Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра управления медико-биологическими системами

Воробьёва Анна Алексеевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Исследование условий абсолютной устойчивости некоторых классов нелинейных систем

010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Александров А. Ю.

Санкт-Петербург
2016

Содержание

1. Введение

Одной из важнейших задач современной теории управления является анализ устойчивости различных классов нелинейных систем [11]. В данной работе исследуются условия устойчивости для некоторых классов нелинейных систем. Предполагается, что функции, входящие в правые части рассматриваемых уравнений, удовлетворяют ограничениям секторного типа [1]. Такие функции называются допустимыми. Можно выделить две основные задачи.

Первая задача заключается в исследовании условий асимптотической устойчивости нулевого решения для одного класса нелинейных систем с переключениями. Системы с переключениями широко используются в задачах управления технологическими процессами, механическими системами, а так же во многих других областях [1, 10]. Система такого типа представляет собой гибридную динамическую систему, включающую в себя семейство непрерывных по времени подсистем, а также закона переключения между ними [1]. Переключения могут быть обусловлены внешними возмущениями или же задаваться управлением. В каждый момент времени активна только одна из подсистем семейства. Зачастую при проектировании управляемой системы необходимо обеспечить её устойчивость для любых допустимых переключений [1, 10]. Данная проблема является актуальной, если изначально закон переключений неизвестен. Необходимым, но не достаточным условием устойчивости системы является устойчивость каждой подсистемы семейства [1]. Для исследования необходимых условий к соответствующим линейным подсистемам применяется критерий Гурвица [4]. Для получения достаточных условий устойчивости эффективным средством является прямой метод Ляпунова. Существование общей для всех подсистем функции Ляпунова гарантирует асимптотическую устойчивость равномерную относительно закона переключения [1].

Во второй задаче рассматриваются условия асимптотической устойчивости нулевого решения для некоторого класса нелинейных систем с постоянным запаздыванием. Далеко не всегда реальные динамические системы могут быть описаны системами обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому зачастую при моделировании динамических процессов используются системы с запаздыванием [2]. Запаздывание возникает тогда, когда динамика системы зависит не только от ее состояния в текущий момент времени, но и от положения системы в некоторый предыдущий момент времени [2]. Такие системы используются для моделирования биологических сообществ, применяются в экологии, экономике, инженерии и многих других областях [2, 3, 9]. Устойчивость систем с запаздыванием также является актуальной проблемой теории управления. В данной работе рассматриваются как системы с запаздыванием без переключений, так и системы с запаздыванием и с переключениями. Анализ устойчивости основан на использовании прямого метода Ляпунова и функционалов Ляпунова — Красовского [2]. Найдены условия существования диагональных функционалов Ляпунова — Красовского.

Выполнение полученных условий гарантирует, что нулевые решения изучаемых систем будут являться асимптотически устойчивыми при любых допустимых нелинейностях, переключениях и при произвольном неотрицательном запаздывании.

2. Основные понятия и теоремы

В данном разделе приведем основные понятия и теоремы, которыми будем оперировать.

Определение 1 [1]. Постоянная матрица A называется метцелеровой, если все её внедиагональные элементы неотрицательны.

Определение 2 [9]. Матрица A называется устойчивой, если она является гурвицевой, то есть все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.

Определение 3 [9]. Матрица A называется D-устойчивой, если матрица DA устойчива при любой положительной диагональной матрице D.

2.1. Система с переключениями

В общем случае нелинейная система дифференциальных уравнений с переключениями представима в виде

$$\dot{x}(t) = F_\sigma(t, x). \tag{2.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор состояния системы; $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная функция, которая задает закон переключений [1].

Определение 4 [1]. Будем говорить, что закон переключения является допустимым, если он задается кусочно-постоянной функцией $\sigma(t) : [0; +\infty) \to Q = 1, \ldots, N$, где $\sigma(t)$ является непрерывной справа в точках разрыва, и к тому же любой конечный интервал времени содержит конечное число моментов переключений.

В таком случае, в каждый момент времени система (2.1) характеризуется одной из подсистем семейства

$$\dot{x}(t) = F_s(t, x), \quad s = 1, \ldots, N.$$

Предполагается, что вектор-функции $F_s(t, x) = (F_1^{(s)}, \ldots, F_n^{(s)})^T$, $s = 1, \ldots, N$, непрерывны в области

$$t \geqslant 0, \quad \|x\| < H \quad (0 < H \leqslant +\infty). \tag{2.2}$$

В данной работе будут рассматриваться системы с переключениями вида

$$\dot{x}(t) = P_\sigma f(x(t)), \tag{2.3}$$

где $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))^T$; $\sigma = \sigma(t)$ — допустимый закон переключения, $\sigma(t) : [0; +\infty) \to Q = 1, \ldots, N; P_s = \left(p_{ij}^{(s)}\right)_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица для каждого фиксированного $s = 1, \ldots, N$.

Определение 5 [1]. Будем говорить, что скалярные функции $f_i(x_i)$ являются допустимыми, если они непрерывны при $|x_i| < H$ $(0 < H \leqslant +\infty)$ и удовлетворяют условиям секторного типа, то есть $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Из свойств функций $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ следует, что система (2.3) имеет нулевое решение.

Определение 6 [1]. Система (2.3) абсолютно устойчива, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любых допустимых переключениях, а также при любых допустимых нелинейностях.

Для исследования устойчивости системы типа (2.3) в данной работе применяется прямой метод Ляпунова.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости [11]. *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = G(t, x),$$

где вектор-функция $G(t, x)$ определена и непрерывна в области (2.2), причем $G(t, 0) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$, то есть данная система имеет нулевое решение. Пусть существует заданная и непрерывно дифференцируемая на множестве (2.2) функция $V(t, x)$, которая обладает следующими свойствами:
1) $V(t, x)$ положительно определена;
2) $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел;
3) производная $V(t, x)$ в силу рассматриваемой системы отрицательно определена.
Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Замечание. Здесь и далее под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма вектора.

Определение 7 [9]. Система (2.3) называется диагонально устойчивой, если существует положительно-определенная диагональная матрица Λ, такая, что для любого $s = 1, \ldots, N$ выполняется матричное неравенство Ляпунова, то есть

$$\Lambda P_s + P_s^T \Lambda < 0, \quad s = 1, \ldots, N.$$

2.2. Система с запаздыванием

В данной работе будут рассматриваться системы с постоянным запаздыванием. Система с постоянным запаздыванием представима в виде функционального дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau)). \tag{2.4}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – n-мерный вектор состояния системы; вектор-функция $F(t, x, y)$ определена в области $t \geqslant 0$, $\|x\| < H$, $\|y\| < H$, кусочно-непрерывна по t и непрерывна по x и y; τ – постоянное неотрицательное запаздывание [2]. Каждое решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (2.4) при $t \geqslant t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\varphi(\theta)$ [2].

Будем считать, что начальные функции принадлежат пространству $C([-\tau, 0], R^n)$ непрерывных вектор-функций $\varphi(\theta) : [-\tau, 0] \to R^n$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$ [2]. Через $x_t(t_0, \varphi)$ обозначим отрезок решения: $x_t(t_0, \varphi) : \theta \to x(t + \theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Если начальный момент времени и начальная функция очевидны из контекста или несущественны, то аргументы t_0 и φ в данных обозначениях будем опускать.

Для исследования устойчивости нулевого решения систем типа (2.4) применяется прямой метод Ляпунова и функционалы Ляпунова — Красовского [2, 6].

Определение 8 [13]. Функцией Хана называется непрерывная неубывающая функция $\chi(s)$, такая что $\chi(s) > 0$ при $s > 0$ и $\chi(0) = 0$.

Теорема Ляпунова—Красовского об асимптотической устойчивости [2]: *Если существует непрерывно дифференцируемый функционал $V(t, x_t) : R \times C \to R$, такой, что можно указать функции Хана $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$, $\chi_3(s)$, такие, что*

$$\chi_1(\|\varphi(0)\|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant \chi_2(\|\varphi\|_\tau), \qquad \dot{V}(x_t)\big|_{(2.4)} \leqslant \chi_3(\|\varphi(0)\|)$$

при $t \geqslant 0$, $\|x_t\|_\tau < H$, то нулевое решение системы (2.4) асимптотически устойчиво.

В данной работе будут рассматриваться системы с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)). \tag{2.5}$$

Здесь A и B – постоянные матрицы, $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))^T$ – заданная и непрерывая при $\|x\| < H$ векторная функция.

Будем говорить, что $f(x)$ является допустимой функцией, если она удовлетворяет условиям из определения 4.

Определение 9 [2]. Система (2.5) абсолютно устойчива, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любом положительном запаздывании, а также при любых допустимых нелинейностях.

Определение 10 [6]. Система (2.5) диагонально устойчива, если существуют диагональные положительно-определённые матрицы $P = \operatorname{diag}\{p_1, \ldots, p_n\}$ и $Q = \operatorname{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}$, при которых матрица

$$S = \begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -Q \end{pmatrix}$$

отрицательно определена.

3. Обзор литературы

Базовые понятия и методы теории устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений подробно рассматриваются в [11]. В [14] вводится понятие абсолютной устойчивости и приводится метод построения функций Ляпунова для исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем. Также в этой книге ставится задача абсолютной устойчивости нелинейных систем с переключениями и приводятся методы решения этой задачи. Задача исследования диагональной устойчивости в экологических моделях типа Лотки — Вольтерры рассматривается в [9]. Некоторые результаты в исследовании условий D-устойчивости для матриц размерности 4×4 приведены в работе [12]. В [5] приводятся условия устойчивости для систем вида

$$\dot{x}(t) = P_\sigma f(x),$$

где $\sigma(t) : [0; +\infty) \to Q = 1, \ldots, N$ – допустимый закон переключений; $f(x)$ – допустимые нелинейности, а P_s – метцелерова матрица для любого $s = 1, \ldots, N$, а также получены некоторые результаты для систем с неметцелеровыми матрицами.

В [10] рассматриваются основные проблемы устойчивости систем с переключениями, а именно:

1) найти условия гарантирующие, что переключающаяся система асимптотически устойчива для любого закона переключения;

2) найти такие классы законов переключения, для которых система с переключениями будет являться асимптотически устойчивой;

3) построить закон переключения, который обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы.

В данной работе рассматривается первая из этих трех проблем для некоторых классов нелинейных систем.

Для систем с запаздыванием основные методы исследования устойчивости подробно рассмотрены в [2]. В [6] вводится понятие диагональной устойчивости для линейных систем с запаздыванием, а также предлагается метод анализа устойчивости таких систем. В статье [7] получен критерий диагональной устойчивости для систем с запаздыванием, но проблема в том, что в общем случае этот критерий оказывается трудно проверяемым и не дает конструктивных условий устойчивости.

Основной целью настоящей работы является нахождение таких классов систем, для которых можно получить конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости, а также нахождение этих условий.

4. Система с переключениями

4.1. Постановка задачи

Пусть задана система

$$\dot{x}(t) = P_\sigma f(x(t)). \tag{4.1}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$; $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))^T$, скалярные функции $f_i(x_i)$ являются допустимыми нелинейностями; $\sigma = \sigma(t)$ — допустимый закон переключения, $\sigma(t) : [0; +\infty) \to Q = 1, \ldots, N; P_s = \left(p_{ij}^{(s)}\right)_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица для каждого фиксированного $s = 1, \ldots, N$. Тогда в любой момент времени такая система характеризуется одной из подсистем

$$\dot{x}(t) = P_s f(x(t)), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{4.2}$$

Основной целью данной работы является исследование условий, при которых система (4.1) будет абсолютно устойчива. Для получения необходимых условий абсолютной устойчивости используется критерий Гурвица, а для исследования достаточных условий применяется прямой метод Ляпунова. Функцию Ляпунова будем строить в виде

$$V(x) = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{x_i} f_i(u)du, \tag{4.3}$$

где $\lambda_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

4.2. Полученные результаты

В данной работе будем рассматривать системы с матрицами размерности $[3 \times 3]$. Будем считать, что семейство систем (4.2) представимо в следующем виде

$$\begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -d_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -d_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -d_3 \end{pmatrix} f(x(t)), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{4.4}$$

Представление системы в таком виде обусловлено тем, что во многих задачах математического моделирования [3, 9] особый интерес представляет D-устойчивость подобных систем. Например, при рассмотрении модели "хищник – жертва" в экологии, часто ставится вопрос, каким должно быть межвидовое взаимодействие, чтобы положение равновесия сообщества оставалось устойчивым при любых коэффициентах естественного прироста, соответствующих отдельным видам вне взаимодействия [9].

В соответствии с определением D-устойчивости будем рассматривать случай, когда элементы A_s, B_s и C_s являются положительными для любого s. Для существования функции Ляпунова в виде (4.3) также необходимо, чтобы выполнялось $d_1, d_2, d_3 > 0$.

Для того чтобы нулевое решение этой системы было асимптотически устойчивым для любых допустимых функций необходимо, чтобы оно было асимптотически устойчиво и для соответствующей линейной системы. Поэтому в данном случае для выяснения необходимых условий абсолютной устойчивости будем проверять выполнение критерия Гурвица. Для применения критерия Гурвица, семейство линейных систем, соответствующее семейству (4.4), может быть приведено к виду

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-d_1}{A_s} & \dfrac{a_{12}}{A_s} & \dfrac{a_{13}}{A_s} \\ \dfrac{a_{21}}{B_s} & \dfrac{-d_2}{B_s} & \dfrac{a_{23}}{B_s} \\ \dfrac{a_{31}}{C_s} & \dfrac{a_{32}}{C_s} & \dfrac{-d_3}{C_s} \end{pmatrix} x(t), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Будем рассматривать частный случай, когда $a_{13} = a_{31} = 0$.

Замечание. Результаты для случаев $a_{23} = a_{32} = 0$ и $a_{12} = a_{21} = 0$ могут быть получены аналогичным образом. При том все найденные условия устойчивости для случая $a_{13} = a_{31} = 0$ могут быть переформулированы для двух других случаев с точностью до обозначений.

4.2.1. Необходимые условия абсолютной устойчивости

Для того чтобы система с переключениями, соответствующая семейству (4.5), была абсолютно устойчива необходимо, чтобы была абсолютно устойчива каждая индивидуальная подсистема семейства (4.5).

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-d_1}{A} & \dfrac{a_{12}}{A} & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{B} & \dfrac{-d_2}{B} & \dfrac{a_{23}}{B} \\ 0 & \dfrac{a_{32}}{C} & \dfrac{-d_3}{C} \end{pmatrix} x(t). \tag{4.6}$$

Исследуем условия, необходимые для асимптотической устойчивости нулевого решения такой системы.

Необходимые условия: метцелерова матрица.

Для начала рассмотрим случай, когда матрица системы (4.6) является метцелеровой. В этом случае условия выполнения критерия Гурвица эквивалентны условиям Севастьянова — Котелянского [5], то есть $-\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, -\Delta_3 > 0$, где Δ_i — главный диагональный минор порядка i матрицы системы (4.6). Исходя из этих условий, можно сформулировать утверждение.

Утверждение 1: Если матрица системы (4.6) является метцелеровой, то для того чтобы нулевое решение этой системы было асимптотически устойчиво, необходимо выполнение неравенства

$$a_{32}a_{23}d_1 + a_{12}a_{21}d_3 < d_1 d_2 d_3.$$

Необходимые условия: неметцелерова матрица.

Теперь рассмотрим случай, когда матрица системы (4.6) не является метцелеровой. В таком случае условия Севастьянова — Котелянского применить нельзя, значит, будем применять критерий Гурвица напрямую. Полученные условия сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 2: Для того чтобы нулевое решение системы (4.6) являлось асимптотически устойчивым, необходимо выполнение условий

$$
\begin{cases}
a_{32}a_{23} + \dfrac{C^2}{A^2}\dfrac{(d_1B + d_2A)}{(d_3B + d_2C)}a_{12}a_{21} < d_2d_3 + \dfrac{C^2}{A^2}\dfrac{(d_1B + d_3A)}{(d_3B + d_2C)} + \\
+\dfrac{B^2}{A^2}\dfrac{(d_1C + d_3A)}{(d_3B + d_2C)} + \dfrac{2BC}{A}\dfrac{(d_1d_2d_3)}{(d_3B + d_2C)}, \\
a_{32}a_{23}d_1 + a_{12}a_{21}d_3 < d_1d_2d_3.
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

Доказательство: Рассмотрим матрицу Гурвица для системы (4.6)

$$
\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},
$$

где

$$
\alpha = \frac{d_1}{A} + \frac{d_2}{B} + \frac{d_3}{C},
$$

$$
\beta = \frac{d_1d_3}{AC} + \frac{d_1d_2 - a_{21}a_{12}}{AB} + \frac{d_2d_3 - a_{23}a_{32}}{BC},
$$

$$
\gamma = \frac{d_1d_2d_3 - d_3a_{21}a_{12} - d_1a_{23}a_{32}}{ABC}.
$$

Для того чтобы нулевое решение системы (4.6) было асимптотически устойчивым, необходимо, чтобы главные миноры матрицы Гурвица были положительны. Учитывая, что A, B и C, d_1, d_2 и d_3 положительны, очевидно, что $\Delta_1 > 0$. Условие $\Delta_2 > 0$ эквивалентно неравенству

$$
a_{32}a_{23} + \frac{C^2}{A^2}\frac{(d_1B + d_2A)}{(d_3B + d_2C)}a_{12}a_{21} < d_2d_3 + \frac{C^2}{A^2}\frac{(d_1B + d_3A)}{(d_3B + d_2C)} +
$$

$$
+\frac{B^2}{A^2}\frac{(d_1C + d_3A)}{(d_3B + d_2C)} + \frac{2BC}{A}\frac{(d_1d_2d_3)}{(d_3B + d_2C)}.
$$

А $\Delta_3 > 0$ тогда и только тогда, когда

$$
a_{32}a_{23}d_1 + a_{12}a_{21}d_3 < d_1d_2d_3.
$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, для того чтобы система с переключениями, соответствующая семейству (4.5), была абсолютно устойчивой, необходимо, чтобы условия вида (4.7) выполнялись для каждой индивидуальной подсистемы этого семейства.

Отметим, что вышеуказанные условия являются лишь необходимыми условиями абсолютной устойчивости системы с переключениями. Для того чтобы получить достаточные условия устойчивости следует воспользоваться прямым методом Ляпунова. Чтобы доказать абсолютную устойчивость равномерную относительно закона переключения, достаточно построить общую функцию Ляпунова для всех индивидуальных подсистем, соответствующих рассматриваемой системе [1].

4.2.2. Достаточные условия абсолютной устойчивости

Учитывая, что $a_{13} = a_{31} = 0$, семейство систем (4.4) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -d_1 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & -d_2 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & -d_3 \end{pmatrix} f(x(t)), \quad s = 1, \dots, N. \tag{4.8}$$

Функцию Ляпунова будем строить следующим образом:

$$V(x) = 2\tilde{A} \int_0^{x_1} f_1(u)du + 2\tilde{B} \int_0^{x_2} f_2(u)du + 2\tilde{C} \int_0^{x_3} f_3(u)du.$$

Здесь $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ — положительные постоянные.

Тогда производная функции $V(x)$ будет иметь вид

$$\dot{V}(x) = f^T(x(t)) \begin{pmatrix} -2\dfrac{\tilde{A}}{A_s}d_1 & \dfrac{\tilde{A}}{A_s}a_{12} + \dfrac{\tilde{B}}{B_s}a_{21} & 0 \\ \dfrac{\tilde{A}}{A_s}a_{12} + \dfrac{\tilde{B}}{B_s}a_{21} & -4\dfrac{\tilde{B}}{B_s}d_2 & \dfrac{\tilde{B}}{B_s}a_{23} + \dfrac{\tilde{C}}{C_s}a_{32} \\ 0 & \dfrac{\tilde{B}}{B_s}a_{23} + \dfrac{\tilde{C}}{C_s}a_{32} & -2\dfrac{\tilde{C}}{C_s}d_3 \end{pmatrix} f(x(t)). \tag{4.9}$$

Если существуют такие положительные $\tilde{A}, \tilde{B}$ и $\tilde{C}$, что функция $\dot{V}(x)$ является отрицательно определенной для любых $s = 1, \dots, N$, то система с переключениями, соответствующая семейству систем (4.8), абсолютно устойчива [1].

Для исследования отрицательной определенности матрицы каждой системы семейства (4.9) будем использовать критерий Сильвестра [4].

Условие $-\Delta_1 = \dfrac{2\tilde{A}}{A_s} d_1 > 0$ всегда выполняется. Рассмотрим неравенства

$$\Delta_2 = 4\frac{\tilde{A}}{A_s}\frac{\tilde{B}}{B_s} d_1 d_2 - \left(\frac{\tilde{A}}{A_s} a_{12} + \frac{\tilde{B}}{B_s} a_{21}\right)^2 > 0,$$

$$-\Delta_3 = 8\frac{\tilde{A}}{A_s}\frac{\tilde{B}}{B_s}\frac{\tilde{C}}{C_s} d_1 d_2 d_3 - 2\frac{\tilde{C}}{C_s} d_3 \left(\frac{\tilde{A}}{A_s} a_{12} + \frac{\tilde{B}}{B_s} a_{21}\right)^2 -$$
$$-2\frac{\tilde{A}}{A_s} d_1 \left(\frac{\tilde{B}}{B_s} a_{23} + \frac{\tilde{C}}{C_s} a_{32}\right)^2 > 0. \tag{4.10}$$

Отметим, что выполнение условия $\Delta_2 > 0$ будет следовать из выполнения условия $-\Delta_3 > 0$. Таким образом можно утверждать, что если выполняется неравенство (4.10), то система с переключениями, соответствующая семейству систем (4.8), будет являться абсолютно устойчивой.

Разделим левую и правую часть неравенства (4.10) на $2\dfrac{\tilde{A}}{A_s}\dfrac{\tilde{B}}{B_s}\dfrac{\tilde{C}}{C_s}$, получим

$$d_1 \frac{\tilde{B}}{\tilde{C}}\frac{C_s}{B_s} a_{23}^2 + 2d_1 a_{23} a_{32} + d_1 \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}}\frac{B_s}{C_s} a_{32}^2 + d_3 \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}\frac{B_s}{A_s} a_{12}^2 + 2d_3 a_{12} a_{21} + d_3 \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}}\frac{A_s}{B_s} a_{21}^2 < 4d_1 d_2 d_3.$$

Сделаем замену переменных. Пусть $\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \alpha$, $\dfrac{\tilde{B}}{\tilde{C}} = \beta$, $\dfrac{A_s}{B_s} = x_s$, $\dfrac{B_s}{C_s} = y_s$. В новых переменных условие примет вид

$$d_3 \frac{\alpha}{x_s} a_{12}^2 + 2d_3 a_{12} a_{21} + d_3 \frac{x_s}{\alpha} a_{21}^2 + d_1 \frac{\beta}{y_s} a_{23}^2 + 2d_1 a_{23} a_{32} + d_1 \frac{y_s}{\beta} a_{32}^2 < 4d_1 d_2 d_3,$$

что эквивалентно

$$d_3 \left(\sqrt{\frac{\alpha}{x_s}} a_{12} + \sqrt{\frac{x_s}{\alpha}} a_{21}\right)^2 + d_1 \left(\sqrt{\frac{\beta}{y_s}} a_{23} + \sqrt{\frac{y_s}{\beta}} a_{32}\right)^2 < 4d_1 d_2 d_3. \tag{4.11}$$

Достаточным условием абсолютной устойчивости системы с переключениями, соответствующей семейству систем (4.8), является выполнение неравенства (4.11) для всех $s = 1, \dots N$. То есть если для любого s выполняется,

$$\left(\sqrt{\frac{\beta}{y_s}}a_{23} + \sqrt{\frac{y_s}{\beta}}a_{32}\right)^2 < 4d_2d_3 - \frac{d_3}{d_1}\max_{s=1,\dots,N} t(x_s, \alpha),$$

$$t(x_s, \alpha) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{x_s}}a_{12} + \sqrt{\frac{x_s}{\alpha}}a_{21}\right)^2,$$

то система с переключениями, соответствующая семейству систем (4.8), является абсолютно устойчивой. Однако α и β могут быть произвольными положительными постоянными. Таким образом самая широкая область ограничений для левой части неравенства будет при

$$\tilde{t} = \min_{\alpha > 0} \max_{s=1,\dots,N} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{x_s}}a_{12} + \sqrt{\frac{x_s}{\alpha}}a_{21}\right)^2.$$

Точками, подозрительными на максимум по x_s, будут

$$\tilde{x}_m = \min_{s=1,\dots,N} x_s$$

и

$$\tilde{x}_M = \max_{s=1,\dots,N} x_s.$$

Обозначим $\tilde{t}_m(\alpha) = t(\tilde{x}_m, \alpha), \tilde{t}_M(\alpha) = t(\tilde{x}_M, \alpha)$. Отметим, что при всех $s = 1, \dots, N$ будет выполняться одно из неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t(x_s, \alpha) \leqslant \tilde{t}_m(\alpha), \\ t(x_s, \alpha) \leqslant \tilde{t}_M(\alpha). \end{array}\right.$$

Пример функций $\tilde{t}_m(\alpha)$ и $\tilde{t}_M(\alpha)$ изображен на рис.1. Если изобразить графики $t(x_s, \alpha)$, то получим, что все они лежат в заштрихованной области.

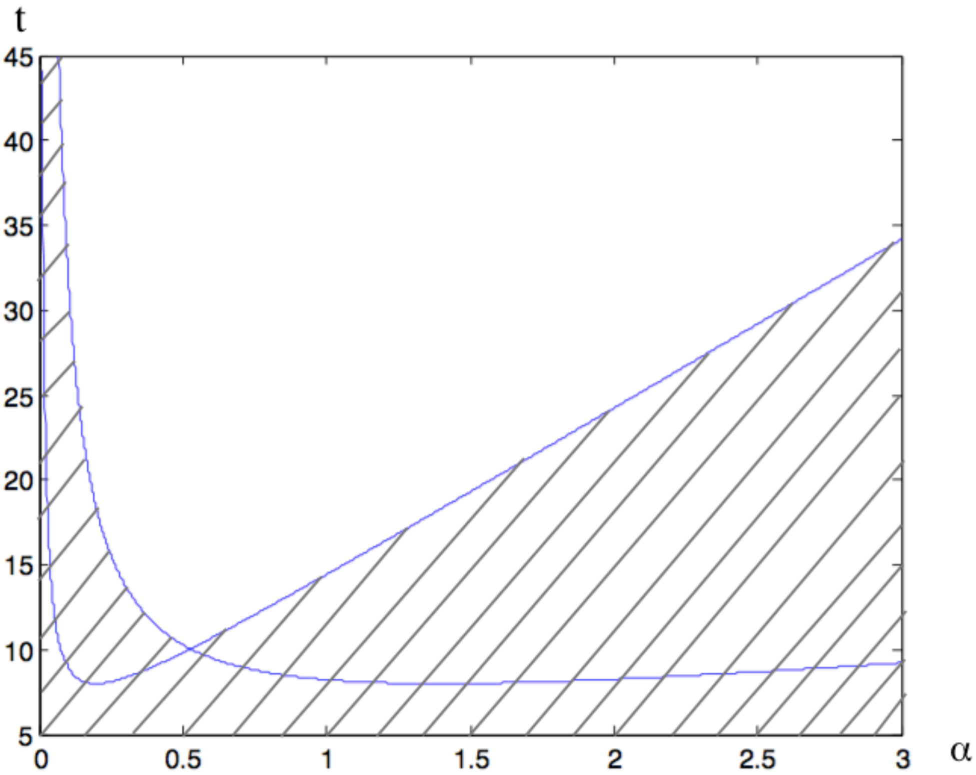

Рис. 1. Графики функций $\tilde{t}_m(\alpha)$ и $\tilde{t}_M(\alpha)$.

Приходим к тому, что α – величина, которая доставляет минимум функции

$$\max_{s=1,\ldots,N}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{x_s}}a_{12}+\sqrt{\frac{x_s}{\alpha}}a_{21}\right)^2$$

– абсцисса точки пересечения графиков функций $\tilde{t}_m(\alpha)$ и $\tilde{t}_M(\alpha)$. Таким образом находим, что оптимальная

$$\tilde{\alpha}=\left|\frac{a_{21}}{a_{12}}\right|\sqrt{\tilde{x}_m\tilde{x}_M}.$$

Проводя аналогичные рассуждения относительно

$$q(y_s,\beta)=\left(\sqrt{\frac{\beta}{y_s}}a_{23}+\sqrt{\frac{y_s}{\beta}}a_{32}\right)^2,$$

и решая задачу поиска

$$\tilde{q}=\min_{\beta}\max_{s=1,\ldots,N}q(y_s,\beta),$$

находим, что подозрительными на максимум по y_s будут точки

$$\tilde{y}_m = \min_{s=1,\dots,N} y_s$$

и

$$\tilde{y}_M = \max_{s=1,\dots,N} y_s.$$

А абсциссой точки пересечения $\tilde{q}_m(\beta) = q(\tilde{y}_m, \beta)$ и $\tilde{q}_M(\beta) = q(\tilde{y}_M, \beta)$ будет

$$\tilde{\beta} = \left| \frac{a_{32}}{a_{23}} \right| \sqrt{\tilde{y}_m \tilde{y}_M}.$$

Таким образом можно сформулировать теорему.

Теорема. Для того чтобы система с переключениями, соответствующая семейству систем (4.8), была абсолютно устойчива, достаточно, чтобы для каждого s выполнялось неравенство

$$d_3 |a_{12} a_{21}| \left(\frac{1 + x_s}{\sqrt{x_s}} \right)^2 + d_1 |a_{23} a_{32}| \left(\frac{1 + y_s}{\sqrt{y_s}} \right)^2 < 4 d_1 d_2 d_3,$$

где $x_s = \dfrac{A_s}{B_s}, y_s = \dfrac{B_s}{C_s}$.

5. Системы с запаздыванием

5.1. Постановка задачи

Пусть задана система

$$\dot{x}(t) = Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)). \tag{5.1}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ — n-мерный вектор состояния системы; A и B — постоянные матрицы; $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))^T$, скалярные функции $f_i(x_i)$ являются допустимыми нелинейностями; τ — постоянное неотрицательное запаздывание. Из сделанных предположений следует, что у изучаемой системы существует решение $x(t) \equiv 0$.

Уравнения такого вида широко используется для моделирования систем автоматического управления и нейронных сетей [15, 16].

Исследуем условия, при выполнении которых можно гарантировать абсолютную устойчивость системы (5.1).

Для решения поставленной задачи используется прямой метод Ляпунова. Пусть

$$V(x_t) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(t)} f_i(u)du + \sum_{i=1}^{n} q_i \int_{t-\tau}^{t} f_i^2(x_i(\theta))d\theta, \tag{5.2}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ — положительные коэффициенты.

Нетрудно проверить, что при любых положительных значениях $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ существуют заданные при $s \in [0, H)$ функции Хана $\chi_1(s)$ и $\chi_2(s)$ такие, что

$$\chi_1(\|x(t)\|) \leqslant V(x_t) \leqslant \chi_2(\|x_t\|_\tau)$$

при $\|x_t\|_\tau < H$.

Продифференцируем функционал (5.2) в силу системы (5.1). Получим

$$\dot{V}(x_t) = \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}^T S \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица

$$S = \begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -Q \end{pmatrix},$$

а $P = \mathrm{diag}\{p_1, \ldots, p_n\}$, $Q = \mathrm{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}$.

В соответствии с определением 10, для диагональной устойчивости системы (5.1) необходимо и достаточно, чтобы существовали диагональные положительно определенные матрицы P и Q, при которых матрица S отрицательно определена.

Известно (см. [6]), что условие отрицательной определенности матрицы S эквивалентно условию отрицательной определенности матрицы

$$R = A^T P + PA + Q + PBQ^{-1}B^T P. \tag{5.3}$$

Критерий диагональной устойчивости систем такого вида установлен в работе [7]. Однако в общем случае проверка условий указанного критерия довольно затруднительна. Поэтому большой интерес представляет задача нахождения классов матриц A и B, для которых можно получить конструктивно проверяемые условия существования требуемых матриц P и Q.

5.2. Условия существования диагональных функционалов Ляпунова — Красовского

5.2.1. Системы с якобиевыми матрицами

Будем рассматривать случай, когда A является якобиевой матрицей [8], т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

а матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Тогда в выражении (5.3)

$$PBQ^{-1}B^TP = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i^2 p_1^2}{q_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, пусть для элементов матрицы A имеют место соотношения

$$a_i < 0, \quad d_j c_j < 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{5.5}$$

Матрицы такого рода широко используются для моделирования трофических цепей [3].

Для того чтобы получить конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости, будем рассматривать достаточные условия. Пусть

$$p_{i+1} = -\frac{d_i}{c_i} p_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5.6}$$

где p_1 — произвольное положительное число. Тогда матрица R принимает диагональный вид, и для ее отрицательной определенности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{b_i^2 p_1^2}{q_i} + 2a_1 p_1 + q_1 < 0, \\ q_i + 2a_i p_i < 0, \quad i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Чтобы получить наиболее широкую область для a_i, b_i, c_i, d_i, следует выбирать q_i достаточно близкими к $-2a_i p_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Используя предельный переход, приходим к неравенству

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{b_i^2 p_1}{2a_i p_i} > 2a_1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{b_1^2 p_1}{q_1}.$$

Учитывая соотношение (5.6), имеем

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{b_i^2}{2a_i} \prod_{j=1}^{i-1} \left| \frac{c_j}{d_j} \right| > 2a_1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{b_1^2 p_1}{q_1}.$$

Для того чтобы получить наиболее широкую область допустимых значений параметров необходимо минимизировать правую часть неравенства по p_1, q_1. Очевидно, что если $b_1 \neq 0$, то $\min\left(\frac{q_1}{p_1} + \frac{b_1^2 p_1}{q_1}\right) = 2|b_1|$ при $\frac{q_1}{p_1} = |b_1|$. В случае, когда $b_1 = 0$, область допустимых значений параметров системы будет тем шире, чем меньше значение величины q_1/p_1. Исходя из этого, можно сформулировать теорему.

Теорема. Пусть A — матрица Якоби, а B имеет вид (5.4). Пусть, кроме того, элементы матрицы A удовлетворяют условиям (5.5). Если справедливо соотношение

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{b_i^2}{a_i} \prod_{j=1}^{i-1} \left| \frac{c_j}{d_j} \right| > 4(a_1 + |b_1|),$$

то система (5.1) абсолютно устойчива.

Теперь рассмотрим случай, когда матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

где $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$; $c_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n-1$; $b \neq 0$. Таким образом, исследуем систему с замкнутой петлёй обратной связи. При этом наличие запаздывания может быть обусловлено задержками, возникающими при формировании и передаче управляющего сигнала [17].

Теорема. Пусть матрицы A и B определяются по формулам (5.7). Тогда для диагональной устойчивости системы (5.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|a_1 \dots a_n| > |b\, c_1 \dots c_{n-1}|. \tag{5.8}$$

Доказательство: В данном случае матрицу (5.3) можно представить в форме $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$, где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2b^2}{q_n} & p_2c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2c_1 & 2p_2a_2 & p_3c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & p_3c_2 & 2p_3a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2p_na_n + q_n \end{pmatrix},$$

а $\widetilde{Q} = \mathrm{diag}\{q_1, \dots, q_{n-1}, 0\}$. Получаем, что система (5.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют диагональная положительно-определённая матрица $P = \mathrm{diag}\{p_1, \dots, p_n\}$ и число $q_n > 0$, при которых матрица $\widetilde{R}$ отрицательно определена.

Проверяя для $\widetilde{R}$ выполнение условий критерия Сильвестра, имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = 2a_1p_1 + \frac{p_1^2b^2}{q_n} < 0, \\ &\Delta_2 = 2a_2p_2 - p_2^2c_1^2 > 0, \\ &(-1)^j\Delta_j = (-1)^j(2a_jp_j\Delta_{j-1} - p_j^2c_{j-1}^2\Delta_{j-2}) > 0, \\ &\qquad j = 3, \dots, n-1, \\ &(-1)^n\Delta_n = (-1)^n((2a_np_n + q_n)\Delta_{n-1} - p_n^2c_{n-1}^2\Delta_{n-2}) > 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Из первых $(n-1)$-го неравенства данной системы следует, что

$$p_1 = -k_1\frac{a_1}{b^2}q_n, \quad p_2 = k_2\frac{a_2}{c_1^2}\Delta_1, \quad p_j = k_j\frac{a_j}{c_{j-1}^2}\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-2}}, \ \ j = 3, \dots, n-1,$$

где $0 < k_s < 2$, $s = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$\Delta_1 = k_1(k_1 - 2)\frac{a_1^2}{b^2}q_n, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = k_2(2 - k_2)\frac{a_2^2}{c_1^2}\Delta_1,$$

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} = k_j(2 - k_j)\frac{a_j^2}{c_{j-1}^2}\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_{j-2}}, \quad j = 3, \ldots, n-1.$$

Подставляя полученные выражения в последнее неравенство системы (5.9), приходим к условию

$$q_n^2 + 2a_n p_n q_n + p_n^2 b^2 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{c_j^2}{k_j(2 - k_j)a_j^2} < 0. \tag{5.10}$$

Левую часть неравенства (5.10) можно рассматривать как квадратный трехчлен относительно q_n или относительно p_n. Нетрудно видеть, что если такой трехчлен имеет вещественные корни, то они одного знака. Таким образом для того чтобы существовали положительные числа p_n и q_n, удовлетворяющие соотношению (5.10), необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного уравнения, соответствующего неравенству (5.10), был положителен, что эквивалентно выполнению неравенства

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^2 > b^2 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{c_j^2}{k_j(2 - k_j)}. \tag{5.11}$$

Неравенство (5.11) задает наиболее широкую область допустимых значений параметров системы в случае, когда

$$k_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, приходим к условию (5.8).

Теорема доказана.

Система с переключениями

Теперь рассмотрим случай, когда помимо запаздывания в системе имеют место допустимые переключения. В каждый момент времени система описывается одной из подсистем семейства

$$\dot{x}(t) = A_s f(x(t)) + B_s f(x(t-\tau)), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{5.12}$$

Пусть

$$A_s = \begin{pmatrix} a_1^{(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1^{(s)} & a_2^{(s)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1}^{(s)} & a_n^{(s)} \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & b^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

где $a_i^{(s)} < 0,\ i = 1, \ldots, n.$

Для того чтобы такая система была диагонально устойчива, достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\widehat{A_s} + \overline{B_s}\right)\xi < 0, \quad s = 1, \ldots N, \tag{5.14}$$

$$\left(\widehat{A_s} + \overline{B_r}\right)^T \theta < 0, \quad s, r = 1, \ldots N, \tag{5.15}$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)^T$ – положительные векторы; $\widehat{A_s}$ – метцлерова матрица, соответствующая матрице A; $\overline{B_s}$ – матрица, элементы которой соответствуют элементам матрицы B, взятым по модулю [18].

Распишем системы неравенств (5.14) и (5.15) для семейства систем вида (5.12) с матрицами (5.13). Имеем

$$a_1^{(s)}\xi_1 + |b^{(n)}|\xi_n < 0, \quad |c_1^{(s)}|\theta_2 + a_1^{(s)}\theta_1 < 0,$$

$$|c_1^{(s)}|\xi_1 + a_2^{(s)}\xi_2 < 0, \quad |c_2^{(s)}|\theta_3 + a_2^{(s)}\theta_2 < 0,$$

$$|c_2^{(s)}|\xi_2 + a_3^{(s)}\xi_3 < 0, \quad |c_3^{(s)}|\theta_4 + a_3^{(s)}\theta_3 < 0,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$|c_{n-1}|^{(s)}\xi_{n-1} + a_n^{(s)}\xi_n < 0, \quad |b^{(r)}|\theta_1 + a_n^{(s)}\theta_n < 0,$$

откуда следует, что

$$|b^{(s)}|\xi_n < |a_1^{(s)}|\xi_1 < \frac{|a_1^{(s)}a_2^{(s)}|}{|c_1^{(s)}|}\xi_2 < \cdots < \frac{\prod_{i=1}^n |a_i^{(s)}|}{\prod_{j=1}^{n-1} |c_j^{(s)}|}\xi_n,$$

$$|b^{(r)}|\theta_1 < |a_n^{(s)}|\theta_n < \frac{|a_n^{(s)}a_{n-1}^{(s)}|}{|c_{n-1}^{(s)}|}\theta_{n-1} < \cdots < \frac{\prod_{i=1}^n |a_i^{(s)}|}{\prod_{j=1}^{n-1} |c_j^{(s)}|}\theta_1.$$

Исходя из этого, можно сформулировать теорему.

Теорема. Для того чтобы система с допустимыми переключениями и постоянным запаздыванием, соответствующая семейству систем вида (5.12), была диагонально устойчива, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{r=1,\cdots,N} |b^{(r)}| < \min_{s=1,\cdots,N} \frac{\prod_{i=1}^n |a_i^{(s)}|}{\prod_{j=1}^{n-1} |c_j^{(s)}|}.$$

Отметим, что полученные условия для систем с запаздыванием и с переключением являются достаточными, но не необходимыми. Приведем пример.

Пример: Пусть $n = 3$, $N = 2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0.02 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0.25 & -10 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$\max_{r=1,2} |b^{(r)}| = 100; \quad \min_{s=1,2} \frac{|a_1^{(s)}a_2^{(s)}a_3^{(s)}|}{|c_1^{(s)}c_2^{(s)}|} = 50,$$

то есть условия теоремы не выполняются. Но если взять матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.00001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00001 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

то матрица R будет отрицательно определена. Значит, система с переключениями будет абсолютно устойчивой.

5.2.2. Условия диагональной устойчивости матриц третьего порядка со специальной структурой

Будем рассматривать систему вида (5.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, a_3 < 0$.

В данном случае матрицу R можно представить в форме $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$, где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2 b_1^2}{q_3} & p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 0 \\ p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 2p_2a_2 + \dfrac{p_2^2 b_2^2}{q_3} & p_3c_2 \\ 0 & p_3c_2 & 2p_3a_3 + q_3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что система (5.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют диагональная положительно-определённая матрица $P = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$ и число $q_3 > 0$, при которых матрица $\widetilde{R}$ отрицательно определена.

Рассмотрим выполнение условий критерия Сильвестра для матрицы $\widetilde{R}$. Отметим, что от условия $\Delta_3 < 0$ можно перейти к условию

$$\frac{\Delta_3}{p_3^2} = \left(2\frac{a_3}{p_3} + \frac{q_3}{p_3^2}\right)\Delta_2 - c_2^2\Delta_1 < 0.$$

Так как Δ_1 и Δ_2 от p_3 не зависят, для получения наиболее широкой области допустимых значений параметров следует выбирать p_3 таким образом, чтобы Δ_3/p_3^2 было минимальным, откуда следует, что

$$p_3 = -\frac{q_3}{a_3}.$$

Тогда для того чтобы существовали положительные числа p_1, p_2, p_3 и q_3, при которых матрица $\widetilde{R}$ будет отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа p_1, p_2 и q_3 при которых будет отрицательно определена матрица

$$\begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2b_1^2}{q_3} & p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 0 \\ p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 2p_2a_2 + \dfrac{p_2^2b_2^2}{q_3} & c_2 \\ 0 & c_2 & -\dfrac{a_3^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_1 = 2p_1a_1 + \frac{p_1^2b_1^2}{q_3} < 0. \tag{5.16}$$

Неравенство (5.16) выполняется, если

$$p_1 = -k_1\frac{a_1}{b_1^2}q_3, \quad 0 < k_1 < 2.$$

Тогда

$$\Delta_1 = -k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3.$$

Рассмотрим неравенство

$$\Delta_2 = \left(2p_2a_2 + \frac{p_2^2b_2^2}{q_3}\right)\Delta_1 - \left(p_2c_1 + \frac{b_1b_2p_1p_2}{q_3}\right)^2 > 0.$$

Подставляя выражения, полученные для Δ_1 и p_1, приходим к условиям

$$-2a_2k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3 - p_2\left(k_1(2-k_1)\frac{a_1^2b_2^2}{b_1^2} + \left(c_1 - k_1\frac{a_1b_2}{b_1}\right)^2\right) > 0,$$

$$\left(2k_1\frac{a_1^2b_2^2}{b_1^2} + c_1^2 - 2k_1\frac{a_1b_2c_1}{b_1}\right)p_2 < -2k_1(2-k_1)\frac{a_1^2a_2}{b_1^2}q_3,$$

$$\left(2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1\right)p_2 < -2k_1(2-k_1)a_1^2a_2q_3,$$

$$p_2 = -\frac{k_1k_2(2-k_1)a_1^2a_2}{2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1}q_3, \quad 0 < k_2 < 2.$$

Подставляя выражение для p_2 в Δ_2, получим

$$\Delta_2 = \frac{k_1^2k_2(2-k_1)^2(2-k_2)a_1^4a_2^2}{b_1^2\left(2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1\right)}q_3^2.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_3 = -\frac{a_3^2}{q_3}\Delta_2 - c_2^2\Delta_1 < 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$-\frac{k_1^2k_2(2-k_1)^2(2-k_2)a_1^4a_2^2a_3^2}{b_1^2\left(2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1\right)} + k_1(2-k_1)\frac{a_1^2c_2^2}{b_1^2} < 0,$$

откуда получаем

$$\frac{c_2^2}{a_1^2a_2^2a_3^2} < \frac{k_1k_2(2-k_1)(2-k_2)}{\left(2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1\right)}.$$

Чтобы область допустимых значений параметров системы была наиболее широкой, надо найти, при каких k_1, k_2 правая часть неравенства достигает своего максимума. Нетрудно видеть, что оптимальное значение $k_2 = 1$. Тогда

$$\frac{2k_1a_1^2b_2^2 + c_1^2b_1^2 - 2k_1a_1b_1b_2c_1}{k_1(2-k_1)} < \frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{c_2^2},$$

$$\frac{a_1^2b_2^2\left(k_1-\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)} < \frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{c_2^2} - a_1^2b_2^2,$$

$$\frac{\left(k_1-\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)} < \frac{a_2^2a_3^2}{c_3^2b_2^2} - 1. \tag{5.17}$$

Отметим, что наиболее широкая область допустимых значений параметров системы будет достигаться при $k_1 = \dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}$, но при этом должно выполняться $0 < \dfrac{c_1b_1}{a_1b_2} < 2$, что не всегда так. Выясним, как выбирать k_1, если не выполняется условие $0 < \dfrac{c_1b_1}{a_1b_2} < 2$. Для этого исследуем левую часть неравенства (5.17). Имеем

$$\left(\frac{\left(k_1-\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)}\right)'_{k_1} = \frac{2k_1^2 - 2\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}k_1^2 + 2\dfrac{c_1^2b_1^2}{a_1^2b_2^2}k_1 - 2\dfrac{c_1^2b_1^2}{a_1^2b_2^2}}{k_1^2(2-k_1)^2} = 0,$$

$$\left(k_1-\frac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)\left(\left(1-\frac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)k_1+\frac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)=0.$$

Нетрудно проверить, что если $\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2} < 0$ или $\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2} > 2$, то $0 < \dfrac{c_1b_1}{c_1b_1 - a_1b_2} < 2$ и $k_1 = \dfrac{c_1b_1}{c_1b_1 - a_1b_2}$ доставляет минимум левой части неравенства (5.17). Исходя из этого, сформулируем теорему.

Теорема. Система

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{pmatrix} f(x(t)) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(x(t-\tau))$$

диагонально устойчива тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий

1)

$$0 < c_1b_1 < 2a_1b_2,$$

$$a_2^3 a_3^2 > c_2^2 b_2^2;$$

2)

$$0 < c_1 b_1 < 2c_1 b_1 - 2a_1 b_2,$$

$$\frac{c_1 b_1 (2a_1 b_2 - c_1 b_1)^2}{a_1^2 b_2^2 (c_1 b_1 - 2a_1 b_2)} < \frac{a_2^2 a_3^2}{c_2^2 b_2^2} - 1.$$

Теперь рассмотрим систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, a_3 < 0$.
В данном случае матрицу R можно представить в форме $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$, где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2p_1 a_1 + \dfrac{p_1^2 b_1^2}{q_3} & \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & p_3 c_1 \\ \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & 2p_2 a_2 + \dfrac{p_2^2 b_2^2}{q_3} & p_3 c_2 \\ p_3 c_1 & p_3 c_2 & 2p_3 a_3 + q_3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что в данном случае система (5.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют диагональная положительно-определённая матрица $P = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$ и число $q_3 > 0$, при которых матрица $\widetilde{R}$ отрицательно определена.

Рассмотрим выполнение условий критерия Сильвестра для матрицы $\widetilde{R}$. Аналогично предыдущему случаю можем перейти от условия $\Delta_3 < 0$ к условию

$$\frac{\Delta_3}{p_3^2} = \left(2\frac{a_3}{p_3} + \frac{q_3}{p_3^2}\right)\Delta_2 - c_2^2 \Delta_1 + 2c_1 c_2 \frac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} - c_1^2 \left(2p_2 a_2 + \frac{p^2 b^2}{q_3}\right) < 0,$$

где от p_3 зависит только $2\dfrac{a_3}{p_3} + \dfrac{q_3}{p_3^2}$. Для того чтобы область допустимых значений параметров системы была наиболее широкой, следует выбирать p_3 таким образом, чтобы минимизировать Δ_3/p_3^2. Откуда следует, что

$$p_3 = -\frac{q_3}{a_3}.$$

Тогда, в данном случае, система (5.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют положительные числа p_1, p_2 и q_3, при которых отрицательно определена матрица

$$\begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2b_1^2}{q_3} & \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & c_1 \\ \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 2p_2a_2 + \dfrac{p_2^2b_2^2}{q_3} & c_2 \\ c_1 & c_2 & -\dfrac{a_3^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условие

$$\Delta_1 = 2p_1a_1 + \frac{p_1^2b_1^2}{q_3} < 0. \tag{5.18}$$

Неравенство (5.18) выполняется если

$$p_1 = -k_1\frac{a_1}{b_1^2}q_3, \quad 0 < k_1 < 2.$$

Тогда

$$\Delta_1 = -k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3.$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$\Delta_2 = (2p_2a_2 + \frac{p_2^2b_2^2}{q_3})\Delta_1 - \frac{b_1^2b_2^2p_1^2p_2^2}{q_3^2} > 0.$$

Подставляя в Δ_2 выражения, найденные для Δ_1 и p_1, получаем

$$-2a_2k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3 - 2k_1\frac{a_1^2b_2^2}{b_1^2}p_2 > 0,$$

$$p_2 < -(2-k_1)\frac{a_2}{b_2^2}q_3,$$

$$p_2 = -k_2(2-k_1)\frac{a_2}{b_2^2}q_3, \quad 0 < k_2 < 1.$$

Подставляя выражение для p_2 в Δ_2, получим

$$\Delta_2 = k_1 k_2 \left(2 - k_1\right)^2 \left(2 + 2k_2 - k_1 k_2 - k_1\right) \frac{a_1^2 a_2}{b_1^2} q_3^2.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_3 = -k_1^2 \left(2 - k_1\right)^2 \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{b_1^2 b_2^2} q_3 + k_1 \left(2 - k_1\right) \frac{a_1^2 c_2^2}{b_1^2} q_3 + k_1^2 k_2^2 \left(2 - k_1\right)^2 \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{b_1^2 b_2^2} q_3 +$$

$$+ 2k_1 k_2 \left(2 - k_1\right) \frac{a_1 a_2 c_1 c_2}{b_1 b_2} q_3 + k_1 \left(2 - k_1\right) \frac{a_2^2 c_1^2}{b_2^2} q_3 < 0,$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{a_1^2 c_2^2}{b_1^2 a_3^2} + 2k_2 \frac{a_1 a_2 c_1 c_2}{b_1 b_2 a_3^2} + \frac{a_2^2 c_1^2}{b_2^2 a_3^2} < k_1 \left(2 - k_1\right) \left(1 - k_2^2\right) \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2}.$$

Правая часть этого неравенства положительна, а, значит, наиболее широкая область допустимых значений параметров будет получена при $k_1 = 1$. Откуда следует

$$k_2^2 \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2} + 2k_2 \frac{a_1 a_2 c_1 c_2}{b_1 b_2 a_3^2} + \frac{a_1^2 c_2^2}{b_1^2 a_3^2} + \frac{a_2^2 c_1^2}{b_2^2 a_3^2} < \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2}. \tag{5.19}$$

Для того чтобы область допустимых значений параметров была наиболее широкой следует выбирать k_2 таким образом, чтобы минимизировать левую часть неравенства (5.19). Нетрудно видеть, что минимум левой части неравенства (5.19) достигается при $k_2 = -\dfrac{b_1 b_2 c_1 c_2}{a_1 a_2 a_3^2}$. Но, кроме того, должно выполняться $0 < k_2 < 1$. Поэтому если $-\dfrac{b_1 b_2 c_1 c_2}{a_1 a_2 a_3^2} < 0$, то для того чтобы минимизировать левую часть неравенства (5.19), следует брать k_2 достаточно близким к 0. Если же $-\dfrac{b_1 b_2 c_1 c_2}{a_1 a_2 a_3^2} > 1$, то k_2 следует брать достаточно близким к 1. Таким образом сформулируем теорему.

Теорема. Система

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix} f(x(t)) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(x(t - \tau))$$

диагонально устойчива тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий

1)

$$-b_1b_2c_1c_2 < 0,$$

$$a_1^2b_2^2c_1^2 + a_2^2b_1^2c_2^2 < a_1^2a_2^2a_3^2;$$

2)

$$0 < -b_1b_2c_1c_2 < a_1a_2a_3^2,$$

$$a_1^2b_2^2c_1^2 + a_2^2b_1^2c_2^2 < a_1^2a_2^2a_3^2 + \frac{b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2}{a_3^2};$$

3)

$$-b_1b_2c_1c_2 > a_1a_2a_3^2,$$

$$(a_1b_2c_1 + a_2b_1c_2)^2 < a_1^2a_2^2a_3^2.$$

6. Заключение

В данной работе были получены необходимые условия абсолютной устойчивости и достаточные условия диагональной устойчивости для одного класса нелинейных систем с переключениями.

Также была рассмотрена нелинейная система с запаздыванием с якобиевой матрицей коэффициентов при нелинейностях, для которой были установлены достаточные условия диагональной устойчивости. Кроме того, для частного случая такой системы был получен критерий диагональной устойчивости. Помимо этого, была рассмотрена система, в которой, наряду с постоянным запаздыванием, имеют место допустимые переключения. Для этого случая были получены достаточные условия диагональной устойчивости.

Были также рассмотрены два специальных случая систем третьего порядка с запаздываниями и найдены критерии их диагональной устойчивости.

Все полученные условия являются конструктивно проверяемыми и их выполнение гарантирует абсолютную устойчивость рассматриваемым системам.

Часть результатов выпускной квалификационной работы была представлена на международной конференции "Процессы управления и устойчивость. Control Processes and Stability. CPS'15". По результатам конференции была опубликована статья [19]. Также часть результатов была представлена на международной конференции "Процессы управления и устойчивость. Control Processes and Stability. CPS'16". Материалы доклада приняты к печати.

Список литературы

[1] Александров А. Ю., Платонов А. В. Метод сравнения и устойчивости движений нелинейных систем. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского униветситета, 2012. 263 с.

[2] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Boston, MA: Birkhauser, 2003. 343 p.

[3] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

[4] Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Екимов А. В., Смирнов Н. В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. СПб.: ООО "СОЛО", 2003. 162 с.

[5] Александров А. Ю., Платонов А. В. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями //Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 3–18 .

[6] Mason O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems // Systems and Control Letters. 2012. Vol. 61, No 1. P. 6–10.

[7] Aleksandrov A. Yu., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 492. P. 38–51.

[8] Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965. 300 с.

[9] Александров А. Ю., Платонов А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: ООО "СОЛО", 2006. 186 с.

[10] Liberzon D., Morse A. S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems. // IEEE Control Systems Magazine. 1999. P. 1–19.

[11] Воронов А. А. Основы теории автоматического управления: Автомат. регулирование непрерыв. линейн. систем. М.: Энергия, 1980. 309 с.

[12] Кановей Г. В., Логофет Д. О. D-устойчивость матриц 4×4 // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. том 38. № 9. С. 1429–1435.

[13] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[14] Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

[15] Kaszkurewicz E., Bhaya A. Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1999. 267 p.

[16] Liao X., Yu P. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. New York, Heidelberg: Springer, 2008. 384 p.

[17] Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977. 366 p.

[18] Aleksandrov A. Yu., Mason O. Diagonal Lyapunov – Krasovskii functionals for discrete-time positive systems with delay // Systems and Control Letters. 2014. Vol. 63, No 1. P. 63–67.

[19] Александров А. Ю., Воробьёва А. А. Построение функционалов Ляпунова – Красовского для одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1 С. 17–22.