

Санкт-Петербургский государственный университет

КУДРЯШОВ Егор Александрович

Выпускная квалификационная работа

***Анализ устойчивости РОСК-методов при решении
стохастических дифференциальных уравнений с
запаздываниями***

Уровень образования: бакалавриат

Направление 02.03.02

«Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Основная образовательная программа СВ.5003.2019

«Программирование и информационные технологии»

Научный руководитель:

доцент, кафедра информационных систем,

к. ф.-м. н. Еремин Алексей Сергеевич

Рецензент:

доцент, кафедра моделирования электромеханических

и компьютерных систем,

д. ф.-м. н. Кривовичев Герасим Владимирович

Санкт-Петербург

2023

Содержание

Введение	3
Постановка задачи.....	5
Обзор литературы.....	6
Глава 1. Описание ROCK-методов.....	7
1.1 Устойчивость недемпфированных методов	7
1.2 Устойчивость демпфированных методов	10
Глава 2. Устойчивость ROCK-методов для ДУЗА	12
2.1 Линейная интерполяция.....	12
2.2 Анализ численной устойчивости для ДУЗА.....	13
2.3 Области P -устойчивости.....	16
Глава 3. Среднеквадратичная устойчивость ROCK-методов	19
3.1 Модификация ROCK-методов для решения СДУ.....	20
3.2 Анализ численной устойчивости для СДУ	21
3.3 Области MS -устойчивости.....	23
Глава 4. Анализ устойчивости ROCK-методов для СДУЗА	26
4.1 Линейная интерполяция вычисленного решения.....	26
4.2 Анализ численной устойчивости СДУЗА.....	27
4.3 Иной подход к вычислению запаздывания в шуме.....	35
4.4 Анализ устойчивости новой модификации методов.....	36
Глава 5. Проверка областей устойчивости.....	43
Выводы.....	50
Заключение	52
Список использованных источников	53

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием аргумента (СДУЗА) являются обобщенным случаем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Принимая во внимание эффекты задержки, они лучше согласуются с явлениями реального мира [1]. СДУЗА используются для построения моделей в различных областях науки и техники в таких как моделирование физиологических систем, нейронные сети, химическая кинетика, коммуникации [2].

Несмотря на развитие численного анализа СДУ в последние несколько десятилетий, стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием стали интересоваться не так давно. Мало исследований посвящено анализу устойчивости СДУЗА, особенно когда запаздывание находится в детерминистической или сразу в обеих частях уравнения.

Для явного интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), чьи собственные числа располагаются преимущественно вдоль отрицательной вещественной части, существуют специальные стабилизированные методы. По аналитической форме функции устойчивости их называют методами Рунге–Кутты–Чебышёва. Одним из их вариантов являются так называемые ортогональные методы Рунге–Кутты–Чебышёва, или ROCK-методы (англ. *orthogonal Runge–Kutta–Chebyshev*).

Однако исследований касательно анализа устойчивости данных методов при решении стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента в обеих частях уравнения не проводилось.

В работе приводится описание методов ROCK первого порядка точности и их устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений. Во второй и третьей главах рассматриваются устойчивости методов для дифференциальных уравнений с запаздыванием и стохастических дифференциальных уравнений соответственно. После этого в четвертой главе продемонстрированы результаты работы по анализу устойчивости

модификаций методов для СДУЗА. Для проверки построенных областей устойчивости в пятой главе приводится численное тестирование методов.

Таким образом, итогами данной работы будут теоретическое исследование областей устойчивости и программа для решения СДУЗА ROCK-методами первого порядка с постоянной величиной шага.

Постановка задачи

Основной целью данной работы является изучение и реализация ортогональных методов Рунге–Кутты–Чебышёва первого порядка для стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента, а также анализ их численной устойчивости.

Стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием аргумента – это стохастические дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и её производные входят при различных аргументах. Запаздывание может возникать как в детерминистической, так и в стохастической частях такого вида уравнений. В общем случае, запаздывание присутствует в обеих частях сразу

$$\begin{cases} dy = f(y(t), y(t - \tau))dt + g(y(t), y(t - \tau))dW, & t > t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\phi(t)$ – функция предыстории, τ – величина запаздывания. В частности, количество и значения запаздываний могут быть различными.

Для достижения поставленной цели необходимо исследовать расширение методов для решения задач с запаздыванием аргумента и стохастическим шумом, аналитически выразить формулы для построения областей устойчивости. Реализовать рассматриваемые методы на языке программирования MATLAB и проверить построенные области устойчивости.

Обзор литературы

Основной мотивацией настоящей работы послужило исследование Ё. Комори, А. С. Еремина и К. Бёрриджа [3], в котором рассматривалась устойчивость ROCK-методов для стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием в шуме. В статье была представлена формулировка методов для СДУЗА, которая легла в основу рассматриваемых модификации.

Аналізу устойчивости методов для ОДУ посвящено много статей и книг, но основополагающей можно считать книгу Э. Хайера и Г. Ваннера [4]. В ней же представлен численный анализ устойчивости рассматриваемых методов первого порядка.

Книга А. Беллена и М. Ценнаро «Численные методы для дифференциальных уравнений с запаздыванием» [5] является важнейшим источником по изучению численных методов для уравнений с запаздыванием аргумента.

Статья Д. Хайэма [6] посвящена главным аспектам решения СДУ, а также в ней представлена реализация на языке программирования MATLAB метода Эйлера–Маруямы и подробный анализ его устойчивости. В контексте теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений нельзя не упомянуть статью К. Бёрриджа, П. Бёрридж и Т. Мицуи [7].

Основные положения, относящиеся к анализу устойчивости СДУЗА, описаны в статье Ч. Хуана, С. Ганя и Д. Вана [1]. К сожалению, большая часть исследования, как и в статье [3], посвящена уравнению с запаздыванием в стохастической части. Запаздывание в обеих частях уравнения рассматривалось в работе Ч. Вана и Ч. Чжана [8], описывающей устойчивость метода Мильштейна. Аналогичные рассуждения и были использованы для выражения формул областей устойчивости ROCK-методов.

Глава 1. Описание ROCK-методов

Ортогональные методы Рунге–Кутты–Чебышёва (ROCK) – это семейство явных одношаговых методов Рунге–Кутты с расширенными областями устойчивости вдоль отрицательной вещественной оси. Увеличение области устойчивости достигается за счет использования ортогональных полиномов для построения данных методов. Например, методы первого порядка основаны на полиномах Чебышёва первого рода (отсюда и происходит название всего семейства):

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \\T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).\end{aligned}\tag{2}$$

1.1 Устойчивость недемпфированных методов

Для решения автономного дифференциального уравнения

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0$$

s-этапный метод первого порядка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}K_0 &= y_n, \quad K_1 = y_n + \frac{h}{s^2} f(K_0), \\K_i &= 2 \frac{h}{s^2} f(K_{i-1}) + 2K_{i-1} - K_{i-2}, \quad i = 2, 3, \dots, s, \\y_{n+1} &= K_s,\end{aligned}\tag{3}$$

где y_n – приближение $y(t_n)$, y_{n+1} – приближение $y(t_{n+1})$, h – величина шага сетки по времени. В работе рассматриваются методы именно с постоянной величиной шага в рамках того, что устойчивость методов всегда исследовалась на постоянных сетках.

Нетрудно заметить, что одноэтапный метод (3) будет соответствовать методу Эйлера. Добавление новых этапов, требующих дополнительных вычислений, не приводит к увеличению порядка точности методов, они всё также сохраняют свой первый порядок. Происходит это по очевидной причине: добавленные этапы не приближают решение ко второму слагаемому разложения основной функции в ряд Тейлора. Однако при этом возрастает зона устойчивости методов.

Устойчивость численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) выражается с помощью функции устойчивости $R(z)$ и интерпретируется как численное решение после одного шага для задачи, известной как тестовое уравнение Далквиста

$$y' = \lambda y, \quad y_0 = 1, \quad z = h\lambda, \quad (4)$$

где λ – собственные числа матрицы Якоби задачи, $\lambda \in \mathbb{C}$. Точное решение асимптотически устойчиво при $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, где за Re обозначается вещественная часть комплексного числа.

Численное решение уравнения (4) изучается для постоянного шага по времени h и считается устойчивым, если приближение после n шагов y_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Для методов Рунге–Кутты удаётся выразить $y_n = R(\lambda h)y_0$, где $R(z)$ называется функцией устойчивости. К её изучению и сводится анализ устойчивости численного решения.

Функция устойчивости методов для ОДУ имеет вид

$$R(z) = 1 + zb^T(E - zA)^{-1}e, \quad (5)$$

где $b^T = (b_1, \dots, b_s)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s$ определяются по таблице Бутчера [4] для метода, $E = (1_{ii})_{i=1}^s$, $e = (1, \dots, 1)^T$.

Множество

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1 \} \quad (6)$$

называется областью устойчивости данного метода [4].

Вычисление функции устойчивости через коэффициенты метода позволяет удобно строить области устойчивости. В работе графики областей устойчивости были построены с помощью Maple. MATLAB использовался для реализации и применения методов к конкретным задачам. Исходный код расположен в публичном репозитории на GitHub:

<https://github.com/EgorKudryashov/Runge-Kutta-methods>

В качестве иллюстрации, на рисунке 1 приведены области устойчивости в плоскости $z \in \mathbb{C}$ метода Эйлера и двухэтапного ROCK-метода первого порядка. На рисунке 2 изображены методы с большим количеством этапов.

Область устойчивости для метода ROCK первого порядка вдоль отрицательной вещественной оси расположена на отрезке $[-2s^2; 0]$ и в направлении мнимой оси заключена в отрезке $[-s; s]$. При этом имеется $s - 1$ точка, в которых достигается нулевая ширина области по мнимой оси.

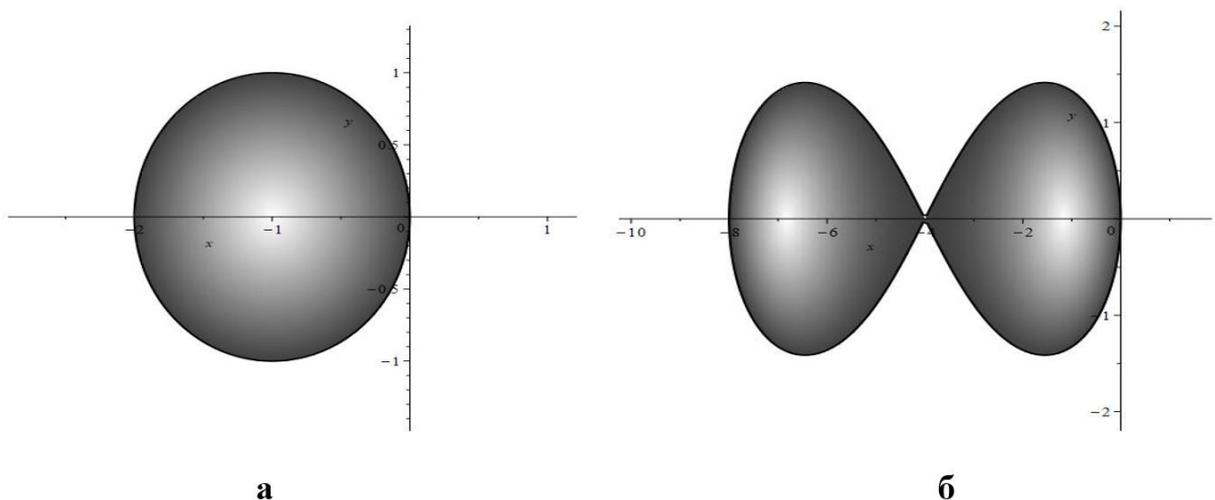


Рис. 1. Области устойчивости: а) метода Эйлера; б) двухэтапного ROCK-метода первого порядка

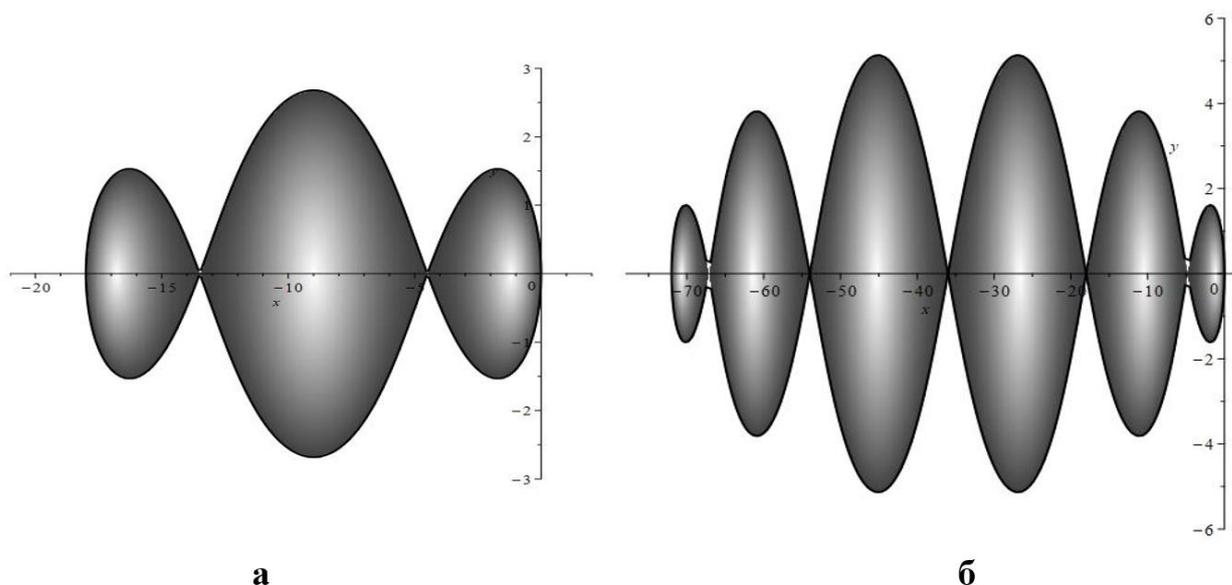


Рис. 2. Области устойчивости ROCK-методов первого порядка:
а) $s = 3$; б) $s = 6$

1.2 Устойчивость демпфированных методов

Наличие в широкой области устойчивости нескольких точек сужения является существенным недостатком методов. Мало кто на практике захочет задумываться о выборе величины шага, позволяющего избежать попадания в точку сужения. Особенно, если потребуется использовать метод с огромным количеством этапов. Аналогичная проблема возникает и при использовании динамической величины шага. Именно поэтому предпочтительны методы с цельной и сплошной областью устойчивости.

Избавиться от точек нулевой ширины можно посредством добавления коэффициента демпфирования η в метод (3). Демпфированный ортогональный метод Рунге–Кутты–Чебышёва имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
 K_0 &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{\omega_1}{\omega_0} f(K_0), \\
 K_i &= 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (h\omega_1 f(K_{i-1}) + \omega_0 K_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} K_{i-2}, & i &= 2, \dots, s, \\
 y_{n+1} &= K_s,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $T_i(x)$ – полином Чебышёва первого рода степени i ,

$$\omega_0 = 1 + \frac{\eta}{s^2}, \quad \omega_1 = \frac{T_s(\omega_0)}{T_s'(\omega_0)}.$$

Добавление демпфирования позволяет расширить область устойчивости, что сдвигает границу области на безопасное расстояние от вещественной оси, но делает её короче. Пример изображен на рисунке 3.

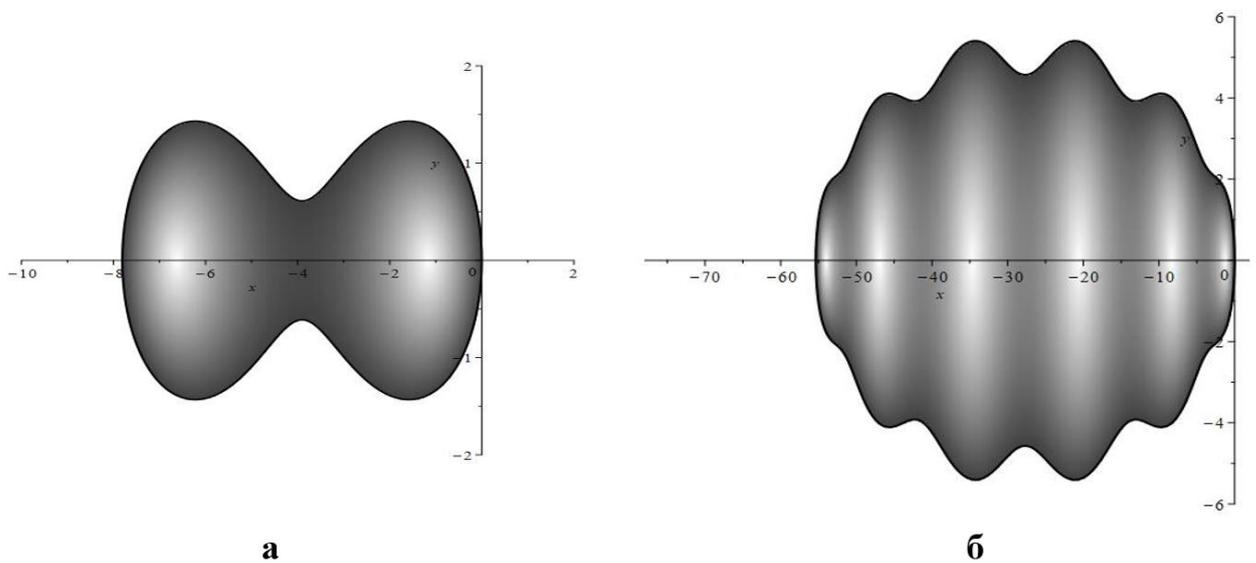


Рис. 3. Области устойчивости демпфированных ROCK-методов:
а) $s = 2, \eta = 0.05$; б) $s = 6, \eta = 0.5$

Глава 2. Устойчивость РОСК-методов для ДУЗА

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (ДУЗА) отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений тем, что неизвестная функция и её производные входят в уравнение, вообще говоря, при различных аргументах.

Например, так выглядит общий вид дифференциального уравнения с запаздываниями (ДУЗА) первого порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)), & t > t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases}$$

где $\phi(t)$ – функция предыстории, $\tau_i = \tau_i(t)$ – запаздывание.

Исторически, при изучении систем с запаздываниями предполагалось, что запаздывание τ постоянно. В ряде случаев предположение о том, что $\tau = \text{const}$, хорошо отражает действительные явления, например, когда запаздывание связано с передачей звукового сигнала, с гидравлическим ударом или другим волновым процессом. В других случаях такое предположение описывает процесс лишь приближенно [9]. Однако простой линейный анализ устойчивости методов для ДУЗА проводится на тестовом уравнении с одним постоянным запаздыванием [5], поэтому мы ограничимся этим случаем.

2.1 Линейная интерполяция

Численное решение ДУЗА требует вычисления значения запаздывающего решения. При решении с постоянным шагом h , который целое число раз укладывается в запаздывание, можно использовать уже найденные ранее значения. Такой подход неудобен из-за ряда ограничений,

которые накладываются на выбор величины шага h . В особенности он усложняется, когда в системе присутствуют несколько запаздываний.

Одним из альтернативных подходов является приближение решения в произвольной точке по времени с помощью интерполяции по узлам сетки. Будем рассматривать линейную интерполяцию в силу того, что более точная интерполяция не имеет смысла для рассматриваемых методов первого порядка точности. Метод (7) с линейной интерполяцией выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{\omega_1}{\omega_0} f(K_0, \tilde{y}(t_n - \tau)), \\
 K_i &= 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (h\omega_1 f(K_{i-1}, \tilde{y}(t_n + c_i h - \tau)) + \omega_0 K_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} K_{i-2}, \\
 y_{n+1} &= K_s, & i &= \overline{2, s},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где c_i – коэффициенты метода

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad c_i = 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (\omega_1 + \omega_0 c_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} c_{i-2},$$

а $\tilde{y}(t)$ – интерполяционная функция, которая определяется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq t_0, \\ y_m(1 - \theta) + y_{m+1}\theta, & \theta = \frac{t - t_m}{h}, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]. \end{cases}$$

2.2 Анализ численной устойчивости для ДУЗА

Рассмотрим тестовое уравнение с запаздыванием

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) + \mu y(t - \tau), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - \tau \leq t < t_0. \end{cases} \quad (9)$$

В варианте с обыкновенными дифференциальными уравнениями устойчивость зависела от параметра λ , здесь же добавляется параметр при запаздывании μ . Область устойчивости располагается в четырехмерном пространстве, оси которого отвечают вещественной и мнимой частям λ и μ .

Отметим, что решение уравнения (9) называется асимптотически устойчивым, если для любой предыстории $\phi(t)$ оно асимптотически стремится к нулю.

При фиксированном запаздывании τ область асимптотической устойчивости в действительной плоскости (λ, μ) представлена множеством точек, которое удовлетворяет условиям $\lambda < -\mu$ и $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2} < \frac{1}{\tau} \arccos(-\lambda/\mu)$ [10]. Однако в данной работе рассматривается P -устойчивость, которая демонстрирует область устойчивости метода при любой постоянной величине запаздывания.

Область P -устойчивости численного метода для решения ДУЗА (9) – это набор C_p таких пар комплексных чисел (α, β) , где $\alpha = h\lambda$, $\beta = h\mu$, что численное решение $\{y_n\}_{n \geq 0}$ системы (9), полученное на постоянном шаге h

$$h = \frac{\tau}{m}, \quad m \in N,$$

удовлетворяет равенству

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

для всех постоянных τ всех функций предыстории $\phi(t)$ [5].

Для методов, использующих линейную интерполяцию для нахождения значений решений между точками сетки, удаётся выразить корни характеристического полинома для системы (9) в виде равенства:

$$\xi = R^* \left(\alpha, \frac{\beta}{\xi^m} \right),$$

где рациональная функция

$$R^*(\alpha, z) = 1 + (\alpha + z)b^T(I - \alpha A - zB)^{-1}e \quad (10)$$

называется функцией P -устойчивости [11]. Для методов с линейной интерполяцией в формуле (9) вектор-строка $b = (b_1, \dots, b_s)$ и матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^s$ определяются через таблицу Бутчера метода, I – единичная матрица размерности s , e – состоящий из единиц вектор размерности s , матрица $B = cb$, где вектор $c = Ae$.

Функция P -устойчивости совпадает с функцией устойчивости для ОДУ $R^*(\alpha, 0) = R(\alpha)$, если положить $\frac{\beta}{\xi^m} = 0$. В этом случае область устойчивости будет

$$S_A = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |R^*(\alpha, 0)| < 1\}. \quad (11)$$

Снова рассмотрим функцию P -устойчивости, которая позволяет построить границу

$$\Gamma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |R^*(\alpha, z)| = 1\} \quad (12)$$

на комплексной плоскости, и

$$\sigma_\alpha = \inf_{z \in \Gamma_\alpha} |z| \quad (13)$$

является расстоянием от границы Γ_α до начала координат комплексной плоскости.

Условия (11), (12) и (13) позволяют записать область P -устойчивости (доказательство см. [12]) в виде:

$$S_P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2: \alpha \in S_A \text{ и } |\beta| < \sigma_\alpha\}. \quad (14)$$

2.3 Области P -устойчивости

Построенные области устойчивости рассматривались в действительной плоскости $(\alpha, \beta) = (\lambda h, \mu h)$, где λ и μ параметры уравнения (9), во второй четверти в силу того, что области симметричны относительно оси абсцисс α . Все представленные области описывают методы, вычисляющие запаздывания за счет модификации линейной интерполяцией.

На рисунке 4 приведены области P -устойчивости явных методов Рунге–Кутты с линейной интерполяцией. Пунктиром изображена область устойчивости метода для ОДУ, то есть для случая, когда область устойчивости принимает вид (10).

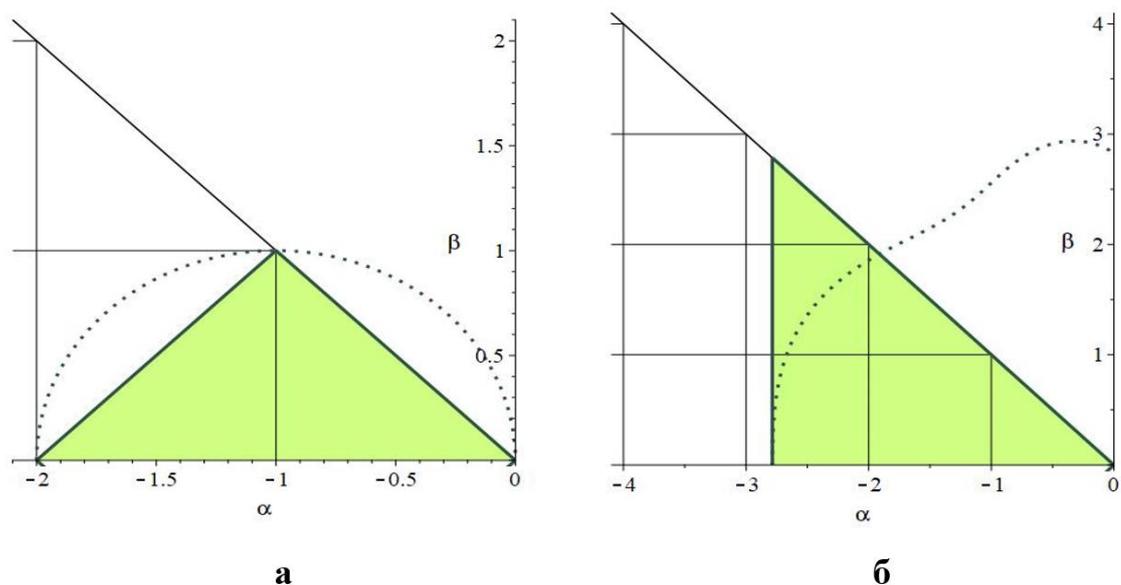


Рис. 4. Области P -устойчивости явных методов Рунге-Кутты, порядок точности которых равен числу этапов: а) $s = 1$; б) $s = 4$

Для построения областей устойчивости методов ROCK строилась огибающая семейства кривых в комплексной плоскости [13]. Семейство кривых было получено за счет представления параметра z в функции устойчивости (10) в показательной форме $z = \rho e^{i\varphi}$ и условия $(R^*)^2 = 1$. Варьирование параметра φ от 0 до π позволило построить семейство кривых, для которых и строилась огибающая. Эту технику называют анализом локуса корней (от англ. – *root locus*) [1].

На рисунке 5 изображены области P -устойчивости недемпфированных методов. Выделяющиеся впадины показывают неустойчивость рядом с точками нулевой ширины у аналогичного метода для ОДУ. Стоит отметить, что впадины чередуются, а не располагаются около каждой точки нулевой ширины. Вертикальными линиями на графиках обозначены зоны, где метод имеет нулевую ширину области устойчивости. Вопрос о возникновении чередования провалов достоин отдельного исследования.

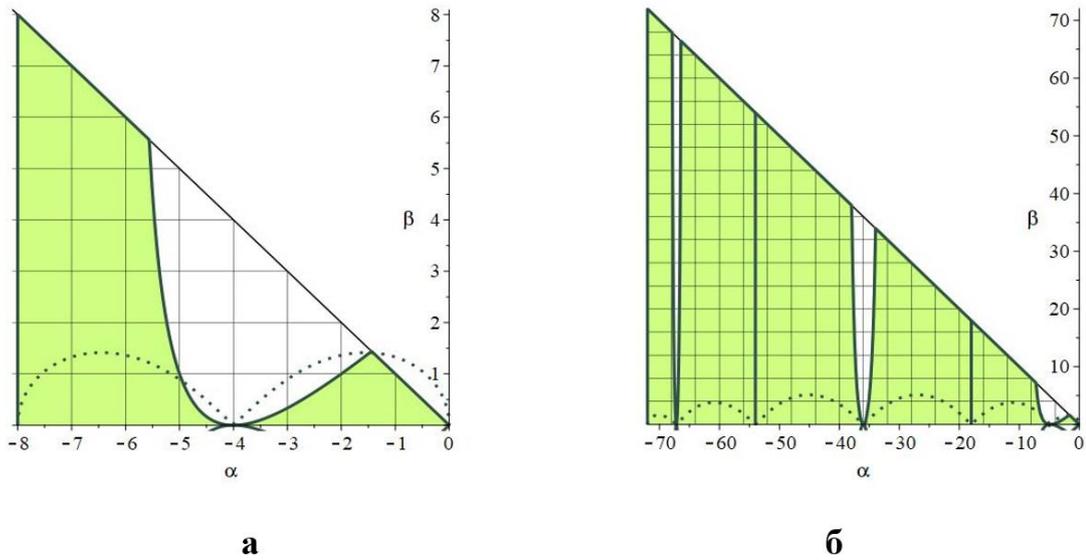


Рис. 5. Области P -устойчивости для недемпфированных ROCK-методов: а) $s = 2$; б) $s = 6$

Области P -устойчивости для демпфированных ROCK-методов изображены на рисунке 6. Внесение демпфирования в методы позволяет поднять впадины и даже избавиться от них при определенном значении. Однако, стоит акцентировать внимание на выбор величины демпфирования, чтобы не сузить оптимальную сплошную область слишком сильно.

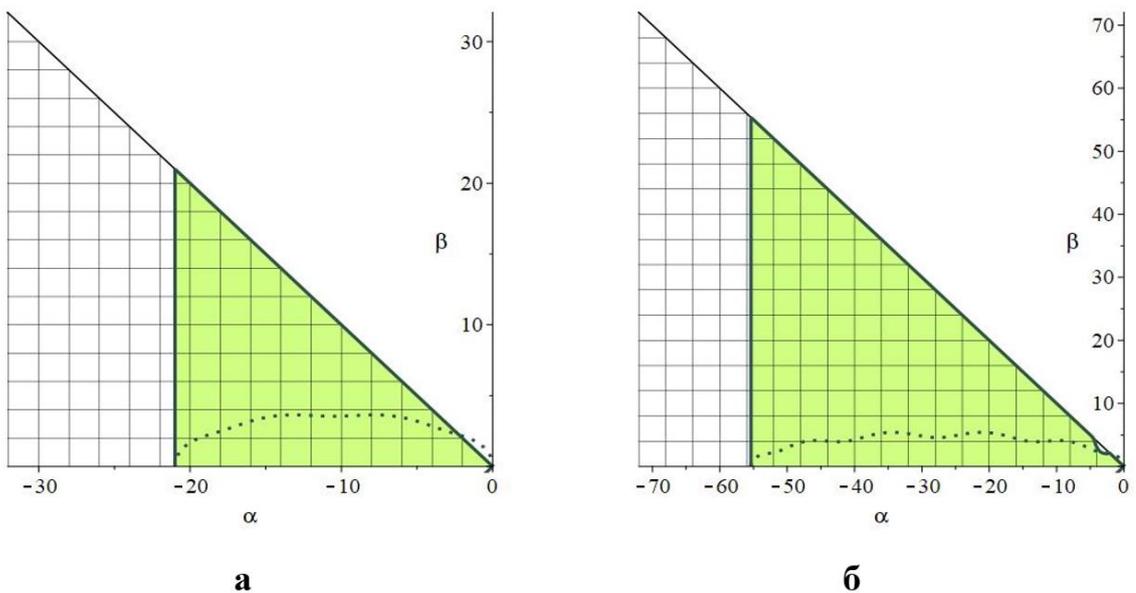


Рис. 6. Области устойчивости демпфированных ROCK-методов: а) $s = 4, \eta = 1$; б) $s = 6, \eta = 0.5$

Глава 3. Среднеквадратичная устойчивость РОСК-методов

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) можно представить в виде

$$dy(t) = f(t, y)dt + g(t, y)dW, \quad (15)$$

где f и g – скалярные функции, y_0 – начальное условие, W – винеровский процесс.

Случайный процесс $W(t)$, определенный при $t \in [0, T]$, называется броуновским движением или винеровским процессом, если выполняются следующие условия:

- 1) $W(0) = 0$ (с вероятностью 1).
- 2) Для $0 \leq s < t < u < v \leq T$ приращения $W(t) - W(s)$ и $W(v) - W(u)$ являются независимыми.
- 3) $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t - s))$, $\forall 0 \leq s < t < \infty$,
где $N(0, \sigma^2(t - s))$ – нормальное распределение.

Уравнение (15) может быть переписано в интегральном виде

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y)ds + \int_0^t g(s, y)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

Второй интеграл правой части можно понимать, например, как стохастический интеграл Ито или Стратоновича [14]. Решение стохастических дифференциальных уравнений основано на теории стохастических интегралов.

Классическое определение порядка точности численного метода не подходит для описания сходимости численного решения СДУ. В этом случае используют следующую формулировку:

$$\mathbb{E}[\|y_n - y(t_n)\|] \leq C \cdot h^p, \quad (16)$$

где C – положительная константа, h – величина шага численного метода, y_n – численное решение задачи на шаге n , а $y(t_n)$ – точное решение. Величина p называется порядком сильной сходимости численного метода [7].

В качестве альтернативы сильной сходимости рассматривают слабую сходимость численного метода [6]

$$|\mathbb{E}[y_n] - \mathbb{E}[y(t_n)]| \leq C \cdot h^p. \quad (17)$$

3.1 Модификация ROCK-методов для решения СДУ

На практике решение уравнений вида (15) осложнено тем, что величина шума нам не известна. Но, так как мы полагаем, что шум распределен по нормальному закону, то его можно сгенерировать с помощью встроенных в язык программирования функций для генерации нормального распределения. Например, в MATLAB за это отвечает функция `randn()` [15].

При наличии сгенерированного шума остается только использовать его для вычисления. Для этого модифицируем метод (7) добавив вычисление стохастической части функции

$$\begin{aligned} K_0 &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{\omega_1}{\omega_0} f(K_0), \\ K_i &= 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (h\omega_1 f(K_{i-1}) + \omega_0 K_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} K_{i-2}, & i &= 2, 3, \dots, s, \\ y_{n+1} &= K_s + g(K_s) \Delta W_n, \end{aligned} \quad (18)$$

где ΔW_n – сгенерированный шум для n -го шага.

Методы (18) принято называть стохастическими ROCK-методами (S-ROCK) [16]. Данные методы имеют слабый порядок сходимости равный $p = 1$ и сильный порядок $p = 1/2$.

3.2 Анализ численной устойчивости для СДУ

Рассмотрим тестовое уравнение для СДУ

$$dy = \lambda y dt + \nu y dW(t), \quad (19)$$

где $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$.

Аналогично тестовому уравнению для ДУЗА (9) мы имеем два параметра, от которых зависит устойчивость решения. В случае, когда $\nu = 0$, мы имеем тестовое уравнение для ОДУ (4).

ОДУ является устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ для любого начального условия. Это означает, что $\text{Re}(\lambda) < 0$. Обобщая эту идею на случай СДУ, следует учитывать, что случайные величины являются бесконечномерными объектами. Поэтому мера устойчивости должна оперировать усреднёнными значениями, которые позволят свести влияние шума к нулю [6]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y^2] = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\lambda) + \frac{1}{2}|\nu|^2 < 0. \quad (20)$$

Левая часть формулы (20) означает среднеквадратичную устойчивость (от англ. *mean-square stability*), а правая характеризует это свойство используя параметры λ и ν . В дальнейшем будем обозначать среднеквадратичную устойчивость как *MS*-устойчивость.

Применяя численный метод к линейному тестовому уравнению (19) и взяв среднеквадратичную норму, мы получаем одношаговое разностное уравнение вида

$$\mathbb{E}[y_{n+1}^2] = \hat{R}(\lambda h, \nu^2 h) \mathbb{E}[y_n^2], \quad (21)$$

где $\hat{R}(\lambda h, \nu^2 h)$ называется функцией *MS*-устойчивости [7].

Областью *MS*-устойчивости численного метода для функции устойчивости (21) называется множество

$$S_{MS} = \{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{C}^2: |\hat{R}(\alpha, \gamma)| < 1\}, \quad (22)$$

где $\alpha = \lambda h, \gamma = \nu^2 h$.

Самым простым методом для решения СДУ с сильным порядком сходимости $p = 1/2$ является метод Эйлера–Маруямы [6]. Его функция *MS*-устойчивости имеет вид

$$\hat{R}(\alpha, \gamma) = |1 + \alpha|^2 + \gamma, \quad (23)$$

Функция *MS*-устойчивости для метода (18), примененного к тестовому уравнению (19) выглядит следующим образом [17]

$$\hat{R}(\alpha, \gamma) = R^2(\alpha) \cdot |1 + \gamma|, \quad (24)$$

где R – функция устойчивости метода для ОДУ.

Следует акцентировать внимание на различиях в функциях устойчивости (23) и (24) для методов Эйлера–Маруямы и S-ROCK с одним этапом. Они возникают из-за того, что метод Эйлера–Маруямы использует для вычисления стохастической части значение функции на предыдущем шаге. В одноэтапном методе (18) используется значение функции на текущем шаге, уже вычисленным для детерминистической части.

3.3 Области MS -устойчивости

Построенные области устойчивости рассматривались в действительной плоскости $(\alpha, \gamma) = (\lambda h, \nu^2 h)$, где λ и ν параметры уравнения (19), во второй четверти в силу того, что области симметричны относительно оси абсцисс α .

На рисунке 7 изображена область MS -устойчивости для метода Эйлера – Маруямы с функцией устойчивости (23).

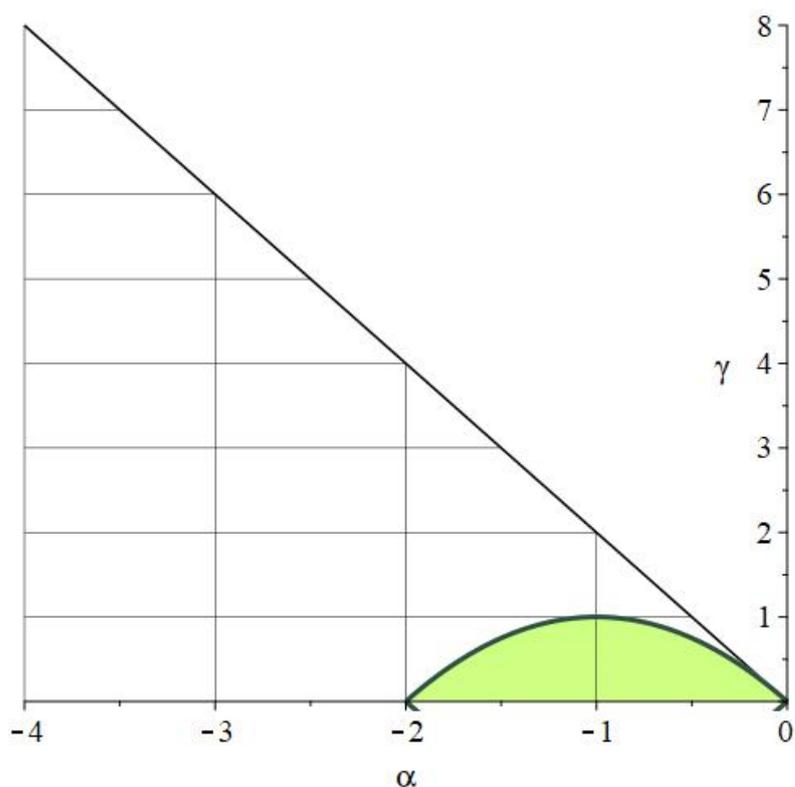


Рис. 7. Область MS -устойчивость метода Эйлера–Маруямы

На рисунках 8 и 9 изображены области MS -устойчивости S-ROCK-методов. Как и аналогичные им ROCK-методы для ОДУ, область устойчивости которых изображена пунктиром, области имеют характерные впадины рядом с точками нулевой ширины по α .

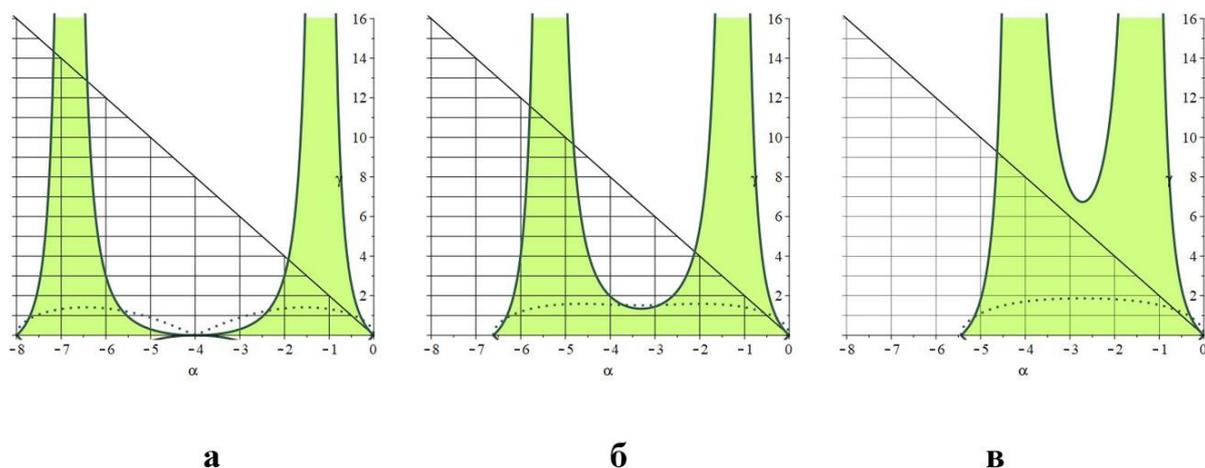


Рис. 8. Области MS -устойчивости S-ROCK-методов с двумя этапами:
 а) $\eta = 0$; б) $\eta = 0.5$; в) $\eta = 1.5$

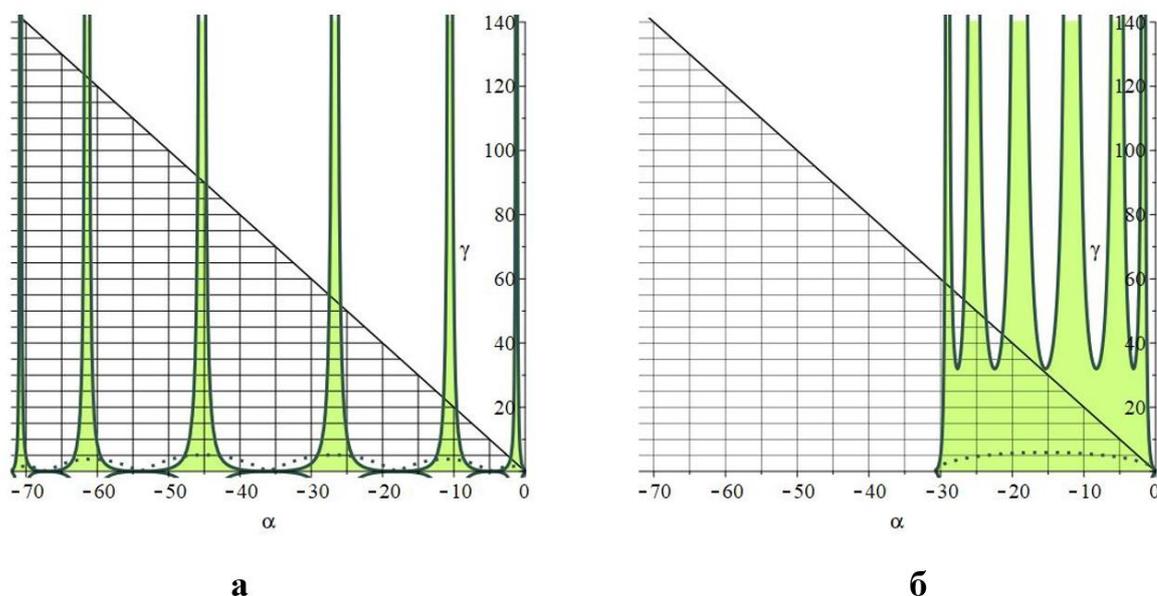


Рис. 9. Области MS -устойчивости для S-ROCK-методов с шестью этапами:
 а) $\eta = 0$; б) $\eta = 3$

Областям MS -устойчивости S-ROCK-методов свойственны S зон, устремленных к бесконечности. Они возникают как раз по причине того, что стохастическая часть уравнения вычисляется с использованием результатов текущего шага.

Стоит отметить и то, как влияет коэффициент демпфирования η на построенные области в действительной плоскости. В случае P -устойчивости

нам было достаточно ограничиться оптимальным значением η , позволяющим получить область в виде сплошного треугольника максимальной ширины, например, как проиллюстрировано на Рисунке 6а. В ситуации с *MS*-устойчивостью для СДУ оптимальная величина демпфирования также позволяет поднять впадины до прямой $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 0$. Однако при этом методы (18) будут иметь устойчивые зоны и выше данной прямой. Увеличение демпфирования позволяет поднять впадины методов выше по оси ординат и при этом сужает ширину области. Данное свойство может быть применимо на практике. Если в задаче неустойчивость в стохастической части сильно превышает детерминистическую, то использование методов с высоким значением демпфирования может быть вычислительно оправдано.

Глава 4. Анализ устойчивости ROCK-методов для СДУЗА

На практике могут встречаться разные вариации стохастических дифференциальных уравнений с запаздываниями. В общем случае, дифференциальные уравнения такого рода имеют запаздывание аргумента и в детерминистической, и в стохастической частях, как в примере (1).

Наличие шумовых компонент требует, как в случае с СДУ, анализа решения в среднем. Поэтому для них используют термины слабого и сильного порядка сходимости, среднеквадратичной устойчивости и т. д.

Присутствие запаздывания в обеих частях задач требует модификации S-ROCK-методов, которая может быть по-разному интерпретирована. В этой главе рассмотрим возможные модификации и то, как они влияют на устойчивость ROCK-методов.

4.1 Линейная интерполяция вычисленного решения

Для решения стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием необходимо модифицировать методы для решения СДУ, чтобы они могли высчитывать запаздывающую часть. Добавим в методы (18) вычисление запаздывания с помощью линейной интерполяции, по аналогии с тем, как это выполнено в методах (8). Получаем ROCK-методы для решения СДУЗА

$$\begin{aligned} K_0 &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{\omega_1}{\omega_0} f(K_0, \tilde{y}(t_n - \tau)), \\ K_i &= 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (h\omega_1 f(K_{i-1}, \tilde{y}(t_n + c_i h - \tau)) + \omega_0 K_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} K_{i-2}, \\ y_{n+1} &= K_s + g(K_s, \tilde{y}(t_{n+1} - \tau)) \Delta W_n, & i &= \overline{2, s}, \end{aligned} \quad (25)$$

где c_i – коэффициенты метода

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad c_i = 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (\omega_1 + \omega_0 c_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} c_{i-2},$$

ΔW_n – сгенерированный шум для n -го шага, а интерполяционная функция $\tilde{y}(t)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq t_0, \\ y_m(1 - \theta) + y_{m+1}\theta, & \theta = \frac{t - t_m}{h}, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]. \end{cases}$$

Текущая модификация S-ROCK-методов добавляет в методы вычисление запаздывающей функции с помощью линейной интерполяции на вычисленных значениях сетки. Это относится не только к запаздыванию в детерминистической части, но и в стохастической тоже.

4.2 Анализ численной устойчивости СДУЗА

Традиционно, анализ устойчивости методов для ДУЗА включал построение и нахождения корней характеристического уравнения, в которое входит функция со всеми её запаздывающими значениями. Этот подход также используется и в СДУЗА.

Предельный анализ и вычисление корней характеристического уравнения являются трудоемкими задачами, поэтому их пытаются избегать, применяя различные теоремы или наблюдения. Так, например, в работе [1] продемонстрирована техника локуса корней, позволяющая находить корни характеристического уравнения с помощью построения семейства огибающих кривых. Данная техника также была использована в статье [3] для нахождения областей устойчивости стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием аргумента в стохастической части.

Наличие запаздывания в обеих частях СДУЗА ещё сильнее усложняет поиск корней характеристического уравнения. Это вызвано несколькими компонентами с запаздыванием и шумом, из-за которого приходится переходить к математическому ожиданию квадрата решения задачи численным методом. В работах [8, 18], посвященных анализу среднеквадратичной устойчивости методов Мильштейна и Эйлера–Маруямы для СДУЗА, были использованы некоторые замены и теоремы, которые позволили сформулировать функцию достаточной устойчивости указанных методов, не переходя к рассмотрению характеристического уравнения. Эти замечания и были использованы в данной работе для анализа РОСК-методов.

Перейдем к тестовому стохастическому дифференциальному уравнению с запаздыванием в обеих частях

$$dy(t) = (\lambda y(t) + \kappa y(t - \tau))dt + (\mu y(t) + \sigma y(t - \tau))dW. \quad (26)$$

Применяя численный метод с линейной интерполяцией (25) к (26), мы переходим к

$$y_{n+1} = y_{n+1}^* + \mu \Delta W_n \cdot y_{n+1}^* + \sigma \Delta W_n \cdot y_{n-m+1}, \quad (27)$$

где $y_{n+1}^* = R(\lambda h)y_n + \kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} ((e - c)y_{n-m} + c(y_{n-m+1}))$, в которой вектор-строка $b = (b_1, \dots, b_s)$ и матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^s$ определяются через таблицу Бутчера метода, I – единичная матрица порядка s , e – состоящий из единиц вектор размерности s , матрица $B = cb$, где вектор $c = Ae$.

Для удобства воспользуемся следующими заменами:

$$\begin{aligned} R &= |R(\lambda h)|, \\ Z_1 &= |\kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} \cdot (e - c)|, \\ Z_2 &= |\kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} \cdot c|. \end{aligned}$$

Возводим в квадрат выражение (27)

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^2 &= (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 + \mu^2 \Delta W_n^2 (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 \\
&\quad + \sigma^2 \Delta W_n^2 y_{n-m+1}^2 + 2\mu\sigma \Delta W_n^2 (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})y_{n-m+1} \\
&\quad + 2\mu \Delta W_n (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 \\
&\quad + 2\sigma \Delta W_n (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})y_{n-m+1}.
\end{aligned}$$

Переходим к его математическому ожиданию. Стоит отметить, что $\mathbb{E}[\Delta W_n] = 0$, а $\mathbb{E}[\Delta W_n^2] = h$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &= \mathbb{E}[(Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2] + \mu^2 h \\
&\quad \cdot \mathbb{E}[(Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2] + \sigma^2 h \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + 2\mu\sigma h \\
&\quad \cdot (R \cdot \mathbb{E}[y_n y_{n-m+1}] + Z_1 \cdot \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-m+1}] + Z_2 \cdot \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]) \\
&= (1 + \mu^2 h) \\
&\quad \cdot (R^2 \mathbb{E}[y_n^2] + 2RZ_1 \mathbb{E}[y_n y_{n-m}] + 2RZ_2 \mathbb{E}[y_n y_{n-m+1}] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\
&\quad + 2Z_1Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-m+1}] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]) + \sigma^2 h \cdot \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] \\
&\quad + 2\mu\sigma h \cdot (R \mathbb{E}[y_n y_{n-m+1}] + Z_1 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-m+1}] + Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]).
\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $c \cdot 2ab \leq |c| \cdot (a^2 + b^2)$ избавимся от математического ожидания парных вхождений функции:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &\leq (1 + \mu^2 h) \\
&\quad \cdot (R^2 \mathbb{E}[y_n^2] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_n^2] \\
&\quad + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_n^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_1Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\
&\quad + Z_1Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]) + \sigma^2 h \cdot \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] \\
&\quad + \mu\sigma h (R \mathbb{E}[y_n^2] + R \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_1 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] \\
&\quad + 2Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]).
\end{aligned}$$

Тогда мы приходим к выражению

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &\leq ((1 + \mu^2 h) \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + \mu\sigma h R) \cdot \mathbb{E}[y_n^2] \\ &\quad + ((1 + \mu^2 h) \cdot (Z_1^2 + RZ_1 + Z_1 Z_2) + \mu\sigma h Z_1) \cdot \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\ &\quad + ((1 + \mu^2 h) \cdot (Z_2^2 + RZ_2 + Z_1 Z_2) + \sigma^2 h + \mu\sigma h (R + Z_1 + 2Z_2)) \\ &\quad \cdot \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2].\end{aligned}$$

Оно означает, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &\leq [((1 + \mu^2 h) \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + \mu\sigma h R) \\ &\quad + ((1 + \mu^2 h) \cdot (Z_1^2 + RZ_1 + Z_1 Z_2) + \mu\sigma h Z_1) \\ &\quad + ((1 + \mu^2 h) \cdot (Z_2^2 + RZ_2 + Z_1 Z_2) + \sigma^2 h + \mu\sigma h (R + Z_1 + 2Z_2))] \\ &\quad \cdot \max\{\mathbb{E}[y_n^2], \mathbb{E}[y_{n-m}^2], \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]\}.\end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ ($\mathbb{E}[y_n^2] \rightarrow 0$), мы получаем достаточное условие для устойчивости [8]:

$$(1 + \mu^2 h) \cdot (R + Z_1 + Z_2)^2 + |2\mu\sigma h \cdot (R + Z_1 + Z_2)| + \sigma^2 h < 1 \quad (28)$$

Область устойчивости можно представить в виде

$$S_{MS-P} = \{\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{C} : |(1 + \gamma) \cdot \bar{R}(\alpha, \beta)^2 + |2\sqrt{\gamma\delta} \cdot \bar{R}(\alpha, \beta)| + \delta| < 1\}, \quad (29)$$

где $\alpha = \lambda h$, $\beta = \kappa h$, $\gamma = \mu^2 h$, $\delta = \sigma^2 h$, функция $\bar{R}(\alpha, \beta) = |R(\alpha)| + |\beta b^T (I - \alpha \cdot A)^{-1} c| + |\beta b^T (I - \alpha \cdot A)^{-1} (e - c)|$, в которой $R(\alpha)$ – функция устойчивости метода для ОДУ.

Область устойчивости (29) зависит от четырех комплексных параметров. В виду особенностей устойчивости ROCK-методов, построенные

области устойчивости рассматривались в действительных плоскостях $(\alpha, \beta) = (\lambda h, kh)$, $(\alpha, \gamma) = (\lambda h, \mu^2 h)$ и $(\alpha, \delta) = (\lambda h, \sigma^2 h)$ во второй четверти, построенные с приравниванием к нулю оставшихся двух параметров, а также в трехмерной плоскости (α, β, γ) с фиксированным параметром δ .

На рисунках 10 и 11 изображены границы области устойчивости (29) методов с двумя этапами. Границы устойчивости в целом демонстрируют ожидаемые результаты устойчивости для ROCK-методов.

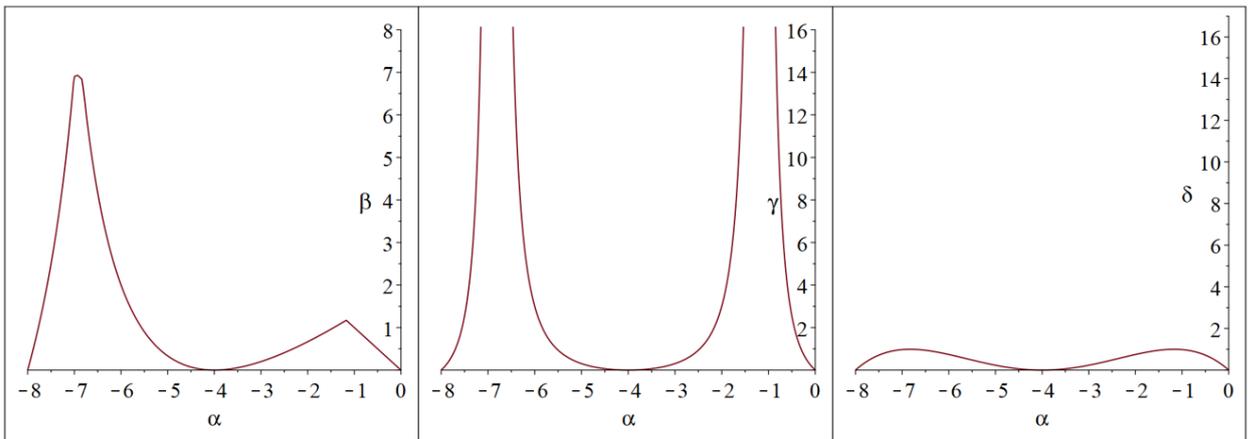


Рис. 10. Границы устойчивости метода (25) с $s = 2, \eta = 0$

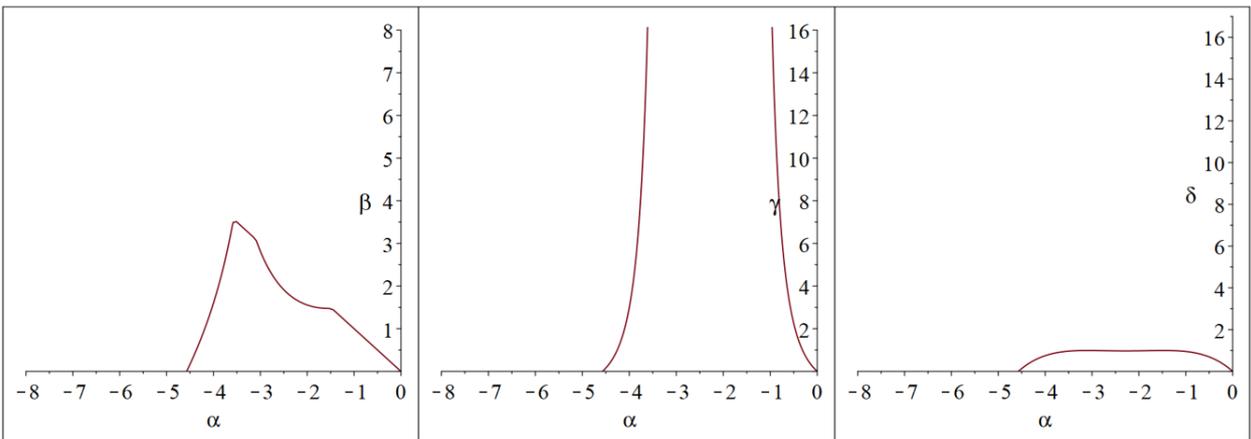


Рис. 11. Границы устойчивости метода (25) с $s = 2, \eta = 4$

Стоит обратить внимание, что сформулированная область устойчивости (29) является лишь достаточной. Это легко заметить при сравнении с границей устойчивости для ДУЗА (рисунок 12).

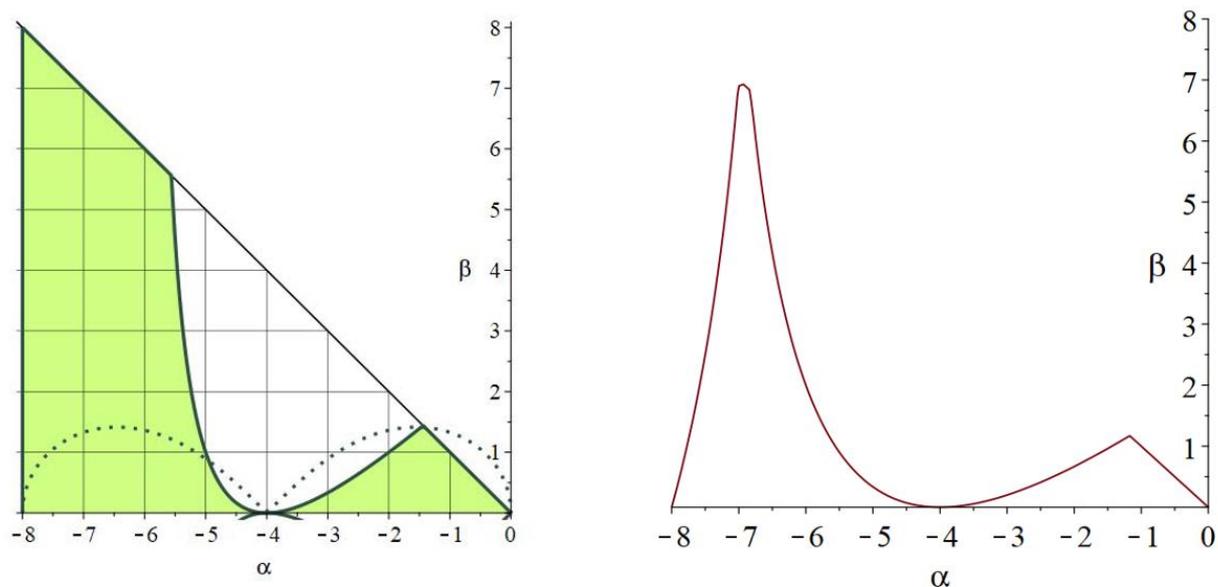


Рис. 12. Сравнение границ устойчивости для метода (25) с $s = 2, \eta = 0$

Несмотря на это, граница устойчивости метода для СДУ не претерпела изменений (Рисунок 13).

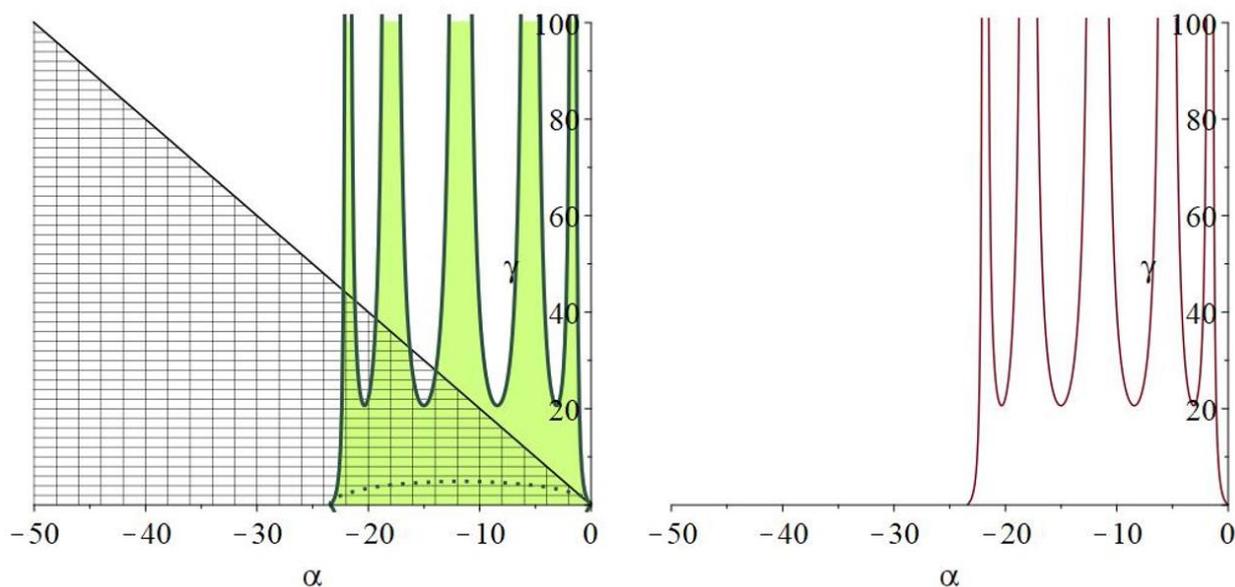


Рис. 13. Сравнение границ устойчивости для метода (25) с $s = 5, \eta = 2.5$

Вероятно, как и в случае с границей устойчивости на плоскости (α, β) , использованные замены математических ожиданий при формулировании условия достаточной устойчивости (28) повлияли и на границу устойчивости методов для запаздывания в стохастической части.

Существенным недостатком данной модификации является малая устойчивость при запаздывании в стохастической части. Для любого метода (25) граница устойчивости в плоскости (α, δ) не превышает 1 (рисунок 14).

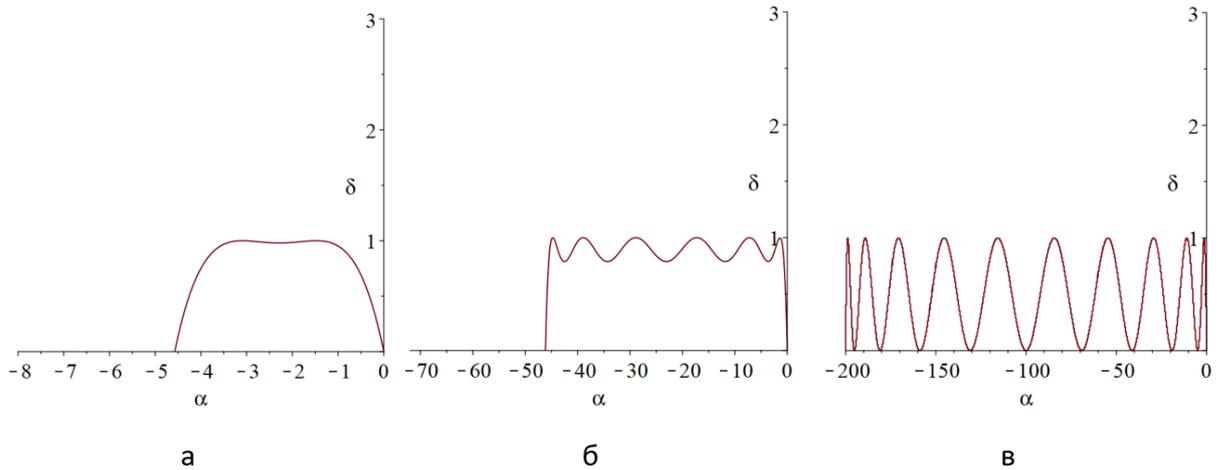


Рис. 14. Границы устойчивости методов (25):
 а) $s = 2, \eta = 4$; б) $s = 6, \eta = 1$; в) $s = 10, \eta = 0$

Величина параметра $0 < \delta < 1$ очень сильно уменьшает область, сводя её к небольшим зонам. Это хорошо заметно на рисунке 15. При $\delta = 1$ от области остаются лишь s точек на плоскости (α, β) , которые пропадают при $\delta > 1$. Поднятые над плоскостью (α, β) фигуры демонстрируют поведение пересекающихся границ устойчивости в пространстве, олицетворяющие неустойчивость в виду их пустого полного пересечения.

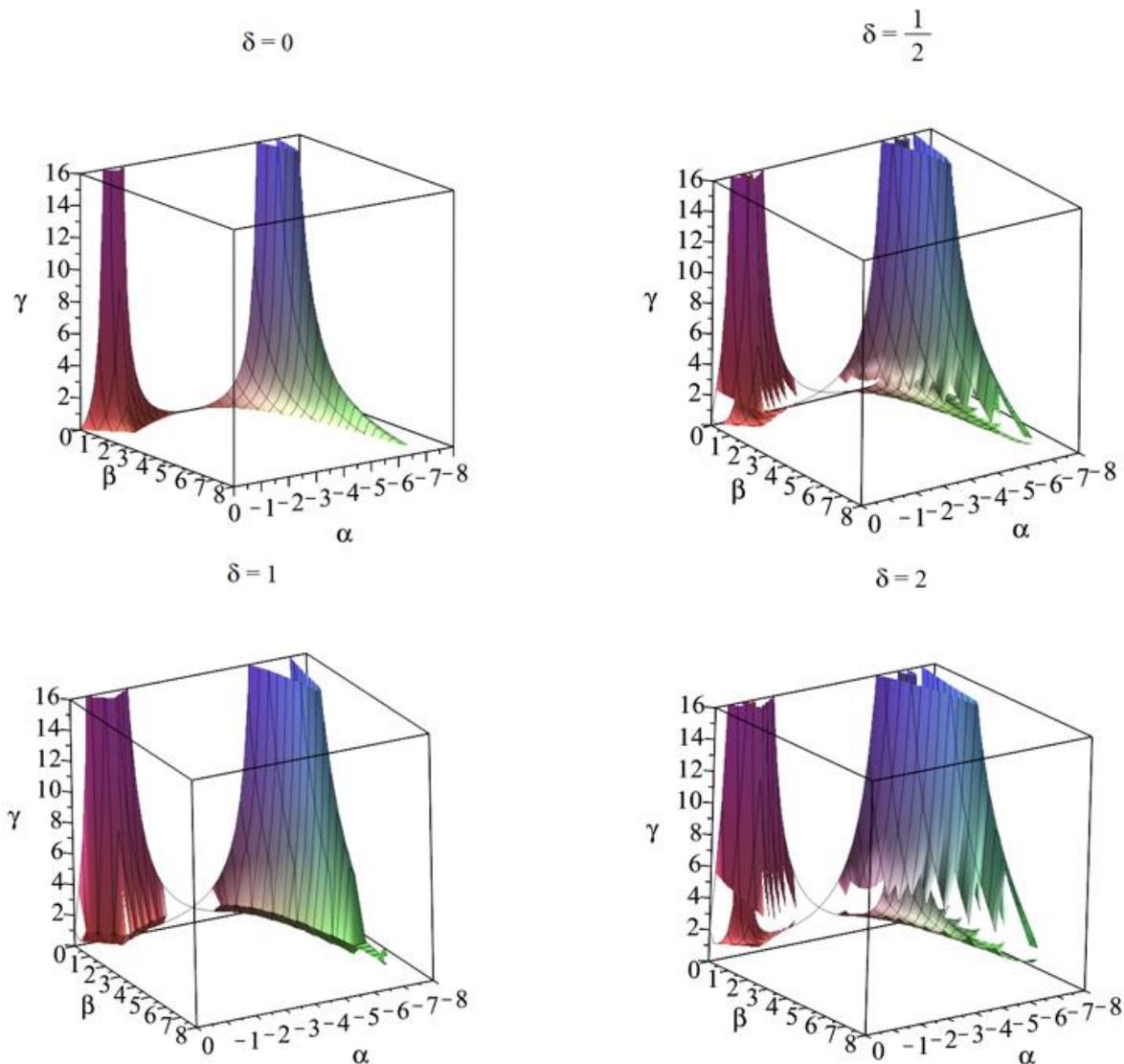


Рис. 15. Области устойчивости метода (25) с $s = 2$, $\eta = 0$

Увеличение демпфирования позволяет избежать пробелов в области при $\delta < 1$, а при равенстве демонстрирует более широкую устойчивую границу на плоскости (α, β) , но не решает проблему неустойчивости в остальных случаях. Например, это показано на рисунке 16.

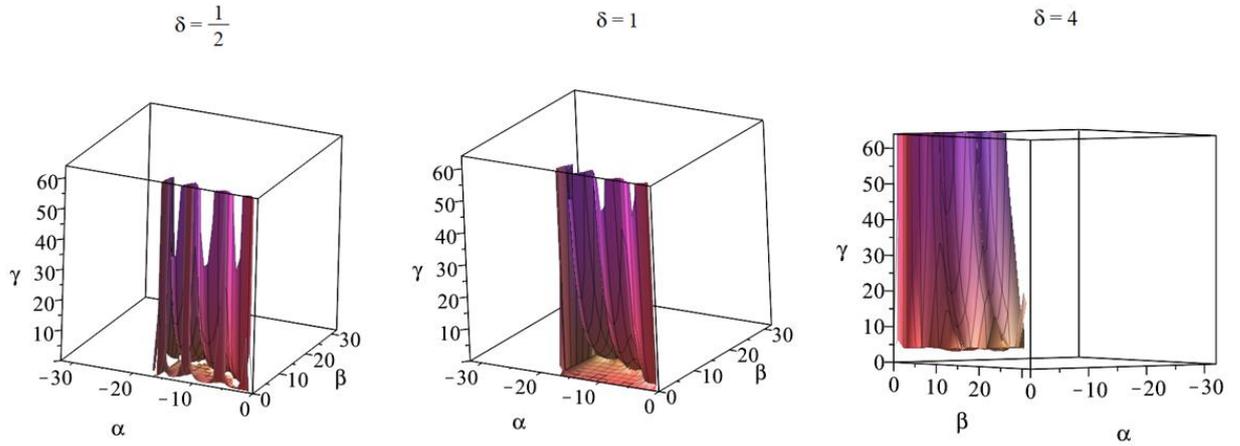


Рис. 16. Области устойчивости метода (25) с $s = 4$, $\eta = 2$

4.3 Иной подход к вычислению запаздывания в шуме

Методы (25) демонстрируют слабую устойчивость в стохастической части с запаздыванием. Для улучшения устойчивости требуется изменить подход к вычислению запаздывания в шумовой компоненте.

Модифицируем методы (18) иным способом. Для вычисления запаздывающего решения в детерминистической части будем использовать линейную интерполяцию по тому же принципу, что и в методах (25). Но запаздывание в шуме будет учитываться по-другому:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= y_n, & K_1 &= y_n + h \frac{\omega_1}{\omega_0} f(K_0, \tilde{y}(t_n - \tau)), \\
 K_i &= 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (h\omega_1 f(K_{i-1}, \tilde{y}(t_n + c_i h - \tau)) + \omega_0 K_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} K_{i-2}, \\
 \hat{y}_{n+1} &= K_s, & y_{n+1} &= K_s + g(K_s, \hat{y}(t_{n+1} - \tau)) \Delta W_n, & i &= \overline{2, s}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где c_i – коэффициенты метода

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad c_i = 2 \frac{T_{i-1}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} (\omega_1 + \omega_0 c_{i-1}) - \frac{T_{i-2}(\omega_0)}{T_i(\omega_0)} c_{i-2},$$

ΔW_n – сгенерированный шум для n -го шага, \hat{y} – вычисленные значения функции без шума, а интерполяционная функция $\tilde{y}(t)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq t_0, \\ y_m(1 - \theta) + y_{m+1}\theta, & \theta = \frac{t - t_m}{h}, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]. \end{cases}$$

Вычисление запаздывания в стохастической части в методах (30) выполняется с помощью \hat{y}_n – найденные значения функции без учета шума. В следствии этого в программной реализации необходимо выделить дополнительную память для хранения данных значений.

4.4 Анализ устойчивости новой модификации методов

Проведем аналогичные выкладки, чтобы прийти к формулировке достаточных условий устойчивости.

Применяя численный метод (30) к уравнению (26), мы переходим к

$$y_{n+1} = y_{n+1}^* + \mu \Delta W_n \cdot y_{n+1}^* + \sigma \Delta W_n \cdot y_{n-m+1}^*, \quad (31)$$

где $y_{n+1}^* = R(\lambda h)y_n + \kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} ((e - c)y_{n-m} + c(y_{n-m+1}))$.

Также воспользуемся следующими заменами:

$$\begin{aligned} R &= |R(\lambda h)|, \\ Z_1 &= |\kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} \cdot (e - c)|, \\ Z_2 &= |\kappa h b^T (I - \lambda h \cdot A)^{-1} \cdot c|. \end{aligned}$$

Возводим в квадрат выражение (31)

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^2 = & (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 + \mu^2 \Delta W_n^2 (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 \\
& + \sigma^2 \Delta W_n^2 (Ry_{n-m} + Z_1y_{n-2m} + Z_2y_{n-2m+1})^2 \\
& + 2\mu\sigma \Delta W_n^2 (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1}) \\
& \cdot (Ry_{n-m} + Z_1y_{n-2m} + Z_2y_{n-2m+1}) \\
& + 2\mu \Delta W_n (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2 \\
& + 2\sigma \Delta W_n (Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1}) \\
& \cdot (Ry_{n-m} + Z_1y_{n-2m} + Z_2y_{n-2m+1}),
\end{aligned}$$

и переходим к его математическому ожиданию:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] = & \mathbb{E}[(Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2] + \\
& + \mu^2 h \cdot \mathbb{E}[(Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})^2] + \\
& + \sigma^2 h \mathbb{E}[(Ry_{n-m} + Z_1y_{n-2m} + Z_2y_{n-2m+1})^2] + \\
& + 2\mu\sigma h \mathbb{E}[(Ry_n + Z_1y_{n-m} + Z_2y_{n-m+1})(Ry_{n-m} + Z_1y_{n-2m} + Z_2y_{n-2m+1})] = \\
= & (1 + \mu^2 h) (R^2 \mathbb{E}[y_n^2] + 2RZ_1 \mathbb{E}[y_n y_{n-m}] + 2RZ_2 \mathbb{E}[y_n y_{n-m+1}] + \\
& + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + 2Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-m+1}] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]) + \\
& + \sigma^2 h (R^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + 2RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-2m}] + 2RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-2m+1}] + \\
& + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] + 2Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m} y_{n-2m+1}] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2]) + \\
& + 2\mu\sigma h (R^2 \mathbb{E}[y_n y_{n-m}] + RZ_1 \mathbb{E}[y_n y_{n-2m}] + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + \\
& + RZ_2 \mathbb{E}[y_n y_{n-2m+1}] + RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-m+1}] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-2m}] + \\
& + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m} y_{n-m+1}] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m} y_{n-2m+1}] + \\
& + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1} y_{n-2m+1}]).
\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством $c \cdot 2ab \leq |c| \cdot (a^2 + b^2)$ избавимся от математического ожидания парных вхождений функции:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &\leq (1 + \mu^2 h) \\
&\cdot (R^2 \mathbb{E}[y_n^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_n^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_n^2] \\
&+ RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] \\
&+ Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2]) + \sigma^2 h \\
&\cdot (R^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\
&+ RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] \\
&+ Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2]) + \mu \sigma h \\
&\cdot (R^2 \mathbb{E}[y_n^2] + R^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_n^2] + RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] \\
&+ 2RZ_1 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_n^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2] + RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\
&+ RZ_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_1^2 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] \\
&+ Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-m}^2] + Z_1 Z_2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2] \\
&+ Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + Z_2^2 \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2]).
\end{aligned}$$

Тогда мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] &\leq (1 + \mu^2 h + \mu \sigma h) \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) \mathbb{E}[y_n^2] \\
&+ ((1 + \mu^2 h) \cdot (RZ_1 + Z_1 + Z_1 Z_2) + \sigma^2 h \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) \\
&+ \mu \sigma h \cdot (R^2 + 2RZ_1 + RZ_2 + Z_1^2 + Z_1 Z_2)) \mathbb{E}[y_{n-m}^2] \\
&+ (1 + \mu^2 h + \mu \sigma h) \cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2] + (\sigma^2 h + \mu \sigma h) \\
&\cdot (RZ_1 + Z_1^2 + Z_1 Z_2) \mathbb{E}[y_{n-2m}^2] + (\sigma^2 h + \mu \sigma h) \\
&\cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2].
\end{aligned}$$

Оно означает, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[y_{n+1}^2] \leq & [(1 + \mu^2 h + \mu\sigma h) \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + (1 + \mu^2 h) \\
& \cdot (RZ_1 + Z_1 + Z_1 Z_2) + \sigma^2 h \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + \mu\sigma h \\
& \cdot (R^2 + 2RZ_1 + RZ_2 + Z_1^2 + Z_1 Z_2) + (1 + \mu^2 h + \mu\sigma h) \\
& \cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) + (\sigma^2 h + \mu\sigma h) \cdot (RZ_1 + Z_1^2 + Z_1 Z_2) \\
& + (\sigma^2 h + \mu\sigma h) \cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2)] \\
& \cdot \max\{\mathbb{E}[y_n^2], \mathbb{E}[y_{n-m+1}^2], \mathbb{E}[y_{n-m}^2], \mathbb{E}[y_{n-2m+1}^2], \mathbb{E}[y_{n-2m}^2]\}.
\end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ ($\mathbb{E}[y_n^2] \rightarrow 0$) мы получаем достаточное условие для устойчивости [8]:

$$\begin{aligned}
& (1 + \mu^2 h + \mu\sigma h) \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + (1 + \mu^2 h) \cdot (RZ_1 + Z_1 + Z_1 Z_2) + \sigma^2 h \\
& \cdot (R^2 + RZ_1 + RZ_2) + \mu\sigma h \cdot (R^2 + 2RZ_1 + RZ_2 + Z_1^2 + Z_1 Z_2) \\
& + (1 + \mu^2 h + \mu\sigma h) \cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) + (\sigma^2 h + \mu\sigma h) \\
& \cdot (RZ_1 + Z_1^2 + Z_1 Z_2) + (\sigma^2 h + \mu\sigma h) \cdot (RZ_2 + Z_1 Z_2 + Z_2^2) < 1,
\end{aligned}$$

которое можно упростить

$$(1 + \mu^2 h + 2\mu\sigma h + \sigma^2 h) \cdot (R + Z_1 + Z_2)^2 < 1. \quad (32)$$

Тогда, область достаточной устойчивости можно представить в виде

$$S_{MS-P} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} : |(1 + \gamma + 2\sqrt{\gamma\delta} + \delta) \cdot \bar{R}(\alpha, \beta)^2| < 1\}, \quad (33)$$

где $\alpha = \lambda h$, $\beta = \kappa h$, $\gamma = \mu^2 h$, $\delta = \sigma^2 h$, функция $\bar{R}(\alpha, \beta) = |R(\alpha)| + |\beta b^T (I - \alpha \cdot A)^{-1} c| + |\beta b^T (I - \alpha \cdot A)^{-1} (e - c)|$, в которой $R(\alpha)$ – функция устойчивости метода для ОДУ.

На рисунке 17 и рисунке 18 изображены границы области устойчивости методов (30) с двумя этапами. Уже здесь видны изменения в границах устойчивости на плоскости (α, δ) .

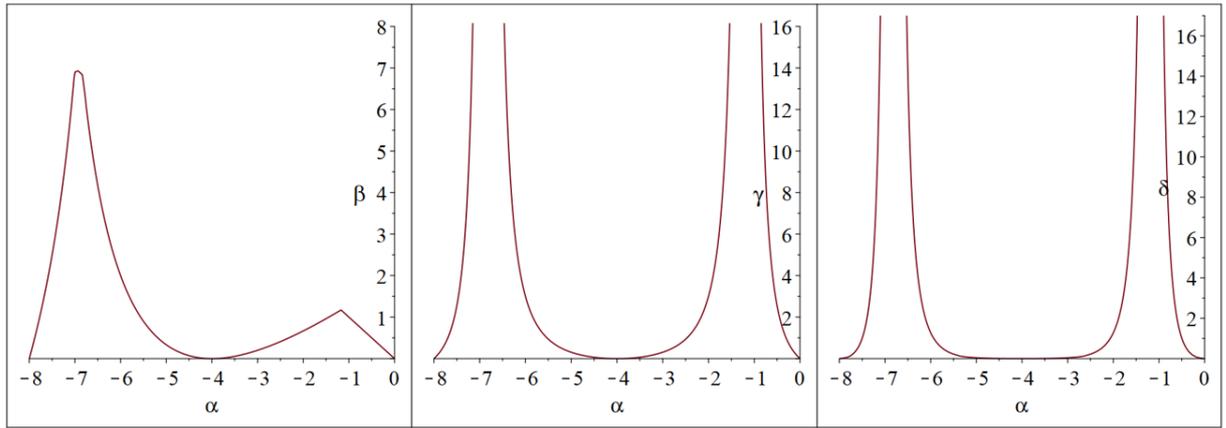


Рис. 17. Границы устойчивости метода (30) с $s = 2, \eta = 0$

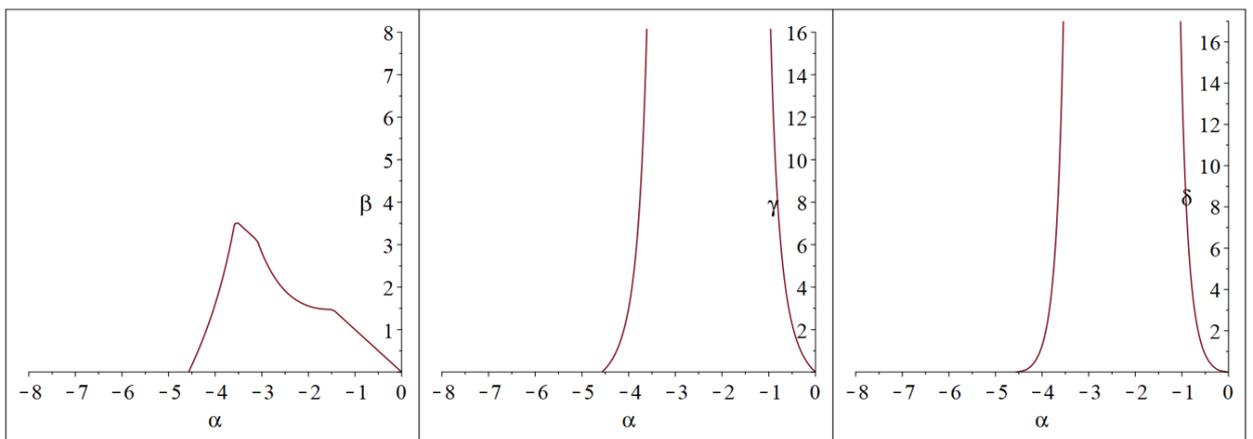


Рис. 18. Границы устойчивости метода (30) с $s = 2, \eta = 4$

На рисунке 19 продемонстрированы границы устойчивости для методов (30) с аналогичным числом этапов и величиной демпфирования, что были проиллюстрированы на рисунке 14 для методов (25).

Методы (30) демонстрируют куда лучшую устойчивость чем методы (25). Влияние δ на устойчивость стало аналогичным γ , что видно не только из условия (33), но и из схожести границ устойчивости на графиках. Теперь при значении $\delta > 1$ методы всё ещё имеют устойчивые зоны (рисунок 20).

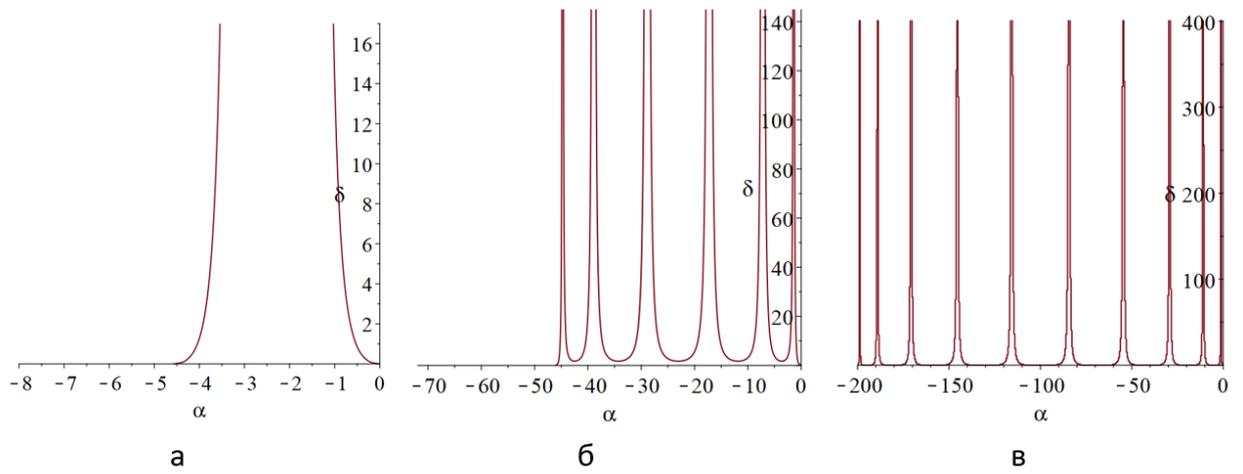


Рис. 19. Границы устойчивости методов (30):
 а) $s = 2, \eta = 4$; б) $s = 6, \eta = 1$; в) $s = 10, \eta = 0$

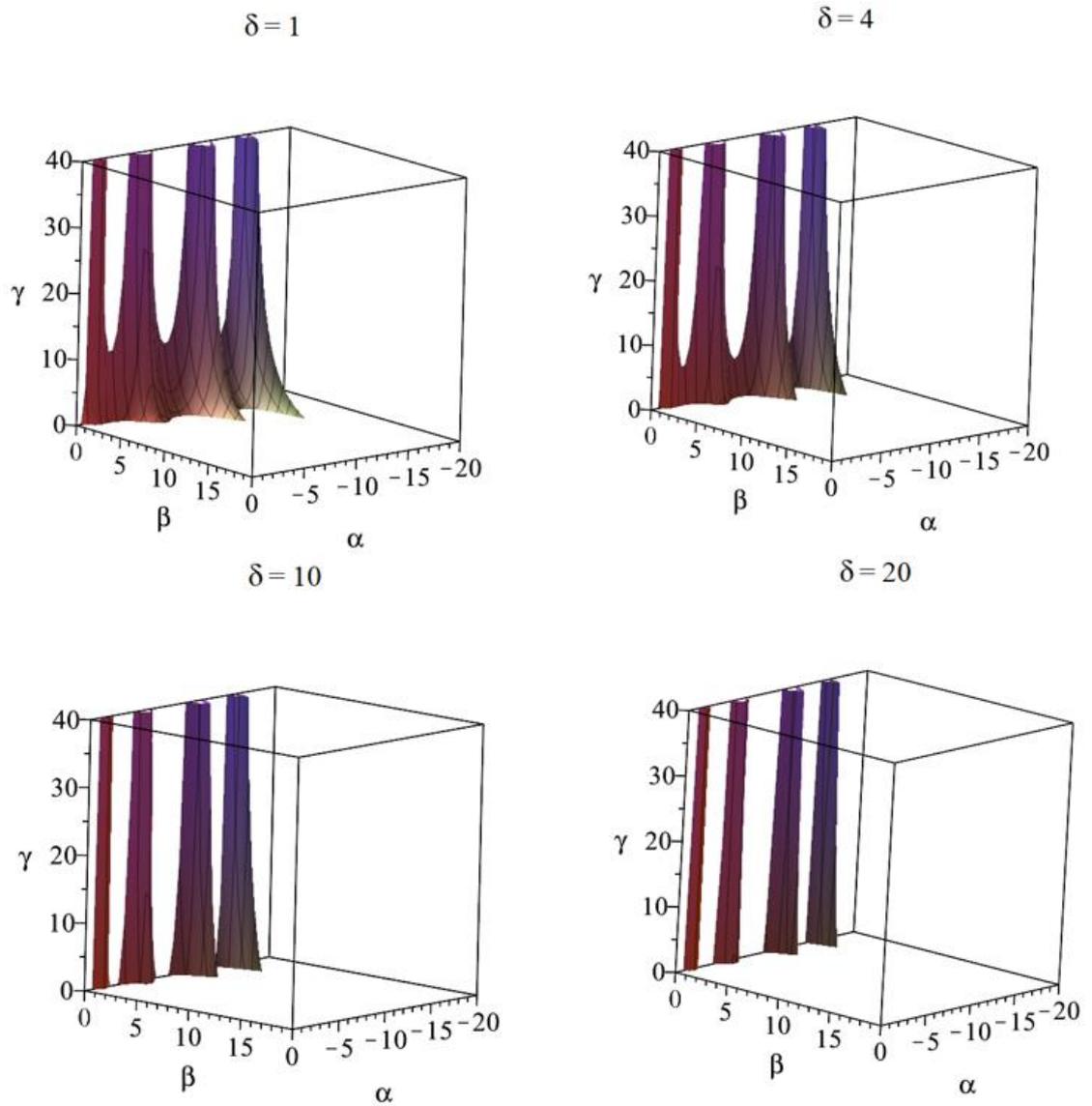


Рис. 20. Области устойчивости метода (30) с $s = 4, \eta = 2$

В целом, полученное условие устойчивости (32) хорошо демонстрирует области устойчивости методов (рисунок 21). Но, к сожалению, такой подход не позволяет определить оптимальный для ROCK-методов параметр демпфирования η , который помог бы избавиться от впадин в области (рисунок 22). Хотя стоит отметить, что определение оптимального демпфирования для запаздывания в обеих частях затруднено в следствие того, что увеличение значения δ сдвигает область устойчивости, что приводит к возвращению впадин в них. Например, можно взять оптимальное для метода с $s = 2$ значение $\eta = 1.36$ для запаздывания только в шумовой компоненте [3], но добавление запаздывания в детерминистическую часть и увеличение δ «вернёт» впадину обратно в область.

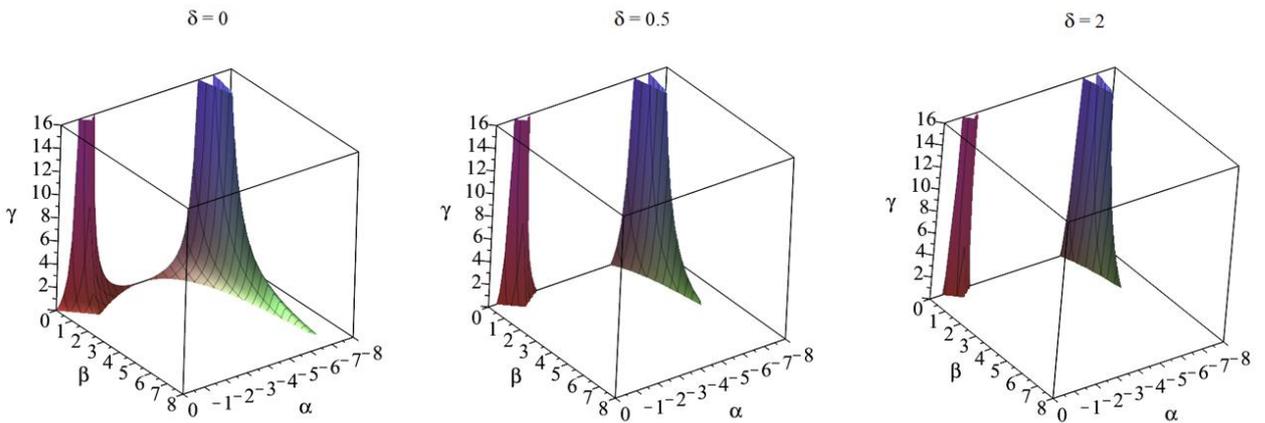


Рис. 21. Область устойчивости метода (30) с $s = 2$, $\eta = 0$

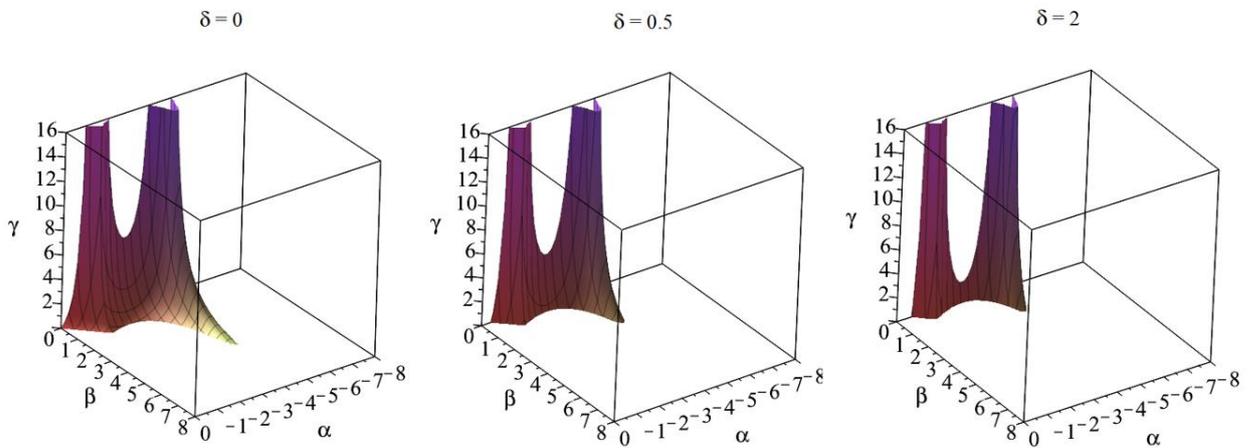


Рис. 22. Области устойчивости метода (30) с $s = 2$, $\eta = 1.36$

Глава 5. Проверка областей устойчивости

Удостоверимся в правильности полученных областей устойчивости. Для этого рассмотрим устойчивость ROCK-методов (25) и (30) при решении тестового уравнения (26) с разными параметрами.

Реализация методов была осуществлена на языке программирования MATLAB. Исходный код расположен в публичном репозитории на GitHub:

<https://github.com/EgorKudryashov/Runge-Kutta-methods>

Нахождение точки запаздывания для линейной интерполяции было выполнено с помощью бинарного поиска. Для генерации шума используется встроенная в MATLAB функция `randn()`. Для вычисления этапов метода была реализована функция, которая строит таблицу коэффициентов метода по параметрам количества s этапов и величины η демпфирования.

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} dy = (-2y(t) - y(t - 0.25))dt + (0.5y(t) + 0.2y(t - 0.25))dW, & t > 0, \\ \phi(t) = 1, & t \leq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (34)$$

Проведём тестирование порядка сильной (16) и слабой (17) сходимости ROCK-методов на основе задачи (34). В силу того, что в самом прикладном пакете отсутствуют функции решения СДУЗА, а аналитическое решение неизвестно, в качестве точного значения функции было взято решение методом Эйлера–Маруямы, вычисленное с малой величиной шага. Был реализован классический метод Эйлера–Маруямы, вычисляющий запаздывание с помощью линейной интерполяции:

$$\begin{aligned} K_1 &= y_n + h \cdot f(y_n, \tilde{y}(t_n - \tau)), \\ y_{n+1} &= K_1 + g(y_n, \tilde{y}(t_n - \tau))\Delta W_n, \end{aligned} \quad (35)$$

где ΔW_n – сгенерированный шум для n -го шага, а интерполяционная функция $\tilde{y}(t)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \leq t_0, \\ y_m(1 - \theta) + y_{m+1}\theta, & \theta = \frac{t - t_m}{h}, \quad t \in [t_m, t_{m+1}]. \end{cases}$$

Решение задачи (34) ROCK-методами было выполнено с разным шумом 1000 раз. Усредненное решение сравнивалось с аналогичным решением, полученным методом (35). Результаты, демонстрирующие порядки слабой и сильной сходимости методов, приведены на рисунках 23 и 24.

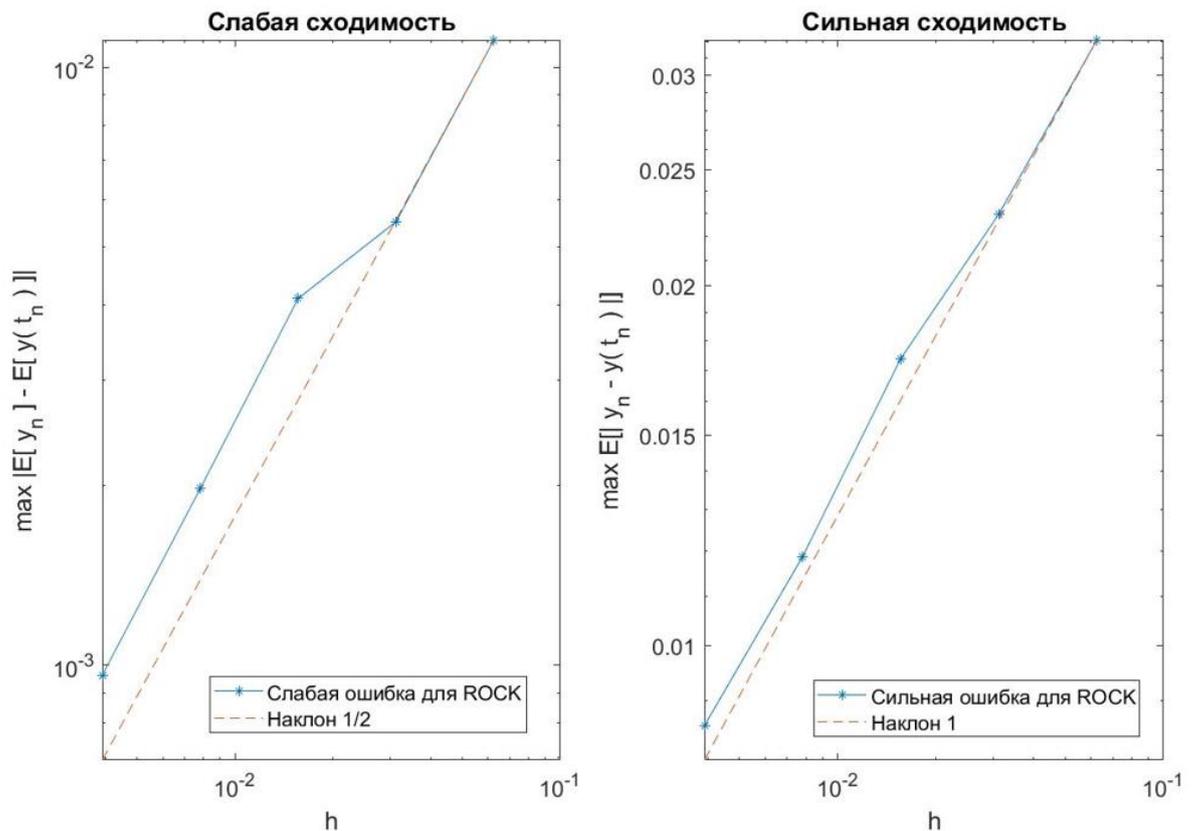


Рис. 23. Порядок сходимости метода (25) с $s = 2$, $\eta = 1.36$

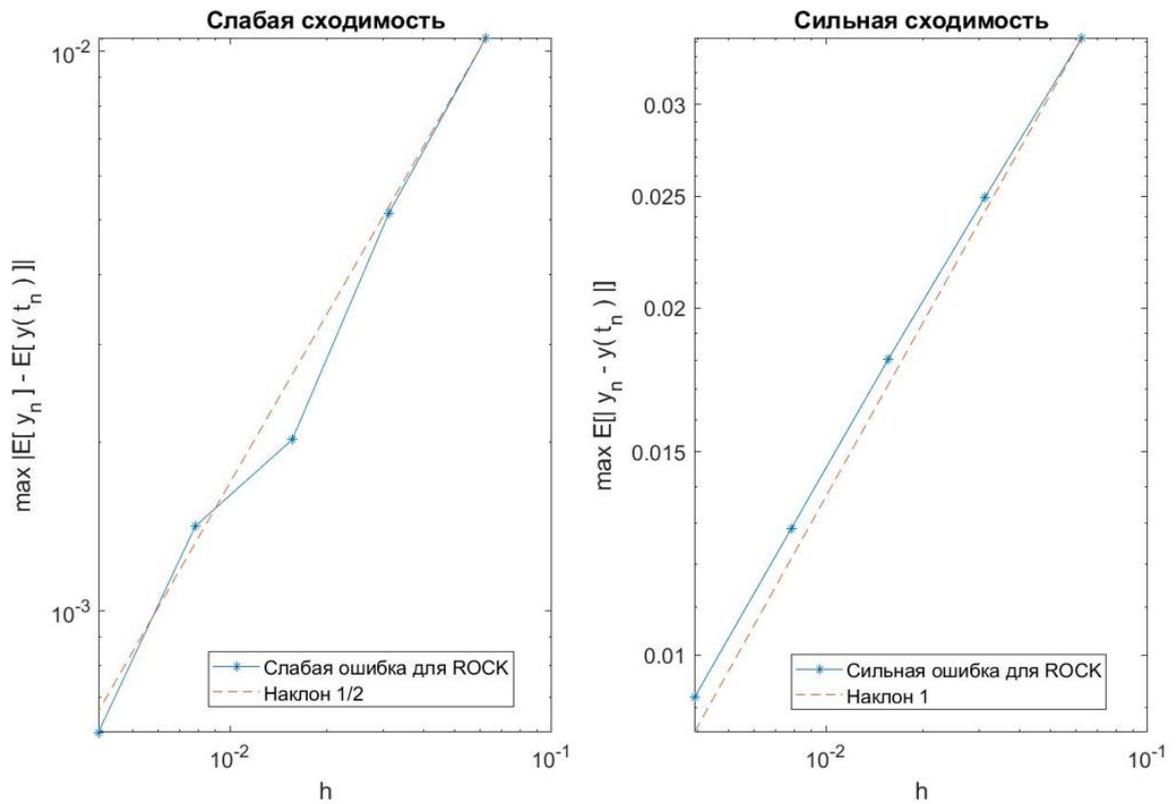


Рис. 24. Порядок сходимости метода (30) с $s = 2$, $\eta = 1.36$

Наконец, перейдем к проверке полученных областей устойчивости. Для этого рассмотрим решение ROCK-методами тестового уравнения (26) с разными параметрами, но с фиксированной величиной запаздывания $\tau = 2$ для детерминистической и стохастической частей уравнения в силу того, что анализ устойчивости проводился для случая любой постоянной величины запаздывания. Все вычисления было повторены 100 раз и усреднены.

На рисунке 25 проиллюстрированы решения задач, попадающие в области устойчивости обоих методов. Как и ожидалось, наблюдаемые решения устойчивы и сходятся $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[y_n^2] = 0$.

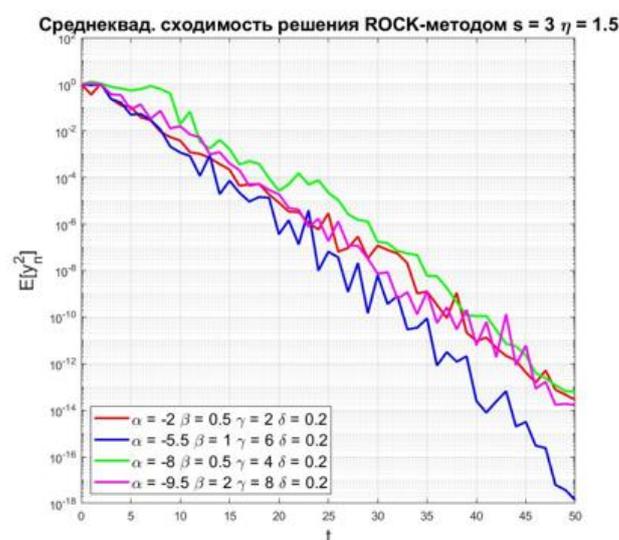
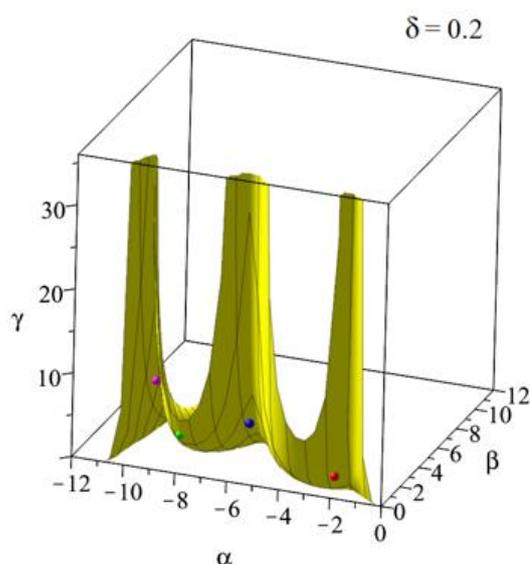
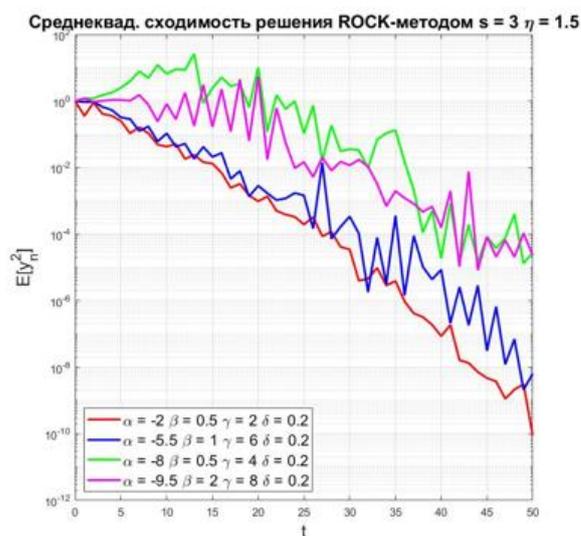
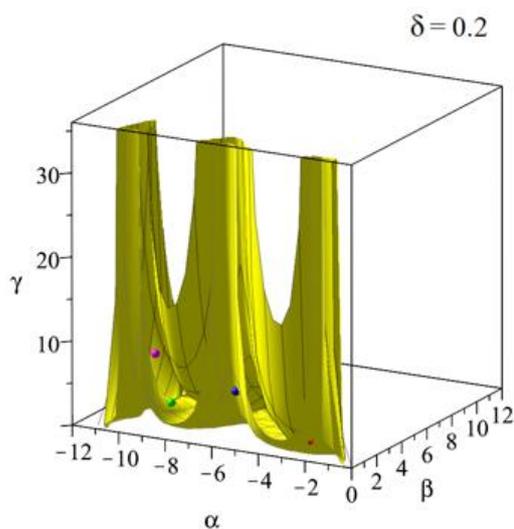


Рис. 25. Среднеквадратичная сходимость решения ROCK-методами:
сверху метод (25), снизу метод (30)

Ранее отмечалось, что методы (25) всюду неустойчивы, если значение $\delta > 1$. На рисунке 26 изображена область устойчивости такого метода. Она представляет собой граничную зону на плоскости (α, β) . Остальная часть фигуры возникла из-за пересечения различных граничных условий устойчивости. Она не несет в себе никакую информативность касемо устойчивости метода.

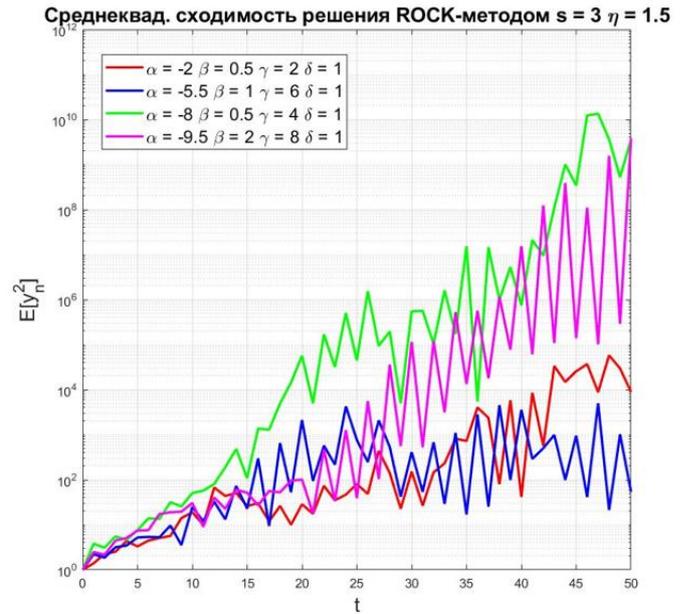
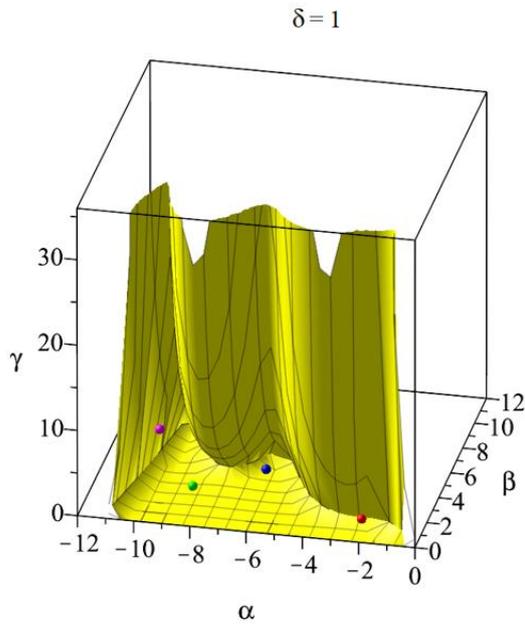


Рис. 26. Среднеквадратическая сходимость метода (25) с $s = 3$, $\eta = 1.5$

Изменение подхода при вычислении запаздывания в шуме, свойственного методам (30), позволяет получить устойчивое решение и при $\delta > 1$. Пример продемонстрирован на рисунке 27.

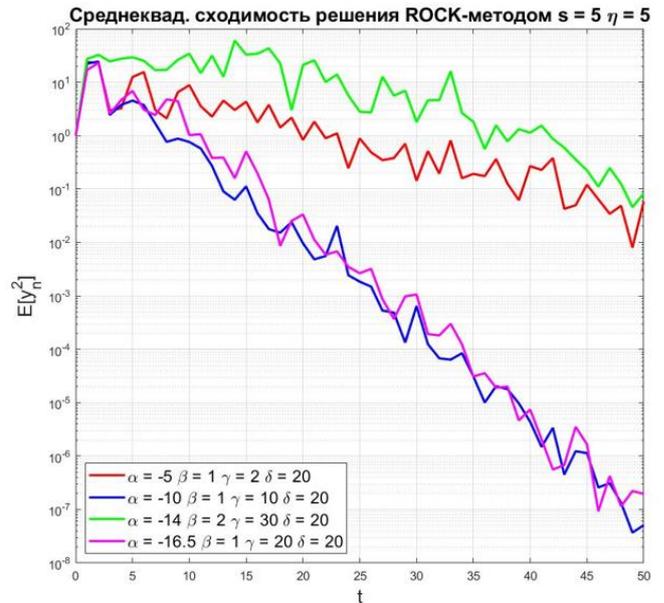
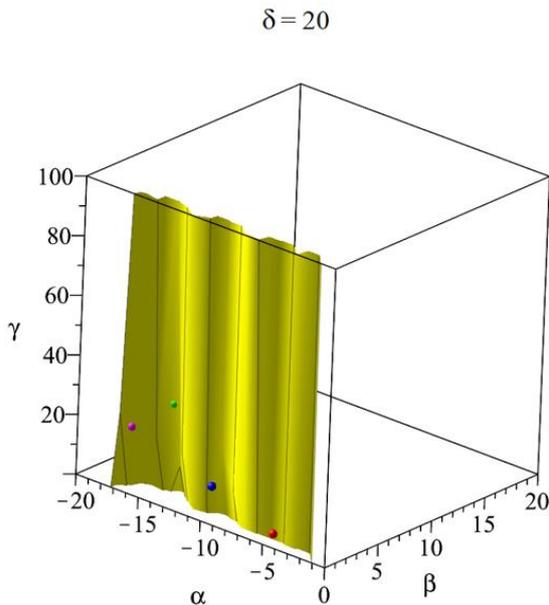


Рис. 27. Среднеквадратическая сходимость метода (30) с $s = 5$, $\eta = 5$

Как уже упоминалось ранее, выведенные условия устойчивости являются лишь достаточными. В связи с этим, возникают зоны вне области, в которых методы демонстрирует устойчивое решение. На рисунке 28 это показано пурпурной точкой на графике области устойчивости. Такие зоны возникают в областях с запаздыванием в силу допущенных замен при формулировании условий (33) для построения областей.

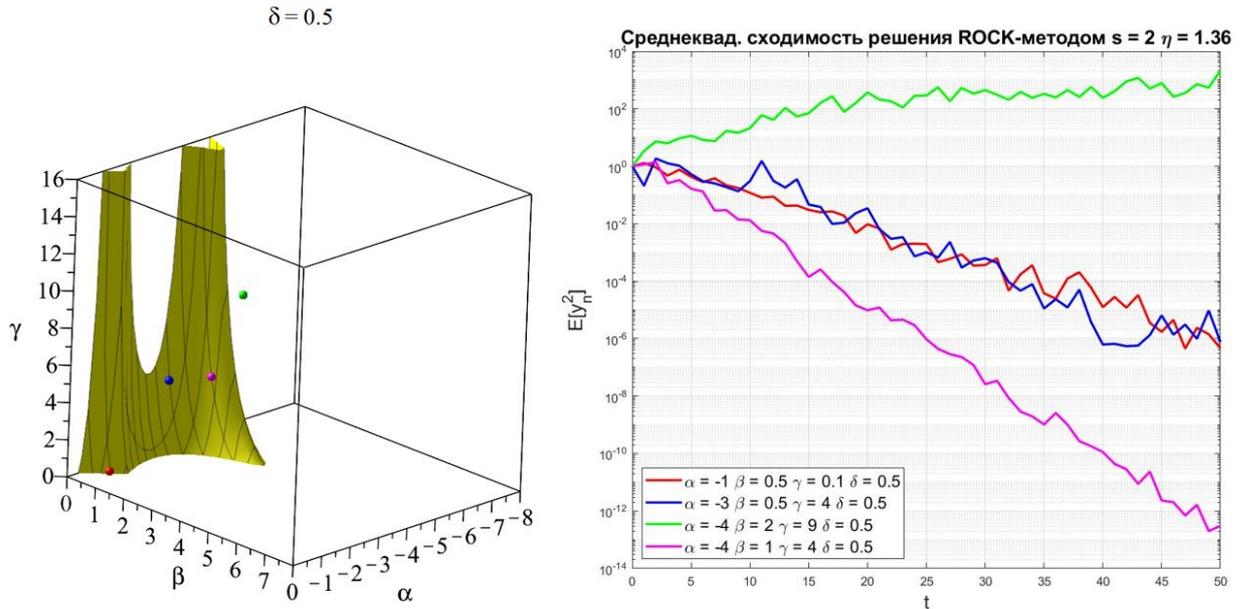


Рис. 28. Среднеквадратичная сходимость решения методом (30) с $s = 2, \eta = 1.36$

Не стоит забывать и о влиянии коэффициента демпфирования η на устойчивость. Из-за достаточности условия (33) величину демпфирования следует подбирать на основе анализа P -устойчивости метода для ДУЗА и MS -устойчивости для случая с запаздыванием в стохастической части. Иначе слишком большое демпфирование сильно сократит реальные области устойчивости.

На рисунке 29 изображены красная и синяя точки на графике области устойчивости, которые попадают во впадины. Несмотря на расположение вне области, зеленая точка попадает в реальную область устойчивости метода. Возникло это в силу достаточности условия устойчивости (33).

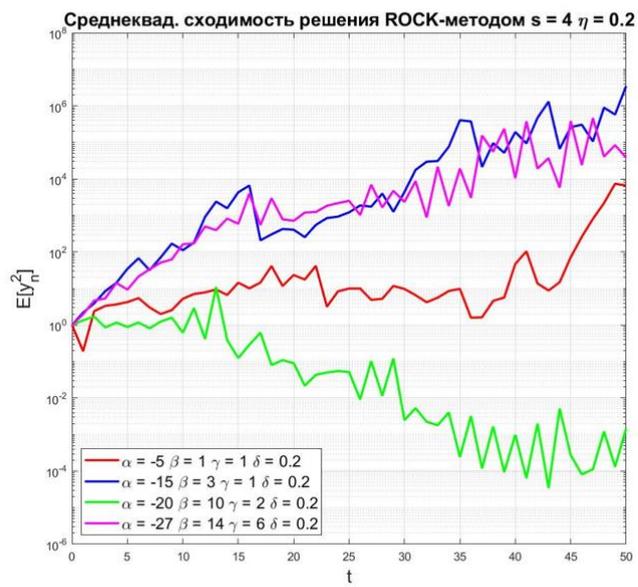
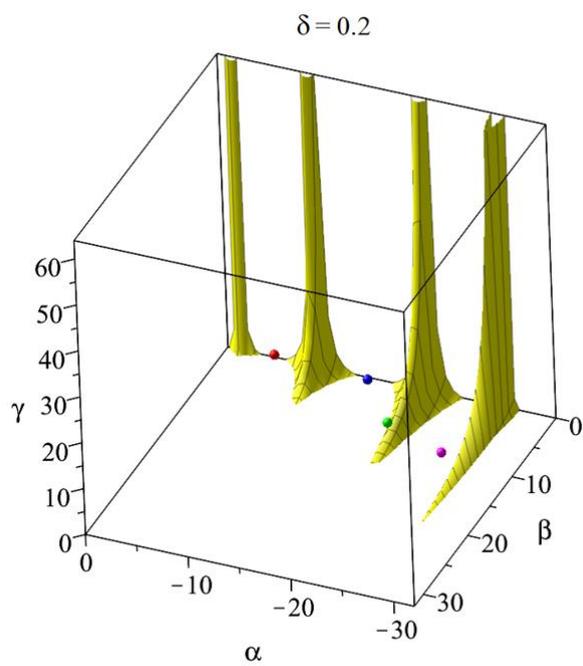


Рис. 29. Среднеквадратичная сходимость решения методом (30) с $s = 4$, $\eta = 0.2$

Выводы

В данной работе были рассмотрены ортогональные методы Рунге–Кутты–Чебышёва первого порядка и приведён анализ их численной устойчивости для различных видов дифференциальных уравнений.

В первых трех главах был продемонстрирован повторный анализ устойчивости методов для уже известных случаев ОДУ, ДУЗА и СДУ. Также были упомянуты их достоинства и недостатки.

Основная часть работы уделена модификациям и анализу устойчивости ROCK-методов для СДУЗА, в которых запаздывание вычисляется с помощью линейной интерполяции. Из-за трудностей в приведении характеристического уравнения и нахождения его корней были сформулированы только достаточные условия для устойчивости методов. В связи с этим полученные условия не желательно использовать для вычисления оптимальной величины параметра демпфирования методов. Зато представленные формулировки позволяют легко построить области устойчивости не только для рассматриваемых методов, но и для других численных методов, используя их функции устойчивости для ОДУ.

Были рассмотрены две модификации ROCK-методов, основанных на методах S-ROCK. Методы, использующие найденные значения функции с шумом для вычисления запаздывания в стохастической части, менее предпочтительны для решения в виду их низкой устойчивости в запаздывающем шуме. Метод, вычисляющий запаздывание в стохастической компоненте на основании прошлых значений функций без шума, намного лучше справляется с этой задачей.

Для проверки областей устойчивости и нахождения численного решения СДУЗА были реализованы рассматриваемые методы на языке программирования MATLAB. Текущая реализация позволяет задавать параметры количества этапов и демпфирования для вычисления задачи желаемым методом с постоянной величиной шага.

Исследование полученных областей устойчивости показало, что сформулированные достаточные условия действительно характеризуют устойчивость рассматриваемых методов. Они могут помочь на практике для выбора метода с подходящим количеством этапов. Но, к сожалению, выбор оптимального параметра демпфирования в этом случае затруднителен.

Заключение

Результатами работы является не только проведенный теоретический анализ модификаций ортогональных методов Рунге–Кутты–Чебышёва для СДУЗА, но и их программная реализация, которая может быть использована для решения реальных задач.

Были сформулированы достаточные условия устойчивости рассматриваемых методов для стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием в обеих частях. Данные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований устойчивости не только ROCK-методов старших порядков [19, 20], но и других численных методов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Huang C., Gan S., Wang D. Delay-dependent stability analysis of numerical methods for stochastic delay differential equations // J. Comput. Appl. Math., 2012, vol. 236, pp. 3514-3527.
- [2] Xu M., Wu F., Leung H. Stochastic Delay Differential Equation and Its Application on Communications // IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2010, pp. 1364-1367.
- [3] Komori Y., Eremin A., Burrage K. S-ROCK methods for stochastic delay differential equations with one fixed delay // J. Comput. Appl. Math., 2019, vol. 353, pp. 345–354.
- [4] Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Том 2. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи – М: Мир, 1999. 685 с.
- [5] Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, 2013. 413 p.
- [6] Higham D. J. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations // Society Industrial and Applied Mathematics, 2001, vol. 43, pp. 525-546.
- [7] Burrage K., Burrage P., Mitsui T. Numerical solutions of stochastic differential equations – implementation and stability issues // J. Comput. Appl. Math., 2000, vol. 125, pp. 171-182.

- [8] Wang Z., Zhang C. An Analysis of Stability of Milstein Method for Stochastic Differential Equations with Delay // Computers and Mathematics with Applications, 2006, vol. 51, pp. 1445-1452.
- [9] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –М.: Наука, 1971. 296 с.
- [10] Hayes N.D. Roots of transcendental equations associated with certain difference-differential equations // J. London Math. Soc, 1950, vol. 25, pp. 226–232.
- [11] Eremin A. S., Zubakhina T. S. Real-valued stability analysis of Runge–Kutta–Chebyshev methods for delay differential equations // Proceedings of ICNAAM-2020 / AIP Conference Proceedings, 2022, vol. 2425, art. no. 090006.
- [12] Zennaro M. P-stability properties of Runge–Kutta methods for delay differential equations // J. Numer. Math., 1986, vol. 49, pp. 305-318.
- [13] Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. –М.: Высшая школа, 1967. 565 с.
- [14] Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. –СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, 816 с.
- [15] Официальный сайт документации MATLAB по функции randn [Веб-ресурс]: URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/randn.html> (дата обращения: 10.04.2023). – Текст: электронный.

- [16] Abdulle A., Cirilli S. S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations // Society Industrial and Applied Mathematics, 2008, vol. 30, pp. 997-1014.
- [17] Eremin A. S. First order S-ROCK methods stability for stochastic differential equations with delays in the deterministic part [Preprint] // Accepted for publication in Proceedings of ICNAAM-2022 / AIP Conference Proceedings.
- [18] Tan J., Wang H. Mean-square stability of the Euler–Maruyama method for stochastic differential delay equations with jumps // International Journal of Computer Mathematics, 2011, vol. 88, pp. 421-429.
- [19] Abdulle A., Medovikov A. A. Second order Chebyshev methods based on orthogonal polynomials // J. Numer. Math., 2001, vol. 90, pp. 1-18.
- [20] Abdulle A. Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation // J. Sci. Comput., 2002, vol. 23, pp. 2041-2054.