Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Крейс Диана

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Применение нового алгоритма для вычисления [0,1]-N-ядра в би-кооперативных играх

Направление 010302

Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., доцент
Панкратова Я. Б.

Рецензент,
Бартель М. В.

Санкт-Петербург

2023

Содержание

Введение

Приобретение и владение некоторыми дефицитными ресурсами является достаточно затратным делом, в следствии чего потребители могут рассматривать вариант кооперирования для совместного использования ресурса. Однако при таком решении естественно возникает вопрос о дележе данного ресурса и затрат на него между участниками. Решение данной проблемы и является основной задачей теории кооперативных игр. Одним из подходов к решению задачи о распределении ресурсов является задание игры в виде характеристической функции.

Данная работа посвящена изучению би-кооперативных игр и поиску их решения. Би-кооперативные игры являются расширением класса кооперативных игр, а главным различием между ними является то, что в би-кооперативной игре возможны два варианта участия: позитивный и негативный. Если значение характеристической функции увеличивается при добавлении некоторого игрока, то такого игрока называют позитивным, если уменьшается — негативным.

Понятие би-кооперативных игр впервые было приведено в статье «Bicooperative games» Bilbao J. M.[1], а затем в статье «A value for bi-cooperative games» Labreuche C., Grabisch M. M.[2] приводилось решение би-кооперативной игры в виде вектора Шепли. В данной работе будет рассматриваться концепция решения кооперативных игр, являющаяся обобщением N-ядра — [0,1]-N-ядро. Оно было определено в работе «Об одном обобщении N-ядра в кооперативных играх» Тарашниной С. И., Смирновой Н. В. [3] и интересно тем, что использует понятия конструктивной и блокирующей сил коалиции. Однако, в отличие от упрощенного модифицированного N-ядра (SM-ядра), введенного в [9] и учитывающего данные силы коалиций в равной степени, рассматриваемое в данной работе решение позволяет учитывать конструктивную и блокирующую силы коалиций в произвольном соотношении.

Первая глава данной работы посвящена основным понятиям и определениям кооперативных игр, а также определению [0,1]-N-ядра для них. Во второй главе вводится понятие би-кооперативной игры и определяется [0,1]-N-ядро для би-кооперативных игр. В третьей главе приводятся примеры би-кооперативных игр, для которых применятся алгоритм нахождения [0,1]-N-ядра.

Постановка задачи

Целью данной работы является реализация алгоритма нахождения [0,1]-N-ядра для би-кооперативных игр. Для выполнения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- Изучить понятие би-кооперативной игры.
- Изучить понятие [0,1]-N-ядра для кооперативных игр.
- Модифицировать [0,1]-N-ядро для би-кооперативной игры.
- Изучить алгоритм построения [0,1]-N-ядра для кооперативной игры.
- Найти решения для примеров би-кооперативной игры.

Обзор литературы

Для выполнения данной работы была изучена научная, учебно-методическая литература и публикации из научных изданий.

Основные понятия, определения и решения кооперативных ТП-игр были изучены с помощью книг «Теория игр», авторов Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. [5] и книги «Game Theory: a multi-leveled approach», Peters H. [6].

Для изучения би-кооперативных игр главным образом была использована статья авторов Labreuche C. и Grabisch M «A value for bi-cooperative games» [2]. В данной публикации также также представлен пример использования би-кооперативной игры для решения задачи распределения расходов на строительство трубопровода. Также была прочитана статья «Bicooperative games» автора Bilbao J. M.[1], а для ознакомления с другими решениями би-кооперативных игр были изучены статьи «The core and the Weber set for bicooperative games» [10] и «The selectope for bicooperative games» [11] авторов Bilbao J. M., Jimenez N., Lopez J. J.

Для ознакомления с концепцией решения [0,1]-N-ядра была использована работа Смирновой Н. В. и Тарашниной С. И. «Об одном обобщении N-ядра в кооперативных играх» [3]. Статья «Геометрические свойства [0,1]-N-ядра в кооперативных ТП-играх», Смирнова Н. В., Тарашнина С. И. [4] была рассмотрена для изучения основных свойств данного решения. Для более детального изучения решений, учитывающих конструктивную и блокирующую силы были изучены публикации Смирновой Н. В. и Тарашниной С. И. «Constructive and blocking powers in some applications» [7] и «Properties of solutions of cooperative games with transferable utilities» [8].

Глава 1. [0,1]-N-ядро для кооперативной ТП-игры

1.1. Основные понятия и определения

Для того, чтобы ввести формальное определение [0,1]-N-ядра для бикооперативной игры, необходимо ввести основные понятия, определения и решения кооперативной игры.

Определение 1.1. [6] *Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями* называется пара (N, v), где

$N = \{1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N}$ — конечное непустое множество игроков;

$v\colon 2^N \to R$ — функция, ставящая в соответствие каждой коалиции $S \subseteq N$ число $v(S)$, такая что $v(\emptyset) = 0$.

Функция v называется *характеристической функцией*, а $v(S)$ — *выигрышем* коалиции S.

Определение 1.2. [5] Вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$\alpha_i \geqslant v(\{i\}),\ i \in N,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N),$$

где $v(\{i\})$ — значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $\{i\}$, называется *дележом.*

Обозначим через G^N множество всех игр (N, v). Предположим, что игроки сформировали максимальную коалицию N. Основной задачей кооперативной теории игр является выбор оптимального распределения суммарного выигрыша $v(N)$ между всеми игроками.

Определим множество допустимых векторов выигрышей в игре (N, v)

следующим образом [3]:

$$X^*(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \colon x(N) \leq v(N)\},$$

где $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i,\ S \subseteq N$.

Определение 1.3. [3] *Множеством эффективно-рациональных векторов выигрышей* в игре (N,v) называется множество:

$$X^0(N,v) = \{x \in \mathbb{R}^N \colon x(N) = v(N)\}.$$

Определение 1.4. [3] *Множеством дележей* $X(N,v)$ в игре (N,v) называется множество эффективно-рациональных векторов выигрышей, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности, т.е. множество векторов $x \in X^0(N,v)$, для которых выполняется $x_i \geq v(\{i\})$ для всех $i \in N$.

Определение 1.5. [3] *Решением на множестве игр* G^N называется отображение $f \colon G^N \to X^*(N,v)$, которое каждой игре $(N,v) \in G^N$ ставит в соответсвие подмножество $f(N,v)$ множества $X^*(N,v)$.

Наиболее известными концепциями решений для кооперативных ТП-игр являются вектор Шепли, C-ядро и N-ядро. Перейдем к более подробному рассмотрению понятия [0,1]-N-ядра, которое относится к классу эксцессоподобных решений и связано с понятием N-ядра.

Определение 1.6. [4] *Эксцессом* $e(x,v,S)$ коалиции $S \subseteq N$ кооперативной игры (N,v) для произвольного $x \in X^0(N,v)$ будем называть величину, которая определяется по правилу

$$e(x,v,S) = x(S) - v(S).$$

Определение 1.7. [3] *N-ядром* относительно множества $X \subset X^0(N,v)$ называется множество векторов $x \in X$:

$$\mathcal{N}(X) = \{x \in X : \theta(e(x,v,S)_{S \subseteq N}) \succeq_{lex} \theta(e(y,v,S)_{S \subseteq N}) \text{ для } \forall y \in X\},$$

где $\theta(e(x,v,S))_{S\subseteq N}$ — вектор эксцессов всех коалиций $S \subseteq N$ для вектора x, расположенных в порядке невозрастания.

$\mathcal{N}(X)$ называется N-ядром игры (N,v) и обозначается через $\mathcal{N}$, если $X = X(N,v)$. Если $X = X^0(N,v)$, то $\mathcal{N}(X^0)$ называется пред-N-ядром игры (N,v) и обозначается через $\mathcal{PN}$.

1.2. Определение [0,1]-N-ядра

Новое решение является интересным тем, что оцениваются с двух сторон возможности коалиции S в игре (N, v). Во-первых, коалиция $S \subseteq N$ обладает конструктивной силой, так как гарантированно обеспечивает себе выигрыш $v(S)$. А во-вторых, обладает блокирующей силой, которую характеризует величина $v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S)$, которую следует понимать как вклад коалиции S во все сообщество игроков N. Наиболее известные концепции решения учитывают только конструктивную силу коалиции S, например такие, как N-ядро и C-ядро. А в отличие от SM-ядра, которое учитывает конструктивную и блокирующую силы в равной мере, [0,1]-N-ядро учитывает данные силы в произвольном соотношении.

Определение 1.8. [3] Будем называть (N, v^*) *двойственной игрой* к данной игре (N, v), если ее характеристическая функция v^* задается по правилу

$$v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S),\ \ S \subseteq N$$

Определение 1.9. [3] *α-эксцессом* коалиции $S \subseteq N$ относительно $x \in X^0(N, v)$ для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ будем называть величину

$$e^{\alpha}(x, v, S) = \alpha e(x, v, S) + (1 - \alpha) e(x, v^*, S).$$

Определение 1.10. [3] Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ *α-N-ядром* относительно множества $X^0(N, v)$ является множество векторов $x \in X^0(N, v)$:

$$\mathcal{N}^{\alpha}(X^0) = \{x \in X^0(N, v) : \theta(e^{\alpha}(x, v, S)_{S \subseteq N}) \succeq_{lex} \theta(e^{\alpha}(y, v, S)_{S \subseteq N})$$

$$\text{для } \forall y \in X^0(N, v)\},$$

где $\theta(e^{\alpha}(x, v, S)_{S \subseteq N})$ — вектор эксцессов, расположенных в невозрастающем порядке.

Определение 1.11. [3] *[0,1]-N-ядром* игры (N, v) на множестве $X^0(N, v)$ называется множество всех α-N-ядер игры (N, v) для всех $\alpha \in [0, 1]$, т.е.:

$$\overline{\mathcal{N}}(X^0) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{N}^{\alpha}(X^0).$$

Можно заметить, что [0,1]-N-ядро является множеством точек, описываемых с помощью параметра $\alpha \in [0; 1]$, который является весом, учитывающим конструктивную силу коалиции в решении. Также стоит отметить, что на произвольном классе игр данное решение содержит в себе такие решеиния как пред-N-ядро и SM-ядро при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.5$ соответственно, а на классе супераддитивных игр трех лиц содержит в себе и вектор Шепли. [3].

Глава 2. [0,1]-N-ядро для би-кооперативной игры

Перейдем к рассмотрению понятия би-кооперативной игры. Би-кооперативные игры отличаются от классических кооперативных игр тем, что добавляется второй вариант участия в игре, когда при добавлении игрока в коалицию значение характеристической функции не увеличивается, а уменьшается. Таким образом характеристическая функция будет зависеть от пары коалиций, каждая из которых представляет собой объединение игроков с одним или другим вариантом поведения.

Определение 1.12. [2] Введем $Q(N) = \{(S,T) \mid S,T \subseteq N,\ S \cap T = \emptyset\}$ — множество пар непересекающихся коалиций. *Би-кооперативной игрой* будем называть пару (N,v) с конечным множеством игроков $N = \{1,\ldots,n\}$ и характеристической функцией $v : Q(N) \to \mathbb{R}$, для которой $v(\emptyset,\emptyset) = 0$, а $v(S,T)$ — это выигрыш парной коалиции (S,T), где S — коалиция, состоящая из позитивных игроков, T — коалиция негативных игроков, а остальные игроки не принимают участия.

Игрока i будем называть позитивным, если для любой коалиции $(S,T) \in Q(N\backslash\{i\})$:

$$v(S \cup \{i\}, T) \geq v(S,T).$$

Игрока i будем называть негативным, если для любой коалиции $(S,T) \in Q(N\backslash\{i\})$:

$$v(S, T \cup \{i\}) \leq v(S,T).$$

В отличие от обычной кооперативной игры, где в итоге рассматривается ситуация объединения всех игроков в максимальную коалицию, здесь необязательно, чтобы все игроки выбрали позитивный вариант участия. Обозначим через S множество игроков, которые в итоге выбрали позитивный вариант участия, а через T множество игроков, которые выбрали негативный вариант участия. Остальнве игроки $N \backslash (S \cup T)$ решили не принимать участие.

Для $K \subseteq (S \cup T)$ введем:

$$V(K) = v(S \cap K, T \cap K). \tag{1}$$

Определение 1.13. Для би-кооперативной игры (N, v) *эксцессом* коалиции (S, T) будем называть:

$$e^{S,T}(x, V, K) = V(K) - x(K), \text{ при } K \subseteq (S \cup T) \tag{2}$$

где $x(K) = \sum\limits_{i \in K} x_i$ $(K \subseteq (S \cup T))$.

Определение 1.14. (N, v^*) будем называть *двойственной игрой* для би-кооперативной игры (N, v), если

$$V^*(K) = V(N) - V(N \backslash K), \tag{3}$$

где $V(N \backslash K) = v(S \cap (N \backslash K), T \cap (N \backslash K)) = v(S \backslash K, T \backslash K)$, $V(N) = v(N \cap S, N \cap T) = v(S, T)$.

Определение 1.15. *α-эксцессом* парной коалиции (S, T) для би-кооперативной игры (N, v) относительно $x \in X^0(N, v)$ для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ будем называть величину

$$e^\alpha(x, V, K) = \alpha e(x, V, K) + (1 - \alpha) e(x, V^*, K).$$

Определение 1.16. Для фиксированного $\alpha \in [0, 1]$ *α-N-ядром* би-кооперативной игры (N, v) относительно множества $X^0(N, v)$ является множество векторов $x \in X^0(N, v)$:

$$\mathcal{N}^\alpha(X^0) = \{x \in X^0(N, v) : \theta(e^\alpha(x, V, K)_{K \subseteq (S \cup T)}) \preceq_{lex} \theta(e^\alpha(y, V, K)_{K \subseteq (S \cup T)})$$
$$\text{для } \forall y \in X^0(N, v)\},$$

где $\theta(e^{\alpha}(x,V,K)_{K\subseteq(S\cup T)})$ — вектор α-эксцессов, расположенных в невозрастающем порядке.

Определение 1.17. [0,1]-N-ядром би-кооперативной игры (N,v) на множестве $X^0(N,v)$ называется множество всех α-N-ядер игры (N,v) для всех $\alpha\in[0,1]$, т.е.:

$$\overline{\mathcal{N}}(X^0)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\mathcal{N}^{\alpha}(X^0).$$

Глава 3. Построение [0,1]-N-ядра для би-кооперативной игры

3.1. Алгоритм

Приведем описание алгоритма для нахождения [0,1]-N-ядра для би-кооперативной игры, основанного на процедуре поиска произвольного α-N-ядра, разработанной Смирновой Н.В. Данная процедура позволяет за конечное число шагов найти α-N-ядро для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, тем самым позволяя найти [0,1]-N-ядро, объединив множество α-N-ядер для всех $\alpha \in [0;1]$.

Предположим, что игроки объединились в парную коалицию (S, T), где S — это множество игроков, выбравших позитивный вариант участия, а T — негативный.

Шаг 0. Для каждого $K \subset S \cup T$ вычислить значения $V(K), V^*(K), \Delta(K) = V^*(K) - V(K)$. Зафиксировать набор $\mathcal{D}_1$, в который войдут коалиции L: $\min\limits_K \Delta(K) = \Delta(L)$.

Шаг 1 (Построение первого характеристического множества). Выберем из набора $\mathcal{D}_1$ сбалансированный поднабор $\mathcal{D}'_1$ (возможно, совпадающий с $\mathcal{D}_1$). Проверим ранг системы векторов $\{e_{K'} : K' \in \mathcal{D}'_1\} \cup e_{S \cup T}$. Возможны следующие случаи:

1a Если ранг системы равен $n = |S \cup T|$, то $\mathcal{D}'_1 \cup S \cup T$ формирует характеристическое множество для α-N-ядра игры (N, v) для любого фиксированного $\alpha \in (\alpha_1, +\infty)$. Выберем из набора $\{e_{K'} : K' \in \mathcal{D}'_1\} \cup e_{S \cup T}$ ЛНЗ систему векторов $\{e_{S \cup T}, e_{K_1}, \ldots, e_{K_{n-1}}\}$ и зафиксируем коалиции $\{S \cup T, K_1, \ldots, K_{n-1}\}$, с которыми соотносится ЛНЗ система векторов. Тогда решаем систему вида относительно x (система имеет единственное решение):

$$\begin{cases} e^{\alpha}(x, V, S \cup T) = 0 \\ e^{\alpha}(x, V, K_1) = e^{\alpha}(x, V, K_2), \\ \vdots \\ e^{\alpha}(x, V, K_1) = e^{\alpha}(x, V, K_{n-1}). \end{cases} \tag{4}$$

1b Если ранг системы меньше n, то $\mathcal{D}'_1 \cup S \cup T$ входит в характеристическое множество для α-N-ядра игры (N, v) для любого фиксированного $\alpha \in (\alpha_1, +\infty)$, но характеристическое множество нужно достроить. Зафиксируем набор $\mathcal{D}_2$, в который войдут коалиции L со следующим по минимальности $\Delta(K)$: $\min\limits_{K \in 2^{S \cup T} \setminus \{S \cup T \cup \emptyset \cup \mathcal{D}_1\}} \Delta(K) = \Delta(L)$. Если ранг системы $\{e_K : K \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\} \cup e_{S \cup T}$ больше ранга системы $\{e_{S \cup T}, e_{K_1}, \ldots, e_{K_{n-1}}\}$, то есть ранг увеличился, то выберем из набора $\mathcal{D}_2$ поднабор $\mathcal{D}'_2$ (возможно, совпадающий с $\mathcal{D}_2$), так чтобы $\mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2$ было сбалансированным набором. Зафиксируем в наборе $S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2$ коалиции $\{S \cup T, K_1^{(1)}, \ldots, K_{i_1}^{(1)}, K_1^{(2)}, \ldots, K_{i_2}^{(2)}\}$, $K_j^{(1)} \in \mathcal{D}'_1$, $K_k^{(2)} \in \mathcal{D}'_2$, $j = 1, \ldots, i_1$, $k = 1, \ldots, i_2$, с которыми соотносится ЛНЗ система векторов $\{e_{S \cup T}, e_{K_1^{(1)}}, \ldots, e_{K_{i_1}^{(1)}}, e_{K_1^{(2)}}, \ldots, e_{K_{i_2}^{(2)}}\}$.

Если ранг этой системы меньше n, то повторяем действия пункта 1b пока не будет сформирована система

$$\{e_{S \cup T}, e_{K_1^{(1)}}, \ldots, e_{K_{i_1}^{(1)}}, e_{K_1^{(2)}}, \ldots, e_{K_{i_2}^{(2)}}, e_{K_1^{(3)}}, \ldots, e_{K_{i_3}^{(3)}}, \ldots, e_{K_1^{(j)}}, \ldots, e_{K_{i_j}^{(j)}}\},$$

ранг которой равен n, любой набор $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{D}'_i, k = 1, \ldots, j$, сбалансирован.

Если ранг $Rank(\{e_K : K \in S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2\}) = Rank(\{e_K :$

$K \in S \cup T \cup \mathcal{D}'_1\}$), то строим новое множество $\mathcal{D}_2$, в который войдут коалиции L со следующим по минимальности $\Delta(K)$:

$$\min_{K \in 2^{S\cup T} \setminus \{S \cup T \cup \emptyset \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\}} \Delta(K) = \Delta(L).$$

Результатом пункта будет набор

$$S \cup T, \underbrace{K_1^{(1)}, \ldots, K_{i_1}^{(1)}}_{\mathcal{D}'_1}, \underbrace{K_1^{(2)}, \ldots, K_{i_2}^{(2)}}_{\mathcal{D}'_2}, \underbrace{K_1^{(3)}, \ldots, K_{i_3}^{(3)}}_{\mathcal{D}'_3}, \ldots, \underbrace{K_1^{(j)}, \ldots, K_{i_j}^{(j)}}_{\mathcal{D}'_j},$$

в котором

– любой набор $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{D}'_i, k = 1, \ldots, j$, сбалансирован;

– $Rank(\{e_L : L \in S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_i\}) >$
  $> Rank(\big\{e_L : L \in S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_{i-1}\big\})$.

– $R^n = Span\left\{e_L : L \in \bigcup\limits_{i=1}^{j} \mathcal{D}'_i\right\}$.

Тогда система вида

$$\begin{cases} e^\alpha(x, V, S \cup T) = 0, \\ e^\alpha(x, V, K_1^{(1)}) = \ldots = e^\alpha(x, V, K_{i_1}^{(1)}), \\ \vdots \\ e^\alpha(x, V, K_1^{(j)}) = \ldots = e^\alpha(x, V, K_{i_j}^{(j)}). \end{cases} \tag{5}$$

имеет единственное решение $x = \nu_1^\alpha$, являющееся α-N-ядром игры (N, v) для любого фиксированного $\alpha \in (\alpha_1, +\infty)$. Множество $\mathcal{F}_1 = S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_j$ является характеристическим множеством для любого α-N-ядра игры (N, v) на этом интервале значений α.

Для того, чтобы найти оценку на α_1, переходим к шагу 2.

Шаг 2 (Нахождение точки изменения характеристического множества). Подставим $x = \nu_1^\alpha$ во все α-эксцессы: найдем $e^\alpha(x, V, K)$ для любого $K \subset S \cup T$ — получим линейные функции, зависящие от переменной α. Для сохранения сбалансированности набора, проверим условия упорядоченности эксцессов

$$\begin{cases} e^{\alpha}(x, V, K_1^{(1)}) \leq e^{\alpha}(x, V, K_1^{(2)}), \\ e^{\alpha}(x, V, K_1^{(2)}) \leq e^{\alpha}(x, V, K_1^{(3)}), \\ \vdots \\ e^{\alpha}(x, V, K_1^{(j-1)}) \leq e^{\alpha}(x, V, K_1^{(j)}). \end{cases} \tag{6}$$

Для оставшихся $K \notin S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_j$ выполняем проверку

$$e^{\alpha}(x, V, K_1^{(i)}) \leq e^{\alpha}(x, V, K) \quad \text{для } e_K \in Span\{e_L : L \in \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_i\}; \\ \text{и } e_K \notin Span\{e_L : L \in \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_{i-1}\} \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) получаем решение $\alpha \geq \alpha_1$ с числовым значением α_1. Подставим α_1 в неравенства (6) и (7) и зафиксируем те наборы коалиций $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ из (7), для которых неравенства становятся равенствами. Получим для $\alpha = \alpha_1$ новое характеристичесоке множество

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = S \cup T \cup \mathcal{D}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}'_j \cup \{L_1, L_2, \ldots, L_k\},$$

расширенное относительно $\mathcal{F}_1$. Выберем из $\hat{\mathcal{F}}_1$ сбалансированный набор

$$\mathcal{F}_2 = S \cup T \cup \mathcal{D}_1^2 \cup \mathcal{D}_2^2 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_{j_2}^2,$$

удовлетворяющий условиям

- любой набор $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i^2, k = 1, \ldots, j_2$, сбалансирован;
- $Rank(\{e_L : L \in S \cup T \cup \mathcal{D}_1^2 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_i^2\}) >$
  $> Rank(\{e_L : L \in S \cup T \cup \mathcal{D}_1^2 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_{i-1}^2\})$.
- $R^n = Span\left\{e_L : L \in \bigcup\limits_{i=1}^{j_2} \mathcal{D}_i^2\right\}$.

Решаем преобразованную систему (5), которая имеет единственное решение $x = \nu_2^\alpha$, являющееся α-N-ядром игры (N, v) для любого фиксированного $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_1)$. Множество $\mathcal{F}_2$ является характеристическим множеством для любого α-N-ядра игры (N, v) на этом интервале значений α. Для нахождения оценки на α повторяем Шаг 2, в котором системы неравенств (6) и (7) преобразованы для набора $\mathcal{F}_2$.

Окончание процедуры. Результатом процедуры являются наборы характеристических множеств и соответсвующих α-N-ядер игры (N, v) с указанием промежутка значений $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Без задания конкретного значения $\overline{\alpha}$ будут построены все α-N-ядра игры (N, v). Для построения [0,1]-N-ядра достаточно перестать повторять шаг 2, как только найдено $\alpha_i \leq 0$.

3.2. Пример игры трех игроков

Применим алгоритм построения [0,1]-N-ядра для примера, сформулированного в статье [2].

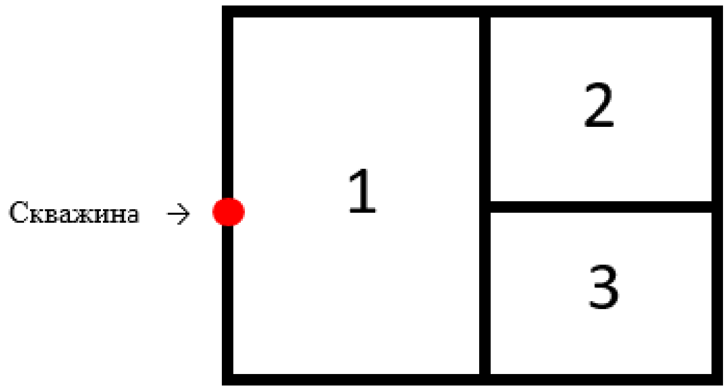


Рис. 1: Игра с тремя полями и колодцем.

Рассмотрим три участка земли и один источник воды, расположение которых показано на Рис. 1. Размеры участка первого игрока — 10 единиц длины в высоту и 5 единиц в ширину. Участки второго и третьего игрока равны и являются квадратами со стороной, равной 5 единиц длины. Так как вода является важным ресурсом, а скважина находится на внешней стороне участка 1, то, чтобы обеспечить водой участки 2 и 3, необходимо проведение трубопровода вдоль границ участков.

Стоимость выкопать колодец равняется 1. Прокладка труб стоит 1 за единицу длины. Возможны 4 ситуации, в зависимости от того, какие игроки нуждаются в воде (Рис. 2).

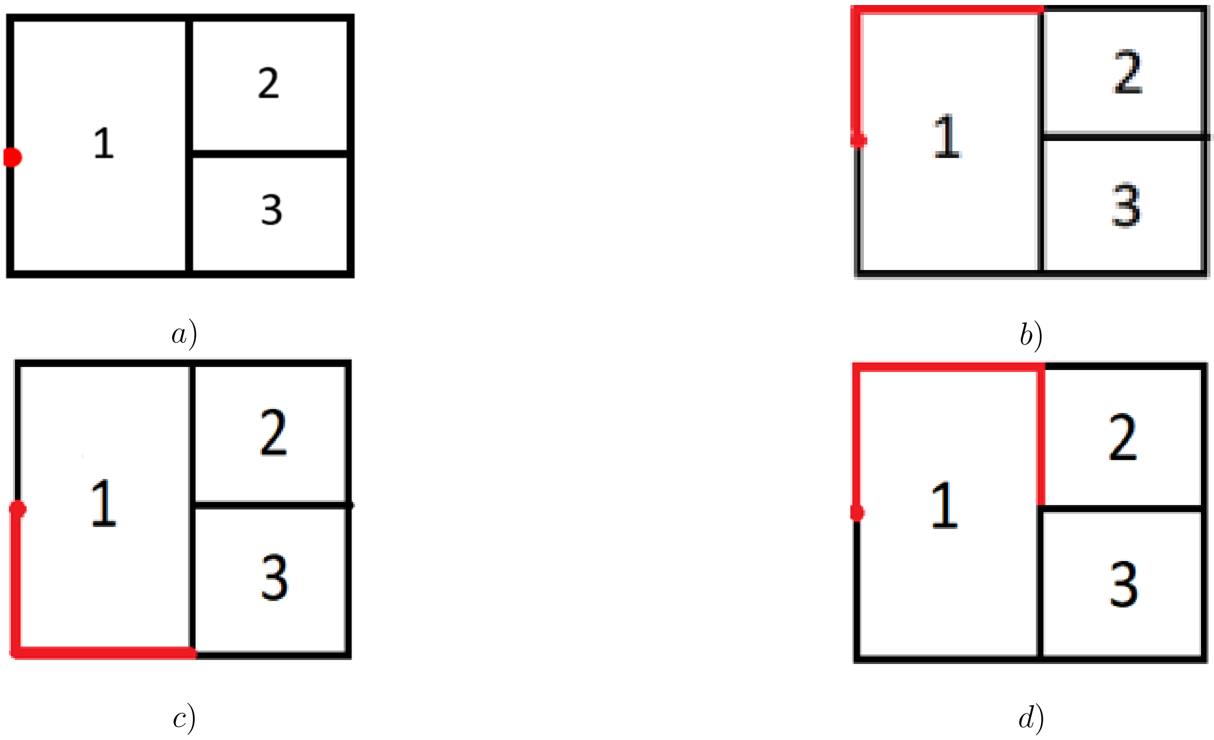


Рис. 2: Четыре возможных способа проведения трубопровода: Случай a (стоимость затрат $= 1$); Случай b (стоимость $= 11$); Случай c (стоимость $= 11$); Случай d (стоимость $= 16$).

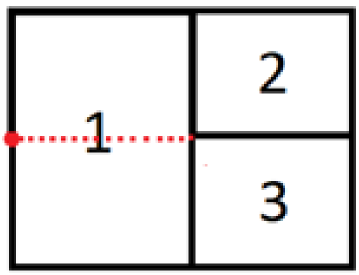


Рис. 3: Случай e (стоимость $= 6$)

Стоимость прокладки труб до участков 2 и 3 довольно высока. Возможным вариантом снизить затраты на проведение трубопровода является проведение труб через участок 1 (Рис. 3).

Так как проведение труб через участок игрока 1 будет доставлять ему некоторые неудобства, он в праве выбирать, давать ли разрешение на проведение трубопровода через его участок. Таким образом, игроку 1 необходимо проанализировать оба варианта участия для того, чтобы принять решение.

Характеристическая функция игры будет иметь следующий вид:

$v(\emptyset, \emptyset) = 0,$

$v(\{1\}, \emptyset) = v(\emptyset, \{1\}) = 1$ (Случай a),

$v(\{2\}, \emptyset) = v(\{3\}, \emptyset) = v(\{1, 2\}, \emptyset) = v(\{1, 3\}, \emptyset) = 11$ (Случай b, c),

$v(\{2, 3\}, \emptyset) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) = 16$ (Случай d),

$v(\{2\}, \{1\}) = v(\{3\}, \{1\}) = v(\{2, 3\}, \{1\}) = 6$ (Случай e).

1) Рассмотрим случай, когда игрок 1 является позитивным игроком, то есть не разрешает проведение труб через свой участок. Тогда $(S, T) = (\{1, 2, 3\}, \emptyset)$, а общая стоимость трубопровода будет равняться 16, то есть $v(S, T) = 16$. Для построения [0,1]-N-ядра рассмотрим следующие $K : \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. Найдем значения функции $V(K)$ по формуле (1):

$V(1) = 1,$

$V(2) = 11,$

$V(3) = 11,$

$V(1, 2) = 11,$

$V(1, 3) = 11,$

$V(2, 3) = 16.$

Найдем двойственные функции игры, вычисленные по формуле (3):

$V^*(1) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{2, 3\}, \emptyset) = 16 - 16 = 0,$

$V^*(2) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{1, 3\}, \emptyset) = 16 - 11 = 5,$

$V^*(3) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{1, 2\}, \emptyset) = 16 - 11 = 5,$

$V^*(1, 2) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{3\}, \emptyset) = 16 - 11 = 5,$

$V^*(1, 3) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{2\}, \emptyset) = 16 - 11 = 5,$

$V^*(2, 3) = v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) - v(\{1\}, \emptyset) = 16 - 1 = 15.$

Преобразуем выражение для нахождения α-эксцесса:

$e^{\alpha}(x,V,K)=\alpha e(x,V,K)+(1-\alpha)e(x,V^{*},K)=$

$=\alpha(x(K)-V(K))+(1-\alpha)(x(K)-V^{*}(K))=$

$=\alpha x-\alpha V+x-V^{*}-\alpha x+\alpha V^{*}=x-(\alpha V+(1-\alpha)V^{*}).$

Найдем α-эксцесс для каждого K:

$e^{\alpha}(1)=x_1-(\alpha+(1-\alpha)0)=x_1-\alpha,$

$e^{\alpha}(2)=x_2-(11\alpha+(1-\alpha)5)=x_2-5-6\alpha,$

$e^{\alpha}(3)=x_3-(11\alpha+(1-\alpha)5)=x_3-5-6\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2)=x_1+x_2-(11\alpha+(1-\alpha)5)=x_1+x_2-5-6\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3)=x_1+x_3-(11\alpha+(1-\alpha)5)=x_1+x_3-5-6\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3)=x_2+x_3-(16\alpha+(1-\alpha)15)=x_2+x_3-15-\alpha.$

Для каждого K посчитаем $\Delta(K)=V^{*}(K)-V(K)$:

$\Delta(1)=0-1=-1,$

$\Delta(2)=5-11=-6,$

$\Delta(3)=5-11=-6,$

$\Delta(1,2)=5-11=-6,$

$\Delta(1,3)=5-11=-6,$

$\Delta(2,3)=15-16=-1.$

$\min\Delta(K)=-6$. Отбираем коалиции $\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}$. Получаем первый сбалансированный набор $R_1=(\{2\},\{1,3\};\{3\},\{1,2\})$.

Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2-5-6\alpha=x_1+x_3-5-6\alpha,\\ x_3-5-6\alpha=x_1+x_2-5-6\alpha,\\ x_1+x_2+x_3=16. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1=0;\quad x_2=8;\quad x_3=8$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^\alpha(1) = -\alpha,$

$e^\alpha(2) = e^\alpha(1,3) = 3 - 6\alpha,$

$e^\alpha(3) = e^\alpha(1,2) = 3 - 6\alpha,$

$e^\alpha(2,3) = 1 - \alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 3 - 6\alpha \leq -\alpha, \\ 3 - 6\alpha \leq 1 - \alpha, \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \geq 0.6$. Таким образом нашли решение для первого интервала для α: при $\alpha \in [0.6; 1]$ $x = (0; 8; 8)$. Добавляем коалицию $K = \{1\}$ в набор R_1.

Рассмотрим теперь сбалансированный набор $R_2 = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$. Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha = x_2 - 5 - 6\alpha, \\ x_1 - \alpha = x_3 - 5 - 6\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = 2 - \frac{10}{3}\alpha$; $x_2 = 7 + \frac{5}{3}\alpha$; $x_3 = 7 + \frac{5}{3}\alpha$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^\alpha(1) = e^\alpha(2) = e^\alpha(3) = 2 - \frac{13}{3}\alpha,$

$e^\alpha(1,2) = 4 - \frac{23}{3}\alpha,$

$e^\alpha(1,3) = 4 - \frac{23}{3}\alpha,$

$e^\alpha(2,3) = -1 + \frac{7}{3}\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 - \frac{13}{3}\alpha \leq 4 - \frac{23}{3}\alpha, \\ 2 - \frac{13}{3}\alpha \leq -1 + \frac{7}{3}\alpha, \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \geq 0.45$ и $\alpha \leq 0.6$. Добавляем коалицию $\{2, 3\}$. Получаем сбалансированный набор $R_3 = (\{1\}, \{2, 3\}; \{2\}, \{3\})$. Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha = x_2 + x_3 - 15 - \alpha, \\ x_2 - 5 - 6\alpha = x_3 - 5 - 6\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = 0.5; \quad x_2 = 7.75; \quad x_3 = 7.75$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^\alpha(1) = e^\alpha(2, 3) = 0.5 - \alpha,$

$e^\alpha(2) = e^\alpha(3) = 2.75 - 6\alpha,$

$e^\alpha(1, 2) = e^\alpha(1, 3) = 3.25 - 6\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 0.5 - \alpha \leq 2.75 - 6\alpha, \\ 2.75 - 6\alpha \leq 3.25 - 6\alpha, \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \geq 0.45$. Значит, [0,1]-N-ядро данной игры, когда игрок 1 выбирает позитивный вариант участия, будет иметь вид:

$\alpha \in [0; 0.45) \Longrightarrow x = (0.5; 7.75; 7.75),$

$\alpha \in [0.45; 0.6) \Longrightarrow x = (2 - \frac{10}{3}\alpha; 7 + \frac{5}{3}\alpha; 7 + \frac{5}{3}\alpha),$

$\alpha \in [0.6; 1] \Longrightarrow x = (0; 8; 8).$

2) Теперь рассмотрим вариант, когда игрок 1 принимает негативный вариант участия, то есть разрешает провести трубы через свой участок. Тогда $(S, T) = (\{2, 3\}, \{1\})$, а $v(S, T) = 6$.

Значения функции $V(K)$:

$V(1) = 1,$

$V(2) = 11,$

$V(3) = 11,$

$V(1,2) = 6,$

$V(1,3) = 6,$

$V(2,3) = 16.$

Найдем двойственные функции игры:

$V^*(1) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\{2,3\},\emptyset) = 6 - 16 = -10,$

$V^*(2) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\{3\},\{1\}) = 6 - 6 = 0,$

$V^*(3) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\{2\},\{1\}) = 6 - 6 = 0,$

$V^*(2,1) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\{3\},\emptyset) = 6 - 11 = -5,$

$V^*(3,1) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\{2\},\emptyset) = 6 - 11 = -5,$

$V^*(2,3) = v(\{2,3\},\{1\}) - v(\emptyset,\{1\}) = 6 - 1 = 5.$

Найдем α-эксцесс для каждого K:

$e^\alpha(1) = x_1 - (\alpha - 10(1-\alpha)) = x_1 + 10 - 11\alpha,$

$e^\alpha(2) = x_2 - 11\alpha,$

$e^\alpha(3) = x_3 - 11\alpha,$

$e^\alpha(1,2) = x_1 + x_2 - (6\alpha - 5(1-\alpha)) = x_1 + x_2 + 5 - 11\alpha,$

$e^\alpha(1,3) = x_1 + x_3 - (6\alpha - 5(1-\alpha)5) = x_1 + x_3 + 5 - 11\alpha,$

$e^\alpha(2,3) = x_2 + x_3 - (16\alpha + 5(1-\alpha)) = x_2 + x_3 - 5 - 11\alpha.$

Для каждого K посчитаем $\Delta(K) = V^*(K) - V(K)$:

$\Delta(1) = -10 - 1 = -11,$

$\Delta(2) = 0 - 11 = -11,$

$\Delta(3) = 0 - 11 = -11,$

$\Delta(1,2) = -5 - 6 = -11,$

$\Delta(1,3) = -5 - 6 = -11,$

$\Delta(2,3) = 5 - 16 = -11.$

$\min \Delta(K) = -11$. Рассмотрим сбалансированный набор $R_1 = (\{1\},\{2\},\{3\})$.

Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + 10 - 11\alpha = x_2 - 11\alpha, \\ x_2 - 11\alpha = x_3 - 11\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = -\frac{14}{3};\ \ x_2 = \frac{16}{3};\ \ x_3 = \frac{16}{3}$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(1) = e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(3) = \frac{16}{3} - 11\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2) = e^{\alpha}(1,3) = \frac{17}{3} - 11\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3) = \frac{17}{3} - 11\alpha.$

Получаем следующее неравенство:

$$\frac{16}{3} - 11\alpha \leq \frac{17}{3} - 11\alpha.$$

Находим, что α может принимать любые значения. [0,1]-N-ядро данной игры, когда игрок 1 выбирает негативный вариант участия, будет состоять только из одного вектора решений:

$\alpha \in [0;1] \Longrightarrow x = (-\frac{14}{3}; \frac{16}{3}; \frac{16}{3}).$

Полученные решения для двух вариантов игры представим в виде таблицы:

Варианты участия игроков, (S,T)	**Интервалы значений для** α	**Векторы решения** $x = (x_1; x_2; x_3)$
$(\{1,2,3\}, \emptyset)$	$[0; 0.45)$ $[0.45; 0.6)$ $[0.6; 1]$	$(0.5; 7.75; 7.75)$ $(2 - 3.33\alpha; 7 + 1.67\alpha; 7 + 1.67\alpha)$ $(0; 8; 8)$
$(\{2,3\}, \{1\})$	$[0; 1]$	$(-4.67; 5.33; 5.33)$

3.3. Пример игры четырех игроков

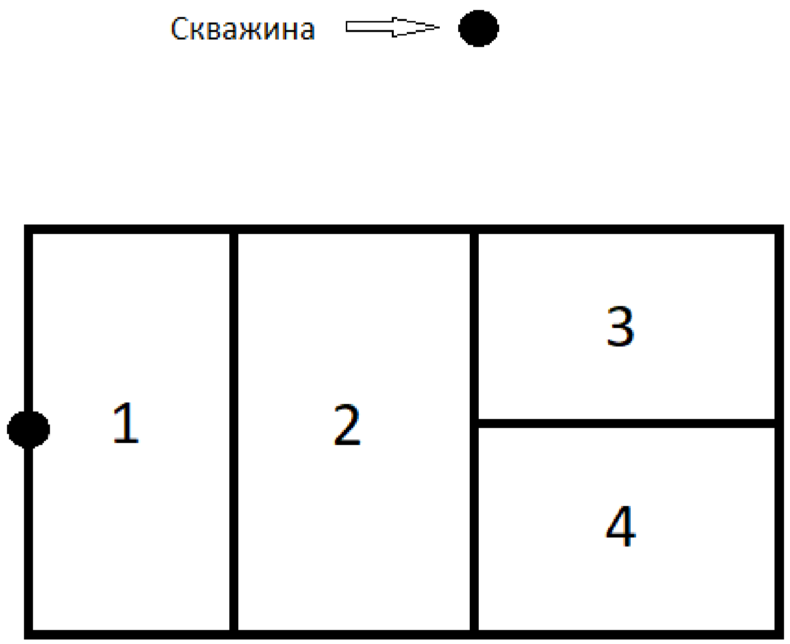
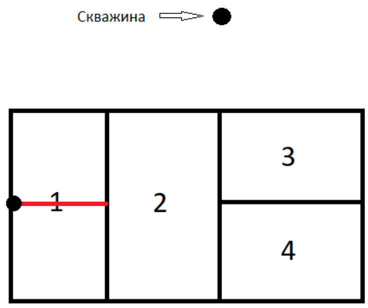


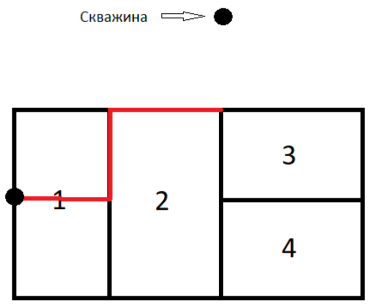
Рис. 4: Четыре поля и два источника воды

Рассмотрим пример с четырьмя участками земли. В данной игре есть две скважины: одна на границе поля первого фермера, а другая на значительном расстоянии от всех полей. Игрокам 2, 3 и 4 нужна вода, но первому игроку нет. Поэтому первый игрок стоит перед выбором: он может либо согласиться на проведение труб с дискомфортом для себя, что означает негативный тип участия, либо отказаться сотрудничать с другими игроками, и тогда им необходимо будет искать более затратные пути проведения воды до своих полей. В зависимости от решения первого игрока, у второго игрока также появляется выбор: либо трубы будут проложены по границе его поля, что означает позитивное участие, либо он соглашается на проведение труб через свое поле с дискомфортом для себя.

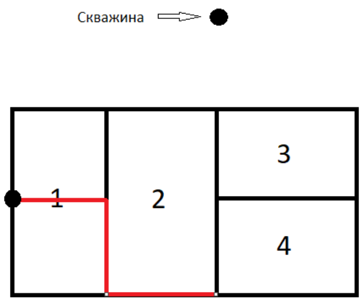
В случае, когда 1 соглашается на прокладку труб через свое поле, но второй игрок отказывается, то возможны следующие четыре ситуации, представленные на рисунке 5:



$a)$



$b)$



$c)$

$d)$

Рис. 5: Возможные способы проведения труб: Вариант a (цена = 5); Вариант b (цена = 17); Вариант c (цена = 17); Вариант d (цена = 23)

Рисунок 6 демонстрирует единственный вариант, когда и 1, и 2 игроки соглашаются на проведение трубопровода через свои участки земли:

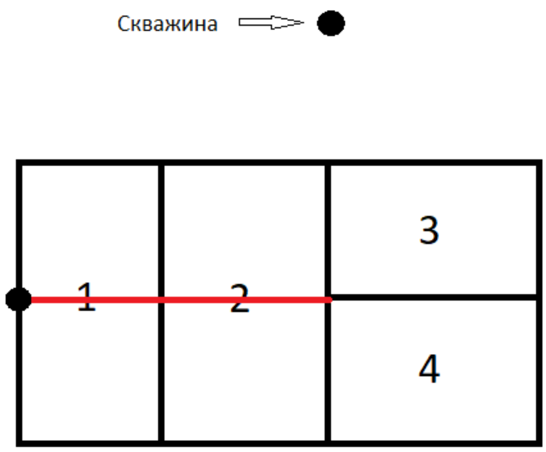


Рис. 6: Вариант e (стоимость = 11)

Если игрок 1 отказывается от сотрудничества с другими игроками, то остальные игроки используют источник воды, находящийся на большом расстоянии от их полей:

Рис. 7: Вариант a (цена = 19); Вариант b (цена = 25)

Характеристическая функция игры будет иметь следующий вид:

$v(\emptyset,\emptyset) = v(\emptyset,\{1\}) = 0,$

$v(\{2\},\{1\}) = v(\emptyset,\{1,2\}) = 5,$

$v(\{2\},\emptyset) = v(\emptyset,\{2\}) = v(\{3\},\emptyset) = v(\{3,2\},\emptyset) = v(\{3\},\{2\}) = 19,$

$v(\{4\},\emptyset) = v(\{3,4\},\emptyset) = v(\{3,4\},\{2\}) = v(\{2,4\},\emptyset) = v(\{4\},\{2\}) =$

$= v(\{2,3,4\},\emptyset) = 25,$

$v(\{3\},\{1\}) = v(\{4\},\{1\}) = v(\{2,3\},\{1\}) = v(\{2,4\},\{1\}) = 17,$

$v(\{3,4\},\{1\}) = v(\{2,3,4\},\{1\}) = 23,$

$v(\{3\},\{1,2\}) = v(\{4\},\{1,2\}) = v(\{3,4\},\{1,2\}) = 11.$

Будем искать [0,1]-N-ядро для трех вариантов участия игроков в игре.

1) Рассмотрим первый случай, когда игрок 1 соглашается на проведение трубопровода через свой поле, а игрок 2 – нет. В данном случае $(S,T) = (\{2,3,4\},\{1\}),\ v(S,T) = 23.$

Значения функции $V(K)$:

$V(1) = 0,$

$V(2) = 19,$

$V(3) = 19,$

$V(4) = 25,$

$V(1,2) = 5,$

$V(1,3) = 17,$

$V(1,4) = 17,$

$V(2,3) = 19,$

$V(2,4) = 25,$

$V(3,4) = 25,$

$V(1,2,3) = 17,$

$V(1,2,4) = 17,$

$V(1,3,4) = 23,$

$V(2,3,4) = 25.$

Найдем значения двойственной функции:

$V^*(1) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2,3,4\},\emptyset) = 23 - 25 = -2,$

$V^*(2) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{3,4\},\{1\}) = 23 - 23 = 0,$

$V^*(3) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2,4\},\{1\}) = 23 - 17 = 6,$

$V^*(4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2,3\},\{1\}) = 23 - 17 = 6,$

$V^*(1,2) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{3,4\},\emptyset) = 23 - 25 = -2,$

$V^*(1,3) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2,4\},\emptyset) = 23 - 25 = -2,$

$V^*(1,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2,3\},\emptyset) = 23 - 19 = 4,$

$V^*(2,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{3\},\{1\}) = 23 - 17 = 6,$

$V^*(2,3) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{4\},\{1\}) = 23 - 17 = 6,$

$V^*(3,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2\},\{1\}) = 23 - 5 = 18,$

$V^*(1,2,3) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{4\},\emptyset) = 23 - 25 = -2,$

$V^*(1,2,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{3\},\emptyset) = 23 - 19 = 4,$

$V^*(1,3,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\{2\},\emptyset) = 23 - 19 = 4$

$V^*(2,3,4) = v(\{2,3,4\},\{1\}) - v(\emptyset,\{1\}) = 23 - 0 = 23,.$

α-эксцессы для каждого K:

$e^{\alpha}(1) = x_1 + 2 - 2\alpha,$

$e^{\alpha}(2) = x_2 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(3) = x_3 - 6 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(4) = x_4 - 6 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2) = x_1 + x_2 + 2 - 7\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3) = x_1 + x_3 + 2 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,4) = x_1 + x_4 - 4 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3) = x_2 + x_3 - 6 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(2,4) = x_2 + x_4 - 6 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(3,4) = x_3 + x_4 - 18 - 7\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,3) = x_1 + x_2 + x_3 + 2 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,4) = x_1 + x_2 + x_4 - 4 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3,4) = x_1 + x_3 + x_4 - 4 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3,4) = x_2 + x_3 + x_4 - 23 - 2\alpha.$

Приведем вычисления только для тех сбалансированных наборов, системы уравнений и неравенств для которых имели решение и на которых интервал для α входит в отрезок $[0,1]$.

Для сбалансированного набора $R_1 = (\{2\},\{4\},\{1,3\};\{3\},\{1,4\})$ система будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 - 19\alpha = x_4 - 6 - 19\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_1 + x_3 + 2 - 19\alpha, \\ x_3 - 6 - 13\alpha = x_1 + x_4 - 4 - 13\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = -5;\ \ x_2 = \frac{19}{3};\ \ x_3 = \frac{28}{3};\ \ x_4 = \frac{37}{3}.$

Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(4) = e^{\alpha}(1,3) = \frac{19}{3} - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(3) = e^{\alpha}(1,4) = \frac{10}{3} - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(1) = -3 - 2\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2) = \frac{10}{3} - 7\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3) = \frac{29}{3} - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(2,4) = \frac{38}{3} - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(3,4) = \frac{11}{3} - 7\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,3) = \frac{38}{3} - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,4) = \frac{29}{3} - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3,4) = \frac{38}{3} - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3,4) = 5 - 2\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{19}{3} - 19\alpha \le \frac{10}{3} - 13\alpha, \\ \frac{10}{3} - 13\alpha \le -3 - 2\alpha, \\ \frac{10}{3} - 13\alpha \le \frac{10}{3} - 7\alpha, \\ \frac{10}{3} - 13\alpha \le \frac{29}{3} - 13\alpha, \\ \frac{19}{3} - 19\alpha \le \frac{38}{3} - 19\alpha, \\ \frac{10}{3} - 13\alpha \le \frac{11}{3} - 7\alpha, \\ \frac{10}{3} - 13\alpha \le 5 - 2\alpha. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \ge \frac{19}{33}$. Таким образом нашли решение для первого интервала для α: при $\alpha \in [\frac{19}{3}; 1]$ $x = (-5; \frac{19}{3}; \frac{28}{3}; \frac{37}{3})$. Добавляем коалицию $\{1\}$ в предыдущий набор R_1 и из него выбираем сбалансированный набор

$R_2 = (\{2\}, \{4\}, \{1, 3\}; \{1\}, \{3\})$. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 - 19\alpha = x_4 - 6 - 19\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_1 + x_3 + 2 - 19\alpha, \\ x_3 - 6 - 13\alpha = x_1 + 2 - 2\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = -\frac{11}{6} - \frac{11}{2}\alpha$; $x_2 = \frac{19}{3}$; $x_3 = \frac{37}{6} + \frac{11}{2}\alpha$; $x_4 = \frac{37}{3}$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(4) = e^{\alpha}(1, 3) = \frac{19}{3} - 19\alpha$,

$e^{\alpha}(1) = e^{\alpha}(3) = \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 2) = \frac{13}{2} - \frac{25}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 4) = \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(2, 3) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(2, 4) = \frac{38}{3} - 19\alpha$,

$e^{\alpha}(3, 4) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 2, 3) = \frac{38}{3} - 19\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 2, 4) = \frac{77}{6} - \frac{37}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 3, 4) = \frac{38}{3} - 19\alpha$,

$e^{\alpha}(2, 3, 4) = \frac{11}{6} + \frac{7}{2}\alpha$.

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{19}{3} - 19\alpha \le \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{13}{2} - \frac{25}{2}\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha, \\ \frac{19}{3} - 19\alpha \le \frac{38}{3} - 19\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{77}{6} - \frac{37}{2}\alpha, \\ \frac{1}{6} - \frac{15}{2}\alpha \le \frac{11}{6} + \frac{7}{2}\alpha. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \ge \frac{37}{69}$ и $\alpha \le \frac{19}{33}$. Новые коалиции не добавляются. Выбираем сбалансированный набор $R_3 = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})$. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2 - 2\alpha = x_2 - 19\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_{36} - 13\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_4 - 6 - 19\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{45}{4}\alpha$; $x_2 = \frac{13}{4} + \frac{23}{4}\alpha$; $x_3 = \frac{37}{4} - \frac{1}{4}\alpha$; $x_4 = \frac{37}{4} + \frac{23}{4}\alpha$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(1) = e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(3) = e^{\alpha}(4) = \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 2) = \frac{13}{2} - \frac{25}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 3) = \frac{25}{2} - \frac{61}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(1, 4) = \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha$,

$e^{\alpha}(2,3) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(2,4) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(3,4) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,3) = \frac{63}{4} - \frac{99}{4}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,4) = \frac{39}{4} - \frac{51}{4}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3,4) = \frac{63}{4} - \frac{99}{4}\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3,4) = -\frac{5}{4} + \frac{37}{4}\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{13}{2} - \frac{25}{2}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{25}{2} - \frac{61}{2}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{63}{4} - \frac{99}{4}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq \frac{39}{4} - \frac{51}{4}\alpha, \\ \frac{13}{4} - \frac{53}{4}\alpha \leq -\frac{5}{4} + \frac{37}{4}\alpha. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \geq \frac{11}{47}$ и $\alpha \leq \frac{37}{69}$. Добавляем коалицию $\{3,4\}$ в предыдущий набор R_3 и из него выбираем сбалансированный набор $R_4 = (\{1\},\{2\},\{3,4\};\{3\},\{4\})$. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2 - 2\alpha = x_2 - 19\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_3 + x_4 - 18 - 7\alpha, \\ x_3 - 6 - 13\alpha = x_4 - 6 - 19\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = \frac{1}{3} - \frac{22}{3}\alpha$; $x_2 = \frac{7}{3} + \frac{29}{3}\alpha$; $x_3 = \frac{61}{6} - \frac{25}{6}\alpha$; $x_4 = \frac{61}{6} + \frac{11}{6}\alpha$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(1) = e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(3,4) = \frac{7}{3} - \frac{28}{3}\alpha,$

$e^{\alpha}(3) = e^{\alpha}(4) = \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2) = \frac{14}{3} - \frac{14}{3}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3) = \frac{25}{2} - \frac{61}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,4) = \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(2,4) = \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,3) = \frac{89}{6} - \frac{125}{6}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,4) = \frac{53}{6} - \frac{53}{6}\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3,4) = \frac{50}{3} - \frac{86}{3}\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3,4) = -\frac{1}{3} + \frac{16}{3}\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{28}{3}\alpha \le \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha, \\ \frac{7}{3} - \frac{28}{3}\alpha \le \frac{14}{3} - \frac{14}{3}\alpha, \\ \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha \le \frac{25}{2} - \frac{61}{2}\alpha, \\ \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha \le \frac{13}{2} - \frac{37}{2}\alpha, \\ \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha \le \frac{13}{2} - \frac{15}{2}\alpha, \\ \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha \le \frac{89}{6} - \frac{125}{6}\alpha, \\ \frac{25}{6} - \frac{103}{6}\alpha \le \frac{53}{6} - \frac{53}{6}\alpha, \\ \frac{7}{3} - \frac{28}{3}\alpha \le \frac{50}{3} - \frac{86}{3}\alpha, \\ \frac{7}{3} - \frac{28}{3}\alpha \le -\frac{1}{3} + \frac{16}{3}\alpha. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \ge \frac{2}{11}$ и $\alpha \le \frac{11}{47}$. Добавляем коалицию $\{2,3,4\}$ в предыдущий набор R_4 и из него выбираем сбалансированный набор $R_5 = (\{1\},\{2,3,4\};\{2\},\{3,4\};\{3\},\{4\})$. Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2 - 2\alpha = x_2 + x_3 + x_4 - 23 - 2\alpha, \\ x_2 - 19\alpha = x_3 + x_4 - 18 - 7\alpha, \\ x_3 - 6 - 13\alpha = x_4 - 6 - 19\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим: $x_1 = -1$; $x_2 = 3 + 6\alpha$; $x_3 = 10.5 - 6\alpha$; $x_4 = 10.5$. Вычислим α-эксцессы относительно данного решения:

$e^{\alpha}(1) = e^{\alpha}(2,3,4) = 1 - 2\alpha,$

$e^{\alpha}(2) = e^{\alpha}(3,4) = 3 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(3) = e^{\alpha}(4) = 4.5 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2) = 4 - \alpha,$

$e^{\alpha}(1,3) = 11.5 - 25\alpha,$

$e^{\alpha}(1,4) = 5.5 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(2,3) = 7.5 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(2,4) = 7.5 - 13\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,3) = 14.5 - 19\alpha,$

$e^{\alpha}(1,2,4) = 8.5 - 7\alpha,$

$e^{\alpha}(1,3,4) = 16 - 25\alpha.$

Решаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 2\alpha \leq 3 - 13\alpha, \\ 3 - 13\alpha \leq 4.5 - 19\alpha, \\ 3 - 13\alpha \leq 4 - \alpha, \\ 4.5 - 19\alpha \leq 11.5 - 25\alpha, \\ 4.5 - 19\alpha \leq 5.5 - 13\alpha, \\ 4.5 - 19\alpha \leq 7.5 - 13\alpha, \\ 4.5 - 19\alpha \leq 14.5 - 19\alpha, \\ 4.5 - 19\alpha \leq 8.5 - 7\alpha, \\ 3 - 13\alpha \leq 16 - 25\alpha. \end{cases}$$

Находим, что $\alpha \geq -\frac{1}{12}$ и $\alpha \leq \frac{2}{11}$. Тогда [0,1]-N-ядро данной игры, когда игрок 1 выбирает негативный вариант участия, а игрок 2 позитивный, будет иметь вид:

$\alpha \in [0; \frac{2}{11}] \Longrightarrow x = (-1; 3 + 6\alpha; 10.5 - 6\alpha; 10.5),$

$\alpha \in (\frac{2}{11}; \frac{11}{47}) \Longrightarrow x = (\frac{1}{3} - \frac{22}{3}\alpha; \frac{7}{3} + \frac{29}{3}\alpha; \frac{61}{6} - \frac{25}{6}\alpha; \frac{61}{6} + \frac{11}{6}\alpha),$

$\alpha \in (\frac{11}{47}; \frac{37}{69}) \Longrightarrow x = (\frac{5}{4} - \frac{45}{4}\alpha; \frac{13}{4} + \frac{23}{4}\alpha; \frac{37}{4} - \frac{1}{4}\alpha; \frac{37}{4} + \frac{23}{4}\alpha)$,

$\alpha \in (\frac{37}{69}; \frac{19}{33}) \Longrightarrow x = (-\frac{11}{6} - \frac{11}{2}\alpha; \frac{19}{3}; \frac{37}{6} + \frac{11}{2}\alpha; \frac{37}{3})$,

$\alpha \in [\frac{19}{33}; 1] \Longrightarrow x = (-5; \frac{19}{3}; \frac{28}{3}, \frac{37}{3})$.

2) Рассмотрим теперь вариант, когда и игрок 1, и игрок 2 соглашаются на проведение трубопровода через свои поля. В данном случае $(S,T) = (\{3,4\},\{1,2\}),\ v(S,T) = 11$.

Опустим вычисления для данного случая. [0,1]-N-ядро данной игры, когда игрок 1 и игрок 2 выбирают негативный вариант участия, будет иметь вид:

$\alpha \in [0; \frac{1}{3}) \Longrightarrow x = (-7; \frac{4}{3} - 2\alpha; \frac{25}{3} - 2\alpha; \frac{25}{3} + 4\alpha)$,

$\alpha \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \Longrightarrow x = (-\frac{15}{3} - 6\alpha; -\frac{2}{3} + 4\alpha; \frac{25}{3} - 2\alpha; \frac{25}{3} + 4\alpha)$,

$\alpha \in [\frac{1}{2}; 1] \Longrightarrow x = (-11 + 6\alpha; \frac{1}{3} + 2\alpha; \frac{28}{3} - 4\alpha; \frac{37}{3} - 4\alpha)$.

3) В том случае, если игрок 1 отказывается от сотрудничества с другими игроками, получаем игру трех лиц. В этом случае $(S,T) = (\{2,3,4\},\emptyset),\ v(S,T) = 25$. [0,1]-N-ядро будет состоять из одного вектора решений:

$\alpha \in [0; 1] \Longrightarrow x = (0; \frac{19}{3}; \frac{19}{3}; \frac{37}{3})$.

Полученные решения для трех вариантов игры представим в виде таблицы:

Варианты участия игроков, (S,T)	**Интервалы значений для** α	**Векторы решения** $x=(x_1;x_2;x_3;x_4)$
$(\{2,3,4\},\{1\})$	$[0;\frac{2}{11})$	$(-1;3+6\alpha;10.5-6\alpha;10.5)$
	$[\frac{2}{11};\frac{11}{47})$	$(0.33-7.33\alpha;2.33+9.67\alpha;10.17-4.17\alpha;$ $10.17+1.83\alpha)$
	$[\frac{11}{47};\frac{37}{69})$	$(1.25-11.25\alpha;3.25+5.75\alpha;9.25-0.25\alpha;$ $9.25+5.75\alpha)$
	$[\frac{37}{69};\frac{19}{33})$	$(-1.33-5.5\alpha;6.33;6.17+5.5\alpha;12.33)$
	$[\frac{19}{33};1]$	$(-5;6.33;9.33;12.33)$
$(\{3,4\},\{1,2\})$	$[0;\frac{1}{3})$	$(-7;1.33-2\alpha;8.33-2\alpha;8.33+4\alpha)$
	$[\frac{1}{3};\frac{1}{2})$	$(-5-6\alpha;0.67+4\alpha;8.33-2\alpha;8.33+4\alpha)$
	$[\frac{1}{2};1]$	$(-11+6\alpha;0.33+2\alpha;9.33-4\alpha;12.33-4\alpha)$
$(\{2,3,4\},\emptyset)$	$[0;1]$	$(0;6.33;6.33;12.33)$

Заключение

В данной работе были выполнены все поставленные задачи. Были изучены основные понятия и определения би-кооперативных игр. Было рассмотрено понятие [0,1]-N-ядра и изучен алгоритм его построения.

В Главе 2 [0,1]-N-ядро было впервые модифицировано для би-кооперативных игр.

В Главе 3 был представлен алгоритм построения [0,1]-N-ядра для би-кооперативной игры и применен для примеров би-кооперативных игр для трех и для четырех игроков. Были найдены решения для различных соотношений конструктивной и блокирующих сил коалиции. Выбор конкретного параметра α остается за игроками.

Список литературы

1. Bilbao J. M. et al. Bicooperative games //Cooperative games on combinatorial structures. Kluwer Acad., 2000, С. 131-295.

2. Labreuche C., Grabisch M. M. A value for bi-cooperative games //Int J Game Theory, 2008, Т. 37, No.3, С. 409-438.

3. Смирнова Н. В., Тарашнина С. И., Об одном обобщении N-ядра в кооперативных играх //Дискретный анализ и исследование операций, 2011, Т.18, В.4, С. 77-93

4. Смирнова Н. В., Тарашнина С. И., Геометрические свойства [0,1]-N-ядра в кооперативных ТП-играх //Математическая Теория Игр и ее Приложения, Т.4, В.1, С. 55-73

5. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр: учебник СПб.: БХВ-Петербург, 2012. С. 159, 187-191.

6. Peters H., Game Theory: a multi-leveled approach //Springer, 2015, С. 291-303

7. Tarashnina S. I., Smirnova N. V., Constructive and Blocking Powers in Some Applications //Contributions to Game Theory and Management, 2017, Т.10, С. 339-349.

8. Smirnova N. V., Tarashnina S. I., Properties of Solutions of Cooperative Games with Transferable Utilities //Russian Mathematics, 2016, Т.60, No. 6, С. 63-74.

9. Tarashnina S. I., The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game //Top, 2011, Т.19, С. 150-166.

10. Bilbao J. M., Jimenez N., Lopez J. J., Ferandez J. R. The core and the Weber set for bicooperative games //International Journal of Game Theory, 2007, C. 209-222

11. Bilbao J. M., Jimenez N., Lopez J. J. The selectope for bicooperative games //European Journal of Operational Research, 2010, T. 204, No. 3, C. 522-532.