаях Эйлера и Лагранжа все движения твердого тела относительно неподвижной точки будут периодическими или почти периодическими, за исключением движений, лежащих на особом интегральном многообразии. Он определил точные границы нутационных колебаний оси собственного вращения динамически несимметричного твердого тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки. Более того, он нашел условия устойчивости и неустойчивости движений твердого тела по отношению к пространственной ориентации осей [70, 71].

По третьему направлению (задача о движении тяжелого твердого тела относительно неподвижной точки в однородном поле силы тяжести) были изучены уравнения (4). В. И. Зубов доказал, что любое вещественное решение дифференциальных уравнений Эйлера — Пуассона (38), (39) существует и голоморфно в полосе комплексной плоскости, симметричной относительно вещественной оси. Это решение можно преобразовать в ряд, сходящийся при всех t [70].

Также в виде ряда, сходящегося при всех t, В. И. Зубов получил решение задачи Дарбу об отыскании углового движения твердого тела по заданным начальным значениям ориентации и угловой скорости тела. Коэффициенты этого ряда определяются по рекуррентным формулам, что позволяет находить их численно [69, 70]. Установлены также необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Дарбу.

Таким образом, по всем трем вышеупомянутым направлениям классической теории динамики твердого тела, восходящей к Эйлеру и Пуансо, В. И. Зубов дал дополнения, нацеленные на аналитические и численные подходы к решению задач, имеющих практическое значение.

В работах В. И. Зубова и его научной группы (см. [72]) проведен полный анализ свободных движений гиростата и движений гиростата с постоянным внешним моментом. Дана классификация типов движений гиростата, а области значений конструктивных параметров и области начальных условий разделены на подобласти, соответствующие движениям только одного типа.

Кроме того, В. И. Зубов разработал новые методы управления ориентацией твердого тела с помощью маховиков и роторов, связанных с корпусом [72–74]. Эти методы основаны на нахождении движений несомых тел, создающих моменты переносных и кориолисовых сил инерции, обеспечивающие заданные движения несущего тела. Для класса таких задач были определены стационарные движения и исследована устойчивость этих движений. Более того, для тел с полостями, заполненными жидкостью, и тел с подвижными конструкциями были предложены оригинальные математические модели, основанные на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Для таких моделей были аналитически получены управления, обеспечивающие заданные вращательные движения носителя [72].

5. Заключение. Таким образом, в первые 250 лет истории Санкт-Петербургского университета динамика твердого тела постоянно привлекала внимание математиков и механиков, работавших в Университете, а круг задач, в котором этот раздел механики находил свои актуальные приложения, непрерывно расширялся, последовательно включая в себя небесную механику, баллистику, теорию гироскопических систем, динамику космических аппаратов. При этом процесс решения актуальных для своего времени прикладных задач сопровождался развитием известных и разработкой новых математических методов для решения соответствующих классов задач. О достижениях ученых Университета в последующие десятилетия его истории будет рассказано в последующих частях данной серии статей.

Литература

1. Любжин А. И. История русской школы императорской эпохи: в 3 т. Т. I. *Русская школа XVIII столетия.* Книга I. Москва, Никея (2014).

2. Герье В. *Лейбниц и его век.* Т. 2. Санкт-Петербург (1871).

3. Проект Черновой записки, составленной Лейбницем о введении образования в России. Сборник писем и мемориалов Лейбница, относящихся к России и Петру Великому. В. Герье (ред.). Санкт-Петербург, Типография Императорской Академии наук, 1873. (на нем. языке). (Русский перевод В. И. Герье в: Герье В. И. *Лейбниц и его век.* Санкт-Петербург, Наука, 2008).

4. Анри В. А. Роль Лейбница в создании научных школ в России. *Успехи физических наук* **169** (1999).

5. Вербицкая Л. А. (ред.) *Летопись 1724–1999. «275 лет. Санкт-Петербургский университет»*, 16–424. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).

6. Поляхова Е. Н. Классическая небесная механика в работах Петербургской школы математики и механики в XIX в. В: *Очерк истории научного наследия.* Санкт-Петербург, Нестор-История (2013).

7. Эйлер Л. *Теория движения твердых тел* (1765).

8. Эйлер Л. *Новый метод определения движения твердых тел.* Opera omnia II, 9 (1776).

9. Truesdell C. *Essays in the History of Mechanics.* Berlin e. a., Springer-Verlag (1968).

10. Сомов И. И. *Основания теории эллиптических функций.* Санкт-Петербург, Тип. Императорской Академии наук (1850).

11. Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. *Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии* **8** (2), 21–25 (1896).

12. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. *Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние.* Киев, Наукова думка (1978).

13. Ляпунов А. М. *Собрание сочинений.* Т. 1. Москва, Изд-во АН СССР (1954).

14. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи)*, Ленинград; Москва, ОНТИ (1935).

15. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. В: *Сообщение Харьковского Математического об-ва* (сер. 1, т. 1) **1–2**, 7–60. Харьков (1888).

16. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости. В: *Сообщение Харьковского Математического общества* (сер. 1, т. IV) **1–2**, 81–85. Харьков (1895).

17. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, Тип. А. Дарре (1893).

18. Ляпунов А. М. *Работы по теоретической механике. Из рукописного наследия* 1882–1894 гг. Москва, Ижевск, НИЦ «РХД» (2010).

19. Борисов А. В., Козлов В. В., Мамаев И. С. Асимптотическая устойчивость и родственные задачи динамики падающего тяжелого твердого тела. *Нелинейная динамика* **3** (3), 255–296 (2007).

20. Борисов А. В., Газизуллина Л. А., Мамаев И. С. О наследии В. А. Стеклова по классической механике. *Нелинейная динамика* **7** (2), 389–403 (2011).

21. Суслов Г. К. *Основы аналитической механики. Т. 1.* Киев, Императорский университет (1900).

22. Суслов Г. К. *Основы аналитической механики. Т. 2.* Киев, Императорский университет (1902).

23. Суслов Г. К. *Теоретическая механика*, 3-е изд., посм., Н. Н. Бухгольц и В. К. Гольцман (ред.). Москва; Ленинград, ОГИЗ (1946).

24. Mestschersky I. V. Ein Spezielfall des Gylden'schen Probleme. *Astronomische Nachrichten* Bd. 132, no. 3153, S. 129–130 (1893).

25. Мещерский И. В. *Динамика точки переменной массы: рассуждение.* Т. VIII. Санкт-Петербург, Тип. Императорской Академии наук (1897).

26. Мещерский И. В. Уравнения движения точки переменной массы в общем случае. В: *Известия Санкт-Петербургского политехнического института* = (Annales de l'Institute polytechnique de St. Petersbourg) **1** (1–4), 77–118. Санкт-Петербург (1904).

27. Космодемьянский А. А. Иван Всеволодович Мещерский. В: *Люди русской науки. Т. 1.* Москва, Ленинград, ОГИЗ (1948).

28. Макеев Н. Н. Создатель теории реактивного движения. I. *Вестник Пермского университета, Математика. Механика. Информатика* **3** (26), 98–105 (2014).

29. Мещерский И. В. *О вращении тяжелого твердого тела с развертывающейся тяжелой нитью около горизонтальной оси.* Санкт-Петербург (1899).

30. Мещерский И. В. Дифференциальные уравнения движения жироскопического вагона однорельсовой железной дороги: [Отд. отт.] Петроград, 133–162 (1921). В: *Проект однорельсовой жироскопической железной дороги Петроград — Гатчино системы П. П. Шиловского.* ВСНХ, Комиссия по сооружению однорельсовой жироскопической железной дороги. Петроград, Государственное издательство (1922).

31. Колосов Гурий Васильевич (1864–1936). URL: https://bioslovhist.spbu.ru/person/717-kolosov-guriy-vasil-yevich.html (дата обращения: 12.03.2023). (In Russian)

32. Мусхелишвили Н. И. Гурий Васильевич Колосов (некролог). *Успехи математических наук* **4**, 279–281 (1938)

33. Колосов Г. В. *Об одном свойстве задачи С. В. Ковалевской о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки.* Москва, Тип. Н. Н. Шарапова (1901).

34. Kolossoff G. Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe. *Rend. Circ. Matem. Palermo* **16**, 346–348 (1902).

35. Колосов Г. В. *О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела.* Санкт-Петербург, Тип. Ю. Н. Эрлих (1903).

36. Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела.* Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» (2001).

37. Колосов Г. В. Заметка о движении твердого тела в несжимаемой жидкости в случаях В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. *Известия Российской академии наук* **13**, 711–716 (1919).

38. Крылов А. Н., Крутков Ю. А. *Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений.* Ленинград, Изд-во Акад. наук СССР (1932).

39. Крутков Ю. А. Об уравнениях движения «вершины» волчка. I. *Известия Академии наук СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук* **4**, 489–502 (1932).

40. Крутков Ю. А. Об уравнениях движения «вершины» волчка. II. *Известия Академии наук СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук* **5**, 659–662 (1933).

41. Foeppl A. Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektorenrechnung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **48**, 272–284 (1903).

42. Николаи Е. Л. *Гироскоп и некоторые его технические применения в общедоступном изложении.* Москва; Ленинград, Гостехиздат (1947).

43. Николаи Е. Л. *Теория гироскопов.* Москва, Ленинград, ОГИЗ ГИТТЛ (1948).

44. Окунев Б. Н. *Основы баллистики. Т. I. Кн. I, II. Основная задача внешней баллистики.* Москва, Военное издательство народного комиссариата обороны (1943).

45. Окунев Б. Н. Свободное движение гироскопа. Москва; Ленинград, Гостехиздат (1951).

46. Кузнецов Л. И. *Изучение движения некоторой массы по отношению к снаряду на начальном участке траектории его центра тяжести*: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Лениградский государственный университет (1955).

47. Горшков П. М. Очерки по истории астрономии в Петербургском — Ленинградском университете. *Ученые записки ЛГУ. Сер. матем.* **385** (32), 194–199 (1976).

48. Кузнецов Л. И. О движении гироскопа в сопротивляющейся среде с учетом трения в подвесе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 151–155 (1958).

49. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. *Прикладная математика и механика* 1 **8** (1), 123–124 (1954).

50. Заболотнов Ю. М., Лобанков А. А. Синтез регулятора для стабилизации движения твердого тела вокруг неподвижной точки. *Известия РАН. Механика твердого тела* **3**, 59–71 (2017).

51. Кузнецов Л. И. О вычислении амплитуд вынужденных колебаний одной системы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 150–158 (1959).

52. Кузнецов Л. И. Оценка решений уравнений движения гироскопических систем. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 105–111 (1959).

53. Кузнецов Л. И. Об уравнениях процессионной теории гироскопов. *Ученые записки ЛГУ. Сер. Математические науки* **35** (280), 25–30 (1960).

54. Кузнецов Л. И. О применении метода Бубнова — Галеркина в теории нелинейных колебаний. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 79–85 (1962).

55. Кузнецов Л. И. О приближенном исследовании колебаний квазилинейных систем с одной степенью свободы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 42–50 (1964).

56. Кузнецов Л. И. Об оценке основной частоты колебаний стержня переменного сечения. *Исследования по упругости и пластичности.* Сб. 4, 166–169. Ленинград, Изд-во ЛГУ (1965).

57. Кузнецов Л. И. К вопросу о применении метода последовательных приближений для нахождений первой собственной частоты колебаний стержня. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 81–85(1966).

58. Кузнецов Л. И. О комбинации метода приведения с методом последовательных приближений в задаче о вынужденных колебаниях стержня переменного сечения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 83–87 (1967).

59. Новоселов В. С. К задаче о движении двух тел с переменными массами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 129–131 (1957).

60. Новоселов В. С. Исследование устойчивости вертикального положения гироскопа переменной массы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 121–129 (1959).

61. Журавлев В. Ф., Петров А. Г. О волчке Лагранжа и маятнике Фуко в наблюдаемых переменных. *Доклады Академии наук* **454** (2), 168–172 (2014).

62. Новоселов В. С., Львович А. Ю. Колебания подвижной части измерительного механизма прибора. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 124–130 (1967).

63. Новоселов В. С., Львович А. Ю. Неустановившиеся колебания подвижной части измерительного механизма прибора. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 102–105 (1968).

64. Новоселов В. С. *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1969).

65. Новоселов В. С. *Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях.* Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1972).

66. Алферов Г. В., Королев В. С. Классик российской науки механики управляемых систем. *Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр.* **48**, 6–17 (2016).

67. Памяти Виктора Сергеевича Новоселова. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 3, 523–524 (2019).

68. Зубов В. И. *Методы А. М. Ляпунова и их применение.* Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1957).

69. Зубов В. И., Ермолин В. С., Иголкин В. Н. *Динамика свободного твердого тела и определение его ориентации в пространстве.* Чернецкий В. И. (ред.), Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1968).

70. Зубов В. И. *Аналитическая динамика гироскопических систем.* Ленинград, Судостроение (1970).

71. Зубов В. И. *Аналитическая динамика системы тел.* Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1983).

72. Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я. *Управление вращательным движением твердого тела*, под ред. Ю. З. Алешкова. Ленинград, Изд-во Ленинградского ун-та (1978).

73. Зубов В. И. Об активном управлении вращательным движением твердого тела. *Дифференциальные уравнения* **6** (11) 2086–2087 (1970).

74. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* Москва, Наука (1975).

Статья поступила в редакцию 5 января 2023 г.;
доработана 12 февраля 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 1

A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 457–486. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303 (In Russian)

This survey, which consists of several articles, is dedicated to the 300$^{\text{th}}$ anniversary of Saint Petersburg State University (SPbSU) and is an attempt to analyze the scientific achievements of the Saint Petersburg School of Mathematics and Mechanics in the field of rigid body dynamics. This article, which is the first part of the survey, covers the main achievements of the period from the founding of SPbSU to the mid-1970s. Due to the anniversary nature of this work, the scientific results obtained at SPbSU are considered in the context of events inextricably linked with the founding of the Academy of Sciences, the University and the gymnasium in 1724 and their further development over the next 250 years. Due to the impossibility to cover even briefly all the publications that appeared during this period, attention is focused on the most important general areas of scientific thought and on those outstanding scientists of SPbSU, whose works enriched these areas.

Keywords: rigid body, dynamics, attitude motion, celestial mechanics, ballistics, gyroscopic instruments.

References

1. Lyubzhin A. I. *Istoriia russkoi shkoly imperatorskoi epokhi: In: 3 vols, vol. 1. Russkaia shkola XVIII stoletiia. Kniga 1.* Nikeia Publ., Moscow (2014). (In Russian) [Engl. transl.: Lyubzhin A. I. *History of the Russian school of the imperial era: in 3 volumes. Vol. 1. Russian school of the 18^{th} century. Book 1.* Moscow, Nicaea Publ. (2014)].

2. Ger'ye V. *Leibniz and his century.* Vol. 2. St. Petersburg (1871). (In Russian)

3. *Proyekt Chernovoy zapiski sostavlennoy Leybnitsem o vvedenii obrazovaniya v Rossii*: sbornik pisem i memorialov Leybnitsa otnosyashchikhsya k Rossii i Petru Velikomu. Izdal V. Ger'ye. Tipografiia Imperatorskoi Akademii nauk, St. Petersburg (1873). (In Russian) [Engl. transl.: Draft note compiled by Leibniz on the introduction of education in Russia. In: *Collection of Leibniz's letters and memorials relating to Russia and Peter the Great.* Published by V. Guerrier. Printing House of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg (1873). (In German). Russian translation by V. I. Guerrier in the book: Guerrier V. I. *Leibniz and his age.* St. Petersburg, Nauka Publ. (2008)].

4. Henri V. A. The role of Leibniz in the creation of scientific schools in Russia. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **169** (1999). (In Russian)

5. Verbitskaya L. A. (ed.) *Chronicle 1724–1999.* "*275 years. St. Petersburg University*". St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)

6. Polyakhova E. N. *Classical celestial mechanics in the works of the St. Petersburg School of Mathematics and Mechanics in the 19^{th} century. Essay on the history of scientific heritage.* St. Petersburg, Nestor-History Publ. (2013). (In Russian)

7. Euler L. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accommodata.* Rostochii et Gryphiswaldiae: Litteris et Impensis A. F. Rose (1765).

8. Euler L. Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop. *Opera omnia* II, 9 (1776).

9. Truesdell C. *Essays in the History of Mechanics.* Berlin e. a., Springer-Verlag (1968).

10. Somov I. I. *Foundations of the theory of elliptic functions.* St. Petersburg. Imperial Academy of Sciences Press Publ. (1850). (In Russian)

11. Bobylev D. K. On one particular solution of differential equations of rotation of a heavy rigid body around a fixed point. *Tr. otd. fiz. nauk obshch-va liubitelei estestvoznaniia, antropologii i etnografii* **8** (2), 21–25 (1896). (In Russian)

12. Gorr G. V., Kudryashova L. V., Stepanova L. A. *Classical problems of rigid body dynamics. Development and current state.* Kyiv. Naukova Dumka Publ. (1978). (In Russian)

13. Lyapunov A. M. *Collected works.* Vol. 1. Moscow, Academy of Sciences Publ. (1954). (In Russian)

14. Lyapunov A. M. *The general problem of motion stability (dissertation and articles).* Moscow; Leningrad, ONTI Publ. (1935). (In Russian)

15. Lyapunov A. M. On constant helical motions of a rigid body in a liquid. In: *Repost of the Kharkiv Mathematical Society* (ser. 1, vol. 1) **1–2**, 7–60 (1888). (In Russian)

16. Lyapunov A. M. A new case of integrability of the equations of motion of a rigid body in a fluid. In: *Repost of the Kharkiv Mathematical Society* (ser. 1, vol. 4) **1–2**, 81–85 (1895). (In Russian)

17. Steklov V. A. On the motion of a solid body in a liquid. Khar'kov, Tip. A. Darre Publ. (1893). (In Russian)

18. Lyapunov A. M. *Works on theoretical mechanics. From the manuscript heritage of 1882–1894.* Moscow; Izhevsk, NITs "RHD" Publ. (2010). (In Russian)

19. Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body. *Nonlinear Dynamics* **3** (3), 255–296 (2007). (In Russian)

20. Borisov A. V., Gazizullina L., Mamaev I. S. On V. A. Steklov's legacy in classical mechanics. *Nonlinear Dynamics* **7** (2), 389–403 (2011). (In Russian)

21. Suslov G. K. *Fundamentals of Analytical Mechanics.* Vol. 1. Kyiv, Imp. un-t Publ. (1900). (In Russian)

22. Suslov G. K. *Fundamentals of Analytical Mechanics.* Vol. 2. Kyiv, Imp. un-t Publ. (1902). (In Russian)

23. Suslov G. K. *Theoretical mechanics.* Ed. 3^{rd} posthumous. N. N. Buchholz, V. K. Holtzman (ed.). Moscow; Leningrad, OGIZ Publ. (1946). (In Russian)

24. Meshchersky I. V. Ein Spezielfall des Gylden'schen Probleme *Astronomische Nachrichten.* Bd. 132, no. 3153, 129–130 (1893).

25. Meshchersky I. V. *Dynamics of a point of variable mass: reasoning.* St. Petersburg, Type. Imperial Academy of Sciences Publ. (1897). (In Russian)

26. Meshchersky I. V. Equations of motion of a variable mass point in the general case. *Annales de l'Institute polytechnique de St. Petersbourg.* Vol. 1. Iss. 1–4, 77–118 (1904).

27. Kosmodemyansky A. A. Ivan Vsevolodovich Meshchersky. In: *People of Russian science*. Vol. 1. Moscow; Leningrad, OGIZ Publ. (1948). (In Russian)

28. Makeyev N. N. The founder of a theory jet motion. 1. (to the 155-years from the birthday of I. V. Meshcherskiy). *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science.* **3** (26), 98–105 (2014). (In Russian)

29. Meshchersky I. V. *On the rotation of a heavy rigid body with a developing heavy thread about a horizontal axis.* St. Petersburg (1899). (In Russian)

30. Meshchersky I. V. Differential equations of motion of a gyroscopic wagon of a single-rail railway: [Depart. ott.] Petrograd, 133–162 (1921). In: *The project of a single-rail gyroscopic railway Petrograd — Gatchino of the P. P. Shilovsky. Supreme Economic Council, Commission for the construction of a single-rail gyroscopic railway.* Petrograd, State House Publ. (1922). (In Russian)

31. Kolosov Gury Vasilievich (1867–1936) Available at: https://bioslovhist.spbu.ru/person/717-kolosov-guriy-vasil-yevich.html (accessed: March 12, 2023). (In Russian)

32. Muskhelishvili N. I. Gury Vasilyevich Kolosov (obituary). *Russian Mathematical Surveys* **4**, 279–281 (1938). (In Russian)

33. Kolosov G. V. *On one property of the problem of S. V. Kovalevskaya on the rotation of a heavy body around a fixed point.* Moscow, Tip. N. N. Sharapova (1901). (In Russian)

34. Kolossoff G. Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe. *Rend. Circ. Matem. Palermo* **16**, 346–348 (1902).

35. Kolosov G. V. *On some modifications of Hamilton's principle as applied to the solution of problems of solid mechanics.* St. Petersburg, Tip. Iu. N. Erlikh Publ. (1903). (In Russian)

36. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Rigid Body Dynamics.* Izhevsk, Research Center "Regular and Chaotic Dynamics" Publ. (2001). (In Russian)

37. Kolosov G. V. A note on the motion of a rigid body in an incompressible fluid in the cases of V. A. Steklov and A. M. Lyapunov. *Ros. Acad. nauk* Publ. **13**, 711–716 (1919). (In Russian)

38. Krylov A. N., Krutkov Yu. A. *General theory of gyroscopes and some of their technical applications.* St. Petersburg, Akademiia nauk Publ. (1932). (In Russian)

39. Krutkov Yu. A. On the equations of motion of the top "vertex". I. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Ser. 7. Department of Mathematical and Natural Sciences* **4**, 489–502 (1932). (In Russian)

40. Krutkov Yu. A. On the equations of motion of the top «vertex». II. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. VII series. Department of Mathematical and Natural Sciences* **5**, 659–662 (1933). (In Russian)

41. Foeppl A. Lösung des Kreiselproblems mit Hilfe der Vektorenrechnung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* **48**, 272–284 (1903).

42. Nikolai E. L. *Gyroscope and some of its technical applications in a public presentation.* Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ. (1947). (In Russian)

43. Nikolai E. L. *Theory of gyroscopes.* Moscow; Leningrad OGIZ GITTL Publ. (1948). (In Russian)

44. Okunev B. N. *Fundamentals of ballistics. Vol. I. Book one and two. The main task of external ballistics.* Moscow. Military publishing house of the People's Commissariat of Defense (1943). (In Russian)

45. Okunev B. N. *Free motion of the gyroscope.* Moscow; Leningrad; Gostekhizdat Publ., (1951). (In Russian)

46. Kuznetsov L. I. *The study of the motion of a certain mass in relation to the projectile in the initial section of the trajectory of its center of gravity*: PhD. ... in Physic. and Math. Leningrad State University (1955). (In Russian)

47. Gorshkov P. M. Essays on the history of astronomy at the St. Petersburg — Leningrad University. *Uchenye zapiski Leningrad State University. Ser. Math. Sciences* **385** (32), 194–199 (1976). (In Russian)

48. Kuznetsov L. I. On the motion of a gyroscope in a resisting medium, taking into account friction in the suspension. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 151–155 (1958). (In Russian)

49. Chetaev N. G. On the stability of rotation of a rigid body with one fixed point in the Lagrange case. *J. Appl. Math. Mech.* **18** (1), 123–124 (1954). (In Russian)

50. Zabolotnov Iu. M., Lobankov A. A. Synthesis of a regulator to stabilize the movement of a solid body around a fixed point. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* **3**, 59–71 (2017) (In Russian) [Eng. transl.: *Mechanics of Solids.* **52**, No. 3, 278–288 (2017). https://doi.org/10.3103/S0025654417030050].

51. Kuznetsov L. I. On the calculation of the amplitudes of forced oscillations of one system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 150–158 (1959). (In Russian)

52. Kuznetsov L. I. Estimation for solutions of the equations of motion of gyroscopic systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 105–111 (1959). (In Russian)

53. Kuznetsov L. I. On the equations of the processional theory of gyroscopes. *Uchenye zapiski of Leningrad State University* **280** *(Ser. Mathematical Sciences. iss. 35)*, 25–30 (1960). (In Russian)

54. Kuznetsov L. I. On the application of the Bubnov — Galerkin method in the theory of nonlinear oscillations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 79–85. (1962).

55. Kuznetsov L. I. On an Approximate Study of Oscillations of Quasilinear Systems with One Degree of Freedom. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 42–50 (1964). (In Russian)

56. Kuznetsov L. I. On the estimation of the fundamental frequency of vibrations of a rod with a variable cross section. *Studies in elasticity and plasticity*, vol. 4. Leningrad, Leningrad University Press, 166–169 (1965). (In Russian)

57. Kuznetsov L. I. On the application of the method of successive approximations for finding the first natural frequency of the rod vibrations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 81–85 (1966). (In Russian)

58. Kuznetsov L. I. On the combination of the reduction method with the method of successive approximations in the problem of forced vibrations of a bar with variable cross section. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 83–87 (1967). (In Russian)

59. Novoselov V. S. On the problem of the motion of two bodies with variable masses. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 129–131 (1957). (In Russian)

60. Novoselov V. S. Investigation of the stability of the vertical position of a variable mass gyroscope. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 121–129 (1959). (In Russian)

61. Zhuravlev V. F., Petrov A. G. On the Lagrange top and the Foucault pendulum in the observed variables. *Reports of the Academy of Sciences* **454** (2), 168–172 (2014). (In Russian)

62. Novoselov V. S., Lvovich A. Yu. Oscillations of the moving part of the measuring mechanism of the device. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 124–130 (1967). (In Russian)

63. Novoselov V. S., Lvovich A. Yu. Unsteady vibrations of the movable part of the measuring mechanism of the device. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 102–105 (1968). (In Russian)

64. Novoselov V. S. *Analytical mechanics of systems with variable masses*. Leningrad, Leningrad University Press (1969). (In Russian)

65. Novoselov V. S. *Analytical theory of optimization in gravitational fields*. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

66. Alferov G. V., Korolev V. S. Classic of the Russian science of mechanics of controlled systems. *Problems of mechanics and control. Nonlinear dynamic systems: interuniversity collection of scientific works*. iss. 48, 6–17 (2016). (In Russian)

67. In memory of Viktor Sergeevich Novoselov. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 3, 523–524 (2019). (In Russian)

68. Zubov V. I. *Methods by A. M. Lyapunov and their application*. Leningrad, Leningrad University Press (1957). (In Russian)

69. Zubov V. I., Ermolin V. S., Igolkin V. N. *Dynamics of a free rigid body and determination of its orientation in space*. Chernetsky V. I. (ed.) Leningrad, Leningrad University Press (1968). (In Russian)

70. Zubov V. I. *Analytical dynamics of gyroscopic systems*. Leningrad, Sudostroenie Publ. (1970). (In Russian)

71. Zubov V. I. *Analytical dynamics of the material system*. Leningrad, Leningrad State University (1983). (In Russian)

72. Zubov V. I., Ermolin V. S., Sergeev S. L., Smirnov E. Ya. *Control of rotational motion of a rigid body*. Aleshkov Yu. Z. (ed.) Leningrad, Leningrad State University (1978). (In Russian)

73. Zubov V. I. On the active control of the rotational motion of a rigid body. *Differ. equations* **6** (11), 2086–2087 (1970).

74. Zubov V. I. *Lectures on control theory*. Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)

Received: January 5, 2023
Revised: February 12, 2023
Accepted: February 16, 2023

Author's information:

Aleksey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru