

Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи*

В. В. Мазалов, В. А. Хитрая

Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр Российской академии наук»,
Российская Федерация, 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Петрозаводский государственный университет, Российская Федерация,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Для цитирования: Мазалов В. В., Хитрая В. А. Ранжирование вершин графа с использованием абсолютных потенциалов узлов электрической цепи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 233–250. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.209>

Предлагается метод ранжирования вершин графа на основе законов Кирхгофа для определения потенциалов электрической сети. Граф представляется в виде электрической сети, где веса ребер интерпретируются как электрические проводимости. Затем ток последовательно подается во все вершины и каждый раз определяются ранги вершин в соответствии с их потенциалами. Для окончательного ранжирования предлагается применять методы теории голосования на основе турнирной матрицы. Работа алгоритма ранжирования проиллюстрирована на численных примерах, связанных с графами конкретных транспортных сетей и графами взаимодействий муравьиной колонии.

Ключевые слова: граф, меры центральности, ранжирование, законы Кирхгофа, транспортный граф, модель электрической цепи.

1. Введение. Центральность вершины — одно из ключевых понятий при исследовании структурных характеристик графа. Мера центральности демонстрирует, насколько важна вершина для графа в целом, насколько удачно она расположена на путях, соединяющих вершины графа, является ли она ключевой для поддержания связей между остальными вершинами. Центральность вершины графа имеет большое значение для анализа социальных сетей, транспортных систем, электрических и других сетей.

Для оценки центральности вершин графа могут быть использованы различные метрики. В ряде работ применяются методы, основанные на использовании модели электрической цепи и законов Кирхгофа [1, 2]. Граф рассматривается как электрическая цепь с идеальными элементами, вершины графа являются узлами электрической цепи, ребра — проводниками электрического тока с известной пропускной способностью. Через цепь, заземленную в некоторой вершине, пропускается электрический ток. В работах [1, 3, 4] в основе вычислений лежат токи, протекающие через исследуемую вершину. В данной работе предлагается для оценки центральности использовать ранги вершин графа, основанные на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи, вычисленных с помощью правил Кирхгофа.

При анализе структуры графов могут быть применены методы теории кооперативных игр [5, 7]. В этом случае можно использовать методы теории голосования,

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-20015), проводимого совместно с органами власти Республики Карелия, и Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

когда ранжирование вершин производится на основе турнирной матрицы [8], а в простейшем случае после вычисления абсолютных потенциалов — правило Борда [9].

Статья построена следующим образом. В п. 2 описана общая схема нахождения абсолютных потенциалов вершин графа, в п. 3 рассмотрены частные случаи нахождения рангов вершин для графа-звезды, двойной звезды и полного двудольного графа. В п. 4 приведены результаты вычислительных экспериментов. С помощью предлагаемого подхода проанализирована транспортная система Петрозаводска.

2. Ранжирование вершин графа, основанное на правилах Кирхгофа.

Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E, W)$, где V — множество n вершин графа, E — множество ребер графа, W — матрица весов ребер:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & w_{23} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф G не является ориентированным, т. е. $w_{ij} = w_{ji}$. Веса ребер интерпретируются как пропускная способность ребер. На основе матрицы весов можно построить диагональную матрицу степеней вершины D , где $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$. Матрица $L = D - W$ называется матрицей Кирхгофа графа G и имеет вид

$$L(G) = \begin{pmatrix} d_1 & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & d_2 & -w_{23} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим граф G' , полученный путем добавления искусственной вершины с номером $n + 1$, соединенной со всеми вершинами исходного графа ребрами с одинаковой пропускной способностью δ (рис. 1).

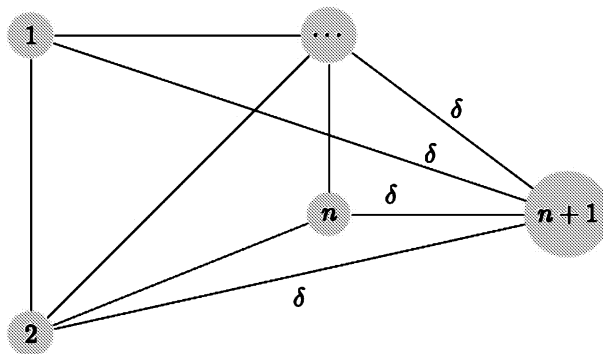


Рис. 1. Граф G'

Тогда матрица Кирхгофа для графа G' примет следующий вид:

$$L(G') = \begin{pmatrix} d_1 + \delta & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} & -\delta \\ -w_{21} & d_2 + \delta & -w_{23} & \dots & -w_{2n} & -\delta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n + \delta & -\delta \\ -\delta & -\delta & -\delta & \dots & -\delta & \delta n \end{pmatrix}.$$

Поскольку данная матрица является вырожденной, для вычислений потенциалов необходимо удалить строку и столбец, соответствующие искусственно добавленной вершине:

$$\tilde{L}(G') = \begin{pmatrix} d_1 + \delta & -w_{12} & -w_{13} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & d_2 + \delta & -w_{23} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & -w_{n3} & \dots & d_n + \delta \end{pmatrix}.$$

Пусть единица электрического тока подается в некоторый узел v_k ($k = 1, \dots, n$) электрической цепи, которая заземлена в вершине v_{n+1} . Тогда, согласно правилам Кирхгофа, абсолютные потенциалы узлов цепи могут быть вычислены как решение системы уравнений

$$\varphi^k = \tilde{L}^{-1}(G')b_k,$$

где $\varphi^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_n^k)^T$ — вектор абсолютных потенциалов; b_k — вектор-столбец, элементы которого задаются по правилу $b_k(k) = 1$, $b_k(i \neq k) = 0$. При этом абсолютный потенциал в вершине v_{n+1} полагается равным нулю.

В статье [4] проведено ранжирование вершин графа на основе токов, протекающих через вершину в случае, когда ток подается в вершины графа случайным образом. В настоящей работе предлагается ранжировать вершины графа, соответствующие узлам электрической цепи, вычисляя потенциалы во всех вершинах цепи при подаче тока в узел v_k . Таким образом, подавая ток последовательно во все вершины графа G , возможно получить турнирную таблицу вершин, основываясь на абсолютных потенциалах. Чем большее значение потенциала получено в вершине, тем более высокое место она займет в турнирной таблице.

Пример. Рассмотрим в качестве примера граф, представленный на рис. 2, с матрицей весов W :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 300 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 300 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что в граф добавлена вершина, связанная с остальными вершинами графа ребрами с пропускной способностью $\delta = 0.1$, в которой заземлена электрическая цепь, подадим ток в вершину 1. Будут получены следующие значения абсолютных потенциалов:

$$\varphi^1 = (1.670, 1.669, 1.666, 1.665, 1.663, 1.663)^T.$$

Наибольший потенциал всегда имеет вершина, в которую подается электрический ток, она будет получать ранг 1. Остальные вершины будут иметь ранги 2, 3, 4, 5, 5

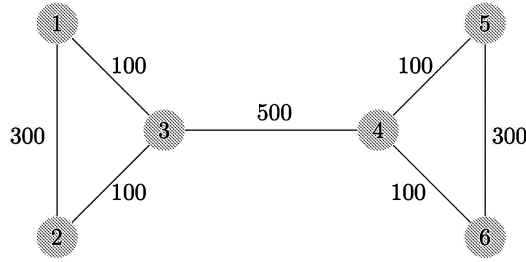


Рис. 2. Граф с вершинами 1–6 (100, 300, 500 — веса ребер)

соответственно номерам. В силу симметрии рассматриваемого графа при подаче тока в вершину 2, вектор потенциалов будет отличаться только для вершин 1 и 2:

$$\varphi^2 = (1.669, 1.670, 1.666, 1.665, 1.663, 1.663)^T.$$

Если же ток подается в вершину 3, получим равные значения для равноудаленных вершин 1 и 2 и для симметричных им вершин 5 и 6:

$$\varphi^3 = (1.666, 1.666, 1.668, 1.667, 1.665, 1.665)^T.$$

Значения абсолютных потенциалов, расположенных в столбце k и соответствующих вектору φ^k , запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1.670 & 1.669 & 1.666 & 1.665 & 1.663 & 1.663 \\ 1.669 & 1.670 & 1.666 & 1.665 & 1.663 & 1.663 \\ 1.666 & 1.666 & 1.668 & 1.667 & 1.665 & 1.665 \\ 1.665 & 1.665 & 1.667 & 1.668 & 1.666 & 1.666 \\ 1.663 & 1.663 & 1.665 & 1.666 & 1.670 & 1.669 \\ 1.663 & 1.663 & 1.665 & 1.666 & 1.669 & 1.670 \end{pmatrix}.$$

В табл. 1 представлены ранги вершин для каждого значения k . Стоит отметить, что введение рангов необходимо, поскольку сумма элементов матрицы в каждой строке и каждом столбце одинакова и зависит только от выбора δ .

Таблица 1. Турнирная таблица

| Вершина | k | | | | | | Σ |
|---------|-----|---|---|---|---|---|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 20 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 5 | 20 |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 4 | 17 |
| 4 | 4 | 4 | 2 | 1 | 3 | 3 | 17 |
| 5 | 5 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 20 |
| 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 20 |

Просуммировав все места для различных k для каждой вершины, найдем значения, на основе которых можно снова провести ранжирование. Чем меньше значение суммы рангов у вершины, тем более выгодное положение она занимает в графе. Так, вершины под номерами 3 и 4 наиболее важны для данного графа, что логично, поскольку ребро (3, 4) является связующим для двух групп вершин. Этот подход в теории голосования известен как правило Борда [9].

Можно сравнить полученные нами результаты со значениями PageRank [10]. Вектор значений PageRank для данного графа выглядит следующим образом: $(0.14, 0.14, 0.21, 0.21, 0.14, 0.14)$, при этом чем большее значение получено, тем более важна вершина в графе, т. е. вершины 3 и 4 также получают наиболее высокий ранг.

3. Частные случаи.

3.1. Граф-звезда.

Утверждение 1. Для графа-звезды S_1 (рис. 3) из n вершин ($n > 3$) с весами ребер, равными единице, распределение рангов не зависит от величины δ . Ранг центральной вершины равен 1, остальных вершин — 2.

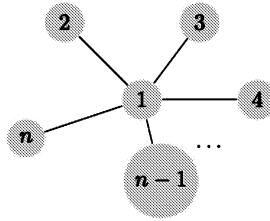


Рис. 3. Граф-звезда S_1

Для такого графа матрица Кирхгофа примет следующий вид:

$$\tilde{L}(S'_1) = \begin{pmatrix} n-1+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$\tilde{L}^{-1}(S'_1) = D \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & (1+\delta) & (1+\delta) & \dots & (1+\delta) \\ (1+\delta) & (1+n\delta+\delta^2) & 1 & \dots & 1 \\ (1+\delta) & 1 & (1+n\delta+\delta^2) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1+\delta) & 1 & 1 & \dots & (1+n\delta+\delta^2) \end{pmatrix},$$

где $D = \frac{1}{\delta(1+\delta)(n+\delta)}$.

Вид турнирной таблицы для любого значения δ представлен в табл. 2.

Таблица 2. Турнирная таблица для графа S_1

| Вершина | k | | | | | Σ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| | 1 | 2 | 3 | ... | n | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | ... | 2 | $2n-1$ |
| 2 | 2 | 1 | 3 | ... | 3 | $3(n-1)$ |
| 3 | 2 | 3 | 1 | ... | 3 | $3(n-1)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n-1$ | 2 | 3 | 3 | ... | 3 | $3(n-1)$ |
| n | 2 | 3 | 3 | ... | 1 | $3(n-1)$ |

Для центральной вершины графа сумма рангов равна $2n-1$, для остальных вершин — $3(n-3)$. При $n > 3$ $2n-1 < 3(n-1)$, значит, центральная вершина всего будет иметь наилучший ранг.

Утверждение 2. Для графа-звезды S_m (рис. 4) из n вершин ($n > 3$) с весами ребер $w_{1j} = 1$ ($j = 2, \dots, n-1$), $w_{1n} = w_{n1} = m$ и матрицей Кирхгофа

$$\tilde{L}(S'_m) = \begin{pmatrix} n-2+m+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 & -m \\ -1 & 1+\delta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta & 0 \\ -m & 0 & 0 & \dots & 0 & m+\delta \end{pmatrix}$$

ранги вершин будут распределяться в зависимости от веса m . Для $m \in (0, 1)$ получим распределение рангов $(1, 2, 2, \dots, 2, 3)$, для $m > 1$ — распределение рангов $(1, 3, 3, \dots, 3, 2)$, центральная вершина всегда имеет ранг 1.

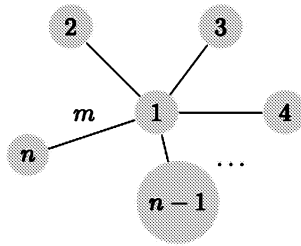


Рис. 4. Граф-звезда S_m

Обратная матрица, содержащая значения абсолютных потенциалов вершин графа, будет строиться по следующей схеме:

$$\tilde{L}^{-1}(S'_m) = D_m \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_2 & \dots & l_2 & l_3 \\ l_2 & l_d & l_5 & \dots & l_5 & l_4 \\ l_2 & l_5 & l_d & \dots & l_5 & l_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_2 & l_5 & l_5 & \dots & l_d & l_4 \\ l_3 & l_4 & l_4 & \dots & l_4 & l_6 \end{pmatrix},$$

где

$$D_m = \frac{1}{\delta(1+\delta)^{n-3}(nm + (n-1)\delta + 2m\delta + \delta^2)},$$

$$l_1 = (m+\delta)(1+\delta)^{n-2}, \quad l_2 = (m+\delta)(1+\delta)^{n-3},$$

$$l_3 = m(1+\delta)^{n-2}, \quad l_4 = m(1+\delta)^{n-3}, \quad l_5 = (m+\delta)(1+\delta)^{n-4},$$

$$l_6 = (1+\delta)^{n-3}(m + (n-1)\delta + m\delta + \delta^2),$$

$$l_d = (1+\delta)^{n-4}(m + \delta + nm\delta + (n-1)\delta^2 + 2m\delta^2 + \delta^3).$$

В табл. 3 представлено распределение рангов для случая, когда $m \in (0, 1)$. Для $n > 3$ значения $2n-1 < 3n-3 < 4n-4$, соответственно центральная вершина звезды имеет наилучший ранг; вершина, связанная с центральной ребром весом m , получает наихудший ранг.

Таблица 3. Турнирная таблица для графа S_m , $m \in (0, 1)$

| Вершина | k | | | | | | Σ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|----------|
| | 1 | 2 | 3 | ... | $n-1$ | n | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | ... | 2 | 2 | $2n-1$ |
| 2 | 2 | 1 | 3 | ... | 3 | 3 | $3n-3$ |
| 3 | 2 | 3 | 1 | ... | 3 | 3 | $3n-3$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n-1$ | 2 | 3 | 3 | ... | 1 | 3 | $3n-3$ |
| n | 3 | 4 | 4 | ... | 4 | 1 | $4n-4$ |

Таблица 4. Турнирная таблица для графа S_m , $m > 1$

| Вершина | k | | | | | | Σ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|----------|
| | 1 | 2 | 3 | ... | $n-1$ | n | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | ... | 2 | 2 | $2n-1$ |
| 2 | 3 | 1 | 4 | ... | 4 | 3 | $4n-5$ |
| 3 | 3 | 4 | 1 | ... | 4 | 3 | $4n-5$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n-1$ | 3 | 4 | 4 | ... | 1 | 3 | $4n-5$ |
| n | 2 | 3 | 3 | ... | 3 | 1 | $3n-3$ |

Для $m > 1$ при $n > 3$ значения $2n-1 < 3n-3 < 4n-5$, ранг центральной вершины наилучший, ранги вершин, связанных с центральной ребрами единичного веса, являются наихудшими (табл. 4).

3.2. Двудольный граф.

Утверждение 3. Для полного двудольного графа $K_{m,n-m}$ (рис. 5) с n вершинами ($n > 2m$), которые разделены на два непересекающихся множества V_1 и V_2 так, что $|V_1| = m$, $|V_2| = n-m$, и с весами ребер, равными единице, распределение рангов

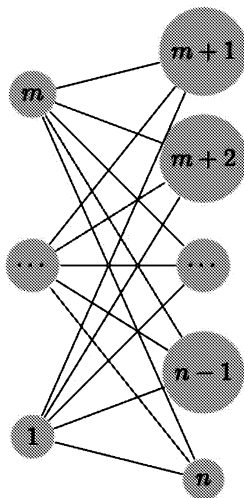


Рис. 5. Полный двудольный граф $K_{m,n-m}$

не зависит от значения δ . Вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 — ранги 2.

Матрица Кирхгофа представима в блочном виде

$$\tilde{L}(K'_{m,n-m}) = \left(\begin{array}{c|c} (n-m+\delta)\mathbb{E}_m & -\mathbb{1}_{m \times n-m} \\ \hline -\mathbb{1}_{n-m \times m} & (m+\delta)\mathbb{E}_{n-m} \end{array} \right),$$

где \mathbb{E} — единичная матрица; $\mathbb{1}$ — матрица единиц. В этом случае обратная матрица может быть найдена с помощью формулы Фробениуса

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix},$$

в которой $H = D - CA^{-1}B$. Тогда

$$H = (m+\delta)\mathbb{E}_{n-m} - \frac{m}{n-m+\delta}\mathbb{1}_{n-m \times n-m},$$

$$\tilde{L}^{-1}(K'_{m,n-m}) = D_{m,n-m} \begin{pmatrix} (l_1 - l_2)\mathbb{E}_m + l_2\mathbb{1}_{m \times m} & l_3\mathbb{1}_{m \times n-m} \\ l_3\mathbb{1}_{m \times n-m} & (l_4 - l_5)\mathbb{E}_{n-m} + l_2\mathbb{1}_{n-m \times n-m} \end{pmatrix},$$

$$D_{m,n-m} = \frac{1}{\delta(m+\delta)(n-m+\delta)(n+\delta)},$$

$$l_1 = (m+\delta)(n-m+n\delta+\delta^2), \quad l_2 = (n-m)(m+\delta), \quad l_3 = (m+\delta)(n-m+\delta),$$

$$l_4 = (n-m+\delta)(m+n\delta+\delta^2), \quad l_5 = m(n-m+\delta).$$

Рассмотрим турнирную матрицу для графа $K_{m,n-m}$ (табл. 5). Величина $2n-2+m < 3n-2-m$ при $n > 2m$, соответственно вершины из множества V_1 имеют ранги 1, вершины из множества V_2 — ранги 2.

Таблица 5. Турнирная таблица для графа $K_{m,n-m}$

| Вершина | k | | | | | | | | Σ |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| | 1 | 2 | ... | m | m+1 | ... | n-1 | n | |
| 1 | 1 | 3 | ... | 3 | 2 | ... | 2 | 2 | $2n-2+m$ |
| 2 | 3 | 1 | ... | 3 | 2 | ... | 2 | 2 | $2n-2+m$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| m-1 | 3 | 3 | ... | 3 | 2 | ... | 2 | 2 | $2n-2+m$ |
| m | 2 | 2 | ... | 1 | 3 | ... | 3 | 3 | $2n-2+m$ |
| m+1 | 2 | 2 | ... | 2 | 1 | ... | 3 | 3 | $3n-2-m$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n-1 | 2 | 2 | ... | 2 | 3 | ... | 1 | 3 | $3n-2-m$ |
| n | 2 | 2 | ... | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | $3n-2-m$ |

3.3. Двойная звезда. Под двойной звездой будем понимать граф $S_{p,q}$, полученный путем объединения двух графов-звезд S_p и S_q ($p, q > 2$) общим ребром (рис. 6). Матрица Кирхгофа такого графа имеет вид

$$\tilde{L}(S'_{p,q}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{p \times p} & B_{p \times q} \\ \hline C_{q \times p} & D_{q \times q} \end{array} \right),$$

$$A_{p \times p} = \begin{pmatrix} p+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta \end{pmatrix}, \quad D_{q \times q} = \begin{pmatrix} q+\delta & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1+\delta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1+\delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1+\delta \end{pmatrix},$$

элементы матриц B, C $b_{11}, c_{11} = -1$, остальные элементы равны нулю.

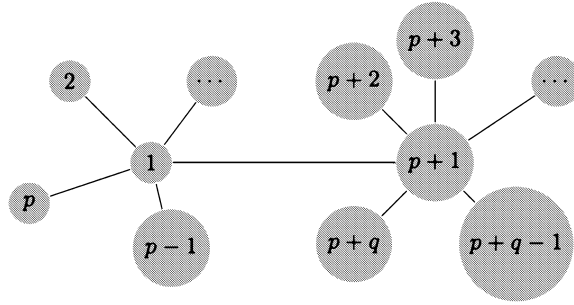


Рис. 6. Двойная звезда $S_{p,q}$

Утверждение 4. Для двойной звезды $S_{p,q}$ в случае, если $p < q$, ранг вершины v_1 , имеющей p соседей, всегда ниже ранга вершины v_{p+1} с q соседями.

Матрица абсолютных потенциалов также представима в виде блочной матрицы

$$\tilde{L}^{-1}(S'_{p,q}) = D_{p,q} \left(\begin{array}{c|c} A'_{p \times p} & B'_{p \times q} \\ \hline C'_{q \times p} & D'_{q \times q} \end{array} \right),$$

$$D_{p,q} = \frac{1}{\delta(1+\delta)^{p+q-4}((1+(p+1)(q+1))\delta + (p+q+2)\delta^2 + \delta^3)},$$

$$A'_{p \times p} = a \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & 1+\delta & 1+\delta & \dots & 1+\delta \\ 1+\delta & a_d & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & a_d \end{pmatrix},$$

$$a = (1+\delta)(1+(q+1)\delta + \delta^2),$$

$$a_d = \delta^2 + (p+1)\delta + 1 + \frac{(q-1)\delta}{1+((1+q)\delta + \delta^2)},$$

$$B'_{p \times q} = (1+\delta)^{p+q-4} \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & 1+\delta & 1+\delta & \dots & 1+\delta \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично строится матрица $C'_{q \times p}$:

$$D'_{q \times q} = d \begin{pmatrix} (1+\delta)^2 & 1+\delta & 1+\delta & \dots & 1+\delta \\ 1+\delta & d_d & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\delta & 1 & 1 & \dots & d_d \end{pmatrix},$$

$$d = (1+\delta)^{p+q-5}(1+(p+1)\delta + \delta^2),$$

$$d_d = \delta^2 + (q+1)\delta + 1 + \frac{(p-1)\delta}{1+((1+p)\delta + \delta^2)}.$$

Распределение рангов вершин представлено в табл. 6. Сумма рангов вершин, расположенных в центрах звезд, связаны соотношением $4p+2q-2 < 2p+4q-2$, что

Таблица 6. Турнирная таблица для графа $S_{p,q}$

| Вершина | k | | | | | | | | | Σ |
|---------|-----|-----|-----|-------|-----|-------|-----|---------|-------|-----------|
| | 1 | 2 | ... | $p-1$ | p | $p+1$ | ... | $p+q-1$ | $p+q$ | |
| 1 | 1 | 2 | ... | 2 | 3 | 4 | ... | 4 | 4 | $2p+4q-2$ |
| 2 | 2 | 1 | ... | 3 | 4 | 5 | ... | 5 | 5 | $3p+5q-4$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $p-1$ | 2 | 3 | ... | 1 | 4 | 5 | ... | 5 | 5 | $3p+5q-4$ |
| p | 3 | 4 | ... | 4 | 1 | 2 | ... | 2 | 2 | $4p+2q-2$ |
| $p+1$ | 4 | 5 | ... | 5 | 2 | 3 | ... | 3 | 3 | $5p+3q-4$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $p+q-1$ | 4 | 5 | ... | 5 | 2 | 3 | ... | 1 | 3 | $5p+3q-4$ |
| $p+q$ | 4 | 5 | ... | 5 | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | $5p+3q-4$ |

всегда верно для $p < q$, т. е. вершина — центр звезды с q соседями всегда будет иметь ранг 1. При этом соотношение $2p + 4q - 2 < 5p + 3q - 4$ верно для $q + 2 < 3p$, значит ранг 2 может быть присвоен как вершине v_1 с p соседями, так и висячим вершинам звезды S_q . Ранг висячих вершин графа S_p всегда наихудший, так как $3p + 5q - 4$ принимает наибольшие значения для $p < q$, $p, q > 2$.

4. Вычислительные эксперименты.

4.1. Районы г. Петрозаводск. Рассмотрим граф, имеющий следующую структуру: вершины графа, построенного на основе транспортной системы Петрозаводска [11], были поделены на непересекающиеся подмножества, соответствующие районам города (рис. 7). Здесь метки вершин соответствуют нумерации в табл. 7. Если два района соединены автомобильными дорогами напрямую, то между соответствующими им вершинами есть ребро. Длины ребер пропорциональны длинам соответствующих кратчайших путей в исходном графе. Так, например, районы 16 и 12 связаны более длинным путем, чем районы 16 и 19.

Таблица 7. Ранжирование вершин транспортного графа

| № | Район города | Сумма рангов | PageRank |
|----|-------------------|--------------|----------|
| 1 | Голиковка | 147 | 0.057171 |
| 2 | Древлянка | 155 | 0.038292 |
| 3 | Железнодорожный | 171 | 0.037208 |
| 4 | Зарека | 140 | 0.064489 |
| 5 | Каменный бор | 160 | 0.054556 |
| 6 | Кирпичный завод | 212 | 0.021275 |
| 7 | Ключевая | 175 | 0.052078 |
| 8 | Кукковка | 166 | 0.057698 |
| 9 | Октябрьский | 156 | 0.05312 |
| 10 | Первомайский | 151 | 0.054764 |
| 11 | Перевалка | 131 | 0.074412 |
| 12 | Пески | 202 | 0.037077 |
| 13 | Птицефабрика | 205 | 0.028448 |
| 14 | Рыбка | 154 | 0.060789 |
| 15 | Сайнаволок | 195 | 0.032919 |
| 16 | Северная промзона | 156 | 0.059534 |
| 17 | Соломенное | 213 | 0.035842 |
| 18 | Сулажгора | 174 | 0.043686 |
| 19 | Тепличный | 169 | 0.034296 |
| 20 | Томицы | 193 | 0.040282 |
| 21 | Центр | 133 | 0.062062 |

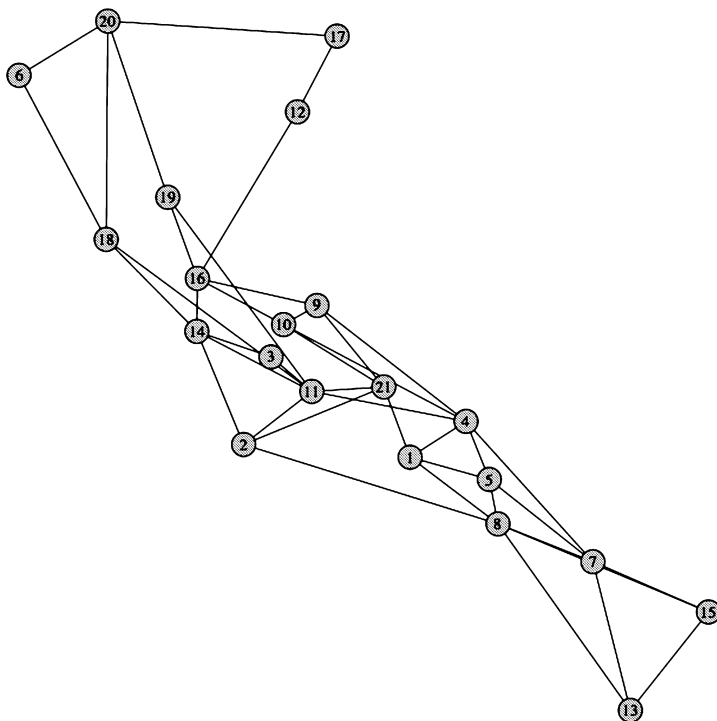


Рис. 7. Транспортный граф районов города (см. табл. 7)

Веса ребер для расчета выбираются равными величинам, обратным длинам дорог, соединяющим районы города. Значение $\delta = 0.1$. Так же, как в рассмотренном примере (см. с. 235), были вычислены абсолютные потенциалы для случаев, когда ток подается последовательно в вершины графа от 1 до 21.

В табл. 7 приведены суммы рангов, вычисленные на основе правил Кирхгофа и по методу PageRank. При этом наиболее важные вершины графа имеют наименьшее значение ранга по правилам Кирхгофа, но наибольшее, вычисленное по методу PageRank. Для удобства сравнения результатов данные были нормированы, а значения PageRank рассмотрены с противоположным знаком и упорядочены (рис. 8). Наилучшие ранги получены для районов Перевалка, Центр, Зарека, Голиковка, которые хорошо встроены в транспортную систему города, наихудшие — для удаленных районов города, таких как Кирпичный завод, Птицефабрика, Соломенное и Сайнаволок.

4.2. Транспортная система г. Петрозаводск. Далее рассмотрим граф, построенный на основе транспортной системы Петрозаводска (рис. 9). Вершинам графа соответствуют перекрестки дорог, по которым возможно автомобильное движение. Данный граф содержит 1531 вершину и 2081 ребро.

Аналогично предыдущим примерам были вычислены суммы рангов вершин графа, основанные на значениях абсолютных потенциалов узлов. Для вектора рангов была построена тепловая карта (рис. 10). Бóльший размер узла на карте и более темный окрас соответствует более высокому рангу вершины. Видно, что наблюдается скопление вершин высоких рангов в районах Кукковка и Перевалка. Схожие результаты для этих районов были получены в работе [11] при вычислении значений цен-

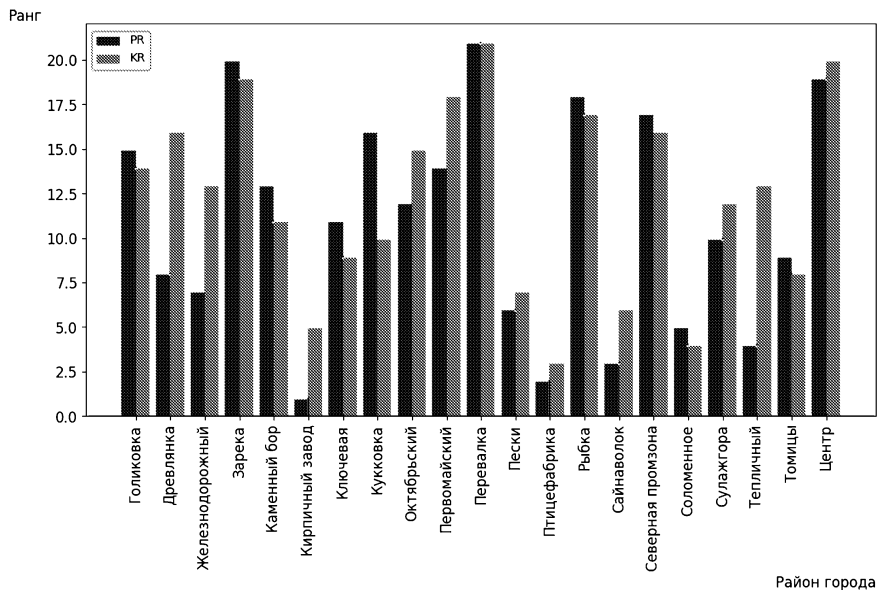


Рис. 8. Сравнение значений, полученных с помощью правила Кирхгофа (KR) и по методу PageRank(PR)

тральности вершин с помощью модифицированного метода Майерсона [12] и метода PageRank. Подобные результаты можно объяснить скоплением значительного числа маленьких улочек с небольшой протяженностью автомобильных дорог, что, в свою очередь, приводит к появлению в графе ребер со значимой пропускной способностью (вес ребра выбирается равным величине, обратной длине дороги), а также большого числа коротких циклов.

4.3. Муравьиная колония. Группа ученых фиксировала время взаимодействия между парами муравьев внутри колонии при условии, что в определенный момент несколько муравьев подвергаются заражению [13]. В результате были получены графы взаимодействий, где вершины — это муравьи, а веса ребер между этими вершинами равны суммарному времени контакта в ходе эксперимента. Для удобства представления данных ребра, описывающие взаимодействие между муравьями, длившееся менее 15 % от максимально возможного внутри колонии, были удалены.

На рис. 11, а изображен граф взаимодействий колонии до заражения. Вершина, соответствующая матке («queen»), показана треугольником. В графе взаимодействий до заражения наиболее высокие ранги получены муравьями из группы «nurses» (вершины 19, 45, 59). На рис. 11, б соответствующие им вершины закрашены наиболее темным.

После заражения (рис. 12, а) контакты с зараженными особями были ограничены, они образовали свою сеть взаимодействий, при этом наилучший ранг получен вершиной 102 — маткой колонии (рис. 12, б). Зараженные особи были выбраны из группы «foragers». Все они, за исключением вершины 9, были изолированы и получили близкие ранги. Представим ранги зараженных особей до и после заражения:

| № | 9 | 37 | 47 | 49 | 50 | 64 | 73 | 76 | 104 |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Ранг до заражения | 81 | 47 | 62 | 59 | 93 | 77 | 83 | 69 | 92 |
| Ранг после заражения | 39 | 72 | 73 | 71 | 75 | 70 | 73 | 73 | 78 |

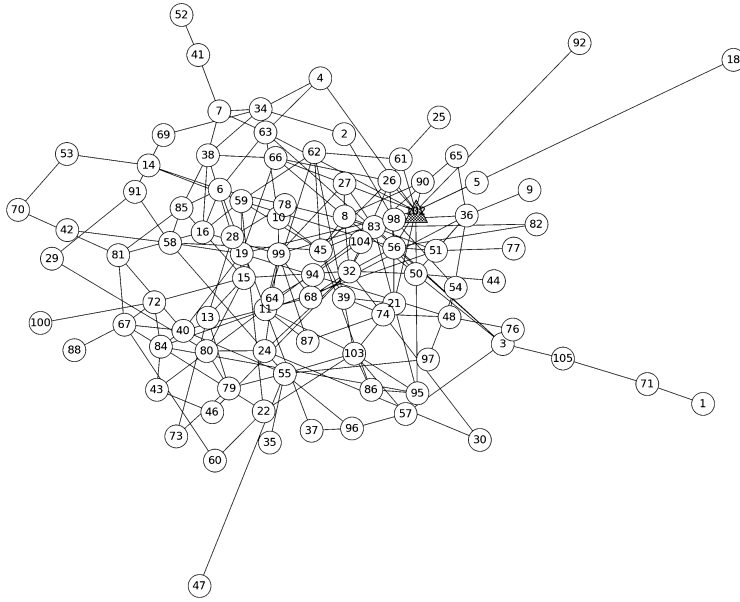


Рис. 9. Транспортный граф Петрозаводска



Рис. 10. Тепловая карта рангов вершин транспортного графа

a



б

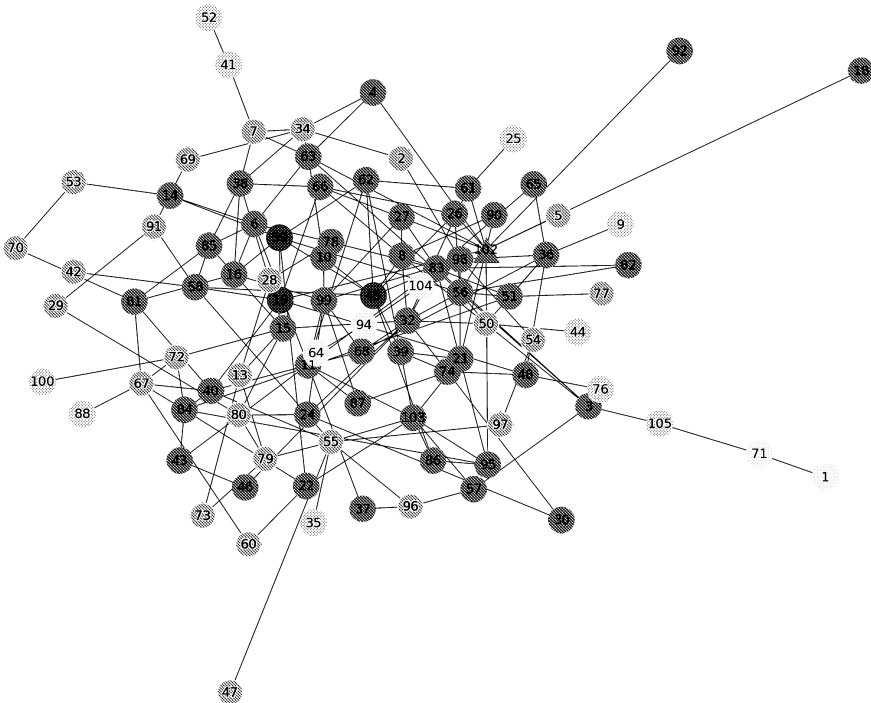


Рис. 11. Граф взаимодействий (*a*) и тепловая карта (*б*) муравьиной колонии до заражения

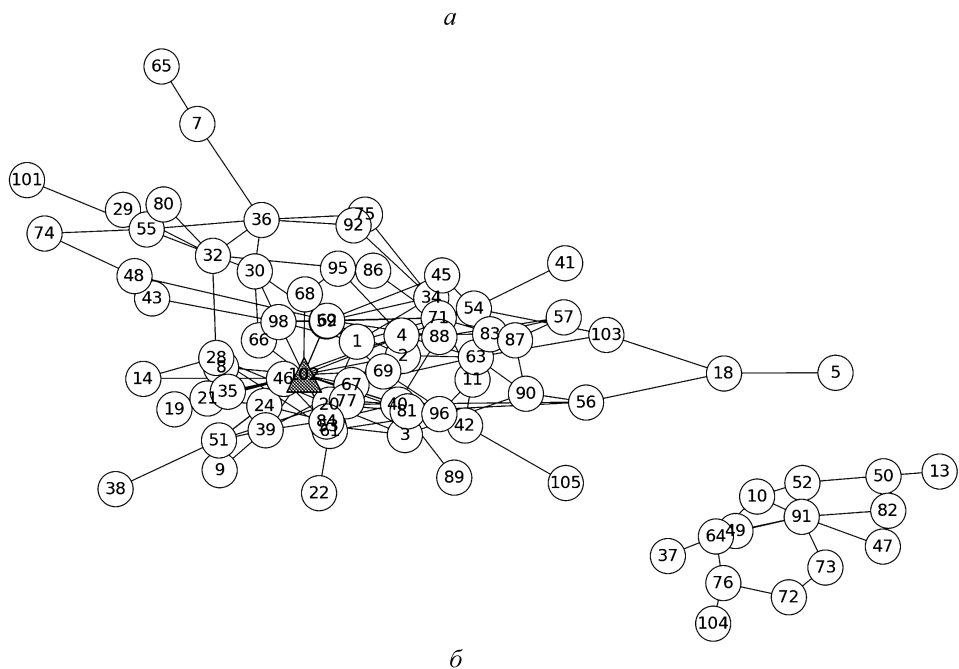


Рис. 12. Граф взаимодействий (*a*) и тепловая карта (*b*) муравьиной колонии после заражения

5. Заключение. В работе продемонстрирован подход к ранжированию вершин графа, основанный на значениях абсолютных потенциалов узлов электрической цепи. Предложена двухэтапная процедура ранжирования, где на первом этапе вершины ранжируются на основании абсолютных потенциалов при последовательной подаче

тока во все узлы цепи. На втором этапе строится турнирная таблица и проводится окончательное ранжирование, основанное на сумме ранее найденных рангов.

Получены распределения рангов вершин для графа-звезды, двойной звезды и полного двудольного графа. Подход апробирован на графах, построенных для транспортной системы Петрозаводска; результаты ранжирования согласуются с определенными ранее с помощью метода PageRank и модифицированного метода Майерсона.

Литература

1. *Brandes U.* Centrality measures based on current flow // STACS 2005. 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Stuttgart, Germany. February 24–26, 2005. Proceedings / eds by V. Diekert, B. Durand. Vol. 3404 of Lecture Notes in Computer Science. Stuttgart: Springer, 2005. P. 533–544. https://doi.org/10.1007/978-3-540-31856-9_44
2. *Newman M. E. J.* A measure of betweenness centrality based on random walks // Social Networks. 2005. Vol. 27. P. 39–54. <http://dx.doi.org/10.1016/j.socnet.2004.11.009>
3. *Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M.* Alpha current flow betweenness centrality // Algorithms and Models for the Web Graph. 10th International Workshop, WAW 2013. Cambridge, MA, USA, December 14–15, 2013. Proceedings / eds by A. Bonato, M. Mitzenmacher, P. Pralat. Vol. 8305 of Lecture Notes in Computer Science. Cambridge: Springer, 2013. P. 106–117. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03536-9_9
4. *Avrachenkov K. E., Mazalov V. V., Tsynguev B. T.* Beta current flow centrality for weighted networks // Computational Social Networks. 4th International Conference, CSoNet 2015. Beijing, China, August 4–6, 2015. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science N 9197. 2015. P. 216–227. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21786-4_19
5. *Gomez D., Gonzalez-Aranguena E., Manuel C., Owen G., Pozo M., Tejada J.* Centrality and power in social networks: a game theoretic approach // Math. Soc. Sci. 2003. Vol. 46. N 1. P. 27–54. [https://doi.org/10.1016/S0165-4896\(03\)00028-3](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(03)00028-3)
6. *Suna P., Parilina E. M., Gaob H. W.* Two-stage network games modeling the Belt and Road Initiative // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 87–98. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.107>
7. *Мазалов В. В., Хитрая В. А., Хитрый А. В.* Методы теории кооперативных игр в задаче ранжирования текстов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 1. С. 63–78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.105>
8. *Kondratev A. A., Mazalov V. V.* Ranking procedure with the Shapley value // Intelligent Information and Database Systems — 9th Asian Conference, ACIIDS 2017. Kanazawa, Japan, April 3–5, 2017. Proceedings. Pt II / eds by N. T. Nguyen, S. Tojo, L. M. Nguyen, B. Trawinski. Vol. 10192 of Lecture Notes in Computer Science. 2017. P. 691–700. https://doi.org/10.1007/978-3-319-54430-4_66
9. *Алескерев Ф. Т., Хабина Е. Л., Шварц Д. А.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения. Примеры и задачи: учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во Юрайт, 2023. 458 с.
10. *Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T.* The pagerank citation ranking: Bringing order to the Web // Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference. Brisbane, Australia. 1998. P. 161–172. <https://citeseer.nj.nec.com/page98pagerank.html>
11. *Ermolin N. A., Khitraya V. A., Khitryi A. V., Mazalov V. V., Nikitina N. N.* Modeling of the city's transport network using game-theoretic methods on the example of Petrozavodsk // Contributions to Game Theory and Management. 2022. Vol. 15. P. 18–31.
12. *Mazalov V. V., Khitraya V. A.* A modified Myerson value for determining the centrality of graph vertices // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. Iss. 1. P. 145–159.
13. *Stroeymeyt N., Grasse A. V., Crespi A., Mersch D. P., Cremer S., Keller L.* Social network plasticity decreases disease transmission in a eusocial insect // Science. 2006. Vol. 362. P. 941–945.

Статья поступила в редакцию 4 марта 2023 г.

Статья принята к печати 25 апреля 2023 г.

Контактная информация:

Мазалов Владимир Викторович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vmazalov@krc.karelia.ru

Хитрая Виталия Андреевна — аспирант, ст. преп.; dobvitalia@yandex.ru

Graph vertices ranking using absolute potentials of electric circuit nodes*

V. V. Mazalov, V. A. Khitraya

Federal Research Center “Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences”,
11, Pushkinskaya ul., Petrozavodsk, Republic of Karelia, 185910, Russian Federation
Petrozavodsk State University, 33, pr. Lenina, Petrozavodsk, Republic of Karelia,
185910, Russian Federation

For citation: Mazalov V. V., Khitraya V. A. Graph vertices ranking using absolute potentials of electric circuit nodes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2023, vol. 19, iss. 2, pp. 233–250.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2023.209> (In Russian)

A method for ranking the vertices of a graph based on Kirchhoff's laws for determining the potentials of an electrical network is proposed. The graph is represented as an electrical network, where the edge weights are interpreted as electrical conductivities. Next, the current is supplied to one of the vertices, and the absolute potentials of all vertices are determined by the Kirchhoff method. Based on the obtained potential values, the vertices are ranked. Then the current is sequentially applied to all vertices and the ranking is performed each time. For the final ranking, it is proposed to apply the ranking procedure based on the tournament matrix. The operation of the ranking algorithm is illustrated by numerical examples related to graphs of specific transport networks.

Keywords: graph, centrality measure, ranking procedure, Kirchhoff's circuit laws, transportation network, electrical circuit model.

References

1. Brandes U. Centrality measures based on current flow. *STACS 2005. 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Stuttgart, Germany, February 24–26, 2005. Proceedings. Eds by V. Diekert, B. Durand. Vol. 3404 of Lecture Notes in Computer Science.* Stuttgart, Springer Publ., 2005, pp. 533–544. https://doi.org/10.1007/978-3-540-31856-9_44
2. Newman M. E. J. A measure of betweenness centrality based on random walks. *Social Networks*, 2005, vol. 27, pp. 39–54. <http://dx.doi.org/10.1016/j.socnet.2004.11.009>
3. Avrachenkov K., Litvak N., Medyanikov V., Sokol M. Alpha current flow betweenness centrality. *Algorithms and Models for the Web Graph. 10th International Workshop, WAW 2013. Cambridge, MA, USA, December 14–15, 2013. Proceedings. Eds. by A. Bonato, M. Mitzenmacher, P. Pralat. Vol. 8305 of Lecture Notes in Computer Science.* Cambridge, Springer Publ., 2013, pp. 106–117. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03536-9_9
4. Avrachenkov K. E., Mazalov V. V., Tsynguev B. T. Beta current flow centrality for weighted networks. *Computational Social Networks. 4th International Conference, CSoNet 2015. Beijing, China, August 4–6, 2015. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science*, 2015, no. 9197, pp. 216–227. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21786-4_19
5. Gomez D., Gonzalez-Aranguena E., Manuel C., Owen G., Pozo M., Tejada J. Centrality and power in social networks: a game theoretic approach. *Math. Soc. Sci.*, 2003, vol. 46, no. 1, pp. 27–54. [https://doi.org/10.1016/S0165-4896\(03\)00028-3](https://doi.org/10.1016/S0165-4896(03)00028-3)
6. Suna P., Parilina E. M., Gaob H. W. Two-stage network games modeling the Belt and Road Initiative. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 87–98. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.107>
7. Mazalov V. V., Khitraya V. A., Khitryi A. V. Metody teorii kooperativnykh igr v zadache ranzhirovaniia tekstov [Cooperative game theory methods for text ranking]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 18, iss. 1, pp. 63–78. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.105> (In Russian)

* The study was financially supported by the Russian Science Foundation (grant N 22-11-20015), conducted jointly with the authorities of the Republic of Karelia, and the Venture Investment Fund of the Republic of Karelia.

8. Kondratev A. A., Mazalov V. V. Ranking procedure with the Shapley value. *Intelligent Information and Database Systems – 9th Asian Conference, ACIIDS 2017. Kanazawa, Japan, April 3–5, 2017. Proceedings. Pt II. Eds by N. T. Nguyen, S. Tojo, L. M. Nguyen, B. Trawinski. Vol. 10192 of Lecture Notes in Computer Science*, 2017, pp. 691–700. https://doi.org/10.1007/978-3-319-54430-4_66
9. Aleskerov F. T., Habina E. L., Shvarc D. A. *Binarnye otnosheniia, grafy i kollektivnye resheniia. Primery i zadachi*. Uchebnoe posobie dlia vuzov [*Binary relations, graphs and collective solutions. Examples and tasks*. Textbook for universities]. Moscow, Urigh Press, 2023, 458 p. (In Russian)
10. Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T. The pagerank citation ranking: Bringing order to the Web. *Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference*. Brisbane, Australia, 1998, pp. 161–172. <https://citeseer.nj.nec.com/page98pagerank.html>
11. Ermolin N. A., Khitraya V. A., Khitryi A. V., Mazalov V. V., Nikitina N. N. Modeling of the city's transport network using game-theoretic methods on the example of Petrozavodsk. *Contributions to Game Theory and Management*, 2022, vol. 15, pp. 18–31.
12. Mazalov V. V., Khitraya V. A. A modified Myerson value for determining the centrality of graph vertices. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, iss. 1, pp. 145–159.
13. Stroeymeyt N., Grasse A. V., Crespi A., Mersch D. P., Cremer S., Keller L. Social network plasticity decreases disease transmission in a eusocial insect. *Science*, 2006, vol. 362, pp. 941–945.

Received: March 4, 2023.

Accepted: April 25, 2023.

Authors' information:

Vladimir V. Mazalov — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; vmazalov@krc.karelia.ru

Vitalia A. Khitraya — Postgraduate Student, Senior Lecturer; dobvitalia@yandex.ru