УДК 517.977.1 Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика... 2023. Т. 19. Вып. 2
MSC 93B25

К вопросу о конструктивном критерии управляемости. Ч. I. Циклические инвариантные подпространства*

Е. А. Калинина[1], *А. М. Камачкин*[1], *Н. А. Степенко*[1], *Г. Ш. Тамасян*[2,3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Российская Федерация,
197082, Санкт-Петербург, Ждановская ул., 13
[3] Институт проблем машиноведения РАН, Российская Федерация,
199178, Санкт-Петербург, Большой проспект В. О., 61

Для цитирования: *Калинина Е. А., Камачкин А. М., Степенко Н. А., Тамасян Г. Ш.* К вопросу о конструктивном критерии управляемости. Ч. I. Циклические инвариантные подпространства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 283–299.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.213

Ранг матрицы управляемости Калмана линейных систем зависит от базисов инвариантных циклических подпространств матрицы системы, порожденных столбцами матрицы управления. Детально исследован случай жордановой формы матрицы системы и скалярного управления. Показано, что размерность циклических подпространств определяется индексными номерами первых ненулевых элементов координатных блоков столбцов матрицы управления. Полностью раскрыто формирование базисов этих подпространств, на основании чего построен базис пространства конструктивной системы управления.

Ключевые слова: управляемость, структура систем, циклические инвариантные подпространства.

1. Введение. В теории управления вопрос управляемости системы, очевидно, связан с особенностями устройства самой системы. И зачастую знание структуры системы управления позволяет решать различные задачи управления значительно эффективнее, проще и технологичнее. В данной работе исследуются в основном алгебраические методы анализа и выявления структур систем управления.

Следуя классической задаче теории стабилизации движений [1–3], рассмотрим линейную систему с многомерным управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых переменных; управление $u \in \mathbb{R}^r$; постоянные матрицы A и B — вещественные, размерностей $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Будем считать, что матрица $B = \begin{bmatrix} B_1 \ \dots B_r \end{bmatrix}$ состоит из линейно независимых столбцов и система (1) полностью управляема [3]. Вектор управления u будем искать в виде

$$u = Cx \tag{2}$$

так, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчиво по Ляпунову. Матрицу C размерности $r \times n$ обычно называют *линейным регулятором*. Иными

* Результаты п. 4 получены в Институте проблем машиноведения РАН при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-71-10032).

словами, в задаче стабилизации необходимо найти линейный стационарный регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системе:

$$\dot{x} = \Big(A + BC\Big)x.$$

Для решения такой задачи часто используют переход в специальные системы координат, в которых система (1) принимает более простой — «канонический» — вид [4–6]. В основном все эти способы построения новых систем координат базируются на определенном выборе n линейно независимых столбцов из *матрицы управляемости*:

$$V_{\mathcal{K}} = \big[B\ AB\ \ldots A^{n-1}B\big].$$

Однако в данных подходах, как правило, не используют структуру формирования управляемости самой системы, определяемую связью матриц A и B.

Поясним эффективность использования структуры на простом примере. Матрица управляемости $V_{\mathcal{K}}$ состоит из r циклических цепочек вида

$$B_j, AB_j, \ldots, A^{n-1}B_j, \tag{3}$$

каждой из которых можно сопоставить число

$$d_j = \operatorname{rank}\big[B_j\ AB_j \ldots A^{n-1}B_j\big] \tag{4}$$

для всех $j = 1, \ldots, r$. В цепочках (3) линейно независимыми являются первые d_j векторов, а все следующие уже будут зависимыми с ними [7, с. 320]. Значения d_j несут в себе важную характеристику о всей системе управления (1), а точнее, о ее информационном наполнении, матрицах (A, B).

В частности, если хотя бы для одного столбца B_j величина d_j равна n, то очевидно, что исходную систему (1) можно свести к системе со скалярным управлением, т. е. перейти от пары (A, B) к паре (A, B_j). Для этого достаточно произвести замену управления $u = e_j v$, где $e_j \in \mathbb{R}^r$ — j-й единичный вектор, v — новое скалярное управление. В таком случае матрицу линейного регулятора C из (2) для исходного многомерного управления u можно записать так:

$$C = e_j \gamma^T V^{-1},$$

где $V = \big[B_j\ AB_j \ldots A^{n-1}B_j\big]$, а строка γ^T определяется согласно [1, с. 146].

Таким образом, определение и даже больше само формирование величин (4), а также связь отдельных базисов циклических цепочек (3) между собой и будут в том числе тем знанием структуры системы управления (1).

2. Представление циклических цепочек (3) **в жордановом базисе.** Проведем далее алгебраический анализ связи матричной пары (A, B). Для этого сначала рассмотрим вид матрицы B, состоящей из одного столбца. Построим базис инвариантного циклического подпространства матрицы A, порожденного вектором B, т. е., согласно [7, с. 320], при некотором натуральном числе d найдем совокупность линейно независимых векторов:

$$B,\ AB,\ \ldots,\ A^{d-1}B. \tag{5}$$

Изучим случай, когда известны матрица J — жорданова нормальная форма матрицы A и соответствующая ей матрица перехода S к жорданову базису, т. е.

$$J = S^{-1}AS = \operatorname{diag}\big\{J_1, \ldots, J_\sigma\big\}, \tag{6}$$

здесь J_i — нижние комплексные жордановы клетки порядков k_i, $i = 1, \ldots, \sigma$.

Тогда для вектора B справедливо представление

$$B = Sb,$$

т. е. элементы вектора b являются координатами вектора B в жордановом базисе. И, в силу $AS = SJ$, получим эквивалентную (5) цепочку Sb, SJb, $\ldots$, $SJ^{d-1}b$, на линейную независимость векторов которой матрица S не оказывает влияния. Поэтому исследуем далее только цепочку векторов, которую сразу соберем в общую матрицу:

$$M = \Big[b\, Jb\, \ldots\, J^{d-1}b\Big]. \tag{7}$$

Важно отметить, что структура жордановой матрицы J вида (6) задает однозначное разбиение вектора b на последовательные блоки $b^{(i)}$ длины k_i, т. е.

$$b = \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ \vdots \\ b^{(i)} \\ \vdots \\ b^{(\sigma)} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $b^{(i)} = \big(b_{m_{i-1}+1}, \ldots, b_{m_i}\big)^T$, в принятых обозначениях:

$$m_0 = 0,\ m_i = \sum_{s=1}^{i} k_s \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, \sigma, \quad \text{откуда} \quad m_\sigma = n. \tag{9}$$

Таким образом, совокупность векторов (7), собранная в матрицу M, в силу блочно-диагональной структуры как самой матрицы J, так и всех ее степеней, в свою очередь, построчно разбивается на группы строк, собранные вместе в матрицы M_i вида

$$M_i = \Big[b^{(i)}\, J_i b^{(i)}\, \ldots\, J_i^{d-1} b^{(i)}\Big]. \tag{10}$$

Столбцы матриц M_i образуют циклические цепочки векторов, порожденные векторами $b^{(i)}$ и соответствующими им жордановыми клетками J_i для всех $i = 1, \ldots, \sigma$.

3. Вклад собственных чисел в количество линейно независимых векторов циклической цепочки (7). Пусть λ — некоторое собственное число матрицы A. Введем индексное множество

$$\mathcal{N}(\lambda) = \Big\{ i \in \big\{1, \ldots, \sigma\big\} \,\Big|\, J_i = J_i(\lambda) \Big\},$$

где за $J_i(\lambda)$ обозначаются все жордановы клетки, отвечающие собственному числу λ. Очевидно, что количество элементов множества $\mathcal{N}(\lambda)$ равно геометрической кратности собственного числа λ.

Замечание 1. Если λ_1 и λ_2 — различные собственные числа матрицы A, то тогда индексные множества $\mathcal{N}(\lambda_1)$ и $\mathcal{N}(\lambda_2)$ не пересекаются. При этом объединение индексных множеств $\mathcal{N}(\lambda)$ по всем различным собственным числам матрицы A образует множество всех номеров жордановых клеток $\big\{1, \ldots, \sigma\big\}$.

Теперь для каждого собственного числа λ матрицы A рассмотрим только те жордановы клетки $J_i(\lambda)$, которые отвечают именно такому числу, а им, в свою очередь, сопоставим все блоки чисел $b^{(i)}$ и их цепочки (10) при $i \in \mathcal{N}(\lambda)$. Тогда для всех ненулевых таких блоков $b^{(i)}$ обозначим через μ_i порядковые номера первых ненулевых элементов в этих блоках, т. е. $b_{m_{i-1}+1} = \ldots = b_{m_{i-1}+\mu_i-1} = 0$, а число $b_{m_{i-1}+\mu_i} \neq 0$, где $\mu_i \in \{1, \ldots, k_i\}$ для всех $i \in \mathcal{N}(\lambda)$. Затем вычислим следующие значения:

$$\delta_i = k_i - \mu_i + 1 \quad \text{для всех} \quad i \in \mathcal{N}(\lambda). \tag{11}$$

Если же блок чисел $b^{(i)}$ полностью нулевой, то положим $\delta_i = 0$.

И, наконец, данному собственному числу λ сопоставим величину

$$\ell_\lambda = \max_{i \in \mathcal{N}(\lambda)} \big\{\delta_i\big\}. \tag{12}$$

Как будет показано далее, каждая такая величина ℓ_λ задает вклад собственного числа λ в количество линейно независимых векторов циклической цепочки (7).

Замечание 2. Указанное вычисление значений δ_i производится в случае нижних жордановых клеток. Для случая верхних жордановых клеток порядковые номера μ_i первых ненулевых элементов блоков $b^{(i)}$ отсчитываются снизу.

4. Формирование базиса циклического подпространства. Приведем вспомогательные леммы, в которых изучим вопрос линейной независимости векторов циклических цепочек вида (10), а также укажем структуру матриц, составленных из векторов этих цепочек.

4.1. Случай равных собственных чисел.

Лемма 1. *Пусть J_1 и J_2 — нижние жордановы клетки порядков k_1 и k_2, отвечающие одному собственному числу λ, векторы p и q — постоянные соответствующих этим клеткам размерностей, с ненулевыми первыми элементами, т. е.*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{k_1} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{k_2} \end{pmatrix},$$

где $p_1 q_1 \neq 0$ и $i = 1, 2$.

Тогда, считая $k_1 \geqslant k_2$, для любого натурального числа d ранг матрицы

$$M = \begin{bmatrix} p & J_1 p & \ldots & J_1^{d-1} p \\ q & J_2 q & \ldots & J_2^{d-1} q \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_p \\ M_q \end{pmatrix} \tag{13}$$

будет определяться равенством

$$\operatorname{rank} M = \min\big\{d, k_1\big\},$$

и среди всех строчек матрицы M линейно независимыми будут первые $\min\big\{d, k_1\big\}$ *строчек блока M_p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой жордановой клетки J_i верно разложение

$$J_i^s = \Big(\lambda E_i + I_i\Big)^s = \lambda^s E_i + C_s^1 \lambda^{s-1} I_i + \cdots + C_s^{s-1} \lambda I_i^{s-1} + I_i^s, \tag{14}$$

где E_i — единичные матрицы размерностей $k_i \times k_i$, а матрицы I_i — нильпотентные жордановы блоки [7, с. 338]:

$$I_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k_i \times k_i} = \Big[e_2 \; e_3 \; \ldots \; e_{k_i} \; \mathbf{0}\Big], \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

основные свойства которых указаны в [8, с. 24–26].

Тогда за счет разбиения на сумму слагаемых для любой степени жордановых клеток в (13) будет верно выражение

$$\begin{pmatrix} J_1^s p \\ J_2^s q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^s p \\ \lambda^s q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_s^1 \lambda^{s-1} I_1 p \\ C_s^1 \lambda^{s-1} I_2 q \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} C_s^{s-1} \lambda I_1^{s-1} p \\ C_s^{s-1} \lambda I_2^{s-1} q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1^s p \\ I_2^s q \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + C_s^1 \lambda^{s-1} \begin{pmatrix} I_1 p \\ I_2 q \end{pmatrix} + \dots + C_s^{s-1} \lambda \begin{pmatrix} I_1^{s-1} p \\ I_2^{s-1} q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1^s p \\ I_2^s q \end{pmatrix} \tag{16}$$

для каждого $s = 0, \dots, d-1$.

Теперь, согласно (16), элементарными преобразованиями столбцов матрицы M, не изменяющими ранга, приводим ее к виду

$$M_I(\lambda) = \begin{bmatrix} p & I_1 p & \dots & I_1^{d-1} p \\ q & I_2 q & \dots & I_2^{d-1} q \end{bmatrix}.$$

В силу того, что матрицы $I_i^{k_i}$ нулевые, матрицу $M_I(\lambda)$ в зависимости от значения степени d можно представить следующим образом.

1. Если $d > k_1$, то получим, что

$$M_I(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} P & \mathbf{0} \\ \hline Q & \mathbf{0} \end{array} \right)_{(k_1+k_2)\times d}, \tag{17}$$

где матрица

$$P = \left[p \ I_1 p \ \dots \ I_1^{k_1-1} p \right] = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{k_1} & \dots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}_{k_1 \times k_1} = p_1 E_1 + p_2 I_1 + \dots + p_{k_1} I_1^{k_1-1}, \tag{18}$$

а Q строится аналогично (18) на базе вектора q. Нулевые матрицы $\mathbf{0}$ имеют размерности $k_i \times (d - k_i)$. Матрицы P и Q являются нижнетреугольными теплицевыми или правильными нижнетреугольными [8, с. 454], как и будем их называть далее.

2. Если $d \leqslant k_1$, то имеем, что

$$M_I(\lambda) = \left(\begin{array}{c} P \\ \hline Q \mid \mathbf{0} \end{array} \right) \cdot \left[e_1 \ \dots \ e_d \right], \tag{19}$$

где данная запись просто означает выбор первых d столбцов из левой матрицы в произведении (19), здесь нулевая матрица $\mathbf{0}$ соответствующей размерности $k_2 \times (k_1 - k_2)$ будет отсутствовать, если $k_2 = k_1$.

Тогда, исходя из вида матрицы $M_I(\lambda)$, в случае (17) или (19), а также учитывая нижнетреугольный вид невырожденной матрицы P из (18), находим, что ее угловой минор порядка $\min\{d, k_1\}$ будет всегда ненулевым минором наивысшего порядка матрицы $M_I(\lambda)$, т. е. ее ранг и ранг исходной M будут равны $\min\{d, k_1\}$. ■

Замечание 3. Согласно доказательству леммы 1, значение собственного числа λ не оказывает влияния на величину рангов матриц M и $M_I(\lambda)$. Зависимость рангов этих матриц от числа λ заключается опосредованно в том, что собственное число λ

общее для жордановых клеток J_1 и J_2. Таким образом, ранг матрицы M, составленной построчно из нескольких циклических цепочек вида (10) для одного собственного числа λ, определяется, вообще говоря, максимальным значением величин δ_i $\big($см. (11)$\big)$.

4.2. Случай различных собственных чисел. В развитие леммы 1 рассмотрим теперь случай циклических цепочек вида (10) на основе жордановых клеток для разных собственных чисел. И чтобы излишне не усложнять следующие рассуждения, примем длину этих цепочек (10) равной сумме размерностей жордановых клеток.

Лемма 2. *Пусть J_1 и J_2 — нижние жордановы клетки порядков k_1 и k_2, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2, векторы p и q — постоянные соответствующих этим клеткам размерностей, с ненулевыми первыми элементами, $p_1 q_1 \neq 0$. Тогда, полагая, что*

$$d = k_1 + k_2,$$

получим, что ранг квадратной матрицы M, составленной, как в (13)*, для данного d, будет определяться равенством*

$$\operatorname{rank} M = d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (13), матрица M состоит из двух блоков строчек M_p и M_q, отвечающих различным собственным числам λ_1 и λ_2. Поэтому разложение, полностью аналогичное (16), выписать не удастся. Однако для каждой такой группы строк, в силу (14), верны выражения (на примере матрицы M_p)

$$J_1^s p = \Big(\lambda_1 E_1 + I_1\Big)^s p = \lambda_1^s p + C_s^1 \lambda_1^{s-1} I_1 p + \dots + C_s^{s-1} \lambda_1 I_1^{s-1} p + I_1^s p =$$

$$= \Big[p \ I_1 p \ \dots \ I_1^{k_1-1} p\Big] \cdot \Big(\lambda_1^s e_1 + C_s^1 \lambda_1^{s-1} I_1 e_1 + \dots + C_s^{s-1} \lambda_1 I_1^{s-1} e_1 + I_1^s e_1\Big) =$$

$$= \Big[p \ I_1 p \ \dots \ I_1^{k_1-1} p\Big]_{k_1 \times k_1} \cdot J_1^s e_1 = P \cdot J_1^s e_1 \tag{20}$$

для всех $s = 0, \dots, k_1 - 1$. В (20) для матрицы I_1, в силу (15), используется свойство, что вектор $I_1^s e_1 = e_{s+1}$, где единичные вектора $e_1, \dots, e_{s+1}$ размерности k_1. При этом для степени $s = k_1$ выполняется равенство

$$J_1^{k_1} p = J_1 \Big(J_1^{k_1-1} p\Big) = J_1 \Big(P \cdot J_1^{k_1-1} e_1\Big) = P \cdot J_1^{k_1} e_1,$$

так как жорданова клетка J_1 и правильная треугольная матрица P вида (18) являются коммутирующими, как функции полиномов от одной и той же матрицы I_1 [8, с. 24]. Окончательно замечаем, что

$$J_1^s p = P \cdot J_1^s e_1 \quad \text{для всех} \quad s \geqslant 0.$$

Тогда для матрицы M_p, очевидно, верно представление

$$M_p = \Big[p \ J_1 p \ \dots \ J_1^{d-1} p\Big] = P \Big[e_1 \ J_1 e_1 \ \dots \ J_1^{d-1} e_1\Big]_{k_1 \times d} = P \cdot \widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1). \tag{21}$$

И аналогично для матрицы M_q получаем, что

$$M_q = Q \Big[e_1 \ J_2 e_1 \ \dots \ J_2^{d-1} e_1\Big]_{k_2 \times d} = Q \cdot \widetilde{J}_{k_2}(\lambda_2),$$

где вектор e_1 своей размерности k_2, согласованной с матрицей J_2. Здесь квадратные правильные треугольные матрицы P, Q вида (18), а матрицы $\widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i)$ состоят только из первых столбцов степеней жордановых клеток порядков k_i собственных чисел λ_i:

$$\widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i) = \left[e_1 \, J_i e_1 \, \ldots \, J_i^{d-1} e_1\right] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i & \ldots & \lambda_i^{k_i-1} & \ldots & \lambda_i^{d-1} \\ 0 & 1 & \ldots & C^1_{k_i-1}\lambda_i^{k_i-2} & \ldots & C^1_{d-1}\lambda_i^{d-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & C^{k_i-1}_{d-1}\lambda_i^{d-k_i} \end{pmatrix}_{k_i \times d} \tag{22}$$

для $i = 1, 2$. Первый столбец любой степени жордановой клетки J_i^s, в силу представления (14) и вида степеней матрицы I_i^s, последовательно сверху вниз заполняется компонентами бинома Ньютона $(\lambda_i + 1)^s$, начиная со старшей степени λ_i^s. Для степеней $s = 0, \ldots, k_i - 1$ компоненты соответствующего бинома Ньютона выбираются полностью, возможные оставшиеся позиции в столбце $J_i^s e_1$ будут нулевыми, а для $s \geqslant k_i$ последняя позиция столбца $J_i^s e_1$ будет $C_s^{k_i-1}\lambda_i^{s-k_i+1}$, так как матрица $I_i^{k_i}$ нулевая.

Теперь сама матрица M вида (13) может быть выражена следующим образом:

$$M = \begin{pmatrix} M_p \\ M_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cdot \widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1) \\ Q \cdot \widetilde{J}_{k_2}(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1) \\ \widetilde{J}_{k_2}(\lambda_2) \end{pmatrix} = M_I(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \widetilde{J}, \tag{23}$$

где матрицы $M_I(\lambda_1, \lambda_2)$, $\widetilde{J}$ — квадратные порядка d.

Упростим квадратную матрицу $\widetilde{J}$, начиная с последнего столбца, вычтем из каждого столбца предшествующий, умноженный на λ_1, и далее, следуя [9, упр. 287], находим, что

$$\det\left(\widetilde{J}\right) = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^{k_1 k_2} \neq 0,$$

так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т. е. матрица $\widetilde{J}$ невырожденная и соответственно ее ранг равен ее размерности d. При этом квадратная блочно-диагональная матрица $M_I(\lambda_1, \lambda_2)$ также является невырожденной, в силу ненулевых элементов p_1 и q_1 полностью занимающих главные диагонали нижнетреугольных блоков P и Q вида (18). Отсюда определяем, что ранг матрицы M равен d. ■

Замечание 4. Представление матрицы M вида (23) верно и в случае совпадающих собственных чисел $\lambda_1 = \lambda_2$ (случай леммы 1). Квадратная матрица $M_I(\lambda_1, \lambda_2)$ остается по-прежнему невырожденной. Тогда ранг матрицы M определяется значением ранга квадратной матрицы $\widetilde{J}$, которая состоит из двух блоков строчек $\widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1)$ и $\widetilde{J}_{k_2}(\lambda_2)$ вида (22) для одного и того же собственного числа. Но ранг такой матрицы $\widetilde{J}$ будет задаваться большим блоком строчек из $\widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1)$, $\widetilde{J}_{k_2}(\lambda_2)$ и общим количеством столбцов d:

$$\operatorname{rank} M = \min\left\{d, \max\left\{k_1, k_2\right\}\right\}.$$

Замечание 5. Из представления (23) также следует, что число столбцов d матрицы M в лемме 2 может быть любым. Тогда ранг матрицы M вычисляется как

$$\operatorname{rank} M = \min\left\{d, k_1 + k_2\right\}.$$

5. Размерность циклических подпространств. Исследуем теперь, как формируется величина d вида (4) при учете связи элементов вектора B с матрицей A в их совместной циклической цепочке. Выявим эту связь через значения координат b_i вектора B в жордановом базисе.

Теорема 1. *Для любых матрицы A и вектора B максимальное количество линейно независимых векторов в циклической цепочке* (5) *равно*

$$d = \sum_{\lambda} \ell_{\lambda}, \tag{24}$$

где суммирование берется по всем различным собственным числам λ матрицы A, а сами значения ℓ_{λ} определяются по формулам (12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольные матрицу A и вектор B. Сформируем их циклическую цепочку векторов вида (5) максимальной длины n. При переходе в систему координат жорданового базиса получим цепочку (7) и матрицу M. Тогда искомая величина d будет равна рангу матрицы M. В свою очередь, уже матрица M состоит из последовательных наборов строк M_i, циклических цепочек (10), образованных своими блоками элементов $b^{(i)}$ вида (8).

Следовательно, согласно лемме 2, для каждого такого блока M_i будет верно свое представление (21), т. е. $M_i = P_i \widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i)$, где матрицы $\widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i)$ стандартного вида (22) размерности $k_i \times n$, а матрицы P_i правильной нижнетреугольной формы (18):

$$P_i = \left[b^{(i)} \ I_i b^{(i)} \ \dots \ I_i^{k_i-1} b^{(i)} \right]_{k_i \times k_i}, \tag{25}$$

здесь матрицы I_i такие же, как (15). Тогда, согласно (23), сама матрица M будет представляться так:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \cdot \widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ P_\sigma \cdot \widetilde{J}_{k_\sigma}(\lambda_\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{J}_{k_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ \widetilde{J}_{k_\sigma}(\lambda_\sigma) \end{pmatrix} = M_I \cdot \widetilde{J}, \tag{26}$$

где матрицы $M_I = \operatorname{diag}\{P_1, \dots, P_\sigma\}$ и $\widetilde{J}$ размерностей $n \times n$.

Так как какой-либо блок чисел $b^{(i)}$ может быть полностью нулевым, то и порождаемая им матрица P_i будет также нулевой и, следовательно, нулевым будет весь блок строчек M_i. Если блок $b^{(i)}$ не является полностью нулевым, то, следуя (8), опишем его следующим образом:

$$b^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{b}^{(i)} \end{pmatrix},$$

здесь $\tilde{b}^{(i)} = \left(b_{m_{i-1}+\mu_i}, \dots, b_{m_i} \right)^T$ при некотором $\mu_i \in \{1, \dots, k_i\}$ — порядковом номере первого ненулевого элемента $b_{m_{i-1}+\mu_i} \neq 0$ в блоке $b^{(i)}$. В ненулевом блоке $\tilde{b}^{(i)}$, рассматриваемом как отдельный вектор размерности $\delta_i = k_i - \mu_i + 1$, первый его элемент всегда ненулевой. В таком случае правильная треугольная матрица P_i примет вид

$$P_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \widetilde{P}_i & \mathbf{0} \end{array} \right)_{k_i \times k_i}$$

при $\widetilde{P}_i = \left[\tilde{b}^{(i)} \ \tilde{I}_i \tilde{b}^{(i)} \ \dots \ \tilde{I}_i^{\delta_i - 1} \tilde{b}^{(i)} \right]$, где уже матрица $\widetilde{P}_i$ размерности $\delta_i \times \delta_i$ будет невырожденной правильной треугольной, а матрица $\tilde{I}_i$ прежнего типа (15).

Тогда ненулевой строковый блок M_i может быть записан как

$$M_i = P_i \cdot \widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \widetilde{P}_i & \mathbf{0} \end{array}\right) \cdot \widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \widetilde{P}_i \cdot \widetilde{J}_{\delta_i}(\lambda_i) \end{array}\right),$$

где матрица $\widetilde{J}_{\delta_i}(\lambda_i)$ вида (22) и просто состоит из первых δ_i строк матрицы $\widetilde{J}_{k_i}(\lambda_i)$.

Таким образом, перемножение матриц M_I и $\widetilde{J}$ в (26) сохранит нулевые строки матрицы M_I в общем результате — матрице M. Отбрасывая эти нулевые строки, получаем матрицу равного ранга матрице M:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \cdot \widetilde{J}_{\delta_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_\sigma \cdot \widetilde{J}_{\delta_\sigma}(\lambda_\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{P}_\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{J}_{\delta_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ \widetilde{J}_{\delta_\sigma}(\lambda_\sigma) \end{pmatrix} = \widetilde{M}_I \cdot \widetilde{J}_\delta.$$

Здесь уже матрица $\widetilde{M}_I$ размерности $\sum\limits_{i=1}^{\sigma} \delta_i \times \sum\limits_{i=1}^{\sigma} \delta_i$ будет невырожденной, в силу своей блочно-диагональной структуры, с невырожденными правильными треугольными матрицами $\widetilde{P}_i$ для тех номеров $i \in \{1, \ldots, \sigma\}$, которые отвечают ненулевым блокам $b^{(i)}$.

Следовательно, ранг матрицы $\widetilde{M}$ будет определяться исключительно рангом матрицы $\widetilde{J}_\delta$ размерности $\sum\limits_{i=1}^{\sigma} \delta_i \times n$, который, в силу вида (22) блоков $\widetilde{J}_{\delta_i}(\lambda_i)$, формируется наибольшими по количеству строк блоками $\widetilde{J}_{\delta_i}(\lambda_i)$ по всем различным собственным числам λ_i (см. замечание 4), т. е. количество линейно независимых строк такой группы блоков строк будет определяться значением ℓ_λ по формулам (12). А строки таких наибольших блоков $\widetilde{J}_{\delta_i}(\lambda_i)$ будут, согласно лемме 2, линейно независимыми между собой, т. е. сумма всех величин ℓ_λ по разным λ и будет рангом

$$d = \operatorname{rank} M = \operatorname{rank} \widetilde{M} = \sum_{\lambda} \max_{i \in \mathcal{N}(\lambda)} \{\delta_i\} = \sum_{\lambda} \ell_\lambda,$$

где суммирование берется по всем различным собственным числам λ. ■

Таким образом, полученное в (24) значение d устанавливает размерность циклических подпространств (5) и (7). Число d линейно независимых векторов этих циклических цепочек полностью определяется исключительно номерами первых ненулевых элементов блоков $b^{(i)}$ вида (8). Причем вне зависимости от выбора жорданова базиса S сами значения таких первых ненулевых элементов на величину d никак не влияют. Однако элементы координатных блоков $b^{(i)}$ собирают правильные треугольные матрицы, которые в блочно-диагональном составе образуют «структурную матрицу» M_I в разложении (26) исходной матрицы M всей циклической цепочки (7). Данная матрица M_I является весьма важной, так как отражает в себе связь вектора b с составом жордановых клеток матрицы J. При этом вся информация о собственных числах поглощается исключительно матрицей $\widetilde{J}$.

6. О взаимосвязи жордановых базисов в случае единичных геометрических кратностей всех собственных чисел. Исследуем связь разных жордановых базисов матрицы A, когда геометрические кратности всех ее собственных чисел равны единице.

Рассмотрим различные невырожденные матрицы S и $\bar{S}$, приводящие матрицу A с собственными числами единичной геометрической кратности к жордановой матрице J:

$$S^{-1}AS = \bar{S}^{-1}A\bar{S} = J = \operatorname{diag}\{J_1, \ldots, J_\sigma\}, \tag{27}$$

где все жордановы клетки J_i порядков k_i отвечают разным собственным числам λ_i, т. е. $J_i = J_i(\lambda_i)$, при $i = 1, \ldots, \sigma$. Далее будем называть эти матрицы S и $\bar{S}$ напрямую — жордановыми базисами, отвечающими матрице A.

Теорема 2. *Для любой различной пары жордановых базисов S и $\bar{S}$, отвечающих матрице A с собственными числами единичной геометрической кратности, матрица перехода между ними*

$$\Theta = S^{-1}\bar{S} = \operatorname{diag}\{\Theta_1, \ldots, \Theta_\sigma\} \tag{28}$$

является блочно-диагональной с матрицами диагональных блоков Θ_i — правильной треугольной формы вида (18)*, той же размерности $k_i \times k_i$, что и соответствующие им жордановы клетки J_i.*

Доказательство. Каким бы образом матрицы S и $\bar{S}$ не были получены, структура их столбцов соответствует разбиению самой жордановой матрицы J на клетки J_i, и каждая группа столбцов, отвечающая своей жордановой клетке, образует собой базис инвариантного циклического подпространства. Тогда условие различности двух базисов S и $\bar{S}$ будет означать, что, по крайней мере, для одного элементарного делителя матрицы A

$$(\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \tag{29}$$

максимальной степени k_i — алгебраической кратности числа λ_i (следует из условия равенства единице его геометрической кратности) и отвечающей ему жордановой клетки J_i, соответствующие жордановы цепочки векторов из базисов S и $\bar{S}$

$$S_{m_{i-1}+1}, \ldots, S_{m_i} \quad \text{и} \quad \bar{S}_{m_{i-1}+1}, \ldots, \bar{S}_{m_i} \tag{30}$$

будут различны, и согласно (9), $m_i = m_{i-1} + k_i$. Эти две группы векторов (30), представляя собой разные базисы циклического инвариантного подпространства данного элементарного делителя (29), удовлетворяют равенствам (с учетом структуры нижней жордановой клетки) [8, с. 189]:

$$\begin{aligned} &(A-\lambda_i E)S_{m_{i-1}+1} = S_{m_{i-1}+2}, \ldots, (A-\lambda_i E)S_{m_{i-1}+k_i-1} = S_{m_i}, (A-\lambda_i E)S_{m_i} = \mathbf{0}, \\ &(A-\lambda_i E)\bar{S}_{m_{i-1}+1} = \bar{S}_{m_{i-1}+2}, \ldots, (A-\lambda_i E)\bar{S}_{m_{i-1}+k_i-1} = \bar{S}_{m_i}, (A-\lambda_i E)\bar{S}_{m_i} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{31}$$

Из условия равенства единице геометрической кратности собственного числа λ_i следует, что размерность его собственного пространства также равна единице, поэтому его собственные векторы S_{m_i} и $\bar{S}_{m_i}$ являются линейно зависимыми, т. е. верно соотношение

$$\bar{S}_{m_i} = \alpha_1^{(i)} S_{m_i}, \quad \alpha_1^{(i)} \neq 0. \tag{32}$$

Равенство (32) неминуемо влечет за собой утверждение, что все векторы (30) будут представимы в виде линейных комбинаций:

$$\bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+1} = \sum_{s=1}^{j} \alpha_s^{(i)} S_{m_{i-1}+k_i+s-j}, \quad j = 1, \ldots, k_j, \tag{33}$$

где каждый $\alpha_j^{(i)}$ фиксируется после своей идентификации на j-м шаге, причем значения $\alpha_j^{(i)}$ при $j = 2, \dots, k_i$ уже могут быть нулевыми.

Действительно, рассмотрим сразу j-й шаг ($j \geqslant 2$), перепишем (33) как

$$\bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+1} = \sum_{s=1}^{j-1} \alpha_s^{(i)} S_{m_{i-1}+k_i+s-j} + \alpha_j^{(i)} S_{m_i}$$

и будем считать, что все коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{j-1}^{(i)}$ определены на предыдущих $j-1$ шагах, причем, в силу (32), коэффициент $\alpha_1^{(i)}$ обязательно ненулевой. Тогда рассмотрим вектор вида

$$\bar{S} = \bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+1} - \sum_{s=1}^{j-1} \alpha_s^{(i)} S_{m_{i-1}+k_i+s-j}.$$

Если он сразу нулевой, то, следовательно, коэффициент $\alpha_j^{(i)} = 0$ в представлении (33). Если вектор $\bar{S}$ ненулевой, то найдем его отображение оператором $\big(A - \lambda_i E\big)$, которое, в силу (31) и выполнимости (33) для предыдущего шага $j-1$, будет таким:

$$\begin{gathered}\big(A - \lambda_i E\big)\bar{S} = \big(A - \lambda_i E\big)\bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+1} - \sum_{s=1}^{j-1} \alpha_s^{(i)} \big(A - \lambda_i E\big) S_{m_{i-1}+k_i+s-j} = \\ = \bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+2} - \sum_{s=1}^{j-1} \alpha_s^{(i)} S_{m_{i-1}+k_i+s-j+1} = \bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+2} - \bar{S}_{m_{i-1}+k_i-j+2} = \mathbf{0},\end{gathered}$$

т. е. вектор $\bar{S}$ является собственным вектором числа λ_i. Тогда, как и в (32), получаем, что

$$\bar{S} = \alpha_j^{(i)} S_{m_i}, \quad \alpha_j^{(i)} \neq 0,$$

и снова представление (33) для j-го шага будет верным, но уже для этого $\alpha_j^{(i)}$.

Таким образом, справедливость разложения (33) столбцов (30) базиса $\bar{S}$ по соответствующим им столбцам (30) базиса S (общей жордановой клетки) основывается на верности первого представления (32), откуда и следует важность ненулевого первого коэффициента $\alpha_1^{(i)}$.

Теперь рассмотрим произведение (28) раздельно по столбцам матрицы $\bar{S}$, сразу для блока столбцов (30) этого базиса:

$$\begin{gathered} S^{-1}\bar{S} \cdot \Big[e_{m_{i-1}+1} \, \dots \, e_{m_i}\Big] = \Big[S^{-1}\bar{S}_{m_{i-1}+1} \, \dots \, S^{-1}\bar{S}_{m_i}\Big] = \\ = \Big[S^{-1}\big(\alpha_1^{(i)} S_{m_{i-1}+1} + \dots + \alpha_{k_i}^{(i)} S_{m_i}\big) \, \dots \, S^{-1}\alpha_1^{(i)} S_{m_i}\Big] = \\ = \Big[\big(\alpha_1^{(i)} e_{m_{i-1}+1} + \dots + \alpha_{k_i}^{(i)} e_{m_i}\big) \, \dots \, \alpha_1^{(i)} e_{m_i}\Big] = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \Theta_i \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right)_{n \times k_i}, \end{gathered} \tag{34}$$

где матрица Θ_i правильной треугольной формы занимает строки $m_{i-1}+1, \dots, m_i$.

Поступая аналогичным образом для всех пар наборов базисных векторов (30), находим, что соответствующие им произведения (34) группируются по столбцам в блочно-диагональную матрицу (28), а так как все элементы главной диагонали $\alpha_1^{(i)} \neq 0$, то следует, что матрица Θ невырожденная. ■

7. Структура связи пары (A, B) в случае единичных геометрических кратностей всех собственных чисел. По-прежнему будем исследовать случай матрицы A, когда все ее собственные числа единичной геометрической кратности. Заметим, что для двух различных жордановых базисов S и $\bar{S}$ матрицы A уже векторы $b = S^{-1}B$ и $\bar{b} = \bar{S}^{-1}B$ будут, вообще говоря, различные. А тогда и матрица M_I, и матрица $\bar{M}_I$ из представления (26), формирующиеся, согласно (25), из элементов векторов b и $\bar{b}$ соответственно, будут также разными. Рассмотрим связь между такими матрицами M_I и $\bar{M}_I$ жордановых базисов S и $\bar{S}$.

Теорема 3. *Для любой пары жордановых базисов S и $\bar{S}$, отвечающих матрице A с собственными числами единичной геометрической кратности, и вектора B, определяющего в данных базисах соответственно матрицы M_I и $\bar{M}_I$, будет верно равенство*

$$M_I = \Theta \bar{M}_I, \tag{35}$$

где матрица Θ определяется, как и в (28).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу своих построений, отвечающих структуре общей жордановой матрицы J, все матрицы из выражения (35) являются блочно-диагональными, одинаковых количества, размерностей и порядка расположения диагональных блоков, правильной треугольной формы. Поэтому покажем выполнение (35) поблочно:

$$P_i = \Theta_i \bar{P}_i, \quad i = 1, \ldots, \sigma. \tag{36}$$

Сначала заметим, что из блочной диагональности матрицы Θ вида (28) вытекает, что

$$\Theta\, \bar{b} = S^{-1}\bar{S} \cdot \bar{S}^{-1}B = S^{-1}B = b,$$

откуда поблочно $\Theta_i \bar{b}^{(i)} = b^{(i)}$.

Далее, так как правильные треугольные вида (18) матрицы Θ_i и матрицы I_i являются коммутирующими, как функции полиномов от одних и тех же матриц I_i, находим, что

$$\Theta_i \bar{P}_i = \Theta_i \cdot \left[\bar{b}^{(i)}\ I_i \bar{b}^{(i)}\ \ldots\ I_i^{k_i - 1} \bar{b}^{(i)}\right] = \left[\Theta_i \bar{b}^{(i)}\ I_i \Theta_i \bar{b}^{(i)}\ \ldots\ I_i^{k_i - 1} \Theta_i \bar{b}^{(i)}\right] =$$

$$= \left[b^{(i)}\ I_i b^{(i)}\ \ldots\ I_i^{k_i - 1} b^{(i)}\right] = P_i \quad \text{при всех} \quad i = 1, \ldots, \sigma.$$

Таким образом, будет выполняться и общее утверждение (35). ■

Замечание 6. Из невырожденности матрицы Θ, в силу (28), и соответственно всех ее диагональных блоков Θ_i следует, что матрицы P_i и $\bar{P}_i$, связанные отношением (36), одинаковых рангов. А учитывая правильную треугольную форму (25) этих матриц, получаем, что первые ненулевые элементы $b_{m_{i-1}+\mu_i}$ и $\bar{b}_{m_{i-1}+\bar{\mu}_i}$ (если они есть) в блоках $b^{(i)}$ и $\bar{b}^{(i)}$ занимают одинаковые номера, т. е. $\mu_i = \bar{\mu}_i$ для всех $i = 1, \ldots, \sigma$. Откуда и ранг матрицы M_I определяется исключительно исходным вектором B и не зависит от выбора жорданова базиса S, порождающего эту матрицу M_I.

Теорема 4. *Для любого жорданова базиса S, отвечающего матрице A с собственными числами единичной геометрической кратности, и вектора B, определяющего матрицу M_I, матрица*

$$R = S M_I \tag{37}$$

задается единственным образом, никоим образом не зависящим от выбора базиса S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для указанного случая матрицы A возьмем два любых различных жордановых базиса S и $\bar{S}$. Тогда, в силу представлений (28) и (35), находим, что

$$\bar{S}\bar{M}_I = S\Theta \cdot \Theta^{-1}M_I = SM_I = R,$$

т. е. матрица R определяется единственным образом, вне зависимости от выбора жорданова базиса. ■

Проведенное алгебраическое исследование структуры связи матрицы A и вектора B, порождающего циклическое инвариантное подпространство базиса (5), позволяет выявить алгебраическую структуру системы управления (1) и более эффективнее и технологичнее решать задачи теории управления, в частности задачи стабилизации движений системы (1).

8. Конструктивные системы управления. Результат теоремы 1 и лемм 1, 2 полностью раскрывает структуру управляемости системы (1) в пространстве жорданова базиса и скалярного управления u, а также обусловливает основной подход в методах определения структуры системы управления (1) в случае многомерного управления.

Рассмотрим случай скалярного управления u для систем следующего вида:

$$\dot{y} = Jy + bu, \tag{38}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых переменных и постоянный вектор управления b — вещественный, размерности $n \times 1$; постоянная матрица системы J есть вещественная жорданова нормальная форма вида (27) размерности $n \times n$.

Будем далее считать, что все нижние жордановы клетки матрицы J отвечают вещественным собственным числам. Данное ограничение используется только для упрощения демонстрации применения результата теоремы 1 и выявленной структурной матрицы M_I, так как случай вещественной жордановой формы матрицы для комплексно-сопряженных пар собственных чисел требует отдельного изучения, но не носит принципиального характера.

Понятно, что при известности матрицы S для некоторой системы вида (1) скалярного управления сама система (38) будет соответствовать системе (1) при переводе переменных x системы (1) в жорданов базис S заменой $x = Sy$.

Будем считать, что система (38) полностью управляема. Тогда неизбежно следует, что матрица управляемости Калмана [3], в данном случае $V_{\mathcal{J}} = M$ вида (7), состоит из n линейно независимых столбцов — циклической цепочки порождающего вектора b. Но это означает, согласно теореме 1, что для всех различных собственных чисел λ_i их вклады ℓ_{λ_i} в значение ранга матрицы $V_{\mathcal{J}}$ должны равняться алгебраическим кратностям соответствующих собственных чисел. А такое, в силу леммы 1, возможно, если геометрическая кратность каждого собственного числа равна единице, что и будем принимать для системы (38) из-за исходного требования о полной управляемости.

Более того, раз геометрические кратности всех собственных чисел равны единице, то сама жорданова матрица J вида (27) состоит только из жордановых клеток $J_i(\lambda_i)$, различных собственных чисел λ_i, размерностей k_i — алгебраических кратностей своих собственных чисел. Тогда получаем, что из условия полной управляемости системы (38) и теоремы 1 необходимо выполнение равенств

$$\ell_{\lambda_i} = \delta_i = k_i \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, \sigma.$$

А это, в силу (11), возможно только, если первые элементы всех блоков $b^{(i)}$ являются ненулевыми.

Окончательно находим, что матрица M_I из представления (26) матрицы M является блочно-диагональной с невырожденными диагональными, правильной треугольной формы блоками P_i, у которых главные диагонали состоят из $b_{m_{i-1}+1} \neq 0$, где значения m_{i-1} определяются по формулам (9) и, следовательно, сама матрица M_I также невырожденная. При этом каждые пары матриц P_i и J_i коммутирующие, как функции полиномов от одних и тех же матриц I_i, т. е. и общие блочно-диагональные матрицы также коммутирующие:

$$JM_I = M_I J.$$

Тогда, производя замену переменных $y = M_I z$, переводим систему (38) к виду

$$\dot{z} = Jz + b_e u, \tag{39}$$

где

$$b_e = M_I^{-1} b = \begin{pmatrix} e_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ e_1^{(k_\sigma)} \end{pmatrix}.$$

Здесь $e_1^{(k_i)}$ — первые единичные векторы размерности k_i и весь вектор b_e однозначно задается самой жордановой матрицей системы J, т. е. вектор b_e содержит единицы на позициях $(m_{i-1} + 1)$ номеров первых строк жордановых клеток J_i, а остальные его элементы нулевые.

Полученная система (39) полностью аналогична системе критерия полной управляемости [10, с. 321 (8°)] для случая скалярного управления системы (1). Требуемая единственная матрица R, переводящая заменой переменных $x = Rz$ систему (1) к системе (39), в данном случае с учетом полного выполнения условий теоремы 4 будет представляться в виде (37).

Определение. Систему (39) будем называть *конструктивной системой управления* для систем вида (38) в случае их полной управляемости.

С точки зрения решения задач управляемости система (39) является определяющей по отношению ко всем системам (38), так как эти задачи достаточно решить один раз для системы (39) и просто перенести полученное решение на любую систему вида (38). Покажем это на примере нахождения линейного регулятора (2).

Найдем, согласно [1, с. 146], стабилизирующее управление для системы (39) вида $u = \gamma^T z$, а затем для любой системы (38) получим соответствующее стабилизирующее управление (2):

$$u = \gamma^T M_I^{-1} y = Cy.$$

Понятно, что решение данной задачи для системы (39) наиболее простое и, что еще более существенно, оно является базовым решением для всех систем (38).

Также стоит отметить, что для систем (38) в случае единичных геометрических кратностей всех собственных чисел структурная матрица M_I, по сути, является матрицей управляемости, так как полная управляемость такой системы будет тогда и только тогда, когда матрица M_I будет невырожденной. Отсюда следует существование единственной матрицы $R = M_I$ из критерия полной управляемости [10, с. 321 (8°)].

9. Заключение. Предложенная в леммах 1, 2 и теореме 1 технология формирования базиса циклических цепочек (5) полностью объясняет зависимость максимального количества d линейно независимых векторов этой цепочки от представления вектора B в жордановом базисе S, отвечающем матрице A. Ключевой особенностью такой зависимости, выявленной в настоящей работе, является правильная треугольная форма матриц коэффициентов координатных блоков вектора b.

Показано, что базис инвариантных циклических подпространств задается исключительно структурой жордановой нормальной формы матрицы и координатным расположением в жордановом базисе порождающего вектора циклической цепочки данного базиса. Причем циклической цепочке векторов исходного базиса вида (5) сопоставляется система циклических цепочек упрощенной структуры (25), порожденных отдельными блоками $b^{(i)}$ и матрицами I_i, из разложений соответствующих жордановых клеток (14), которые состоят только из единичной поддиагонали. Полученная система упрощенных циклических цепочек представляет собой важную «структурную» матрицу M_I алгебраической пары: матрицы A и вектора B.

Показана значимость выявленной алгебраической структуры пары (A, B) при исследовании управляемости системы управления (1) в случае скалярного управления. На примере задачи стабилизации движений системы (1) продемонстрирована конструктивная эффективность использования структурной матрицы M_I в случае систем вида (38).

Литература

1. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение, 1966. 352 с.

2. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 307 с.

3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем / пер. с англ. Э. Л. Наппельбаума; под ред. Я. З. Цыпкина. Изд. 4. М.: Едиториал УРСС, 2010. 398 с.

4. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 421 с.

5. *Камачкин А. М., Степенко Н. А., Хитров Г. М.* К теории конструктивного построения линейного регулятора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 3. С. 326–344. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309

6. *Kalinina E., Smol'kin Y., Uteshev A.* Robust schur stability of a polynomial matrix family // CASC 2019. LNCS. Vol. 11661 / eds by M. England, W. Koepf, T. M. Sadykov, W. M. Seiler, E. V. Vorozhtsov. Cham: Springer, 2019. P. 262–279. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_18

7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 416 с.

8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

9. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. Изд. 10. М.: Наука, 1972. 304 с.

10. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем / пер. с рум. А. Х. Гелига, Э. В. Яковлевой; под ред. В. А. Якубовича. М.: Наука, 1970. 453 с.

Статья поступила в редакцию 30 января 2023 г.
Статья принята к печати 25 апреля 2023 г.

Контактная информация:

Калинина Елизавета Александровна — д-р физ.-мат. наук, проф.; ekalinina69@gmail.com

Камачкин Александр Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; akamachkin@mail.ru

Степенко Николай Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; nick_st@mail.ru

Тамасян Григорий Шаликович — канд. физ.-мат. наук, доц.; grigoriytamasjan@mail.ru

On the question of a constructive controllability criterion.
Pt I. Cyclic invariant subspaces*

E. A. Kalinina[1], *A. M. Kamachkin*[1], *N. A. Stepenko*[1], *G. Sh. Tamasyan*[2,3]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Mozhaisky Military Space Academy, 13, Zhdanovskaya ul., St. Petersburg, 197082, Russian Federation
[3] Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Kalinina E. A., Kamachkin A. M., Stepenko N. A., Tamasyan G. Sh. On the question of a constructive controllability criterion. Pt I. Cyclic invariant subspaces. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 283–299. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.213 (In Russian)

The rank of the Kalman's controllability matrix of linear systems depends on the bases of the invariant cyclic subspaces of the state matrix generated by the columns of the input matrix. The case of the Jordan form of the state matrix and scalar control is studied in detail. It is shown that the dimension of cyclic subspaces is determined by the index numbers of the first non-zero elements of the coordinate blocks of the columns of the input matrix. The formation of the bases of these subspaces is completely disclosed. Based on this, the basis of the space of a constructive control system is constructed.

Keywords: controllability, system structure, cyclic invariant subspaces.

References

1. Zubov V. I. *Teoriia optimal'nogo upravleniia sudnom i drugimi podvizhnymi ob"ektami* [*Theory of optimal control of a ship and other mobile objects*]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1966, 352 p. (In Russian)

2. Smirnov E. Ya. *Stabilizatsiia programmnykh dvizhenii* [*Stabilization of program movements*]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 1997, 307 p. (In Russian)

3. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. *Topics in mathematical system theory.* Second ed. New York, McGraw-Hill Book Company Publ., 1969, 358 p. (Rus. ed.: Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A. Ocherki po matematicheskoi teorii sistem Moscow, Editorial URSS Publ., 2010, 398 p.)

4. Leonov G. A., Shumafov M. M. *Metody stabilizatsii lineinykh upravliaemykh sistem* [*Methods of stabilization of linear controlled systems*]. St. Petersburg, Saint Petersburg University Press, 2005, 421 p. (In Russian)

5. Kamachkin A. M., Stepenko N. A., Chitrov G. M. K teorii konstruktivnogo postroeniia lineinogo reguliatora [On the theory of constructive construction of a linear controller]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, vol. 16, iss. 3, pp. 326–344. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.309 (In Russian)

6. Kalinina E., Smol'kin Y., Uteshev A. Robust schur stability of a polynomial matrix family. *CASC 2019. LNCS*, vol. 11661. Eds by M. England, W. Koepf, T. M. Sadykov, W. M. Seiler, E. V. Vorozhtsov. Cham, Springer Publ., 2019, pp. 262–279. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2_18

7. Faddeev D. K. *Lektsii po algebre* [*Lectures in algebra*]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 416 p. (In Russian)

8. Gantmacher F. R. *Teoriia matrits* [*The theory of matrices*]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian)

9. Faddeev D. K., Sominskii I. S. *Sbornik zadach po vysshei algebre* [*A collection of exercises in higher algebra*]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 304 p. (In Russian)

10. Popov V. M. *Giperustoichivost' avtomaticheskikh sistem* [*Hyperstability of automatic systems*]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 453 p. (In Russian)

* The results of Section 4 were obtained in the Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences with the support of the Russian Science Foundation (project N 20-71-10032).

Received: January 30, 2023.
Accepted: April 25, 2023.

Authors' information:

Elizaveta A. Kalinina — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; ekalinina69@gmail.com

Alexander M. Kamachkin — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; akamachkin@mail.ru

Nikolai A. Stepenko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; nick_st@mail.ru

Grigoriy Sh. Tamasyan — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; grigoriytamasjan@mail.ru