К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 512.6, 512.7, 512.8
MSC 01, 08, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22

Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория*

Н. А. Вавилов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Вавилов Н. А.* Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 381–405. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301

Настоящий обзор описывает вклад петербургских математиков в теорию линейных, классических и алгебраических групп. Первая часть посвящена предыстории исследований по теории линейных групп в Петербурге, генезису петербургских алгебраических школ Тартаковского и Фаддеева и общей характеризации работ Боревича и Суслина середины 1970-х гг., с которых начались систематические исследования в области теории классических групп и алгебраической K-теории в Петербурге.

Ключевые слова: линейные группы, классические группы, алгебраические группы, группы Шевалле, алгебраическая K-теория.

Посвящается 100-летию моего учителя
Зенона Ивановича Боревича

В своей статье «У нас была великая эпоха» Алексей Николаевич Паршин сказал: «...главное, что было в советской математике — это **школы**. Школа — это сообщество людей, которые занимаются одной областью науки, тесно общаются друг с другом, имеют лидера-учителя, одни поколения передают другим поколе-

*Исследования, отраженные в дальнейших частях этого обзора, были поддержаны большим количеством грантов и проектов, среди которых следует особо упомянуть закончившиеся: 1) проект РНФ 14-11-00335 «Разложение унипотентов в редуктивных группах», 2) проект РНФ «Расщепимые редуктивные группы над кольцами и близкие к ним» и текущие: 3) проект фонда «Базис» 20-7-1-27-1 «Высшие символы в алгебраической K-теории», 4) проект РНФ 22-21-00257 «Алгебраические группы над кольцами и группы Стейнберга».

ниям непрерывную эстафету, и все это образует целостный организм» [1]. Алексей Николаевич писал это о Москве, но, разумеется, это *по крайней мере* в той же степени применимо и к Санкт-Петербургу.

Генетически алгебра в Петербурге возникла из теории чисел и довольно долго развивалась именно как *часть* теории чисел, *под огромным влиянием* теории чисел, или *для приложений* в теории чисел. Первыми собственно алгебраическими школами, возникшими в нашем городе, были школа Тартаковского (которая, к *огромному* сожалению, не продолжилась) и школа Фаддеева, от которой и произошла основная часть сегодняшней петербургской алгебры.

Тем не менее до второй половины 1970-х годов даже те из учеников Фаддеева, кто потом занимался чистой алгеброй, защищали докторские диссертации по тематике, связанной с теорией чисел (алгебраическая теория чисел, теория Галуа, локальные поля, арифметическая алгебраическая геометрия...). В конечном счете даже исследования по гомологической алгебре и теории целочисленных представлений были изначально мотивированы именно приложениями в алгебраической теории чисел (обратная задача теории Галуа, задача погружения и т. д.)[1].

Однако во второй половине 1970-х годов тематика школы *невероятно* расширилась, включив в себя новую на тот момент алгебраическую K-теорию, алгебраическую теорию квадратичных форм, теорию линейных групп — и вскоре теорию классических групп, теорию алгебраических групп — изначально групп Шевалле, потом и более общих классов редуктивных групп и групповых схем, причем как *классических*, так и в особенности *исключительных* — конечные группы, комбинаторную теорию групп, алгебры Ли, и в последние годы теорию мотивов, теорию неассоциативных алгебр, теорию однородных пространств и т. д. Вплоть до того, что сегодня именно эти направления воспринимаются как точка силы петербургской алгебраической школы, где она занимает лидирующие позиции в мире.

Огромную роль в этом переходе сыграли два человека — Зенон Иванович Боревич и Андрей Александрович Суслин. В настоящем обзоре мы обсуждаем *ранние* работы Андрея Суслина, посвященные классической K-теории, работы Зенона Ивановича Боревича, посвященные описанию подгрупп в классических группах над кольцами, направление в структурной теории, которое возникло в результате совмещения двух этих крупных продвижений, и дальнейшие приложения в арифметической теории и геометрии алгебраических групп, теории конечных групп типа Ли, комбинаторной и асимптотической теории групп, которые явились следствием этого.

Ранние работы Андрея Суслина выпукло представлены в его обзорах того времени [2–4]. Обсуждению структурных теорем для групп Шевалле посвящен мой обзор [5], а для классических групп (в связи с работами Энтони Бака, но в более широком контексте) — наш совместный обзор с Рузби Хазратом [6]. Расположению подгрупп в классических группах и группах Шевалле посвящены мои обзоры [7–9], наш обзор с Лешей Степановым [10] и с точки зрения абстрактной теории групп — обзор самого Боревича и Курта Розенбаума [11].

[1]Вот спецкурсы, которые фигурируют в моем дипломе 1974 года: «Теория полей классов», «Адели и алгебраические группы», «Коммутативная алгебра», «Теория Г-расширений». Вот, для разнообразия, типичные названия спецкурсов по кафедре высшей алгебры и теории чисел, которые я слушал, но не сдавал: «Теория Галуа колец», «Целочисленные представления», «Модулярные формы», «Квадратичные поля», «Арифметическая теория квадратичных форм». ... Ясно, что это подготовка именно специалиста по алгебраической теории чисел, а не алгебраиста в каком-либо общем понимании.

Однако все эти тексты упоминают огромное количество деталей, интересных только специалисту, требуют технических пререквизитов различной степени серьезности, содержат (слишком!) детальные библиографии. Цель настоящего текста совершенно в другом:

• описать общий идейный и исторический контекст этого развития и дать возможность любому математику, независимо от специальности, ощутить дух этого направления и стилистику нескольких центральных результатов;

• задокументировать state-of-the-art и привлечь внимание специалистов к нескольким ключевым моментам, которые *полностью* сохраняют свою актуальность. Многие *центральные* задачи теории, оставшиеся нерешенными тогда, находятся в том же состоянии и сегодня, спустя 40 лет[2].

По техническим причинам обзор разбит на четыре части. Часть I общая, здесь мы обсуждаем предысторию и генезис нашей школы. Часть II посвящена пионерским работам Андрея Суслина и его учеников 1974–1982 гг. по структурной теории классических групп над кольцами и их роли в формировании общего контекста этой области. В части III обсуждаются работы Зенона Ивановича Боревича и его учеников того же периода, посвященные расположению подгрупп в классических группах и близким вопросам. Наконец, в части IV совсем конспективно обрисовывается последующее развитие и формулируются *некоторые* наиболее яркие результаты в этой области, полученные в Петербурге в последние десятилетия.

1. Предыстория. Разумеется, большинство вещей, не исключая и теорию линейных групп, существуют — или предсуществуют? — задолго до того, как начинают восприниматься как отдельные сущности и получают имя: «What's in a name? That which we call a rose by any other name would smell as sweet».

1.1. Углы Эйлера. Слегка перефразируя знаменитый диктум, можно утверждать, что «except the blind forces of Nature, nothing moves in this world which is not suggested by Euler». В любом случае это верно по отношению к математике в Санкт-Петербурге.

Среди прочего, Леонарду Эйлеру (1707–1783) принадлежит множество результатов, которые *с современной точки зрения* относятся к линейным группам. Например, **теорема Эйлера** о классах сопряженности компактной формы специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ и построенная им в 1776 г. **факторизация** $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ как трех копий $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ — то, что механики, астрономы и авиаторы называют **углами Эйлера** [13].

В авиации эти углы известны как **крен** = **roll** ψ, **тангаж** = **pitch** θ и **рыскание** = **yaw** φ и соответствуют возможности представить любой элемент $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ как произведение

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

[2] Например, результат Суслина и Туленбаева 1976 г. [12] об инъективной стабилизации функтора K_2 не перенесен до сих пор в полном объеме *ни на одну другую группу*!

Впрочем, в астрономии и космонавтике предпочитают пользоваться факторизацией

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тем, что называется *классическими* углами Эйлера. Ясно, что с *математической* точки зрения это различие не имеет большого значения.

С топологической точки зрения группа $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ устроена как *трехмерное вещественное проективное пространство* $\mathbb{P}^3$. Разумеется, как алгебраисту мне гораздо приятнее иметь дело не с классической механикой, а с квантовой и, таким образом, не с самой этой группой, а с ее односвязной накрывающей $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$, которая топологически устроена как *трехмерная сфера* $\mathbb{S}^3$:

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid z\overline{z}+w\overline{w}=1\} = \left\{ g = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z,w\in\mathbb{C}, \det(g)=1 \right\},$$

и которую естественнее всего истолковывать как мультипликативную группу кватернионов нормы 1. (Напомним, что в связи с задачей Диофанта о представлении натуральных чисел суммами четырех квадратов Эйлер определил умножение кватернионов еще в 1748 г., примерно за век до Гамильтона. Но реализацию кватернионов как комплексных 2×2 матриц все же предложил только Кэли в 1843 г.)

Параметризацию группы $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ в терминах [классических] углов Эйлера (φ,θ,ψ) можно теперь записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix},$$

что и выглядит проще и эффективнее с вычислительной точки зрения. (Двойка в знаменателе введена для согласованности с определением углов Эйлера в классической механике и появляется из-за двулистности накрытия $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.)

1.2. Решетка Коркина — Золотарёва. Одним из самых замечательных открытий Коркина — Золотарёва было построение ими в 1873 г. (в связи с задачей Эрмита о минимумах квадратичных форм) решетки типа E_8 — плотнейшей решеточной упаковки шаров в 8-мерном пространстве, в которой каждого шара касаются 240 шаров того же диаметра (см. [14][3] и современное изложение в [16, 17][4]). Любопытно, что спустя век это стало одной из центральных тем всей петербургской алгебры. Уже в XX веке работы Коркина и Золотарёва были блистательно продолжены Борисом Борисовичем Венковым [20] и т. д.

Существование экстремальной решетки такой плотности в размерности 8 было предсказано ирландским математиком Генри Смитом в 1867 г. [21]. Много позже,

[3]Русские переводы всех работ Коркина и Золотарёва можно найти в полном Собрании сочинений Золотарёва [15], опубликованном в 1931–1932 гг. под редакцией Б. А. Венкова, Я. В. Успенского и Н. Г. Чеботарёва, с комментариями Б. Н. Делоне, В. А. Тартаковского и Н. И. Ахиезера. Во втором томе воспроизведена также очаровательная переписка Коркина и Золотарёва, из которой видно, как возникали эти результаты. Кроме того, там содержится множество забавных бытовых, исторических и общекультурных наблюдений об условиях жизни ученых, интересных и сегодня: «Вы справедливо говорите, что в Берлине много мазуриков, даже в ресторанах обсчитывают».

[4]Картинку взаимного расположения 120 из этих шаров, лежащих в положительном полупространстве, можно найти, например, в [18] или в моих работах [5, 19].

уже в связи с построением полуправильных многогранников, она возникла у Торольда Госсета [22] и поэтому в англоязычной литературе часто называется **решеткой Госсета**. Апостериори в интерпретации Гарольда Кокстера [23] решетка Коркина — Золотарёва — это в точности решетка **целых октав Кэли** (см. [17]).

Сегодня E_8, разумеется, проще всего представлять себе как **решетку корней** = **решетку весов** $Q(\mathrm{E}_8) = P(\mathrm{E}_8)$ системы корней типа E_8 [24]. (Соответствующие решетки корней $Q(\mathrm{E}_6)$ и $Q(\mathrm{E}_7)$ в пространствах размерностей 6 и 7 не являются унимодулярными и имеют индекс 3 и 2 соответственно в двойственных решетках весов $P(\mathrm{E}_6)$ и $P(\mathrm{E}_7)$).

Воспроизведем замечательную конструкцию этой решетки из книги Юрия Ивановича Манина [25]. Все коэффициенты здесь целые, поэтому эта реализация E_8 много удобнее для любых серьезных вычислений, чем обычная полуцелая реализация в терминах полуспиноров для D_8, см. [24].

Рассмотрим пространство Минковского $U = \mathbb{R}^{8,1}$, т. е. 9-мерное вещественное векторное пространство с невырожденным симметрическим скалярным произведением $(\ ,\ )\colon U \times U \to \mathbb{R}$ сигнатуры $(8,1)$. Зафиксируем в нем ортонормированный базис $e_0, e_1, \ldots, e_8$ такой, что

$$(e_0, e_0) = -1, \qquad (e_i, e_i) = 1, \quad \text{для всех} \quad 1 \le i \le 8.$$

Обозначим через $L \le \mathbb{R}^{8,1}$ решетку, состоящую из всех векторов $v \in \mathbb{R}^{8,1}$, все координаты которых $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8$ в разложении по базису $e_0, e_1, \ldots, e_8$ целые,

$$v = \lambda e_0 + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_8 e_8, \qquad \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8 \in \mathbb{Z}.$$

Тогда решетка Коркина — Золотарёва $Q(\mathrm{E}_8)$ — это восьмимерная решетка $L \cap V$, где V — гиперплоскость в U, определенная уравнением

$$3\lambda - (\mu_1 + \ldots + \mu_8) = 0.$$

При этом сама система корней E_8 состоит из 240 векторов нормы 2 в $Q(\mathrm{E}_8)$.

Сами Коркин и Золотарёв [26, 27] доказали, что решетки D_4 и D_5 являются плотнейшими в размерностях 4 и 5. Только в 1934 г. Блихфельд [28] доказал аналогичный результат для решеток E_6, E_7 и E_8 в пространствах размерностей 6, 7 и 8. Однако доказательства Блихфельда носили вычислительный характер и много деталей там было опущено. Позже Барнс [29] другим методом передоказал этот результат для E_6. Уотсон [30] анонсировал, что он перепроверил вычисления Блихфельда для E_7 и E_8, однако первое полное доказательство содержалось, насколько мне известно, в диссертации Ветчинкина [31]. В частности, решетка Коркина — Золотарёва является плотнейшей упаковкой шаров в 8-мерном пространстве среди *решеточных* упаковок.

Филдсовская медаль 2022 г. была присуждена Марине Сергеевне Вязовской, в частности за доказательство того, что решетка Коркина — Золотарёва E_8 является плотнейшей упаковкой шаров в 8-мерном пространстве — среди *всех* упаковок, а не только среди решеточных [32]. Увлекательный рассказ об этом результате в более широком контексте можно найти в статье Андрея Окунькова [33].

Исторически сложилось, что в одном байте восемь битов, поэтому решетка Коркина — Золотарёва E_8 и сегодня используется в кодировании и передаче информации, в том числе в большинстве модемов [34]. Если бы математические результаты патентовались, то сегодня, я думаю, royalties на это открытие превышали бы весь бюджет Санкт-Петербургского университета.

На мой вкус, выросшая из E_8 **октонионная математика**, связанная с исключительными группами [35, 36], являет гораздо более изысканную симметрию и поэтому более интересна, чем вся классическая **вещественная математика** (= ортогональная группа), **комплексная математика** (= унитарная группа) и **кватернионная математика** (= симплектическая группа), о которых, как о трех независимых искусствах, говорит Владимир Игоревич Арнольд [37][5].

1.3. Фёдоровские группы. Еще один полученный в Петербурге абсолютно классический результат, относящийся как к теории групп вообще, так и к теории линейных групп в особенности — это классификация кристаллографических групп в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$, завершенная в 1890–1891 гг. Евграфом Степановичем Фёдоровым (1853–1919).

С современной точки зрения **кристаллографическая группа** — это дискретная подгруппа группы эвклидовых движений

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, g \in O(n,\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\}$$

с ограниченной фундаментальной областью. Под $O(n,\mathbb{R})$ здесь понимается *компактная* форма ортогональной группы (сохраняющая положительно определенное скалярное произведение).

В случае $n = 3$ все 230 таких групп[6] были полностью перечислены Фёдоровым в 1890 г. и Артуром Шёнфлисом в 1891 году. Поэтому кристаллографические группы в эвклидовых пространствах (в особенности в случае $n = 3$) часто называются также **фёдоровскими группами**.

Здесь нет, разумеется, никакой возможности обсуждать ни предысторию этого замечательного результата, ни предыдущие работы самого Фёдорова, ни, наконец, драматическую борьбу за окончательное согласование списков Фёдорова и Шёнфлиса [38].

Что еще интереснее, первое доказательство того, что существует только 17 возможных кристаллографических групп на плоскости (= wallpaper groups) тоже впервые провел Фёдоров в 1891 г. [39], причем как побочный продукт своей классификации в размерности 3. Хотя в огромном количестве источников этот результат *ошибочно* приписывается Дьёрдю Пойа [40], который лишь повторил его в 1924 г.

Забавно, что полное перечисление всех 4894 кристаллографических групп в $\mathbb{R}^4$ заняло после этого еще больше века, даже с использованием компьютера[7]. Ошиб-

[5] «All mathematics is divided into three parts: cryptography (paid for by CIA, KGB and the like), hydrodynamics (supported by manufacturers of atomic submarines) and celestial mechanics (financed by military and by other institutions dealing with missiles, such as NASA)». Вся математика делится на три части: криптография (за которую платят ЦРУ, КГБ и другие аналогичные организации), гидродинамика (которую поддерживают производители атомных подводных лодок) и небесная механика (которую финансируют военные и другие организации, связанные с ракетами, такие как НАСА) (перевод мой. — *Н. В.*).

[6] Или 219, если мы отождествляем *энантиоморфные группы*, т. е. разрешаем менять ориентацию.

[7] Последовательность (https://oeis.org/A006227) доведена в настоящее время до $n = 5$, следующее значение 222097.

ка в первоначальном списке [41] состояла именно в неправильном отождествлении энантиоморфных групп[8].

Разумеется, *сегодня* естественнее всего воспринимать классификацию фёдоровских групп не геометрически или алгебраически, а *топологически*, в терминах орбифолдов, получающихся склейками границы фундаментальной области: turnover, pillowcase... — вот это все. Конечно, введенные Уильямом Терстоном орбифолдные обозначения не различают энантиоморфные пары, но они впервые объяснили, что здесь *на самом деле* происходит[9] (см. [43, 44]).

В 1920-е годы математической кристаллографией увлекся Делоне. Книга [45] была одним из первых изложений классификации фёдоровских групп с точки зрения математика, а не кристаллографа. Позже геометрическая кристаллография стала основным направлением его работы. Очевидна связь классификации кристаллографических групп с геометрией чисел и теорией целочисленных представлений, что объясняет интерес Фаддеева к этой теме [46]. Это еще один небесный мост от петербургских классиков XIX века к тому, чем наша алгебраическая школа занимается сегодня.

2. Генезис Петербургской алгебраической школы. Здесь мы совсем коротко обрисуем происхождение сегодняшней петербургской алгебраической школы.

2.1. Чебышёв. Генетически петербургская алгебраическая школа восходит к Пафнутию Львовичу Чебышёву (1821–1894), которому, в частности, принадлежат *выдающиеся* результаты в теории чисел. В 1847 г. Чебышёв переехал в Петербург из Москвы и стал адъюнкт-профессором (доцентом) Санкт-Петербургского университета. В частности, именно он читал с 1847 г. в нашем университете курс высшей алгебры. В 1856–1857 учебном году этот курс слушали три студента, из которых двое (Коркин и Авенариус) впоследствии сами стали профессорами Санкт-Петербургского Императорского университета, а третий был уволен. Конспект Авенариуса был потом опубликован[10] [47].

2.2. Коркин и Золотарёв. Непосредственными учениками Чебышёва в Петербургском университете были, в частности, Александр Николаевич Коркин (1837–1908) и Егор Иванович Золотарёв (1847–1878), тоже весьма сильные и интересные математики, основные работы которых связаны с теорией чисел. К сожалению, Золотарёв погиб совсем молодым, попав под поезд[11]. С другой стороны, непосредственными учениками Коркина были, в частности, Иван Иванович Иванов (1862–1939), Дмитрий Александрович Граве (1863–1939), Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) и Николай Максимович Гюнтер (1871–1941).

[8] Без сохранения ориентации кристаллографических групп в $\mathbb{R}^4$ должно быть 4783 (см. [42]). Последовательность (https://oeis.org/A004029) доведена в настоящее время до $n = 6$, следующие значения 222018, 28927915.

[9] Джон Конвей рассказывал об этом на конференции по группам и геометриям в Брессаноне в 2004 г. У меня до сих пор сохранилась упаковка от пиццы, на которой он нарисовал 17 обойных групп в орбифолдных обозначениях и потом всю дорогу на свой доклад экзаменовал меня по ним. К сожалению, запомнить все 219 трехмерных фёдоровских групп мне не удалось даже в этих обозначениях.

[10] По инициативе А. Н. Крылова, который сам издал в том же 1936 г. курс Чебышёва по теории вероятностей: «Лекции, читанные в 1879–80 гг. по записи А. М. Ляпунова».

[11] Студентам я обычно говорил, что это произошло во время его поездки на матмех в Петергоф. Но на самом деле все-таки при поездке на дачу в Царском Селе.

Разумеется, здесь нет никакой необходимости обсуждать подробнее труды и дни этих великих людей, которые исчерпывающим образом отражены в литературе, достаточно сослаться на книгу Делоне [48], содержащую подробное описание их работ, и на пронзительные по своей откровенности автобиографические записки Граве [49].

Еще раз замечу, впрочем, что в техническом смысле все работы петербургской школы (до возвращения в Петербург из Киева представителей школы Граве) вообще не учитывали ничего из того, что происходило в алгебре после Лагранжа и Гаусса. Вот с чего *начинает* свою статью по истории алгебры в Петербурге Фаддеев: «Общие тенденции развития алгебры во второй половине XIX и начале XX столетия мало коснулись деятельности петербургской математической школы. Ей были чужды теория групп и ее приложений к теории алгебраических уравнений... теории функций и геометрии» [50].

2.3. Граве. Следующий *абсолютно* ключевой для нашей истории человек — это Дмитрий Александрович Граве, прямой ученик Коркина, который стал одним из первых в России чистых *алгебраистов*. От Граве пошло большинство основных работающих сегодня в России алгебраических школ. Дмитрий Александрович был выдающимся педагогом и автором чуть ли не 40 учебников для школ и университетов[12]. Заведомо неполная математическая генеалогия указывает 3659 научных потомков Граве, т. е. его учеников, учеников его учеников и т. д.

В связи с финансовыми, бюрократическими и медицинскими причинами в 1897 г. Дмитрий Александрович уехал на Украину и работал вначале в Харькове, а потом в Киеве, где фактически с нуля создал активную математическую школу, причем не только в области алгебры, но и в области геометрии и анализа[13].

Непосредственными учениками Граве были, *в частности*, Борис Николаевич Делоне (1890–1980), от которого пошли петербургская алгебраическая и геометрическая школы, значительная часть московской алгебраической школы (МИАН) и т. д., Отто Юльевич Шмидт (1891–1956), который породил еще одну важную компоненту московской алгебраической школы (МГУ)[14], один из классиков советской алгебры Николай Григорьевич Чеботарёв (1894–1947), Александр Маркович Островский (1893–1986) и другие замечательные математики.

2.4. Делоне. Следующая ключевая фигура — это Борис Николаевич Делоне. Борис Николаевич тоже легендарная личность, геометр, алгебраист, кристаллограф, знаменитый и успешный альпинист и т. д. Учениками Делоне были, в частности, Владимир Абрамович Тартаковский (1900–1973), о котором мы поговорим чуть по-

[12]Кстати, *весьма* продвинутых для того времени. Достаточно сказать, что его гимназический курс алгебры *начинался* с определения поля и комплексных чисел, а университетский курс — с теории Галуа!

[13]Вот как это комментирует Сергей Сергеевич Демидов: «Kiev University had very moderate mathematical achievements in the XIX century, but thanks to the endeavors of a remarkable representative of the St. Petersburg school D. A. Grave, who moved there in 1901, it sharply raised its mathematical level» [51] (В XIX в. Киевский университет был чрезвычайно посредственным в математическом отношении, но благодаря усилиям замечательного представителя санкт-петербургской математической школы Д. А. Граве уровень резко вырос (перевод мой. — *Н. В.*)). Фаддеев в [50] характеризует киевскую школу Граве того периода как «блестящую».

[14]Впрочем, Александр Геннадьевич Курош (1908–1971) был учеником Павла Сергеевича Александрова, а Анатолий Иванович Мальцев (1909–1967) — учеником Андрея Николаевича Колмогорова, так что остальная часть советской алгебры восходит все-таки не к петербургской школе Чебышёва, а к московской школе теории функций.

дробнее, основатель нашей алгебраической школы Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989), знаменитый геометр, академик Александр Данилович Александров (1912–1999, в 1950-х и начале 1960-х годов ректор Ленинградского университета), и основатель московской школы алгебры, алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел академик Игорь Ростиславович Шафаревич (1923–2017).

2.5. Фаддеев. Центральная часть сегодняшней петербургской алгебры восходит к еще одному абсолютно легендарному математику — Дмитрию Константиновичу Фаддееву. Опять же, нет никакой необходимости обсуждать здесь вклад Фаддеева в алгебраическую теорию чисел, алгебру и алгебраическую геометрию, все это прекрасно отражено в литературе [52–54].

Позволю себе одно замечание чуть в сторону, которое иллюстрирует класс этого человека. На конгрессе по научным вычислениям в Линце, узнав, что я представляю школу Фаддеева, Хенк ван дер Форст тут же заметил, что до сих пор в огромной части *практических* вычислений, связанных с задачами гидроаэродинамики[15], в которых приходится решать *большие* системы линейных уравнений — миллионы уравнений от миллионов неизвестных, — используются методы, предложенные Д. К. в начале 1960-х годов, и что он сам писал соответствующие алгоритмы для «Боинга» и НАСА. Я тут же подумал, *насколько* мы ленивы и нелюбопытны — в любом другом университете красочные плакаты об этом висели бы на всех стенах, а я, научный внук Д. К., впервые узнаю об этом от голландского коллеги. И ведь это далеко не центральный предмет размышлений Д. К., а лишь одна из многочисленных побочных тем, которыми он интересовался. Ну, о royalties и о том, окупает ли себя чистая математика, отдельный вопрос.

Непосредственными учениками Д. К. в Петербурге были, в частности, Дмитрий Сергеевич Горшков (1916–1978), Зенон Иванович Боревич (1922–1995), Александр Иванович Скопин (1927–2003), Борис Борисович Венков (1934–2011), Марк Иванович Башмаков (1937–2022), Борис Бениаминович Лурье (1940–2020), Анатолий Владимирович Яковлев (1940–2022) и Владимир Ваганович Ишханов (1944–2011) — ну и, кроме того, конечно, много других математиков, которые потом работали в других городах.

Чингиз Айтматов констатировал: «У собаки есть хозяин, но у волка есть Бог», к чему Андрей Суслин добавил: «А у человека есть Учитель». Несомненно, не только для непосредственных учеников, но и для моего поколения петербургских алгебраистов, а возможно и для следующего поколения, которое его застало, Д. К. и был Учителем именно в этом смысле.

2.6. Линия Маркова. Выше мы обсуждали только линию Коркина, в действительности еще несколько крупных теоретико-числовиков были учениками и учениками учеников Андрея Андреевича Маркова (старшего) (1856–1922). В первую очередь это непосредственные ученики самого Маркова: Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) и Яков Викторович Успенский (1883–1947).

В свою очередь, учениками Успенского были, *в частности*, Иван Матвеевич Виноградов (1891–1983), Родион Осиевич Кузьмин (1891–1949) и Борис Алексеевич Венков (1900–1962). Впрочем, этот факт не слишком пропагандировался. Дело в том, что после эмиграции в США Успенский был в 1930 году исключен из состава РАН. Например, в книге Делоне [48] подробнейшим образом излагаются биографии

[15] Полет самолета или ракеты, движение корабля, океанские течения, прогноз погоды, предсказание климата и т. д.

Чебышёва, Коркина, Золотарёва, Маркова, Вороного, но при этом вообще не упоминается, кто был руководителем Виноградова[16]. Непросто найти и информацию о том, кто был руководителем Кузьмина.

3. Школа Тартаковского. Серьезные систематические исследования по теории групп в Петербурге начал Владимир Абрамович Тартаковский в 1930-е годы.

3.1. Тартаковский. Еще одним знаменитым учеником Делоне был Владимир Абрамович Тартаковский, который заведовал нашей кафедрой в предвоенные и первые послевоенные годы. И учениками которого, в свою очередь, были великий теоретико-числовик академик Юрий Владимирович Линник (1914–1972), основатель алгебраической школы в Педагогическом институте Евгений Сергеевич Ляпин (1914–2005) и один из классиков теории групп Иван Николаевич Санов (1919–1968).

Тартаковский, насколько я могу судить, был весьма глубоким и разносторонним математиком, занимавшимся в разные периоды своей жизни теорией чисел, комбинаторной теорией групп, теорией дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрией и еще несколькими разделами математики.

Кстати, еще один выдающийся математик, который тесно взаимодействовал в те годы с Тартаковским по науке — это Андрей Андреевич Марков (младший) (1903—1979), занимавшийся в те годы топологической алгеброй и вопросами алгоритмической разрешимости задач комбинаторной теории групп и других алгебраических систем. Именно от него, через Николая Александровича Шанина (1919–2011), пошла, кроме логической школы, еще одна важная ветвь петербургских алгебраистов.

3.2. Школа комбинаторной теории групп. Вот что писали по поводу школы Тартаковского Линник, Ляпин и Якубович: «В начале тридцатых годов В. А. Тартаковский начал интересоваться теорией групп. Надо сказать, что в тот период в Ленинграде никто не только не вел исследовательской работы в этой важной отрасли алгебры, но даже никто не был достаточно полно осведомлен в ней. Это делало проникновение в глубины этой теории весьма непростым делом. Тем большей заслугой Владимира Абрамовича является то, что к концу тридцатых годов в Ленинграде под его руководством сформировалась целая группа молодых алгебраистов, не только хорошо осведомленных в этой теории, но и внесших свой вклад в ее развитие... Все ленинградские групповики: И. А. Грушко, Х. А. Донияхи, Е. С. Ляпин, И. Н. Санов, П. В. Стендер, Д. И. Фукс-Рабинович, Г. М. Хейсин и др. — ученики В. А. Тартаковского» [56].

Все эти молодые математики уже опубликовали к 1940–1941 гг. первые существенные работы по комбинаторной теории групп (но также по теории конечных групп, теоретико-групповым конструкциям, абелевым группам...). Снова процитирую Фаддеева: «В 1934/35 учебном году В. А. Тартаковский организовал семинар по теории дискретных групп. Этот круг вопросов в Ленинграде ранее не разрабатывался. Семинар привлек много сильных участников и в скором времени дал

[16] Перси Диаконис и Сэнди Забелл пишут: «Despite his wide range of mathematical interests, Uspensky was first and foremost a number theorist. Of the five leading number theorists in Leningrad in the 1920s who did not leave Russia — Delone, Ivanov, Kuzmin, Venkov, and Vinogradov [51, p. 89] — three were students of Uspensky» [55]. Несмотря на свой широкий спектр математических интересов, Успенский был в первую очередь и главным образом теоретико-числовиком. Среди пяти ведущих теоретико-числовиков в Ленинграде в 1920-е годы, из тех, кто не уехал из России, — Делоне, Иванов, Кузьмин, Венков и Виноградов — трое были учениками Успенского (перевод мой. — *Н. В.*).

ряд блестящих результатов, сравнимых с результатами значительно более "старого" московского семинара О. Ю. Шмидта — А. Г. Куроша» [50].

К сожалению, золотому веку теории групп в Ленинграде не суждено было тогда реализоваться — Грушко, Фукс-Рабинович, Донияхи, Хейсин погибли во время войны и блокады:

- Игорь Александрович Грушко (1912–1941), младший лейтенант, командир взвода 270-го отдельного зенитного артдивизиона, пропал без вести осенью 1941 г.;
- Давид Израилевич Фукс-Рабинович (1913–1942), младший лейтенант, умер в военном госпитале в Ленинграде весной 1942 г.;
- Хаим Аронович Донияхи (1917–1941), младший лейтенант, командир взвода 574-го отдельного зенитного артдивизиона 272-й стрелковой дивизии, убит 14 августа 1941 г.;
- Георгий Минеевич Хейсин (1918–1941) также погиб на фронте в первые месяцы войны.

Все могло быть иначе, но не было иначе. Единственным, кто после войны на какое-то время вернулся к исследованиям по теории групп, был Иван Николаевич Санов.

3.3. Санов. Иван Николаевич Санов (1919–1968) упоминается на сайте матобщества[17] как самый молодой, на тот момент *двукратный* (вместе с Бениамином Львовичем Минцбергом) победитель Ленинградской математической олимпиады.

В 1935 г. Санов поступил на математико-механический факультет, который окончил в 1940 г. После этого он один год проучился в аспирантуре, но с самого начала войны до демобилизации в 1946 (sic!) г. находился в действующей армии в качестве командира взвода, а потом командира роты зенитного артиллерийского полка.

Санов работал на кафедре высшей алгебры и теории чисел с 1946 по 1952 г. с перерывом на год. В 1953 г. он «переехал на работу в Москву», где был награжден орденом Ленина «За успешное решение ряда математических проблем прикладного характера».

В действительности все последующие годы он работал как криптограф в Комитете государственной безопасности. Интересно, что (насколько можно судить по отдельным замечаниям в [57]) в криптографии он пользовался *вероятностными* соображениями, и самые цитируемые его работы относятся именно к теории вероятностей (большие уклонения случайных величин).

Основные работы Санова в области теории групп связаны с проблемой Бернсайда, и здесь нет никакой возможности их обсуждать. Поэтому сформулируем его простой, но важный и изящный результат [58], который также можно отнести к предыстории нашей школы линейных групп.

Теорема Санова. *Подгруппа*

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

изоморфна свободной группе с двумя образующими F_2.

На самом деле Санов задает условие принадлежности матрицы этой группе в терминах сравнений: матрица $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ в том и только том случае

[17] https://www.pdmi.ras.ru/~olymp/lmo_history_1.pdf

принадлежит G, когда $b \equiv c \equiv 0 \pmod 2$ и $a \equiv d \equiv 1 \pmod 4$. (Часто эту теорему формулируют в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ вместо $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, заменяя при этом сами матрицы g на их классы $[g] = \{\pm g\}$, но в действительности, так как $2 \notin \mathbb{Z}^*$, это не имеет значения.)

3.4. Школы Линника и Андрианова. В действительности с конца 1940-х до начала 1960-х годов Юрий Владимирович Линник создал в Ленинграде мощнейшую школу *аналитической* теории чисел, от которой, к сожалению, к настоящему времени именно в нашем городе мало что осталось. Среди непосредственных учеников Линника того периода, работавших в ПОМИ, Александр Васильевич Малышев (1928–1993), Борис Фаддеевич Скубенко (1929–1993), Аскольд Иванович Виноградов (1929–2005), Олег Мстиславович Фоменко (1936–2017) и Анатолий Николаевич Андрианов (1936–2020). Кроме того, в 1962–1972 годах[18] в ПОМИ работал Николай Григорьевич Чудаков (1904–1986). Разумеется, все они прекрасно знали модулярные формы и группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, на что мы сошлемся в следующем разделе.

Более того, в конце 1960-х годов Анатолий Николаевич начал активно интересоваться более общими классами автоморфных форм и именно в то время писал свои великие работы о $\mathrm{Sp}(2l,\mathbb{Z})$ и зигелевы модулярные формы [60]. Справедливости ради, он был первым, кто читал у нас в начале 1970-х годов спецкурсы по группам Ли, алгебраическим группам, арифметическим группам и автоморфным формам, и я тоже успел у него поучиться. Кроме Гены Малолеткина (1946–2007), его ученики в области зигелевых модулярных форм — Наташа Жарковская, Сережа Евдокимов (1950–2016), Владимир Калинин, Валера Гриценко — защищались примерно в те же годы, что первые аспиранты Боревича и Суслина по классическим группам и алгебраической K-теории. Это хотя и близкое, но все же отчетливо другое направление, связанное с теорией чисел, комплексным и гармоническим анализом, и рассказывать о нем здесь подробнее нет, разумеется, никакой возможности.

4. Как все начиналось: Боревич. Зенон Иванович занялся линейными группами в значительной степени случайно весной 1975 г. До этого его основные работы шли в русле интересов самого Д. К. и были посвящены алгебраической теории чисел, преимущественно локальным полям, и гомологической алгебре. В 1960-е годы, тоже под влиянием Д. К., Боревич занялся теорией целочисленных представлений. Очень выпуклое описание этих ранних работ можно найти в [61]. Особо выделю [62], ставшую абсолютной классикой.

В 1964 г. было опубликовано первое издание *великой*[19] книги Боревича и Шафаревича «Теория чисел» [63], которое было сразу переведено на английский, немецкий и французский (а потом и на много других языков и выдержало два радикально обновленных переиздания в 1972 и в 1985 гг.). В 1965 году вышли основные работы Боревича о строении мультипликативной группы локального поля как модуля Галуа, составившие в 1967 г. содержание его докторской диссертации.

После этого Зенон Иванович стал заместителем декана, а потом и деканом матмеха, и пять лет практически ничего не публиковал (его совместные работы с аспирантами, Востоковым и Али Мусой, были фактически прямым продолжением работ

[18] Т. е. до смерти Линника, о чем я подробнее пишу в [59].

[19] Потом, когда я начал много общаться с коллегами из разных стран, я обнаружил, что Боревича знали все, не только алгебраисты и числовики, а вообще все, причем в первую очередь именно как автора этой книги.

середины 1960-х годов). Когда я начинал с ним работать зимой 1974/75 гг., З. И.[20] уже довольно долго находился в активном поиске. Первоначально он планировал переключаться на теорию Галуа колец, но именно в то время больше всего интересовался теорией квадратичных и эрмитовых форм.

В 1975 г. З. И. выступал оппонентом по докторской диссертации львовского математика Петра Степановича Казимирского, посвященной факторизации **матричных многочленов** [64]. Защита состоялась в Киеве весной 1975 г., но сама диссертация датирована 1974 г., и, если мне не изменяет память, З. И. начал активно интересоваться матричными факторизациями не позднее зимы 1974 г.

К этому был и еще один стимул. Дело в том, что факторизации **полиномиальных матриц**[21] вовсю возникали тогда в связи с задачами теории управления и дифференциальных игр. Владимир Андреевич Якубович и сам опубликовал в те годы несколько работ в таком духе и предложил это в качестве темы своему ученику Борису Дмитриевичу Любачевскому (см., в частности, [65, 66]). Собственно, первая задача, которую мне ставил З. И. в январе 1975 г., как раз и состояла в том, чтобы обобщить результаты Любачевского и применить их к теории квадратичных форм над кольцами многочленов.

В диссертации Казимирского содержались ссылки на книгу Морриса Ньюмена «Integral matrices» [67]. З. И., который ко всему относился с исключительной добросовестностью и вникал во все детали, взял у Александра Васильевича Малышева эту книгу и стал, руководствуясь методом бесконечного спуска, смотреть цитировавшиеся там работы. В частности, работы самого Ньюмена, Свифта и Райнера о подгруппах в $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, заданных сравнениями на матричные элементы.

Дальше все происходило очень быстро и как-то само собой. З. И. заметил, что можно определять группы сравнениями не по одному идеалу, а по системе согласованных идеалов, то что он назвал **сетью идеалов**. Потом тут же, — что **разложение Гаусса** обобщается с полей на полулокальные кольца[22]. Это сразу дало ему возможность обобщить **теорему Титса** об описании надгрупп группы B верхних треугольных матриц в $\mathrm{GL}(n,R)$ и $\mathrm{SL}(n,R)$ с полей на полулокальные кольца [68, 69].

После этого я заметил, что примерно в таком же духе можно описать надгруппы группы D диагональных матриц, но смог доказать это только для группы $\mathrm{GL}(2,R)$. З. И. придумал свой замечательный трюк **извлечения трансвекций** при помощи псевдоотражений [70], используя который смог описать надгруппы D в $\mathrm{GL}(n,K)$ для поля K, $|K|\geq 7$. За несколько месяцев мы смогли показать такой же результат и в общем случае [71].

Еще через пару лет я заметил, что такой же трюк извлечения трансвекций можно реализовать при помощи унипотентных, а не полупростых элементов. При этом не нужно требовать наличия в кольце большого количества обратимых элементов, достаточно иметь нетривиальные линейные зависимости, как, например, $ab-ba=0$

[20]Здесь я немного отступаю от исторической правды. В отличие от Д. К., которого все так и называли «Д. К.» («Д. К. так бы не поступил»), Зенона Ивановича в те годы сотрудники его кафедры называли за глаза не «З. И.», а просто «Зенон». Однако эта форма кажется мне неуместной для публичного употребления, а полное написание «Зенон Иванович» — слишком длинным.

[21]Но, конечно, для алгебраиста $M(n,K[t])=M(n,K)[t]$. На самом деле в теории оптимального управления важны «квазиполиномиальные» матрицы, т. е. матрицы с коэффициентами в кольце **многочленов Лорана** $M(n,K[t,t^{-1}])$.

[22]Разные авторы называют разложением Гаусса три-четыре абсолютно разные вещи, обычно пользуясь жаргоном вычислительной линейной алгебры, $G=\overline{LU}$ или $G=LUP$, но здесь имеется в виду $G=ULU$.

для коммутативных колец. Это позволило получить описание важных классов подгрупп в $\mathrm{GL}(n, R)$ не над полулокальными, а над *произвольными* коммутативными кольцами [72] (и в действительности дальнейшими классами колец).

Созданная в этих работах технология (вычисление уровня, извлечение трансвекций, включение в нормализатор и т. д.) была в дальнейшем использована, по *самой* консервативной оценке, во *многих* десятках работ. Мы расскажем о некоторых основных идеях в третьей части настоящего обзора.

В 1975 г., когда были написаны и(или) задуманы наши первые основные работы, мы не знали о линейных группах практически ничего. В этом смысле мне чрезвычайно повезло. Обычно или, по крайней мере, довольно часто, руководитель занимается какой-то темой несколько десятилетий и у ученика долгое время нет никаких шансов работать с ним на равных. Здесь же мы учили все это одновременно, книги [73–76] были тогда совсем свежими[23].

Кроме того, что было упомянуто выше, нам были известны буквально две работы — статья Жака Титса [79] о параболических подгруппах и статья Хаймана Басса [73] о нормальных делителях $\mathrm{GL}(n, R)$. Что, кстати, сыграло нам на руку. Если бы в тот момент мы знали *что-то* об алгебраических группах, то считали бы, что нужно начинать с группы $\mathrm{SL}(2, K)$. В действительности этот случай оказался с *огромным* отрывом самым трудным из всех и был рассмотрен последним. Собственно, именно это объясняет, почему результаты работы [70] не были доказаны специалистами за несколько десятилетий до этого.

Если говорить непосредственно о группах, определенных сравнениями, то работа Юрия Ивановича Мерзлякова [80] не была нам известна, а в книгу [81] «ковры» попали позже, уже после работ З. И. Сыгравшая впоследствии большую роль работа Николая Семеновича Романовского [82] тоже стала нам известна уже после того, как З. И. определил «сети идеалов» в общем случае.

Конечно, мы тогда сразу начали детально обсуждать весь этот круг идей с коллегами, в первую очередь из Москвы и Минска, которые были на тот момент гораздо лучше осведомлены о состоянии теории линейных и классических групп. Отдельно нужно с благодарностью вспомнить Александра Васильевича Михалёва (1940–2022), ученики которого, в первую очередь Игорь Голубчик, работали над близкими задачами.

Еще один человек, который сразу оценил важность работ Андрея Суслина, наших результатов, и начал их пропагандировать — это Александр Ефимович Залесский. Его обзоры [83–85] сыграли тогда огромную роль.

5. Как все начиналось: Суслин. Андрей Александрович Суслин (1950–2018) тоже занялся линейными группами в 1973–1975 гг., но уже совершенно не случайно. Дело в том, что для своего диплома он выбрал проблему Серра о проективных модулях над кольцами многочленов[24]. Но, как известно, изучение алгебраиче-

[23] Через пару лет после этого, кажется в 1977 г., Д. К., которому тогда только что исполнилось 70 лет, устроил семинар по группам Шевалле, где мы читали тоже совсем свежие тогда [77, 78]. На меня произвело огромное впечатление, с каким энтузиазмом он разбирал вместе с аспирантами все технические детали построения целочисленных базисов в универсальных обертывающих алгебрах и представлениях. Ровно в это время произошел квантовый переход от состояния, когда классификацию простых алгебр Ли в Петербурге не понимал практически никто, к состоянию, когда она внезапно стала общим знанием, которым владели все.

[24] Саша Меркурьев [86] вспоминает, как это произошло. Дело в том, что до этого Андрей пытался доказать несуществование конечных **проективных плоскостей** порядка 10, но это у него сразу не получилось — и, кстати, еще довольно долго не получалось ни у кого даже с использованием

ских объектов теснейшим образом связано с изучением их групп автоморфизмов, а $\mathrm{GL}(n, R)$ как раз и является группой автоморфизмов свободного (правого) модуля R^n ранга n. И действительно, проблема Серра допускает элементарную переформулировку в терминах дополняемости унимодулярных строк до обратимой матрицы (см. [89])[25].

Инженеры и большинство математиков-неспециалистов работают с матрицами над *классическими* полями, такими как $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{F}_q$. Но алгебраисты всегда знали, что все результаты (в том числе и те, которые *якобы* носят топологический характер) правильно формулировать над *произвольными* полями. Уже довольно давно в связи с потребностями теории чисел было замечено, что многие из них обобщаются на *маломерные* кольца, такие как локальные или дедекиндовы.

С работы Хаймана Басса [73] началась первая революция общности, когда выяснилось, что огромная часть[26] структурных результатов о группе $\mathrm{GL}(n, R)$ в действительности верна (в подходящей формулировке) для произвольных *конечномерных* колец, по крайней мере когда n достаточно велико по сравнению с размерностью R. Собственно говоря, алгебраическая K-теория — это и есть современная инкарнация линейной алгебры, при этом значения K-функторов измеряют отклонение ответов от классических.

В 1970-е годы началась следующая такая революция (не завершенная и сегодня!), в ходе которой обнаружилось, что основная часть структурных результатов[27] не зависит и от конечномерности основного кольца, а сохраняется для произвольного *коммутативного* кольца, по крайней мере при $n \geq 3$ или $n \geq 4$.

Предвестником этой революции послужили работы Джона Уилсона и Игоря Голубчика о нормальном строении группы $\mathrm{GL}(n, R)$. Но полное осознание пришло в 1976–1977 гг., после работ Суслина. Даже после теоремы Уилсона—Голубчика полным шоком для всех была **теорема нормальности** Суслина, утверждающая, что при $n \geq 3$ элементарная группа $E(n, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$ для *произвольного* коммутативного кольца R. Иными словами, $E(n, R)$ не зависит от выбора базиса.

Почти сразу же после этого Александр Васильевич Михалёв и Игорь Голубчик — и независимо от них Ефим Зельманов — доказали стандартность автоморфизмов в общем случае. Вильберд ван дер Каллен и ученик Андрея Марат Туленбаев доказали центральность линейного K_2. Сам Андрей вместе с другим своим учеником, Славой Копейко, начал перенос структурных теорем на другие классические группы.

Эти работы запустили то, что Бернард МакДональд окрестил «русской революцией в теории линейных групп над кольцами», когда несколько лет математики

компьютера [87]. Тогда Андрей решил доказать несуществование нетривиальных **проективных модулей** конечного ранга. Насколько я помню, Андрей, который был тогда учеником Марка Ивановича Башмакова, узнал о проблеме Серра из лекций Юрия Ивановича Манина [88].

[25] Слава Копейко напомнил мне, что именно в таком виде проблема Серра сформулирована в упражнении 12 на странице 395 книги Сержа Ленга [90], так что Андрей мог узнать о проблеме Серра и оттуда.

[26] Речь здесь идет об общих структурных теоремах *качественного* характера. Есть много явных классификаций и оценок, которые вообще невозможно сдвинуть никуда с класса полей, этот вопрос подробно обсуждается в [91]. Так, например, задача описания классов сопряженности в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ — и даже $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ — является **дикой**, т. е. включает в себя задачу о **паре матриц**. Иными словами, не существует и не может существовать никакого целочисленного аналога жордановой формы. Недавно выяснилось, что и многие теоремы конечности не обобщаются за пределы нульмерных и *некоторых* одномерных колец, но это, конечно, уже не так удивительно.

[27] Ну, конечно, снова кроме явных изоморфизмов и теорем стабилизации.

из Петербурга, Москвы и Новосибирска — ну, плюс приравненные к ним Леонид Васерштейн и Вильберд ван дер Каллен[28] — соревновались только между собой в смысле общности результатов [93].

Наследие Андрея столь удивительно, монументально и разнообразно, что в своей статье о его математике [94] Эрик Фридландер и Саша Меркурьев переходят сразу от K_0 к K_2, минуя K_1 и вообще не упоминая его статью [95]. Между тем работа Андрея [95] является, вне всякого сомнения, одной из трех-пяти самых важных работ о линейных группах над кольцами за всю историю этой области.

В этой работе Андрей впервые применил то, что сегодня известно как **метод Квиллена — Суслина**, на уровне K_1, т. е. непосредственно для изучения $\mathrm{GL}(n, R)$ сведением к локальному случаю. В дальнейшем этот метод был использован (со ссылками и без), снова, по *самой* консервативной оценке, во многих *сотнях* работ.

Сегодня в нашем распоряжении имеются более мощные варианты локализации — такие как метод **локализации-пополнения** Бака [96] и метод **универсальной локализации** Степанова [97], позволяющие доказать вещи, которые не получались с использованием исходного метода. Ясно, однако, что они могли возникнуть только в мире, который создал нам Андрей.

Кстати, и геометрические методы структурной теории, такие как метод **разложения унипотентов** [98], тоже возникли в результате обдумывания работ Андрея. Не говоря о большом количестве совершенно удивительных изобретений и трюков, придуманных им в то время, таких как **матрицы Суслина** [99][29]. В следующей части обзора[30] я как раз и планирую сформулировать несколько наиболее ярких и неожиданных результатов Суслина и его школы того времени и дать общее представление об их контексте и основных идеях.

Вот что пишет Саша Меркурьев: «Andrei's impact on mathematicians has been tremendous, not only on his own graduate students but on many others fortunate to be around him» [86]. «Влияние Андрея на математиков было огромно, не только на его непосредственных учеников, но и на многих, кому посчастливилось оказаться рядом с ним (перевод мой. — *Н. В.*)». Я готов полностью подтвердить обе части этого высказывания и в том, что касается влияния, и в том, что близкое общение с математиком такой силы воспринималось как счастье. Его интуиция и понимание математики были гениальны, а техническая мощь подавляюща[31]. Но, вспоминая общение с ним сегодня, я думаю, что главными компонентами его силы были *увле-*

[28]Которые оба тесно сотрудничали с Андреем [92].

[29]Сегодня я понимаю, как такую вещь можно было *придумать* и более-менее понимаю даже, как такого рода вычисление можно было довести до конца. Но я по-прежнему не могу представить, чтобы кто-то, кроме Андрея, мог это сделать на 3–4 страницах!

[30]Которая имеет практически нулевое пересечение с [94]!

[31]При этом он никогда не демонстрировал свое превосходство. В качестве анекдота упомяну, что в [95] передоказывается **разложение Брюа**. С его пониманием математической реальности и техническим мастерством Андрею просто не нужно было знать такие мелочи. Слава Копейко так вспоминает, что именно произошло. В феврале 1976 г. Андрей передал Славе рукопись статьи [95] с предложением перенести ее результаты на симплектическую группу. Славе довольно быстро удалось перенести все основные результаты, кроме инъективной стабилизации симплектического функтора K_1 над кольцами многочленов. Проблема заключалась в том, что при доказательстве инъективной стабилизации Андрей использовал один вспомогательный результат, доказанный им с использованием функтора K_2 и символа Стейнберга из книги Милнора [75], а симплектический аналог символа Стейнберга еще не был в то время построен. Через *неделю* после того как Слава рассказал Андрею о возникшей проблеме, Андрей принес Славе в общежитие на Детской рукопись нового параграфа «Вспомогательные результаты», которая и содержала разложение Брюа. Именно этот новый подход использован в окончательном варианте [95] и в статье Копейко [100].

ченность[32] и умение полностью сконцентрироваться на задаче. «Не говори с тоской: *их нет*; но с благодарностию: *были*».

Литература

1. Паршин А. Н. Математика в Москве: у нас была великая эпоха. *Историко-математические исследования* **49**, 11–25 (2011).

2. Суслин А. А. Алгебраическая K-теория. *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия* **20**, 71–152 (1982).

3. Суслин А. А. Алгебраическая K-теория (в МИАНе). *Труды МИАН СССР* **168**, 155–170 (1984).

4. Суслин А. А. Алгебраическая K-теория и гомоморфизм норменного вычета. *Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Новые достижения* **25**, 115–207 (1984).

5. Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics*, Hiroshima, Japan, 30 August — 1 September 1990. London etc.: World Scientific Publishing, 219–335 (1991).

6. Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi). *J. K-Theory* **4** (1), 1–65 (2009).

7. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых классических групп. *Труды МИАН СССР* **183**, 29–41 (1990).

8. Вавилов Н. А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор. *Труды Ленингр. мат. об-ва* **1**, 64–109 (1990).

9. Vavilov N. Intermediate subgroups in Chevalley groups. *Proc. conf. groups of lie type and their geometries* (Como, 1993), Cambridge University Press, 233–280 (1995).

10. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Надгруппы полупростых групп. *Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная сер.* **3**, 51–95 (2008).

11. Borewicz Z. I., Rosenbaum K. Zwischengruppenverbände. *Sitzungber. Akad. gemein. Wiss. Erfurt. Math.-Natur. Kl.* **11**, 1–80 (2001).

12. Суслин А. А., Туленбаев М. С. Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора. *Записки научного семинара ЛОМИ* **64**, 131–152 (1976).

13. Euler L. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae* **20**, 189–207 (1776).

14. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.* **6**, 366–389 (1873).

15. Золотарёв Е. И. *Полное собрание сочинений.* Ленинград, Изд-во АН СССР, вып. 1 (1931), вып. 2 (1932).

16. Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. *Симметрические билинейные формы.* Москва, Мир (1986).

17. Конвей Дж., Смит Д. *О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях*, Москва, МЦНМО (2009).

18. Plotkin E., Semenov A., Vavilov N. Visual basic representations: An atlas. *Int. J. Algebra Comput.* **8** (1), 61–95 (1998).

19. Вавилов Н. А. Как увидеть знаки структурных констант? *Алгебра и анализ* **19** (4), 34–68 (2007).

20. Венков Б. Б. О классификации целочисленных четных унимодулярных 24-мерных квадратичных форм. *Труды МИАН СССР* **148**, 65–76 (1978).

21. Smith H. J. S. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proc. Royal Soc.* **16**, 197–208 (1867).

22. Gosset Th. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger Math.* **29**, 43–48 (1900).

23. Coxeter H. S. M. Integral Cayley numbers. *Duke Math. J.* **13**, 561–578 (1946).

[32] Ваня Панин напомнил мне, что в 1978/79 учебном году Андрей читал *пять* спецкурсов: «Алгебраическая геометрия», «Гомологическая алгебра», «Топологии Гротендика», «Конструкции Квиллена высшей K-теории», «Вычисление K-теории конечных полей», а в 1979/80 учебном году — всего два спецкурса: «Теорема Римана — Роха — Хирцебруха в форме Гротендика» и «Этальные когомологии», но зато вел три спецсеминара: «Абелевы многообразия», «Алгебраические поверхности» и «Двойственность Серра». Это и к вопросу о влиянии, и к вопросу об увлеченности и в пандан к первому примечанию, как иллюстрация изменения содержания алгебраического образования в СПбГУ между началом и концом 1970-х годов.

24. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней.* Москва, Мир (1972).

25. Манин Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* Москва, Наука (1972).

26. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. *Math. Ann.* **5** (4), 581–583 (1872).

27. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives. *Math. Ann.* **11** (2), 242–292 (1877).

28. Blichfeldt H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.* **39**, 1–15 (1934–1935).

29. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **249**, 461–506 (1957).

30. Watson G. L. On the minimum of a positive quadratic form in n (≤ 8) variables (verification of Blichfeldt's calculations). *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62**, 719 (1966).

31. Ветчинкин Н. М. Единственность классов положительных квадратичных форм, на которых достигаются значения постоянных Эрмита при $6 \leq n \leq 8$. *Труды МИАН СССР* **152**, 34–86 (1980).

32. Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8. *Ann. Math.* **185** (3), 991–1015 (2017). https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.7

33. Okounkov A. The magic of 8 and 24. ICM 2022. International Mathematical Union Preliminary version, to appear *Proc. Int. Cong. Math.*, vol. 1 (2022), 53 p.

34. Calderbank A. R. The mathematics of modems. *Math. Intell.* **13** (3), 56–65 (1991).

35. Baez J. C. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (2), 145–205 (2002).

36. Garibaldi S. E_8, the most exceptional group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (4), 643–671 (2016).

37. Arnold V. I. *Polymathematics, is Mathematics a single Science or a set of Arts*? 1–15 (2000).

38. Фёдоров Е. С. *Симметрия и структура кристаллов. Основные работы.* Редакция А. В. Шубникова и И. И. Шафрановского. Москва, Издательство Академии наук СССР (1949).

39. Фёдоров Е. С. Симметрия на плоскости. *Записки Импер. Санкт-Петербургского минералог. об-ва* **28**, 345–390 (1891).

40. Pólya G. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie* **60** (1), 278–282 (1924).

41. Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* New York, Wiley and Sons (1978).

42. Neubüser J., Souvignier B., Wondratschek H. Corrections to Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space by Brown et al. (1978). *Acta Crystallographica* **58** (3), 301 (2002). https://doi.org/10.1107/S0108767302001368

43. Conway J., Doyle P., Gilman J., Thurston B. *Geometry and the imagination.* https://math.dartmouth.edu/doyle/docs/gi/gi.pdf, 1–68 (2010)

44. Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss Ch. *The symmetries of things.* Wellesley, Peters/CRC Press (2008). https://doi.org/10.1201/b21368

45. Делоне Б. Н., Падуров Н. Н., Александров А. Д. *Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей.* Ленинград; Москва, ОНТИ-ГТТИ (1934).

46. Фаддеев Д. К. Таблицы основных унитарных представлений Фёдоровских групп. *Труды МИАН СССР* **56**, 3–174 (1961).

47. Чебышёв П. Л. *Высшая алгебра. Лекции 1856–1857 гг. по записям М. П. Авенариуса и неизвестного слушателя.* Редакция записок и дополнения проф. М. К. Куренского. Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1936).

48. Делоне Б. Н. *Петербургская школа теории чисел.* Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР, (1947).

49. Граве Д. А. Автобиографические записки [Публикация А. Н. Боголюбова]. *Историко-математические исследования* **34**, 219–246 (1993).

50. Фаддеев Д. К. Алгебра и теория чисел. В: *Математика в Петербургском-Ленинградском университете.* Изд-во Ленингр. ун-та, 7–36 (1970).

51. Demidov S. S. World War I and mathematics in "the Russian world". *Czasopismo Techniczne* **112**, 77–92 (2015).

52. Шафаревич И. Р. *Дмитрий Костантинович Фаддеев, Алгебра и анализ* **2** (6), 3–9 (1990).

53. Яковлев А. В. Д. К. Фаддеев и Петербургская алгебраическая школа. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 1–4 (2008).

54. Востоков С. В., Шафаревич И. Р. Гармония в Алгебре (к столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева), *Владикавк. матем. журн.* **10** (1), 3–9 (2008).

55. Diaconis P., Zabell S. In praise (and search) of J. V. Uspensky. arXiv:2201.13417v1[math.HO] 31 Jan. (2022), 49 p.

56. Линник Ю. В., Ляпин Е. С., Якубович В. А. Владимир Абрамович Тартаковский (к 60-летию со дня рождения). *Успехи математических наук* **16** (5), 225–230 (1961).

57. Боровков А. А., Голованов П. Н., Козлов В. Я., Кострикин А. И., Линник Ю. В., Новиков П. С., Фаддеев Д. К., Ченцов Н. Н. Иван Николаевич Санов (некролог). *Успехи математических наук* **24** (4), 177–179 (1969).

58. Санов И. Н. Свойство одного представления свободной группы. *Докл. АН СССР* **57** (7), 657–659 (1947).

59. Вавилов Н. А. Компьютер как новая реальность математики: IV. Гипотеза Гольдбаха. *Компьютерные инструменты в образовании* **4**, 5–72 (2021).

60. Андрианов А. Н. Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2. *Успехи математических наук* **29** (3), 43–110 (1974).

61. Яковлев А. В. Зенон Иванович Боревич. *Записки научных семинаров ПОМИ* **236**, 9–12 (1997).

62. Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах. *Вестник ЛГУ*, I. **11** (7), 3–39 (1956); II. **14** (7), 72–87 (1959).

63. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* Москва, Наука. 3-е изд. (1985).

64. Казимирский П. С. *Разложение матричных многочленов на множители*: дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Львов, 1–289 (1974).

65. Якубович В. А. Факторизация симметричных матричных многочленов. Доклады АН СССР **194** (3), 532–535 (1970).

66. Любачевский Б. Д. Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. *Сибирский. математический журнал.* I **14** (2), 337–356 (1973); II **14** (3), 609–623 (1973).

67. Newman M. Integral matrices. *Pure and Applied Mathematics* **45**. New York; London: Academic Press (1972).

68. Боревич З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом. *Вестник ЛГУ.* **13**, 16–24 (1976).

69. Боревич З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом. *Вестник ЛГУ* **19**, 29–34 (1976).

70. Боревич З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **64**, 12–29 (1976).

71. Боревич З. И., Вавилов Н. А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц. *Труды МИАН СССР* **148**, 43–57 (1978).

72. Боревич З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом. *Труды МИАН СССР* **165**, 24–42 (1984).

73. Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

74. Дьёдонне Ж. *Геометрия классических групп*, пер. с фр. Москва, Мир (1974).

75. Милнор Дж. *Введение в алгебраическую К-теорию*, пер. с англ. Москва, Мир (1974).

76. Супруненко Д. А. *Группы матриц.* Москва, Наука (1973).

77. Семинар по алгебраическим группам: сборник статей, пер. с англ. Москва, Мир (1973).

78. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле*, пер. с англ. Москва, Мир (1975).

79. Tits J., Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **254**, 2910–2912 (1962).

80. Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп. *Алгебра и Логика* **3** (4), 49–53 (1964).

81. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп.* Москва, Наука (1982).

82. Романовский Н. С. О подгруппах общей и специальной линейных группах над кольцом. *Математические заметки* **9** (6), 699–708 (1971).

83. Залесский А. Е. Линейные группы. *Успехи математических наук* **36** (5), 57–107 (1981).

84. Залесский А. Е. Линейные группы. *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия* **21**, 135–182 (1983).

85. Залесский А. Е. Линейные группы. *Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* **37**, 114–228 (1989).

86. Friedlander E. M., Merkurjev A., Beilinson A., Haesemeyer Ch., Levine M., Panin I., Parimala R., Soulé Ch., Weibel Ch., Yagunov S. In memoriam: Andrei Suslin. *Notices Amer. Math. Soc.* **67** (6), 832–841, (2020).

87. Lam C. W. H., Thiel L., Swiercz S. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Can. J. Math.* **41** (6), 1117–1123 (1989).
88. Манин Ю. И. *Лекции по алгебраической геометрии. I. Аффинные схемы.* Москва, Изд-во МГУ (1970).
89. Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Springer (2006).
90. Ленг С. Алгебра, пер. с англ. Москва, Мир (1968).
91. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Линейные группы над общими кольцами I. Общие места. *Записки научных семинаров ПОМИ* **394**, 33–139 (2011).
92. Васерштейн Л. Н., Суслин А. А. Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория. *Изв. АН СССР. Серия математическая* **40** (5), 993–1054 (1976).
93. Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Foreword by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 291. Berlin etc., Springer-Verlag. (1989).
94. Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.* **57**, no. 1, 1–22 (2020). https://doi.org/10.1090/bull/1680
95. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. *Изв. АН СССР. Сер. Математичекая* **41** (2), 235–252 (1977).
96. Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-theory* **4** (4), 363–397 (1991).
97. Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).
98. Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations. *K-theory* **19** (2), 109–153 (2000). https://doi.org/10.1023/A:1007853629389
99. Суслин А. А. О стабильно свободных модулях. *Математический сборник* **102** (4), 537–550 (1977).
100. Копейко В. И. Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов. *Математический сборник* **106** (5), 94–107 (1978).

Статья поступила в редакцию 14 января 2023 г.;
доработана 16 февраля 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Вавилов Николай Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai-vavilov@yandex.ru

St Petersburg school of linear groups. I. Prehistorical period*

N. A. Vavilov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vavilov N. A. St Petersburg school of linear groups. I. Prehistorical period. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 381–405. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.301 (In Russian)

The present survey describes the contribution of St Petersburg mathematicians to the theory of linear, classical and algebraic groups. The first part is dedicated to the prehistorical period, the historical genesis of Tartakowski and Faddeev algebra schools, and to the general

*The works reflected in the subsequent parts of this survey were supported by a number of grants and projects. Of those, one should specially mention 1) RSF Project 14-11-00335 "Decomposition of unipotents in reductive groups"; 2) Russian Science Foundation (RSF) Project "Split reductive groups over rings and their relatives" (both terminated) and the current ones 3) "Basis" Foundation Project 20-7-1-27-1 "Higher symbols in algebraic K-theory"; 4) RSF Project 22-21-00257 "Algebraic groups over rings and Steinberg groups".

outline of the works by Borewicz and Suslin of the mid-1970s that initiated systematical research in the fields of classical groups and algebraic K-theory in St Petersburg.

Keywords: linear groups, classical groups, algebraic groups, Chevalley groups, algebraic K-theory.

References

1. Parshin A. N. Mathematics in Moscow: we had a great epoque once. *Istoriko-matematicheskie issledovaniia* **49**, 11–25 (2011). (In Russian) [Engl. trans.: *Eur. Math. Soc. Newsl.* **88**, 42–49 (2013)].

2. Suslin A. A. Algebraic K-theory. *Itogi nauki i tekhn. Ser. Algebra. Topologiia. Geometriia* **20**, 71–152 (1982). (In Russian) [Engl. trans.: *J. Soviet Math.* **28** (6), 870–923 (1985)].

3. Suslin A. A. Algebraic K-theory. *Trudy MIAN SSSR* **168**, 155–170 (1984). (In Russian) [Engl. trans.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **168**, 161–177 (1986)].

4. Suslin A. A. Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism *Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovremennye problemy matematiki. Novye dostizheniia* **25**, 115–207 (1984). (In Russian) [Engl. trans.: *J. Soviet Math.* **30** (6), 2556–2611 (1985)].

5. Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics*, Hiroshima, Japan, 30 August — 1 September 1990. London etc.: World Scientific Publishing, 219–335 (1991).

6. Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi). *J. K-Theory* **4** (1), 1–65 (2009).

7. Vavilov N. A. On subgroups of split classical groups. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSR* **183**, 29–41 (1990). (In Russian) [Engl. trans.: *Proc. Steklov Inst. Math* **183**, 27–41 (1991)].

8. Vavilov N. A. Subgroups of Chevalley groups containing a maximal torus. *Trudy Leningradskogo matematicheskogo obshchestva* **1**, 64–109 (1990). (In Russian) [Engl. trans.: *Ser. 2, Amer. Math. Soc.* **155**, 59–100 (1993)].

9. Vavilov N. Intermediate subgroups in Chevalley groups. *Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries* (Como, 1993), Cambridge University Press, 233–280 (1995).

10. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Overgroups of semisimple groups. *Vestnik Samara Univ. Natural Sci.* **3**, 51–95 (2008). (In Russian)

11. Borewicz Z. I., Rosenbaum K. Zwischengruppenverbände. *Sitzungber. Akad. gemein. Wiss. Erfurt. Math.-Natur. Kl.* **11**, 1–80 (2001).

12. Suslin A. A., Tulenbaev M. S. Stabilization theorem for the Milnor K_2-functor. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI* **64**, 131–152 (1976). (In Russian). [Engl. trans.: *J. Soviet Math.* **17** (2), 1804–1819 (1981)].

13. Euler L. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae* **20**, 189–207 (1776).

14. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.* **6**, 366–389 (1873).

15. Zolotarev E. I. *Collected works.* Leningrad: Publishing House of the USSR Acad. Sci. iss. 1 (1931), iss. 2 (1932). (In Russian)

16. Milnor J. W., Husemoller D. H. *Symmetric bilinear forms.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 73. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag. (1973). [Rus. ed.: Milnor J. W., Husemoller D. H. *Simmetricheskie bilineinye formy.* Moscow, Mir Publ. (1986)].

17. Conway J. H., Smith D. A. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry.* Natick, MA: A K Peters (2003) [Rus. ed.: Conway J. H., Smith D. A. *O kvaternionakh i oktavakh, ob ikh geometrii, arifmetike i simmetriiakh.* Moscow, MCNMO Publ. (2009)].

18. Plotkin E., Semenov A., Vavilov N. Visual basic representations: An atlas. *Int. J. Algebra Comput.* **8** (1), 61–95 (1998).

19. Vavilov N. A. Can one see the signs of structure constants? *Algebra i analiz* **19** (4), 34–68 (2007). (In Russian). [Engl. trans.: *St. Petersburg Math. J.* **19** (4), 519–543 (2008)].

20. Venkov B. B. O On the classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **148**, 65–76 (1978). (In Russian). [Engl. trans.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **148**, 63–74 (1980)].

21. Smith H. J. S. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proc. Royal Soc.* **16**, 197–208 (1867).

22. Gosset Th. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger Math.* **29**, 43–48 (1900).

23. Coxeter H. S. M. Integral Cayley numbers *Duke Math. J.* **13**, 561–578 (1946).

24. Bourbaki N. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV, V et VI: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Groupes engendrés par des réflexions. Systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1337. Paris, Hermann & Cie (1968). [Rus. ed.: Bourbaki N. *Gruppy i algebry Li. Gl. IV–VI. Gruppy Kokstera i sistemy Titsa. Gruppy, porozhdennye otrazheniiami. Sistemy kornei.* Moscow, Mir Publ. (1972)].

25. Manin Yu. I. *Kubicheskie formy: algebra, geometriia, arifmetika.* Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian). [Engl. trans.: Manin Yu. I. Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic. Transl. from the Russian by M. Hazewinkel. 2nd ed. North-Holland. In: *Mathematical Library*, vol. 4. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland (1986)].

26. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. *Math. Ann.* **5** (4), 581–583 (1872).

27. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives. *Math. Ann.* **11** (2), 242–292 (1877).

28. Blichfeldt H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.* **39**, 1–15 (1934–1935).

29. Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **249**, 461–506 (1957).

30. Watson G. L. On the minimum of a positive quadratic form in n (≤ 8) variables (verification of Blichfeldt's calculations). *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62**, 719 (1966).

31. Vetchinkin N. M. Uniqueness of classes of positive quadratic forms, on which values of Hermite constants are reached for $6 \leq n \leq 8$. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **152**, 34–86 (1980). (In Russian) [Engl. trans.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **152**, 37–95 (1982)].

32. Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8. *Ann. Math.* **185** (3), 991–1015 (2017). https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.7

33. Okounkov A. The magic of 8 and 24. ICM 2022. International Mathematical Union Preliminary version, to appear *Proc. Int. Cong. Math.*, vol. 1 (2022), 53 p.

34. Calderbank A. R. The mathematics of modems. *Math. Intell.* **13** (3), 56–65 (1991).

35. Baez J. C. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **39** (2), 145–205 (2002).

36. Garibaldi S. E_8, the most exceptional group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (4), 643–671 (2016).

37. Arnold V. I. *Polymathematics, is Mathematics a single Science or a set of Arts*? 1–15 (2000).

38. Fedorov E. S. *Symmetry and structure of crystals. Principal works.* Edited by A. V. Shubnikov and I. Shafranovsky, Moscow, Publishing House of the USSR Acad. Sci. (1949). (In Russian)

39. Fedorov E. S. Symmetry on the plane. *Zapiski Imperial St. Petersburg Mineralogical Soc.* **28**, 345–390 (1891). (In Russian)

40. Pólya G. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene. *Zeitschrift für Kristallographie* **60** (1), 278–282 (1924).

41. Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* New York, Wiley and Sons (1978).

42. Neubüser J., Souvignier B., Wondratschek H. Corrections to Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space by Brown et al. (1978). *Acta Crystallographica* **58** (3), 301 (2002). https://doi.org/10.1107/S0108767302001368

43. Conway J., Doyle P., Gilman J., Thurston B. *Geometry and the imagination.* https://math.dartmouth.edu/doyle/docs/gi/gi.pdf, 1–68 (2010)

44. Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss Ch. *The symmetries of things.* Wellesley, A. K Peters/CRC Press (2008). https://doi.org/10.1201/b21368

45. Delaunay B. N., Padurov N. N., Alexandrov A. D. *Mathematical foundations of crystal structure analysis and the determination of the elementary parallelepiped using X-rays.* Leningrad; Moscow, ONTI-GTTI Publ. (1934).

46. Faddeev D. K. *Tables of the principal unitary representations of Fedorov groups.* Translated by Prasenjit Basu. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **56**, 3–174 (1961). (In Russian) [Engl. trans.: *Math. Tables. Ser.* **34**. Oxford; London; New York, Pergamon Press (1964)].

47. Chebyshev P. L. *Higher algebra.* 1856–1857 *lectures according to the notes of M. P. Avenarius and an unknown student.* Edited and supplemented by prof. M. K. Kurensky. Moscow; Leningrad, House USSR Acad. Sci. Publ. (1936).

48. Delaunay B. N. *Peterburgskaia shkola teorii chisel.* Moscow; Leningrad, AN SSSR Publ. (1947). (In Russian) [Eng. transl.: Delaunay B. N. *The St. Petersburg School of Number Theory.* Transl. from the

Russian by R. Burns, foreword by M. Rosen *History of Mathematics* **26**. Providence, RI, Amer. Math. Soc. (2005)][33].

49. Autobiographical memoirs of D. A. Grave. Publication and notes of A. N. Bogolyubov. *Istor.-Mat. Issled.* **34**, 219–246 (1993). (In Russian)

50. Faddeev D. K. Algebra and number theory. In: *Mathematics at the Petersburg — Leningrad University.* Leningrad University Press, 7–36 (1970).

51. Demidov S. S. World War I and mathematics in "the Russian world". *Czasopismo Techniczne* **112**, 77–92 (2015).

52. Šafarevič I. R. *Dmitry Konstantinovich Faddeev. Algebra i analiz* **2** (6), 3–9 (1990). (In Russian) [Eng. transl.: *Leningrad Math. J.* **2** (6), 1159–1164 (1991)].

53. Yakovlev A. V. D. K. Faddeev and St. Petersburg algebraic school. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 1–4 (2008). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **41** (1), 1–4 (2008) https://doi.org/10.3103/S1063454108010019].

54. Vostokov S. V., Šafarevič I. R. Harmony in algebra (on the centenary of the birth of Dmitriĭ Konstantinovich Faddeev, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR). *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* **10** (1), 3–9 (2008) (In Russian)

55. Diaconis P., Zabell S. In praise (and search) of J. V. Uspensky. arXiv:2201.13417v1[math.HO] 31 Jan. 49 p. (2022)

56. Linnik Yu. V., Lyapin E. S., Yakubovich V. A. Vladimir Abramovich Tartakovskiĭ (on his 60th birthday). *Uspekhi matematicheskikh nauk* **16** (5), 225–230 (1961). (In Russian)

57. Borovkov A. A., Golovanov P. P., Kozlov V. Ya., Kostrikin A. I., Linnik Yu. V., Novikov P. S., Faddeev D. K., Chentsov N. N. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **24** (4) 177–179 (1969). (In Russian) [Eng. transl.: *Russ. Math. Surv.* **24** (4), 159–161 (1969)].

58. Sanov I. N. A property of one representation of the free group. *Doklady Acad. Sci. USSR* **57** (7), 657–659 (1947). (In Russian)

59. Vavilov N. A. Computers as novel mathematical reality: IV. Goldbach problem. *Computer Tools in Education* **4**, 5–72 (2021). (In Russian)

60. Andrianov A. N. Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **29** (3), 43–110 (1974). (In Russian) [Eng. transl.: *Russian Math. Surveys* **29** (3), 45–116 (1974)].

61. Yakovlev A. V. Zenon Ivanovich Borevich. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **236**, 9–12 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci. New York* **95** (2), 2049–2050 (1999)].

62. Borewicz Z. I., Faddeev D. K. Homology theory in groups. *Vestnik Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* I. **11** (7), 3–39 (1956); II. **14** (7), 72–87 (1959).

63. Borewicz S. I., Šafarevič I. R. *Zahlentheorie* (Aus dem Russischen übersetzt von H. Koch.) Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. *Math. Reihe*, vol. **32**. Basel und Stuttgart, Birkhauser Verlag (1966). [Rus. ed.: Borewicz S. I., Šafarevič I. R *Teoriia chisel*, Moscow, Nauka Publ. (1985)].

64. Kazimirsky P. S. *Factorisation of matrix polynomials:* Dr. Sci. in Physic. and Math. Habilitation, Lvov (1974). (In Russian)

65. Yakubovich V. A. Factorization of symmetric matrix polynomials. *Doklady Akademii nauk SSSR* **194** (3), 532–535 (1970). (In Russian) [Eng. transl.: *Sov. Math., Dokl.* **11**, 1261–1264 (1970)].

66. Lyubachevskii B. D. Factorization of symmetric matrices with elements belonging to a ring with involution. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* I. **14** (2), 337–356 (1973); II. **14** (3), 609–623 (1973). (In Russian) [Eng. transl.: *Siberian Math. J.* I. **14** (2), 233–246 (1973); II. **14** (3), 423–433 (1973)].

67. Newman M. Integral matrices. *Pure and Applied Mathematics* **45**. New York; London: Academic Press (1972).

68. Borewicz Z. I. On parabolic subgroups in linear groups over a semilocal ring. *Vestnik Leningrad University.* **13**, 16–24 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University. Mathematics* **9**, 187–196 (1981)].

69. Borewicz Z. I. On the parabolic subgroups in the special linear group over a semilocal ring. *Vestnik Leningrad University* **19**, 29–34 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University. Mathematics* **9**, 245–251 (1981)].

70. Borewicz Z. I. A description of the subgroups of the complete linear group that contain the group of diagonal matrices. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* **64**, 12–29 (1976). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Sov. Math.* **17**, 1718–1730 (1981)].

[33]Here for conformity with the next item I also use the correct spelling "Delaunay", and not the actual AMS spelling "Delone".

71. Borewicz Z. I., Vavilov N. A. Subgroups of the general linear group over a semilocal ring, containing the group of diagonal matrices. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **148**, 43–57 (1978). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **148**, 41–54 (1980)].

72. Borewicz Z. I., Vavilov N. A. Arrangement of subgroups in the general linear group over a commutative ring. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSP* **165**, 24–42 (1984). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165**, 27–46 (1985)].

73. Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

74. Dieudonné J. A. *La géométrie des groupes classiques.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. **5.** Berlin; Heidelberg; New York, Springer-Verlag (1971) [Rus. ed.: Dieudonné J. A. *Geometriia klassicheskikh grupp*, Moscow, Mir Publ. (1974)].

75. Milnor J. W. *Introduction to algebraic K-theory.* Ann. Math. Studies, vol. **72**. Princeton, N. J., Princeton University Press and University of Tokyo Press. (1971). [Rus. ed.: Milnor J. W. *Vvedenie v algebraicheskuiu K-teoriiu.* Moscow, Mir Publ. (1974)].

76. Suprunenko D. A. Gruppy matrits. Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian) [Eng. transl.: Suprunenko D. A. *Matrix groups.* Translations of Math. Monographs, vol. **45**. Providence, R. I., Amer. Math. Soc. (1976)].

77. Borel A., Carter R., Curtis C. W., Iwahori N., Springer T. A., Steinberg R. *Seminar on algebraic groups and related finite groups.* Held at the Institute for Advanced Study, Princeton. N. J., 1968/69. Lecture Notes in Mathematics. Vol. **131**. Berlin; Heidelberg; New York, Springer-Verlag. (1970). [Rus. ed.: *Seminar po algebroicheskim gruppam.* Moscow, Mir Publ. (1973)].

78. Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* University Lecture Series **66** Providence, RI, American Mathematical Society (2016). [Rus. ed.: Steinberg R. Lektsii o gruppakh Shevalle. Moscow, Mir Publ. (1975)].

79. Tits J. Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **254**, 2910–2912 (1962).

80. Merzlyakov Yu. I. Central series and derived series of matrix groups. *Algebra and Logic* **3**, no. 4, 49–53 (1964). (In Russian)

81. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Osnovy teorii grupp*, Nauka Publ. (1972) (In Russian). [Eng. transl.: Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentals of the theory of groups.* Transl. from the 2$^{\text{nd}}$ Russian ed. by R. G. Burns. Graduate Texts in Mathematics, vol. **62**. New York; Heidelberg; Berlin, Springer-Verlag. (1979)].

82. Romanovskij N. S. On subgroups of the general an special linear groups over a ring. *Matematicheskie zametki* **9** (6), 699–708 (1971). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. Notes.* **9**, 405–409 (1971)].

83. Zalesskij A. E. Linear groups. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **36** (5), 57–107 (1981). (In Russian) [Eng. transl.: *Russ. Math. Surv.* **36** (5), 63–128 (1981). https://doi.org/10.1070/RM1981v036n05ABEH003030].

84. Zalesskij A. E. Linear groups. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Algebra. Topologiia. Geometriia* **21**, 135–182 (1983). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **31** (3), 2974–3004 (1985). https://doi.org/10.1007/BF02106807].

85. Zalesskij A. E. Linear groups. In: *Algebra. IV Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniia* **37**, 114–228 (1989) (In Russian) [Eng. transl.: Infinite groups, linear group. *Encycl. Math. Sci.* **37**, 97–196 (1993)].

86. Friedlander E. M., Merkurjev A., Beilinson A., Haesemeyer Ch., Levine M., Panin I., Parimala R., Soulé Ch., Weibel Ch., Yagunov S. In memoriam: Andrei Suslin. *Notices Amer. Math. Soc.* **67** (6), 832–841, (2020).

87. Lam C. W. H., Thiel L., Swiercz S. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Can. J. Math.* **41** (6), 1117–1123 (1989).

88. Manin Yu. I. *Lectires in algebraic geometry I. Affine schemes.* Moscow Univ. Press (1970). (In Russian)

89. Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Springer (2006).

90. Leng S. Algebra. 3$^{\text{rd}}$ revised ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. **211**. New York, Springer. (2002). [Rus. ed.: Leng S. Algebra. Moscow, Mir Publ. (1968)].

91. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **394**, 33–139 (2011). (In Russian) [Engl. trans.: *J. Math. Sci. (N. Y.)* **188** (5), 490–550 (2013)].

92. Vaserstein L. N., Suslin A. A. Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **40** (5), 993–1054 (1976). (In Russian) [Engl. trans.: *Math. USSR-Izv* **10** (5), 937–1001 (1976)].

93. Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Foreword by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 291, Berlin etc., Springer-Verlag. (1989).

94. Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.* **57** (1), 1–22 (2020).

95. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов. *Изв.* Suslin A. A. On the structure of the special linear group over polynomial rings. *Izvestiia AN SSSR. Ser. Matematicheskaia* **41** (2), 235–252 (1977).). (In Russian) [Engl. trans.: *Math. USSR-Izv* **11** (2), 221–238 (1977)].

96. Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-Theory* **4** (4), 363–397 (1991).

97. Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).

98. Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations. *K-Theory* **19** (2), 109–153 (2000)

99. Suslin A. A. On stably free modules. *Matematicheskii sbornik* **102** (4), 537–550 (1977). (In Russian) [Engl. trans.: *Math. USSR-Sb.* **31** (4), 479–491 (1977)].

100. Kopeiko V. I. The stabilization of symplectic groups over a polynomial ring. *Matematicheskii sbornik* **106** (5), 94–107 (1978). (In Russian) [Engl. trans.: *Math. USSR-Sb* **34** (5), 655–669 (1978)].

Received: January 14, 2023
Revised: February 16, 2023
Accepted: February 16, 2023

Author's information:

Nikolai A. Vavilov — nikolai-vavilov@yandex.ru