

Санкт–Петербургский государственный университет

ДОРОФЕЕВ Никита Павлович

Выпускная квалификационная работа

*Исследование деформации стержневых систем и пластин
аналитическими и численными методами*

Уровень образования: специалитет

Направление 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»

Основная образовательная программа СМ.5089

«Фундаментальная механика»

Профиль «Математическое моделирование в механике»

Научный руководитель:

Наумова Н.В.

к.ф. - м.н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ

Рецензент:

Нечунаев А.Ф.

к.ф. - м.н., ведущий инженер ИПМАШ РАН

Санкт-Петербург

2023 г.

Saint Petersburg State University

DOROFEEV Nikita Pavlovich

Final qualifying work

Study of deformation of rod systems and plates by analytical and numerical methods

Level of education: specialist

Field of education 01.05.01 «Fundamental Mathematics and Mechanics»

Main educational program CM.5089 «Fundamental Mechanics»

Area of specialization «Mathematical Modeling in Mechanics»

Scientific supervisor:

Naumova N.V.

PhD, Associate professor of the department of
Theoretical and Applied Mechanics SPbU

Reviewer:

Nechunaev A.F.

PhD, IPMASH RAS engineer

Saint Petersburg

2023

Содержание

Введение	3
Глава 1. Фермы	4
1.1. Введение	4
1.2. Постановка	5
1.3. Аналитический расчет	5
1.4. Численные вычисления	7
1.5. Сравнение результатов	7
Глава 2. Колебание армированной пластины	9
2.1. Введение	9
2.2. Основные уравнения и предположения	9
2.3. Аналитическое решение	11
2.4. Численное решение	15
Глава 3. Деформация космического паруса	17
3.1. Введение	17
3.2. Моделирование	19
3.3. Результаты	21
Глава 4. Щит Уиппла	23
4.1. Введение	23
4.2. Моделирование задачи в программном комплексе ANSYS/LS- DYNA	24
4.3. Вывод	30
Заключение	34
Список литературы	34

Введение

Данная работа является результатом четырехлетнего труда и представляет собой объединение нескольких самостоятельных научных исследований - четырех курсовых работ, которые я сдавал в конце каждого периода обучения на математико-механическом факультете СПбГУ со второго по пятый курсы. По результатам каждой главы написана отдельная статья и сделаны ряд докладов на международных и всероссийских конференциях.

Основной целью работы являлось решение нескольких механических задач: сравнение численного и аналитического решений при расчете деформации фермы, колебаний неоднородной ребристой пластины, расчет деформации композитной пластины под действием поверхностного заряда с использованием обоих методов исследования, задача о столкновении гиперскоростных частиц о пластины щита Уиппла, располагаемых на космических аппаратах. Численное решение рассмотренных задач выполнялось методом конечных элементов в программном комплексе Ansys. Вычисление математических выражений, полученных в ходе аналитических решений – в проприетарной системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

В современной промышленности, а также в авиационно-космическом машиностроении для облегчения массы основной конструкции часто используются тонкостенные элементы. В связи с этим обстоятельством, сразу встает вопрос о деформациях и возможном повреждении таких элементов при неизбежных столкновениях с внешними объектами. Поэтому, несомненно, весьма актуальными являются задачи, посвященные исследованиям деформаций и механизму разрушения тонких пластин (оболочек). Важная роль в решении таких задач отдается численному моделированию [9] – [16], [19], [26]. Однако, для проверки достоверности полученных численных результатов, если это становится возможным, рекомендуется проводить аналитические, иногда приближенные, расчеты [18], [27]. В данной работе в ряде задач (Главы 1 и 2) удалось получить аналитическое решение и провести сравнение аналитических и численных результатов.

Большее внимание в работе уделяется исследованиям деформации пластин, так как пластины играют важную роль в современном мире, они при-

меняются во многих отраслях (строительстве, авиастроении, кораблестроении, ядерной, космической и многих других), часто являясь частью других конструкций: крыло самолета, обшивка здания, палуба и бортовые стенки корабля, стенки вагона. При этом все чаще отдается предпочтение неоднородным пластинам, которые обладают особыми свойствами и лучше подходят в определенных задачах. Широко используются композитные и армированные пластины, которые уже нельзя описывать однородной теорией. Неоднородные пластины – малоизученный объект в современной науке. Полная теория, которая бы описывала напряжения и деформации в таких телах не была разработана.

Непрерывающееся технологическое развитие ставит перед исследователями все более сложные задачи. Решение таких задач должно основываться на новых, еще не созданных, теориях и применять все достижения математического аппарата. Для прикладных задач наиболее часто прибегают к численному решению, как наиболее простому с точки зрения исследователя, но при этом, обладающему хорошей точностью. Одним из таких способов численного решения являются метод конечных элементов (FEM) и метод сглаженных частиц (SPH). Несмотря на высокую надежность таких решений, аналитические подходы все еще играют важную роль в решении любой задачи. Для решения прикладных задач лучше использовать оба метода исследования.

Глава 1. Фермы

1.1 Введение

Первая рассмотренная задача - это сравнение аналитического и численного результатов при расчете усилий и деформаций, возникающих при нагружении фермы. Ферма (фр. *ferme*, от лат. *firmus* – *прочный*) – стержневая система в строительной механике, остающаяся геометрически неизменяемой после замены ее жестких узлов шарнирными. Отличительной чертой такой конструкции является то, что в элементах фермы возникают только усилия растяжения-сжатия. Сама ферма состоит из прямолинейных стержней, при этом нагрузка прикладывается только в узлах, в которых соединяются

стержни. Эта глава призвана показать на наглядном примере обоснованность использования метода конечных элементов при решении самых разных задач. В ней были получены аналитические результаты для всех компонентов усилий и проведено повторное решение поставленной задачи с использованием программного комплекса ANSYS. Приведено сравнение аналитических и численных результатов.

1.2 Постановка

Рассматривалась ферменная конструкция (Рис. 1), состоящая из 7 одинаковых стержней и 5 шарниров. За P и Q обозначены внешние нагрузки, приложенные в узлах IV и V, в узле I – шарнирно –неподвижная опора, в узле V – подвижный шарнир. Требовалось рассчитать усилия растяжения-сжатия в каждом стержне и определить силы реакции связей в узлах I и V.

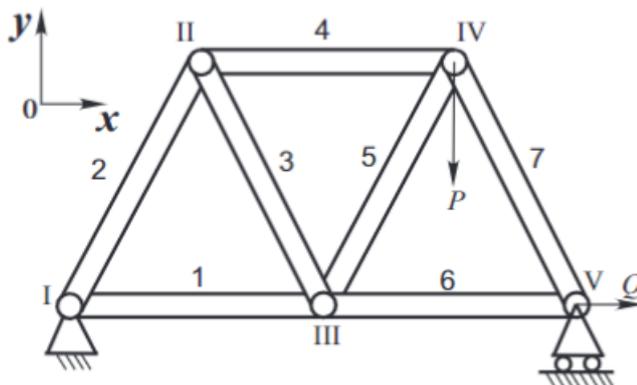


Рис. 1: Рассматриваемая ферменная конструкция.

1.3 Аналитический расчет

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, было необходимо убедиться, что она является статически разрешимой. При нашей постановке это действительно так:

- Количество неизвестных сил реакций связи не больше 3.
- У фермы отсутствуют «лишние» стержни.

- Стержни не испытывают изгибов.

Задача решалась методом вырезания узлов. Метод вырезания узлов заключается в последовательном рассмотрении условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. В нашем случае на каждый узел действовала плоская система сходящихся сил. В дальнейшем, вводятся проекции сил на оси Ox и Oy .

Рассмотрим уравнение равновесия в каждом узле, силы реакции связей в узлах I и V обозначим за X_A , Y_A и Y_B .

$$\begin{aligned}
 \text{узел I : } & X_A + F_1 + F_2 \cdot \cos 60^\circ = 0, \\
 & Y_A + F_2 \cdot \sin 60^\circ = 0, \\
 \text{узел II : } & F_4 + F_3 \cdot \cos 60^\circ - F_2 \cdot \cos 60^\circ = 0, \\
 & -F_2 \cdot \sin 60^\circ - F_3 \cdot \sin 60^\circ = 0, \\
 \text{узел III : } & -F_1 - F_3 \cdot \cos 60^\circ + F_5 \cdot \cos 60^\circ + F_6 = 0, \\
 & F_3 \cdot \sin 60^\circ + F_5 \cdot \sin 60^\circ = 0, \\
 \text{узел IV : } & -F_4 - F_5 \cdot \cos 60^\circ + F_7 \cdot \cos 60^\circ = 0, \\
 & -P - F_5 \cdot \sin 60^\circ - F_7 \cdot \sin 60^\circ = 0, \\
 \text{узел V : } & -F_6 - F_7 \cdot \cos 60^\circ + Q = 0, \\
 & Y_B + F_7 \cdot \sin 60^\circ = 0.
 \end{aligned}$$

Решая полученную систему, найдем соотношения для неизвестных сил

$$F_1 = Q + \frac{P}{4\sqrt{3}}, \quad F_2 = -\frac{P}{2\sqrt{3}}, \quad F_3 = -F_2 = -F_4 = -F_5, \quad (1)$$

$$F_6 = Q + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P, \quad F_7 = 3 \cdot F_5, \quad X_A = -Q, \quad Y_A = \frac{1}{4}P, \quad Y_B = \frac{3}{4}P. \quad (2)$$

Продольное растяжение (сжатие) стержня состоит в увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы F . Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать напряжением $\sigma = F/S$, где S — площадь поперечного сечения

стержня.

В рассматриваемой системе сечение круглое, поэтому $S = \pi \cdot r^2$. Относительное продольное растяжение обозначим $\varepsilon = l_0/l$, тогда с учетом закона Гука: $\varepsilon = \sigma/E$, где E – модуль Юнга, окончательная формула для определения изменения длины стержней примет вид:

$$\Delta l = \frac{l_0 \cdot F}{S \cdot E}. \quad (3)$$

Согласно формулам 1, 2 и 3 были получены следующие значения изменений длин стержней (в метрах):

$$\Delta l_1 = 118.04 \cdot 10^{-7} \text{ (растягивается) ;}$$

$$\Delta l_2 = 139.46 \cdot 10^{-7} \text{ (сжимается);}$$

$$\Delta l_3 = 139.46 \cdot 10^{-7} \text{ (растягивается) ;}$$

$$\Delta l_4 = 139.46 \cdot 10^{-7} \text{ (сжимается) ;}$$

$$\Delta l_5 = 139.46 \cdot 10^{-7} \text{ (сжимается) ;}$$

$$\Delta l_6 = 257.49 \cdot 10^{-7} \text{ (растягивается) ;}$$

$$\Delta l_7 = 418.37 \cdot 10^{-7} \text{ (сжимается).}$$

1.4 Численные вычисления

При численном решении предполагалось, что все стержни имеют одинаковую длину ($l = 10$ м), модуль упругости Юнга ($E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па) и площадь поперечного сечения ($S = 10^{-3}$ м²). Величины внешних нагрузок в узлах IV и V рассматриваемой фермы $P = 1000$ Н, $Q = 100$ Н. На рисунке 2 представлена деформация фермы под действием приложенных нагрузок, выведенная с многократным увеличением прогибов для улучшения визуализационной картины.

1.5 Сравнение результатов

Полученные аналитические результаты проверялись повторным решением данной задачи в программном комплексе ANSYS. Для более наглядного сравнения аналитического и численного решения результаты были объединены в Таблицу 1. В ней приведены численные значения сил, возникающих в

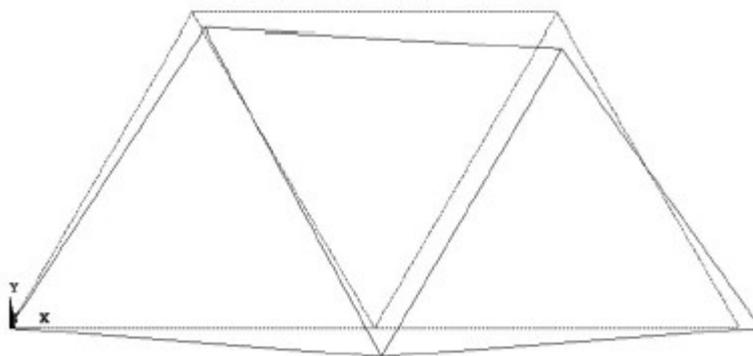


Рис. 2: Деформация фермы под действием приложенных нагрузок.

стержнях рассматриваемой фермы, а также значения сил реакции связей в узлах I и V. В узле I найдена суммарная реакция R_A .

Таблица 1: Сравнение аналитических и численных результатов.

Номер стержня	Усилие	Аналит. формулы (1) — (2), Н	Метод конечных элементов, ANSYS, Н
1	F_1	244.337	244.34
2	F_2	- 288.675	- 288.676
3	F_3	288.675	288.676
4	F_4	- 288.675	- 288.676
5	F_5	- 288.675	- 288.676
6	F_6	533.012	533.01
7	F_7	- 866.025	-866.025
узел I	R_A	269.26	269.26
узел V	Y_B	750	750

Сравнение численных и аналитических расчетов, полученных по формулам (1) — (2) показывает достаточно хорошее совпадение результатов. Максимальная относительная погрешность составляет 2%. Это позволяет убедиться, что метод конечных элементов хорошо подходит для расчета подобных стержневых систем, а значит можно ожидать хорошей точности решения и для других задач.

Глава 2. Колебание армированной пластины

2.1 Введение

Задачи на исследование колебаний и устойчивости армированных пластин чаще всего решаются в различных программных комплексах: либо методом конечных элементов [14], либо методом граничных элементов [20], [24], [7]. Ряд частных случаев анизотропных пластин и оболочек решен аналитически [8], [18], [27], [19]. В статье [17] было получено осредненное дифференциальное уравнение прогиба неоднородной пластины, которая была армирована параллельно расположенными волокнистыми полосками. В данной главе при исследовании колебаний неоднородной пластины с периодически изменяющимися параметрами (свойства материала, толщина) применялись оба метода решения. Были получены уравнение колебаний такой пластины и значения ее частот колебаний. Основанные на полученных аналитических формулах, алгоритмы и программы позволяют рассчитывать различные виды армированных пластин. Примеры таких пластин представлены на Рисунках (3)–(6).

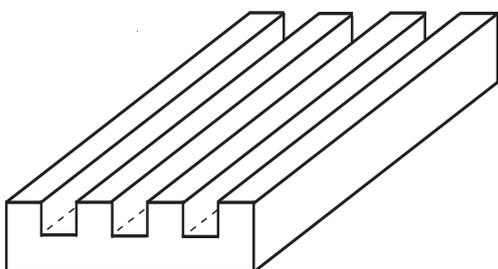


Рис. 3: Вариант армированной пластины.

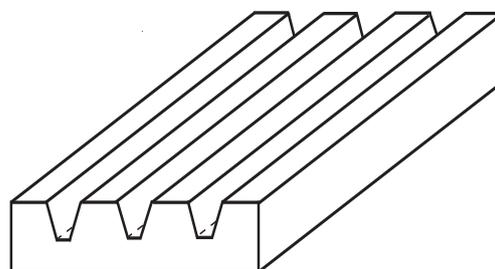


Рис. 4: Вариант армированной пластины.

2.2 Основные уравнения и предположения

Рассмотрим квадратную пластину длины L . Пластина имеет переменную толщину h , причем ее толщина мала по сравнению с ее размерами $\frac{h}{L} < 0.1$.

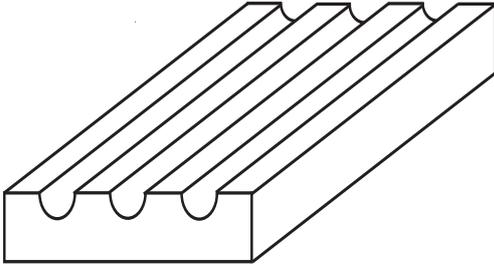


Рис. 5: Вариант армированной пластины.

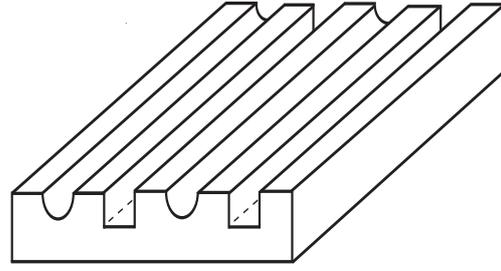


Рис. 6: Вариант армированной пластины.

Принимая за исходную срединную поверхность пластины, введем декартову систему координат $Oxyz$, как показано на Рис. 7.

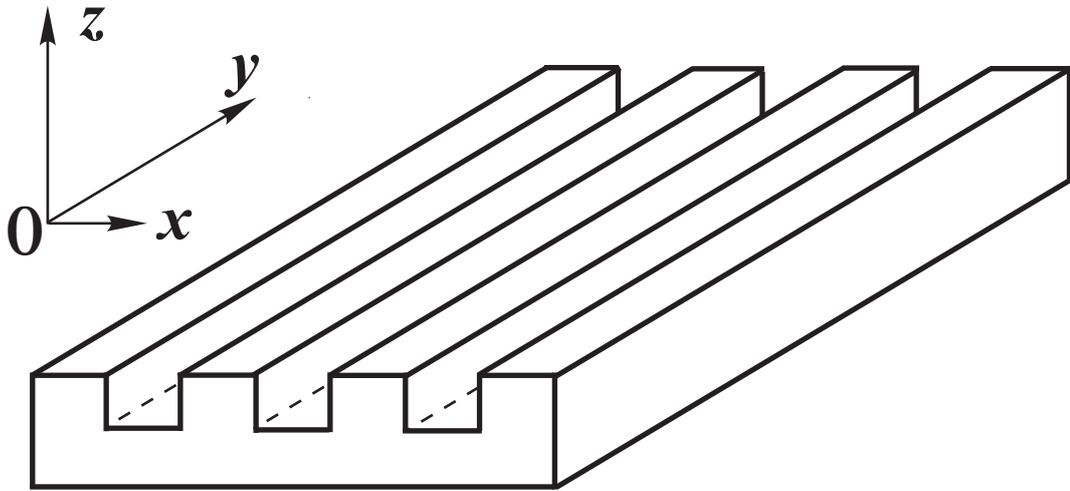


Рис. 7: Пластина переменной толщины.

Выпишем условия равновесия сил и моментов ([17]):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\lambda w, \quad \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y = 0, \quad \lambda = h\rho\omega^2. \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения для изгибающих M_x , M_y и крутящих M_{xy} моментов:

$$M_{xx} = aw_{xx} + bw_{yy}, \quad M_{yy} = bw_{xx} + aw_{yy}, \quad M_{xy} = (a - b)w_{xy}. \quad (6)$$

Величина a называется жесткостью единицы длины пластины

$$a = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $b = \mu \cdot a$.

2.3 Аналитическое решение

При решении применялся метод многих масштабов, который был описан в ([1], [2]). Он заключается в том, что наряду с переменной x вводится, так называемая, *быстро меняющаяся* переменная $\xi = x/\varepsilon$, где ε — ширина шага (полосы), и каждая из неизвестных функций, зависящая от переменных x, y , формально станет зависящей и от переменной ξ .

Параметр ε в случае, когда полосы имеют разную ширину, определяется по формуле $\varepsilon = \sum_{k=1}^n l_k$, где l_k - безразмерная ширина (см. Формулу (22)) k -ой полосы.

Асимптотическое разложение для функции, описывающей поперечный прогиб w , представим в виде ряда

$$w = w_0(x, y) + \sum_{k=1}^n (w_k, N_k) \cdot \varepsilon^k,$$

где скобки означают скалярное произведение векторов, а вектора w_k имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1 &= (w_{0x}, w_{0y}, 0, 0, 0), \\ w_2 &= (w_{0xx}, w_{0xy}, w_{0yy}, 0, 0), \end{aligned}$$

w_3 — вектор, составленный из третьих производных функции w_0 , не выписан в явном виде, т.к. далее не используется. Вектора N_k также имеют размерность

5. Учитывая правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \cdot f,$$

выпишем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
w_{xx} &= \varepsilon^{-1}(w_1, N_{1\xi,\xi}) + (w_2, I_1 + 2N_{1,\xi} + N_{2,\xi\xi}) + \\
&\quad + \varepsilon(w_3, N_1 + 2N_{2,\xi} + N_{3,\xi\xi}) + \varepsilon^2(w_4, N_2 + 2N_{3,\xi} + N_{4,\xi\xi}), \\
w_{yy} &= (w_2, I_3) + \varepsilon(w_3, AN_1) + \varepsilon^2(w_4, AN_2) + \dots, \\
w_{xy} &= (w_2, I_2) + \varepsilon(w_3, B(N_{2\xi} + N_1)) + \varepsilon^2(w_4, B(N_2 + N_{3,\xi})) + \dots.
\end{aligned}$$

Здесь A, B — матрицы из 0 и 1, I_k — единичный вектор размерности 5, k - я координата которого равна единице, а остальные координаты нули.

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= a\varepsilon^{-1} \cdot (w_1, N_{1,\xi\xi}) + \varepsilon^0 \cdot (w_2, a(I_1 + 2N_{1,\xi} + N_{2,\xi\xi}) + bI_3) + \\
&\quad + \varepsilon(w_3, a(N_1 + 2N_{2,\xi} + N_{3,\xi\xi}) + b(w_3, AN_1)) + \\
&\quad + \varepsilon^2(w_4, a(N_2 + 2N_{3,\xi} + N_{4,\xi\xi}) + bAN_2).
\end{aligned}$$

Разложение Q_x и Q_y по ε :

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\varepsilon^{-2} \cdot \frac{\partial M_{0xx}}{\partial \xi} - \varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\partial M_{1xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{0xx}}{\partial x} \right) - \\
&\quad + \varepsilon^0 \cdot \left(\frac{\partial M_{2xx}}{\xi} + \frac{\partial M_{1xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{0xy}}{\partial y} \right), \\
Q_y &= -\varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\partial M_{0xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{0yy}}{\partial y} \right) - \varepsilon^0 \cdot \left(\frac{\partial M_{1xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{1yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{0xy}}{\partial x} \right) - \\
&\quad - \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial M_{2xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{2yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Подставляем все вышеперечисленные выражения в уравнения (4),(5),(6), в результате получим:

$$\text{при } \varepsilon^{-3} : \quad \frac{\partial Q_{0x}}{\partial \xi} = 0, \tag{7}$$

$$\text{при } \varepsilon^{-2} : \quad \frac{\partial Q_{1x}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{0x}}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$\text{при } \varepsilon^{-1} : \quad \frac{\partial Q_{2x}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{0y}}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при } \varepsilon^0 : \quad \frac{\partial Q_{3x}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{1y}}{\partial y} + \dots = 0. \tag{9}$$

Предполагается, что N_k – периодические функции, поэтому осреднение уравнения (9) дает:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial Q_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{1y}}{\partial y} + \dots \right) d\xi = 0,$$

а если учесть, что Q_{2x} и Q_{1y} , выраженные через моменты, содержат производные по ξ , то получаем следующее уравнение:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 M_{1xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{1yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{0xy}}{\partial x \partial y} + \dots - q \right) d\xi = 0. \quad (10)$$

Нетрудно доказать, что для того, чтобы удовлетворить уравнению (7), нужно взять $N_1 = 0$, тогда уравнение (8) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 M_{1xx}}{\partial \xi^2} = 0.$$

Обозначим выражение

$$a(I_1 + N_{2\xi\xi}) + bI_3 = C, \quad \text{или с учетом того, что} \quad \int_0^1 N_{2\xi\xi} d\xi = 0,$$

окончательно получим

$$C = \frac{I_3 \int_0^1 \mu d\xi + I_1 \cdot (l_1 + l_2)}{\int_0^1 a^{-1} d\xi}.$$

Здесь l_1 и l_2 — ширина первой и второй полосы пластины, соответственно.

Тогда

$$M_{1xx} = (w_2, a(I_1 + N_{2,\xi\xi}) + bI_3) = (C, w_2), \quad (11)$$

$$M_{1yy} = (w_2, b(I_1 + N_{2,\xi\xi}) + aI_3) = (w_2, b(C - bI_3)/a + aI_3),$$

$$M_{0xy} = (w_2, I_2). \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (10) с учетом выражений (11)–(12) примет вид:

$$Kw_{0xxxx} + Lw_{0xxyy} + Mw_{0yyyy} = -\lambda_0 w. \quad (13)$$

Уравнение (13) является осредненным дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка относительно прогиба пластины w . Если постоянный вектор C записать в виде:

$$C = C_1 \cdot I_1 + C_3 \cdot I_3,$$

то коэффициенты осредненного уравнения колебаний (13) примут следующий вид:

$$K = \int_0^1 C_1 d\xi, \quad L = \int_0^1 \left(\frac{b}{a} \cdot C_1 + C_3 + 2 \cdot (a - b) \right) d\xi, \quad (14)$$

$$M = \int_0^1 \left(\frac{b}{a} \cdot C_3 - \frac{b^2}{a} + a \right) d\xi, \quad \lambda_0 = \int_0^1 \lambda d\xi. \quad (15)$$

Уравнение (13) с учетом (14)–(15) решалось методом Бубнова-Галеркина, при этом нулевое приближение в случае жесткой заделки имело вид

$$w_0(x, y) = A \cdot x^2(x - 1)^2 \cdot y^2(y - 1)^2, \quad (16)$$

а в случае шарнирного опирания краев пластины

$$w_0(x, y) = A \cdot \sin(x \cdot \pi) \sin(y \cdot \pi). \quad (17)$$

Отметим, что формулы (16)–(17) выписаны для безразмерных переменных x и y . Связь безразмерных координат x и y с размерными \hat{x} и \hat{y} осуществляется по формулам $x = \hat{x}/L$, $y = \hat{y}/L$.

Значение для первой частоты колебаний получается умножением уравнения (13) на первую форму колебаний с последующим интегрированием по области пластины. Окончательно, формула для вычисления частотного параметра λ примет вид:

– для жесткой заделки краев пластины:

$$\lambda = (504 \cdot K \cdot b^4 + 144 \cdot L \cdot a^2 \cdot b^2 + 504 \cdot M \cdot a^4) / (a^4 \cdot b^4), \quad (18)$$

– для шарнирного закрепления:

$$\lambda = \pi^4 (K \cdot b^4 + L \cdot a^2 \cdot b^2 + M \cdot a^4) / (a^4 \cdot b^4). \quad (19)$$

Для перевода безразмерного частотного параметра λ в стандартные единицы измерения частот периодических процессов (Герцы) используется формула:

$$\omega = (\lambda / \rho_{aver})^{0.5} / (2 \cdot \pi). \quad (20)$$

В выражении (20) введено обозначение ρ_{aver} , которое представляет собой среднюю плотность на единицу площади. Связь осредненной плотности ρ_{aver} с объемными (кг/м³) плотностями полос ρ_1 и ρ_2 приведена в формуле (21), получающейся при интегрировании инерционного члена по ξ .

$$\rho_{aver} = \rho_1 \cdot h_1 \cdot l_1 + \rho_2 \cdot h_2 \cdot l_2. \quad (21)$$

Безразмерные ширины полос l_1 и l_2 связаны с размерными ширинами \hat{l}_1 и \hat{l}_2 соотношением (22) так, чтобы $l_1 + l_2 = 1$.

$$l_1 = \frac{\hat{l}_1}{(\hat{l}_1 + \hat{l}_2)}, \quad l_2 = \frac{\hat{l}_2}{(\hat{l}_1 + \hat{l}_2)}. \quad (22)$$

2.4 Численное решение

Для проверки достоверности полученных формул и возможности их дальнейшего применения при расчете колебаний армированных пластин, были численно решены следующие задачи. Исследовались квадратные пластины имеющие форму, представленную на Рисунке 3. Они состояли из нескольких полос (см. первый столбец Таблицы 2), каждая из которых, в свою очередь, была составлена из двух мини-полосок с различными свойствами материала. Таким образом, целая пластина представляла собой последовательность полос, которые периодически повторяются.

В эксперименте исследовалась квадратная пластина со стороной 1 метр. В программном комплексе ANSYS была создана математическая модель

неоднородной по толщине пластины. Эта модель разбивалась на 1764 (42×42) оболочечных элементов shell63. Толщина первой мини-полоски - 0.01 м, а второй - 0.005 м, общее количество составных полос было равно 7.

В пятом столбце Таблицы 2 представлены значения частот колебаний пластины, полученные по асимптотическим формулам (18)–(19). Процедура подстановки выражений (11)–(12) в (13) и решение этого уравнения методом Бубнова-Галеркина осуществлялись в пакете прикладных программ Mathematica 8. В шестом столбце представлены значения частот колебаний пластины, полученные численным методом конечных элементов в пакете ANSYS.

Таблица 2: Частоты колебаний армированной пластины.

Граничные условия	Материал	Ширины мини-полос, м	Асимптотические формулы (18)–(19), Гц	Метод конечных элементов ANSYS, Гц
ЖЗ	Сталь	$l_1 = 2/42, l_2 = 4/42$	57.265	56.830
ШР	Сталь	$l_1 = 2/42, l_2 = 4/42$	31.864	32.020
ЖЗ	Сталь	$l_1 = 3/42, l_2 = 3/42$	62.356	61.653
ШР	Сталь	$l_1 = 3/42, l_2 = 3/42$	34.721	34.804
ЖЗ	Титан	$l_1 = 2/42, l_2 = 4/42$	53.659	53.236
ШР	Титан	$l_1 = 2/42, l_2 = 4/42$	29.834	29.977
ЖЗ	Титан	$l_1 = 3/42, l_2 = 3/42$	58.424	57.746
ШР	Титан	$l_1 = 3/42, l_2 = 3/42$	32.503	32.577
ЖЗ	Титан	$l_1 = 4/42, l_2 = 2/42$	62.821	62.083
ШР	Титан	$l_1 = 4/42, l_2 = 2/42$	34.985	34.960

На основе данных, представленных в таблице 2 можно сделать вывод, что относительная погрешность расчетов не превышает 3%. Это показывает достоверность приведенных формул.

Глава 3. Деформация космического паруса

3.1 Введение

Большинство космических аппаратов используют реактивную тягу для перемещения, однако в настоящее время широко обсуждаются альтернативные способы реализации космических путешествий. Одним из таких способов является солнечный парус, представленный Фридрихом Артуровичем Цандлером. В литературе (например, [22], [13]) активно обсуждается применение таких идей. Среди них можно выделить:

- Создание космических аппаратов, оснащенных обширными космическими парусами – тончайшими полимерными пленками.
- Замена энергии реактивных двигателей космического аппарата бесплатной, экологически чистой механической энергией светового давления солнечных лучей.
- Использование солнечного паруса, движущегося по околоземной орбите, как космического осветителя. В этих исследованиях предполагается, что космический парус будет отражать солнечный свет с помощью зеркал – прожекторов, которые будут ночью освещать большие города и заполярные регионы.
- Применение космического паруса для транспортировки радиоактивных отходов с Земли и «захоронения» их в Солнечной короне.
- Исследование изменений свойств пленочных парусов (степень эрозии поверхности, изменение коэффициентов отражения, распределения поверхностного заряда) при их старении и их влияние на динамику полета.

Уже решено множество задач, касающихся траектории полета такого космического аппарата и управления им при различных условиях, в частности исследовано влияние тени Земли. Однако сравнительно мало изучены вопросы влияния различных факторов в открытом космосе на работоспособность космических парусов [23].

Тела, находящиеся в космической плазме приобретают электрический заряд, который зависит от величины потока солнечного излучения, плотности и температуры плазмы и электрофизических характеристик тела, то есть от своего положения и ориентации в процессе движения. В работах [9] [29] [16] был рассмотрен такой процесс зарядки, однако в них не учитывалась частичная проницаемость пленки для заряженных частиц [12]. В работе [30] рассматривалось влияние такого заряда на космический парус при перелетах Земля-Марс и Земля-Юпитер. Было показано, что при сохранении поверхностью паруса своей формы, заряд практически не влияет на движение. Однако, заряженный парус может деформироваться, что приведет к изменению эффективной площади его поверхности. В данной главе приводятся оценки такой деформации.

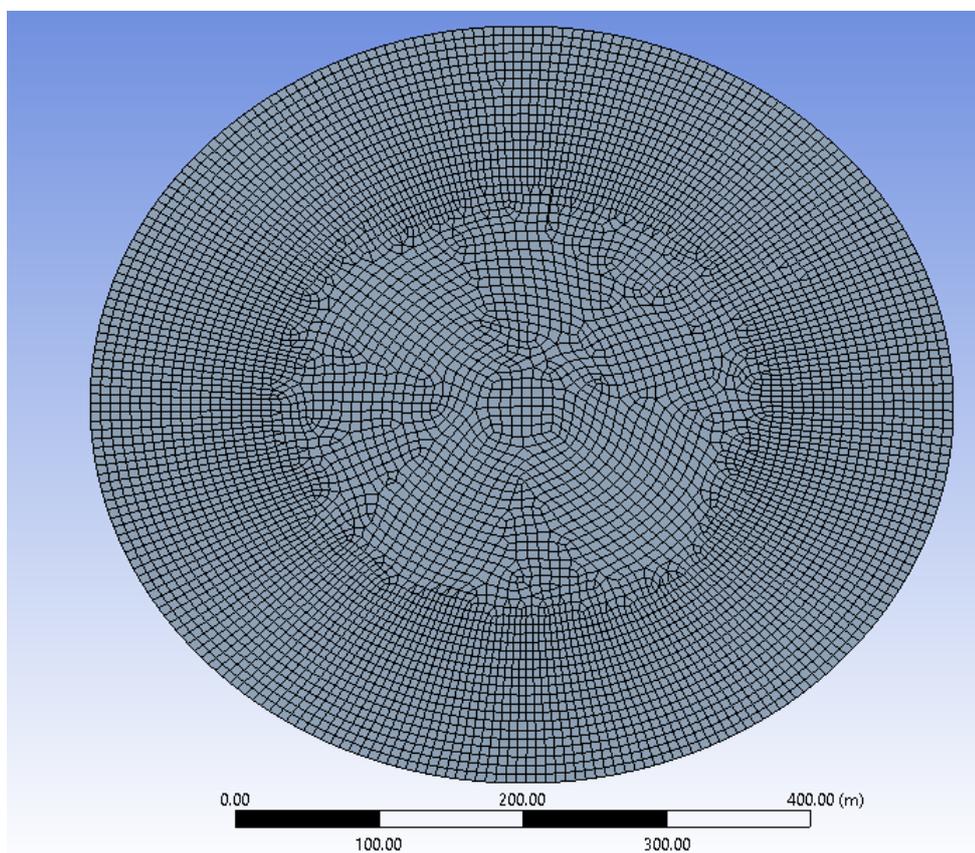


Рис. 8: Разбиение оболочки на элементы.

3.2 Моделирование

В качестве модели космического паруса были рассмотрены пластины различных радиусов - 50, 150, 300 и 500 метров. Пластины состояли из композитного материала, а именно двух слоев алюминия и слоя майлара – пленки на основе синтетического полиэфирного волокна. Толщина слоев была различной, для алюминия она была выбрана 20 микрон, для майлара – 200, итоговая толщина пластины равнялась 240 микрон. Плотность заряда, равномерно распределенного по нижней и верхней поверхности пластины, обозначим за σ_1 и σ_2 . Наборы распределения поверхностных плотностей зарядов рассматривались для двух случаев: вблизи Солнца и вблизи Земли, для удобства они оформлены в Таблицу 3.

Таблица 3: Плотности распределения поверхностного заряда (в Кл/м²)

	На верхней поверхности	На нижней поверхности
Вблизи Солнца	$\sigma_1 = 1.1507 * 10^{-9}$	$\sigma_2 = 2.7941 * 10^{-12}$
Вблизи Земли	$\sigma_1 = 1.719 * 10^{-10}$	$\sigma_2 = 3.41278 * 10^{-13}$

Было сделано предположение, что поскольку рассматриваемые пластины круглые и задача симметричная, то они будут деформироваться как части сферы. В таком случае справедлива формула для поверхностной силы [34]:

$$T = 2\pi \cdot k_0 \cdot \sigma_i^2 \cdot R, \quad i = 1, 2,$$

где постоянная $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м}^2/\text{Кл}^2 \cdot \text{Н}$, а R — радиус кривизны поверхности (в метрах).

Расчеты производились в двух программах комплекса ANSYS с различным подходом к моделированию граничных условий. Первый вариант был выполнен в ANSYS Mechanical APDL, второй в ANSYS Workbench. В обоих случаях пластина аппроксимировалась оболочечным элементом и разбивалась, в среднем, на 7000 элементов (Рис. 8). Процесс вычисления состоял из нескольких этапов: задание начального радиуса кривизны пластины, вычисление по нему поверхностной нагрузки, расчет деформации пластины

и вычисление радиуса кривизны деформированного паруса. Итерационный процесс повторялся до тех пор, пока конечный радиус кривизны не станет равным начальному.

При компьютерном моделировании в программе APDL был выбран трехслойный восьми узловый элемент SHELL91. Для создания нужных граничных условий, то есть свободных краев пластины вводилось дополнительное кольцо малой жесткости (Рис. 9). Внешний радиус кольца выбирался в десятки раз больше внутреннего, чтобы исключить какое-либо влияние на края рассматриваемой пластины. Такой подход позволил с высокой точностью создать эффект невесомости.

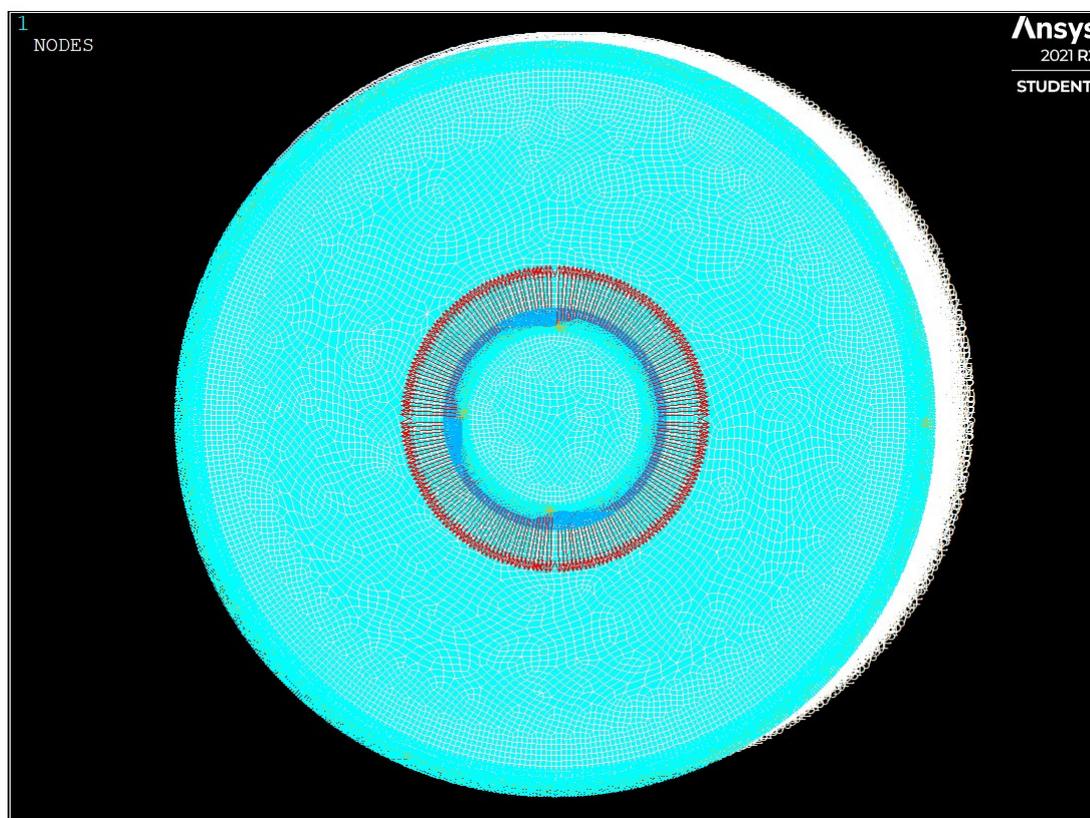


Рис. 9: Моделирование невесомости в APDL.

Расчеты в Workbench были основаны на использовании широких возможностей данной программы. Во первых, в подпрограмме ACP(Pre) был специально создан необходимый композитный материал. Во вторых Workbench позволяет рассчитывать незакрепленные объекты при выборе специальной настройки Weak Spring. В этом случае ANSYS сам закрепляет необходимые

элементы при помощи пружины заданной жесткости. Была задана минимальная возможная жесткость пружины равная 10^{-9} Н/м.

3.3 Результаты

Результаты исследований приведены в Табл. 4 и 5. При увеличении радиуса рассматриваемой пластины увеличивается радиус кривизны и максимальные прогибы, результирующий радиус кривизны вблизи Солнца оказался величиной порядка 50000 м. Полученные значения указывают на то, что заряд, находящийся на поверхности космического парусе, оказывает на него незначительное воздействие, т.е. деформации поверхности незначительные. Отметим, что расчеты, основанные на втором способе моделирования невесомости, показывают намного меньший прогиб, чем расчеты через введение дополнительного кольца малой жесткости. Этому можно дать несколько объяснений, во-первых, при закреплении с помощью мягких пружин мы не можем влиять на то, какие именно элементы будут закреплены. Во-вторых, минимальная жесткость пружин ограничена, что достаточно существенно для нашей задачи. С моей точки зрения, дополнительное кольцо обеспечивает более правдоподобные прогибы пластины.

Таблица 4: Результаты расчетов при моделировании пластины методом APDL

Радиус пластины, м	Максимальный прогиб, м	
	в окрестности Солнца	в окрестности Земли
50	0.012	0.002
150	0.11	0.016
300	0.44	0.065
500	1.21	0.18

Таблица 5: Результаты расчетов при моделировании пластины методом Workbench

Радиус пластины, м	Максимальный прогиб, м	
	в окрестности Солнца	в окрестности Земли
50	0.0033	0.0005
150	0.0029	0.00036
300	0.001	0.00015
500	0.0008	0.00007

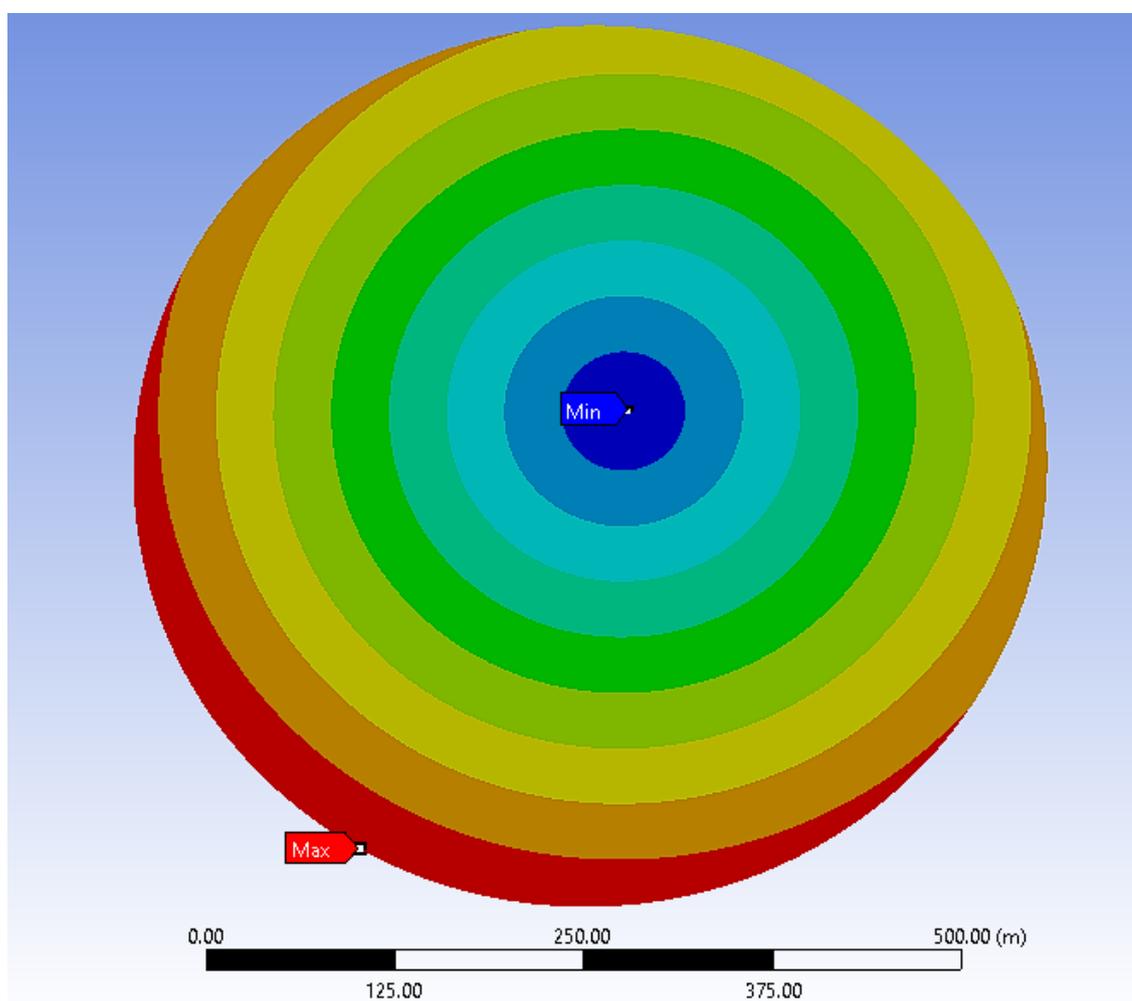


Рис. 10: Деформация пластины радиуса 300м.

Глава 4. Щит Уиппла

4.1 Введение

Космический мусор стал серьезной проблемой для современной деятельности человека в космосе, и по мере дальнейшего освоения космоса количество этого мусора будет только нарастать. В 2021 году было установлено, что суммарно на орбитах Земли находится 130 миллионов объектов, размера от 0.1 до 1 см. [31]. При столкновении частиц даже такого размера с космическим аппаратом на скорости превышающей 4-7 км в секунду может произойти разрушение обшивки, а, как следствие, разгерметизация, что приведёт к повреждениям дорогостоящего оборудования. Источниками такого вида мусора могут быть: отработавшие ступени ракет, ракетное топливо, осколки спутников. Для защиты космических аппаратов от подобных воздействий применяется щит Уиппла [28]. Щит Уиппла представляет собой один или несколько тонких экранов, расположенных на некотором удалении от основной стенки космического аппарата (КА). Такая конструкция позволяет, если не разрушить, то, по крайней мере, рассеять опасные космические объекты от корпуса КА.

Методы компьютерного моделирования соударения маленьких частиц на сверхскоростях с таким щитом разнообразны и включают в себя SPH метод [10], [5], [4], метод дискретных элементов [3], [21] и метод конечных элементов [6]. SPH метод (метод гидродинамики сглаженных частиц) – бессеточный лагранжевый метод, он успешно применяется для получения смещения и деформации не только для низкоскоростных (100-1000 м/с), но и как показано в [11], [26], для высокоскоростных воздействий. В [15] было показано, что на скоростях 240 – 750 м/с разрушение алюминия имеет локально-кинетическую природу.

Многочисленно смоделирован высокоскоростной удар (4190 м/с) малой алюминиевой частицы (119.7 мг) параболической формы о первый экран щита Уиппла и произведена оценка опасности такого воздействия для последующих экранов и самого космического аппарата. Моделирование производилось методом гидродинамики сглаженных частиц. Данный метод хорошо показал

себя в других подобных работах. В частности, в [25] рассматривались воздействия на защитные экраны частиц другой геометрии. Расчёты производились в ANSYS/LS-DYNA.

4.2 Моделирование задачи в программном комплексе ANSYS/LS-DYNA

Для корректного расчета удара, сначала необходимо было выполнить проверку параметров моделирования. Для этого было выполнено тестовое моделирование эксперимента, поставленного Fa-wei Ke и соавторами [11]. Рассматривался случай соударения алюминиевой (Al-1100) сферы радиуса 5.01 мм о тонкий алюминиевый (Al-6061-T6) экран, толщины 1 мм, со скоростью 4190 м/с. При этом экран закреплялся фиксирующим кольцом. Наилучшее совпадение с экспериментом удалось достичь, используя следующие параметры: для моделирования сферы использовались 33000 частиц, в качестве модели материала применялась модель Джонсона-Кука, уравнение состояние задавалось в форме Ми-Грюнайзена. Необходимые коэффициенты подбирались, основываясь на различных работах других авторов. На Рисунках 12 и 13 представлены облака осколков в моменты времени 16 и 24 микросекунды. Результаты хорошо соотносятся с экспериментальными данными, отношения длин облаков осколков к их максимальному диаметру при моделировании получились 1.58 для 16 микросекунд и 1.58 для 24 мкс. Из тенеграм, полученных в ходе эксперимента эти отношения были 1.53 и 1.59 соответственно. Погрешность тестового моделирования относительно эксперимента не превышает 3.5%.

После того, как была подтверждена корректность начальных параметров, моделировался высокоскоростной удар твёрдого параболоида вращения с начальной скоростью $V = 4190$ м/с о тонкий экран, толщиной 1 мм из Al-6061-T6. Размеры этого параболоида и 3D вид установки (без фиксирующего кольца) перед ударом представлены на Рисунке 15. Его размеры были выбраны таким образом, чтобы количество частиц и, соответственно, масса были сравнимы с показателями сферы, рассмотренной прежде. При расчёте параболоида была введена 41000 частиц, итоговая масса тела была 119.7 мг,

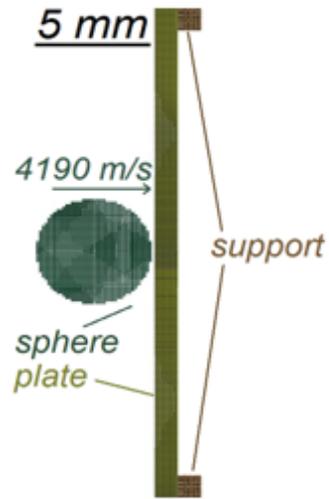


Рис. 11: Постановка задачи при проверке параметров моделирования.

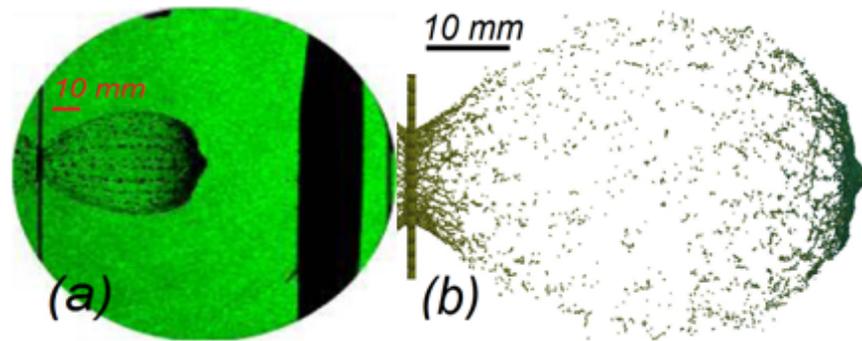


Рис. 12: Облака осколков в момент времени 16 мкс после удара; а) эксперимент Fa-wei Ке и соавторов; б) численное моделирование.

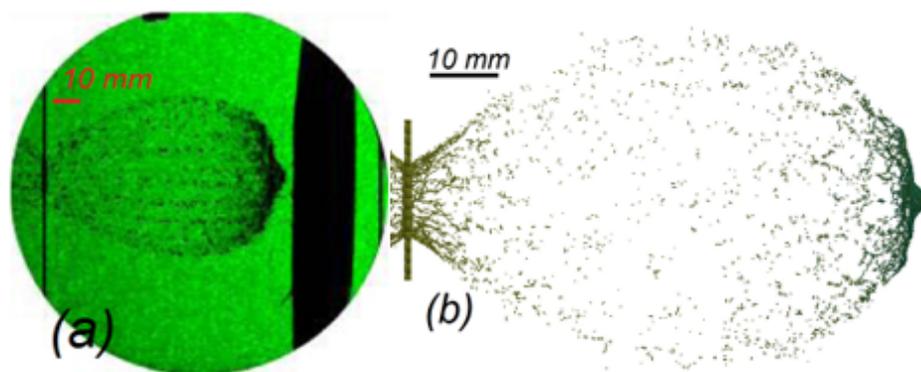


Рис. 13: Облака осколков в момент времени 24 мкс после удара; а) эксперимент Fa-wei Ке и соавторов; б) численное моделирование.

для сферы было использовано 33000 частиц, а ее вес был 183 мг.

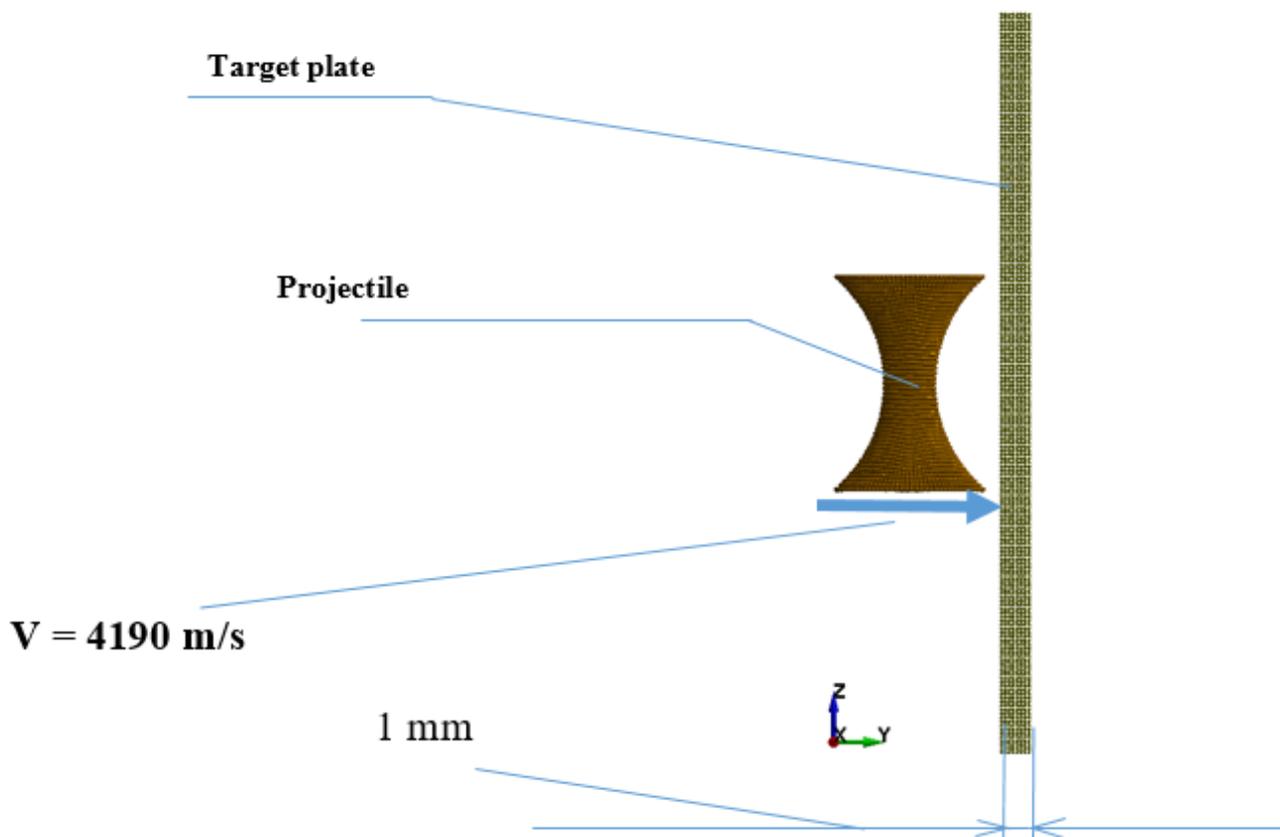


Рис. 14: Постановка задачи при расчете удара параболоида вращения.

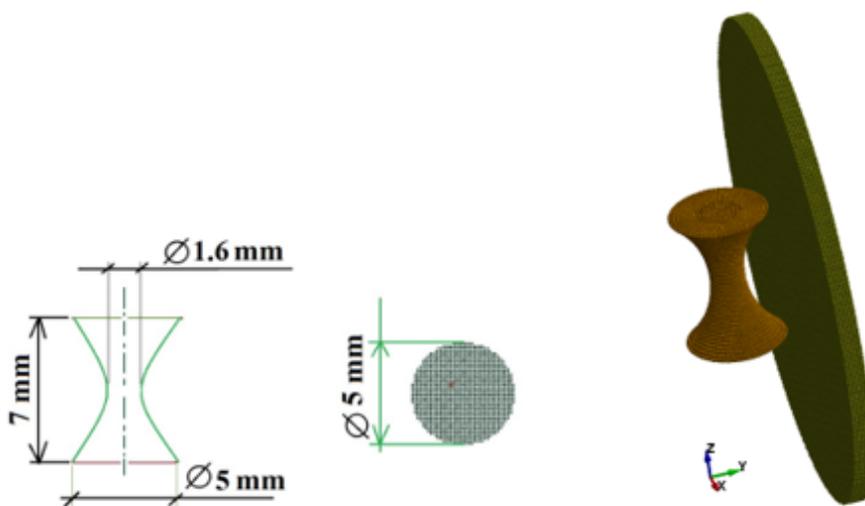


Рис. 15: Сравнение параболоида и сферы.

На Рисунке 16 представлены формы облаков осколков в моменты времени $t = 0$, $t = 1.7$ мкс, $t = 3.4$ мкс, и $t = 5.5$ мкс. В момент 5.5 мкс скорость овальных облаков сравнялась со скоростью центральной «пикообразной» части, которая расположена на оси удара. Это приводит к более быстрой эволюции овальных частей, по сравнению с центральной. Вычислим массу «пикообразной» части облака осколков. На Рисунке 17 выделены частицы из которых состоит центральная часть, было насчитано 34188 частиц, тогда масса пики равна (в миллиграммах):

$$\frac{188}{33000} \cdot 34188 = 190.$$

Диаграмма 18 даёт представление о распределении частиц пики по скоростям от 400 м/с до 3300 м/с. Отметим, что диаграмма указывает на то, что некоторые частицы центральной части облака первоначально были частью ударника. После 6 мкс, заметно, что движение частиц стабилизируется, колебания скоростей уменьшаются и, в конечном счете, сходят на нет - кривые скоростей частиц практически параллельны оси x .

На основании полученных результатов численных расчетов, можно утверждать, что нормальный удар параболоида вращения о пластину опасен не только для первого экрана щита Уиппла, но и для второго (Рис. 17). Основная угроза исходит от пикообразной части облака, так как полуоблака содержат в несколько раз меньше частиц (Рис. 19) и столкновение со вторым экраном происходит на некоторой области, а не точно.

Для дальнейшего изучения удара параболоида вращения о тонкий экран разобьём облако осколков на 3 скоростные зоны: зона медленной скорости, средней и высокой. Первая и вторая зоны обе находятся вблизи оси удара (Рис. 20, 22).

Областью с низкой скоростью считалась область, скорость частиц в которой находится в диапазоне от 0 до 500-600 м/с. Частицы в такой области рассредоточены и поэтому не представляют угрозы целостности щита Уиппла. График 23 показывает, что скорости частиц в области средней скорости не превышают 2 км/с. Согласно [33], такие частицы также не представляют серьезной угрозы ввиду малой массы частиц. В этой работе утверждается, что

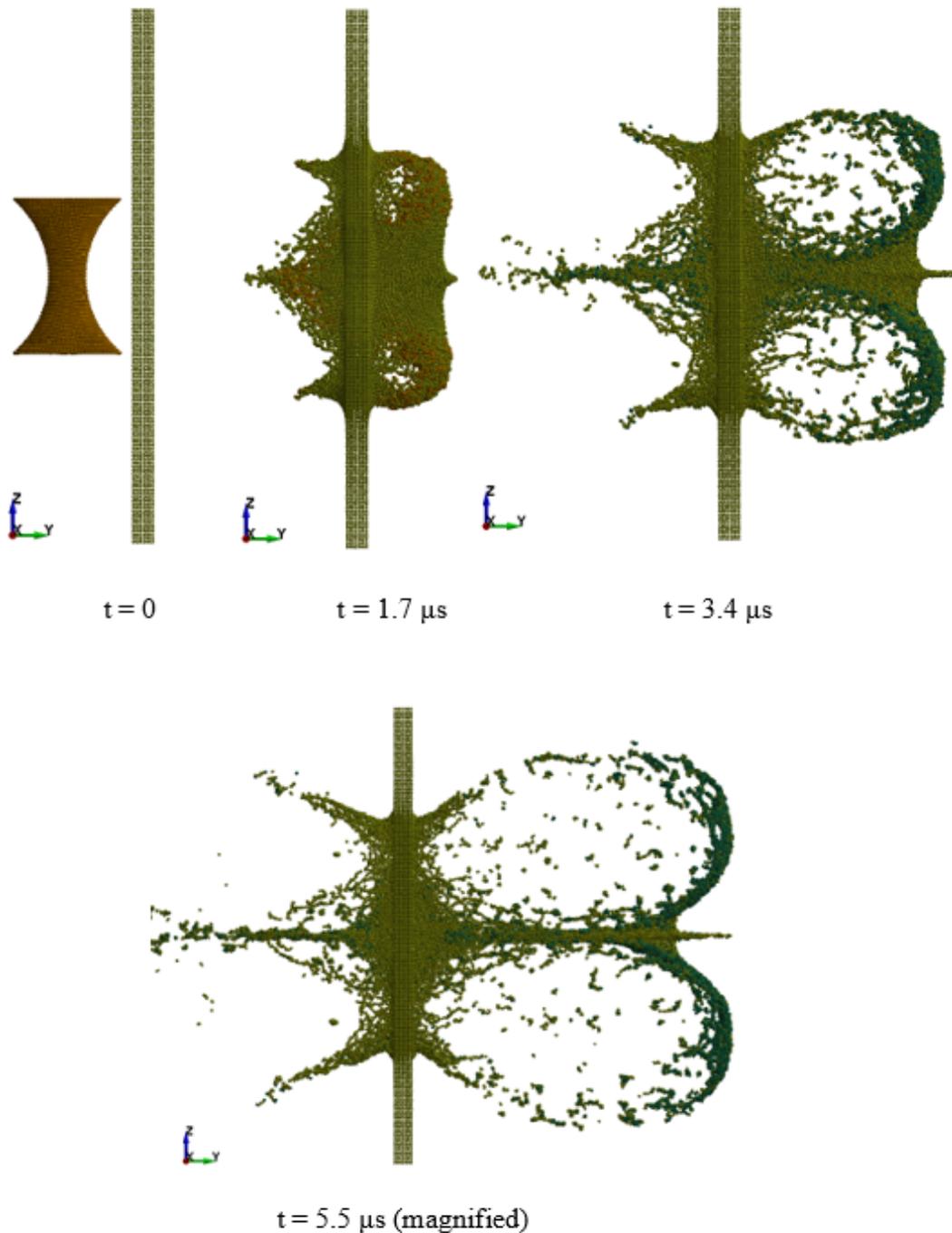


Рис. 16: Эволюция облака осколков после удара параболоида вращения о тонкий алюминиевый экран.

существует предельная скорость соударения ударника о барьер, при превышении снарядом этой скорости, деформация сопровождается текучестью.

Зона высокой скорости содержит частицы со скоростями 1700-3300 м/с, и расположена вблизи оси удара, она является самой удаленной от барьера

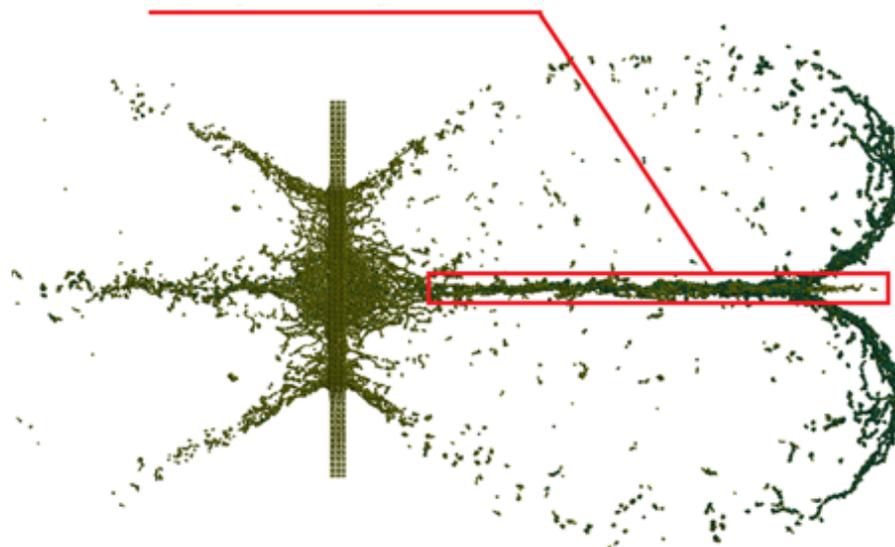


Рис. 17: Подсчет частиц в выделенной области в момент времени 10.6 мкс.

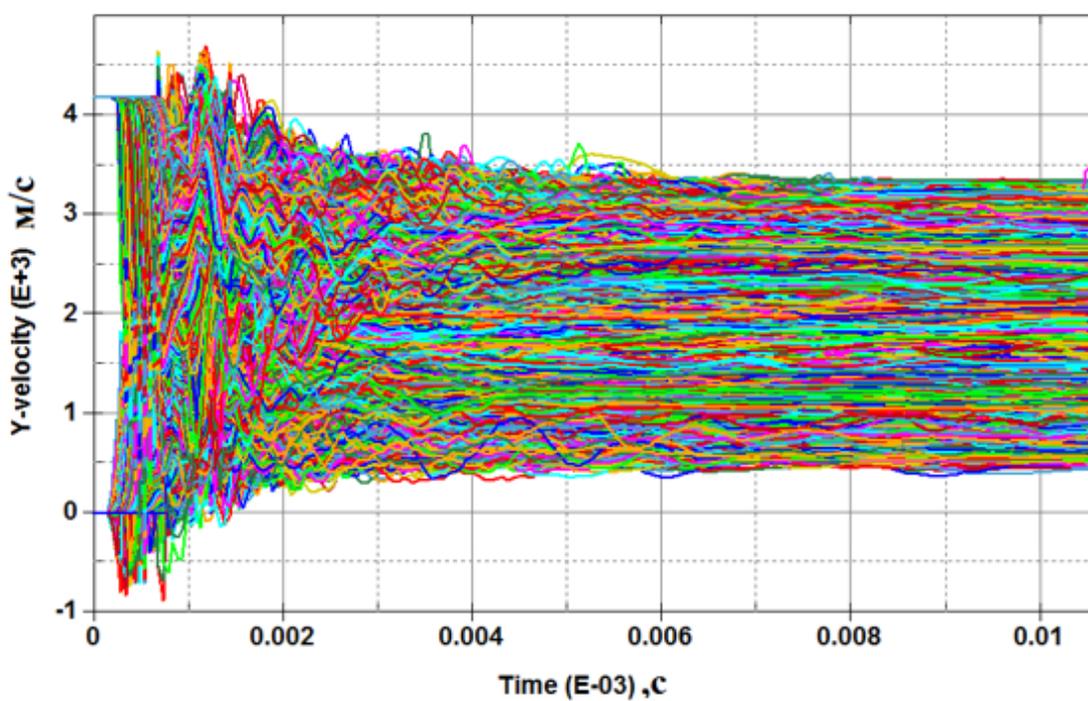


Рис. 18: Групповая диаграмма скоростей частиц внутри «пики».

(Рис. 24). Высота прямоугольника, содержащего эту область была вычислена и оказалось равно порядка 1.5 мм.

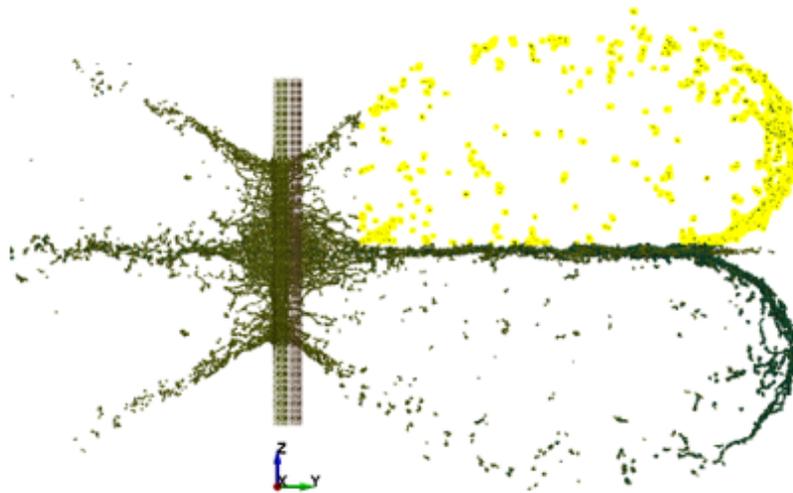


Рис. 19: Частицы верхнего полуоблака.

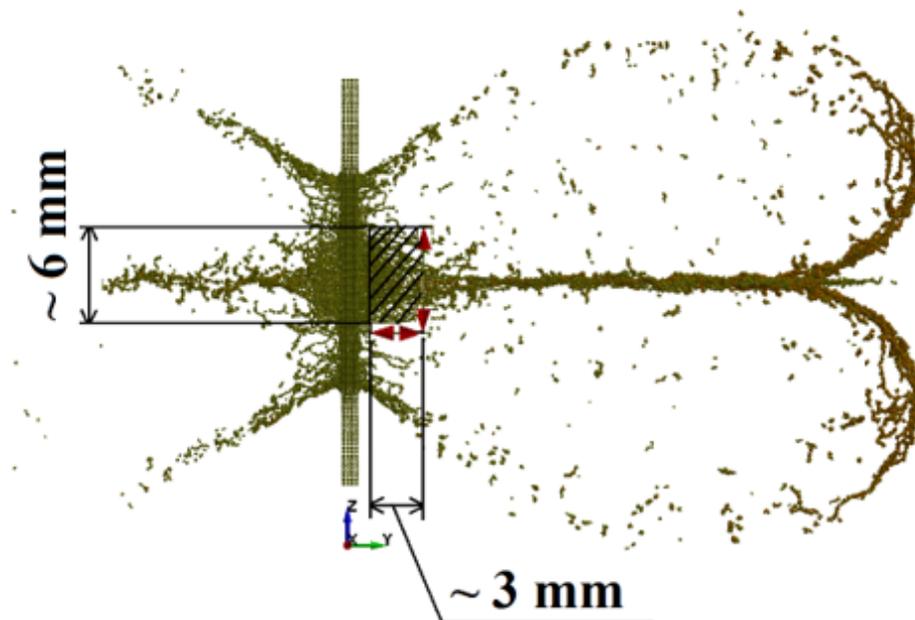


Рис. 20: Частицы из зоны медленной скорости при 10 мкс после удара.

4.3 Вывод

В данной главе был исследован прямой высокоскоростной удар параболоида вращения о тонкий алюминиевый экран. Такой удар, безусловно, опасен для последующего экрана щита, а также, при малом количестве экранов, и для самого космического аппарата. Основную угрозу несет концентрация массы осколков вдоль оси удара. В малом объеме сосредоточена масса, сопоставимая

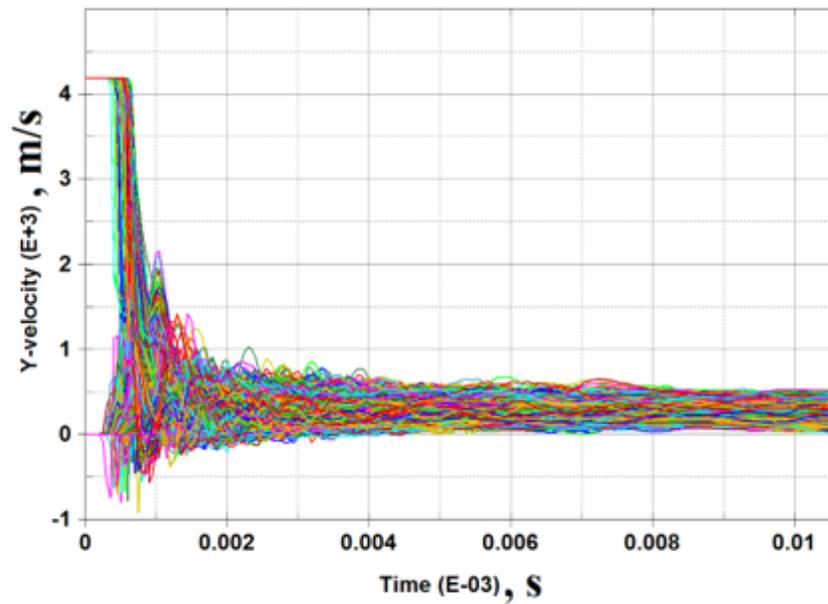


Рис. 21: Скоростная диаграмма медленной зоны облака осколков.

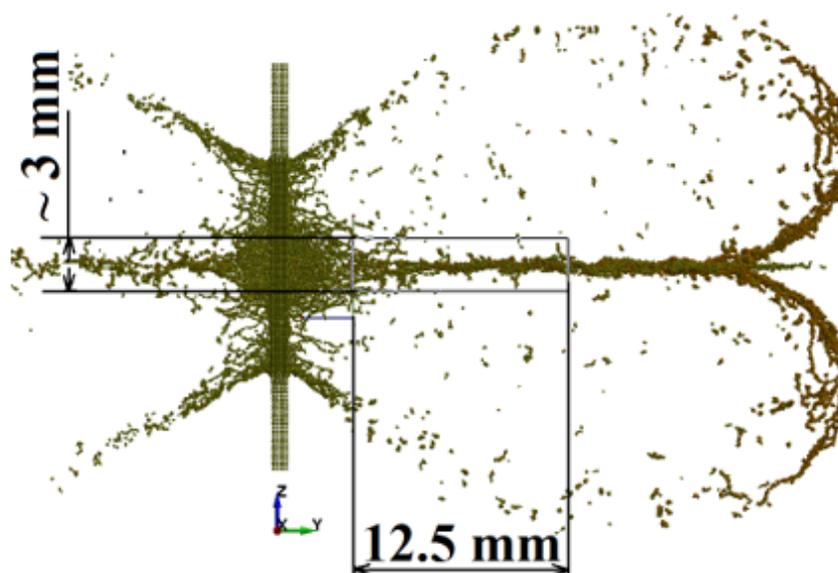


Рис. 22: Частицы из зоны средней скорости при 10 мкс после удара.

с исходной массой ударника, при этом частицы обладают скоростью сравнимой с первоначальной. Можно предположить, что с увеличением скорости ударника, будут иметь место схожие процессы на более ранних стадиях.

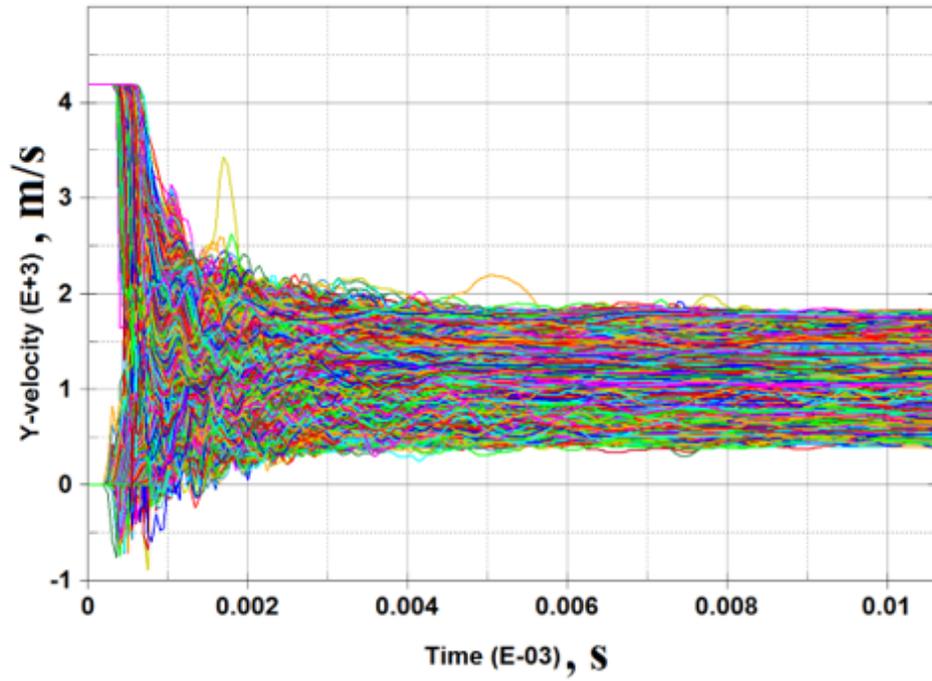


Рис. 23: Скоростная диаграмма средней скоростной зоны облака осколков.

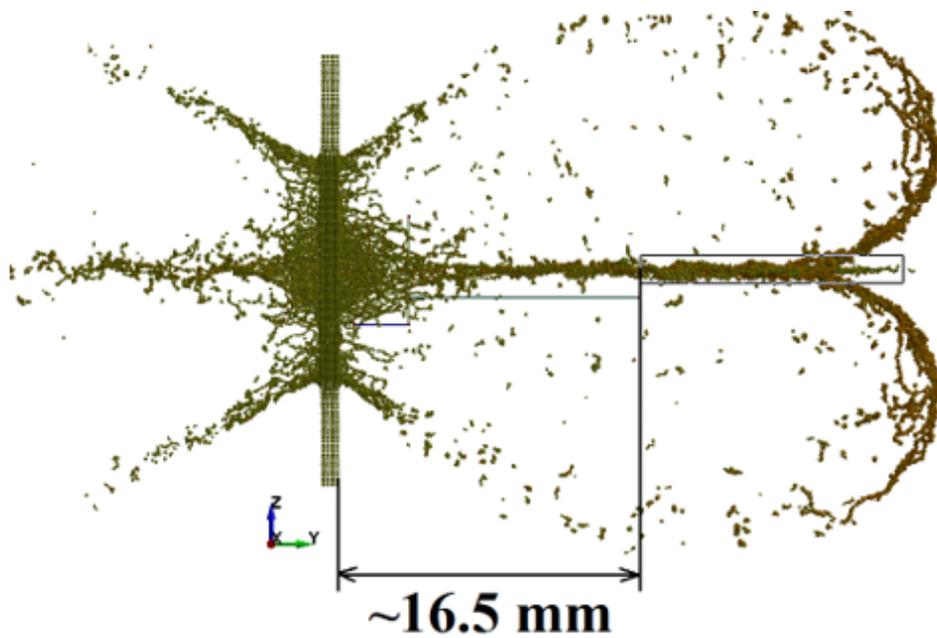


Рис. 24: Частицы из зоны высокой скорости при 10 мкс после удара.

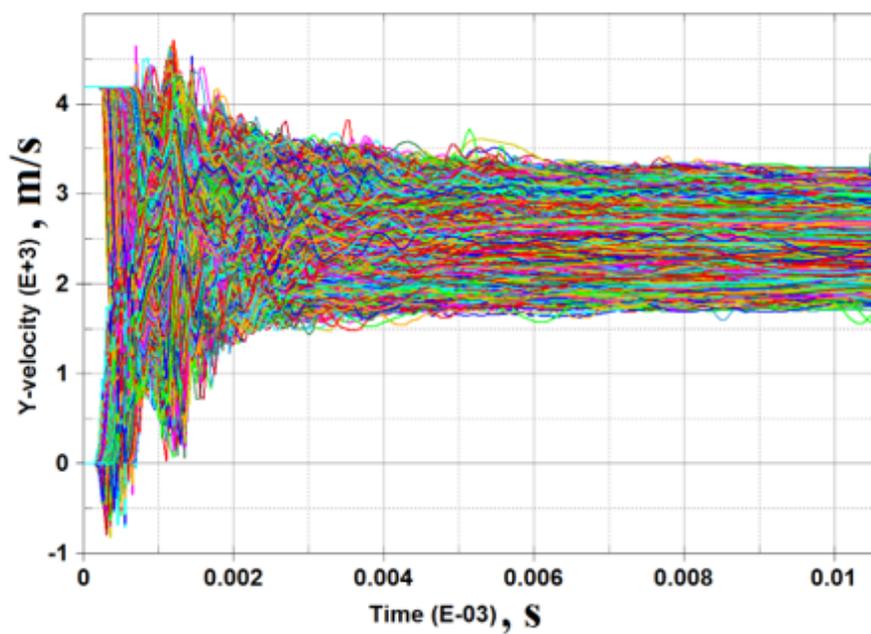


Рис. 25: Скоростная диаграмма высоко-скоростной зоны облака осколков.

Заключение

В первой главе работы был проведен сравнительный анализ деформации ферменной конструкции с использованием как аналитических, так и численных методов. Он показал хорошее совпадение результатов, полученных разными подходами. Во второй главе были исследованы деформации пластин при различных граничных условиях, был разработан метод аналитического подсчета частот колебаний неоднородных пластин с периодически изменяющимися параметрами. Третья и четвертая главы были посвящены исследованиям деформаций круглых композитных пластин под действием поверхностного заряда, а также защищенности космических аппаратов от мелкого высоко-скоростного космического мусора. Все эти задачи исследовались численными методами, при этом активно применялся аналитический подход. Полученные результаты свидетельствуют о том, что аналитические и численные расчеты должны проводиться в связке друг с другом, подтверждая достоверность исследований.

Список литературы

- [1] *Argatov I., Mishuris G. Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers. Asymptotic Models. Springer. 2015. 335 p. ISBN:978-3-319-20082-8*
- [2] *Bakhvalov N.S., Panasenko G. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. Springer, 2013, 366 p. ISBN-13: 978-9401075060*
- [3] *A. Cherniaev, I. Telichev, Meso-scale modeling of hypervelocity impact damage in composite laminates, Composites Part B 74 (2015) 95-103. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.01.010>*
- [4] *E.L. Christiansen, International Space Station (ISS) Meteoroid/Orbital Debris Shielding, Cosmonautics and Rocket Engineering, Russian Academy of Sciences, TsNIIMASH, 18 (2000) 166-180*
- [5] *Colin J. Hayhurst, Iain H. Livingstone, Richard A. Clegg, Greg E. Fairlie, Numerical Simulation of Hypervelocity Impacts on Aluminum and*

Nextel/Kevlar Whipple Shields, Hypervelocity Shielding Workshop, TP031, 8-11 March 1998, Galveston, Texas

- [6] B.G. Cour-Palais, J.L. Crews, *A multi-shock concept for spacecraft shielding*, Int. J. Impact Eng. 10 (1990) 135-146. [http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X\(90\)90054-Y](http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X(90)90054-Y)
- [7] *Fernandes G. R., Venturini W. S.* Stiffened plate bending analysis by the boundary element method, Computational Mechanics, 2002, Volume 28, Issue 3, pp. 275-281.
- [8] *Filippov S.B., Naumova N.V.* Vibrations and buckling of cylindrical shell made of a general anisotropic elastic material // Proc. of the 10th Shell Structures Theory and Applications Conference - CRC Press/Balkema, London, UK, 2013. Vol. 3, pp. 289-292.
- [9] Fu J H M, *Surface potential of a photoemitting plate*, J. Geophys. Res. 76 10 2506–09, 1971.
- [10] C.J. Hayhurst, R.A. Clegg, *Cylindrically symmetric SPH simulations of hypervelocity impacts on thin plates*, J. Impact Eng. 20 (1-5) (1997) 337-348. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(97\)87505-7](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(97)87505-7)
- [11] F. Ke, J. Huang, X. Wen, Z. Ma, S. Liu, *Test study on the performance of shielding configuration with stuffed layer under hypervelocity impact*, Acta Astronaut. 127 (2016) 553-560 DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.06.037.
- [12] Kolesnikov E K and Yakovlev A B, *Harnessing power from solar wind particles captured in the Van Allen belts*, Acta Futura 3, 2009, 81–88.
- [13] Korolev V S, Polyakhova E N and Pototskaya I Yu , *Problem of control motion of solar sail spacecraft in the photogravitational fields* , Nonlinear Systems. Teoretical Aspects and Recent Applications ed W Legnany and T E Moschandreou (London: IntechOpen), 2020, p 205.
- [14] *Madenci E., Guven I.* The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS, C.8, Springer, New York. 2006. pp. 403-412

- [15] Meshcheryakov, Y.I., Konovalov, G.V., Zhigacheva, N.I., Divakov, A.K., Nechunaev, A.F., *Strain Behavior of Aluminum Alloys Under Dynamic Compression and Tensile*, Advanced Structured Materials, 2022, 164, p. 413–453 DOI: 10.1007/978-3-030-93076-9_21
- [16] Moskalenko A M , *The electrostatic potential near the lunar surface* , Kinematics and Physics of Heavenly Bodies 8 5 ,1988, 31—40.
- [17] Naumova N. V., Ivanov D., Voloshinova T. Deformation of a Plate with Periodically Changing Parameters, AIP Conference Proceedings 1959, 070026 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5034701>
- [18] Naumova N.V., Ivanov D.N. Vibrations of an inhomogeneous rectangular plate // Technische Mechanik, 2011. - Vol. Band 31, Heft 1. pp. 25-33.
- [19] Nazarov S.A., Slutskij A.S., Sweers G.H. Korn Inequalities for a Reinforced Plate. Journal of Elasticity, 2012, Volume 106, Issue 1, pp. 43-69
- [20] L. de Oliveira Neto, J.B. de Paiva A special BEM for elastostatic analysis of building floor slabs on columns. Computers and Structures, 2003. Vol.81, no.6, pp. 359–372.
- [21] A.N. Parshikov, S.A. Medin, *Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms*, J. Comp. Phys. 180 (1) (2002) 358-382. <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2002.7099>
- [22] Polyakhova E N, *Cosmic Flight with Solar Sail* , Moscow: Nauka, 1988.
- [23] Polyakhova E N, *Influence of a wear of a mirror film under the action of space factors on dynamics of the motion of a solar sail in Tsander's orientations along a heliocentric orbit* , Proc. Gagarinsky scientific Readings on astronautics and aircraft (Moscow, 1983 - 1984) (Moscow), 1985, p 62.
- [24] Sanches L.C.F., Mesquita E., Pavanello R., Palermo L. Dynamic Stationary Response of Reinforced Plates by the Boundary Element Method. Hindawi Publishing Corporation. Mathematical Problem in Engineering. V. 2007, Article ID 62157, 17 pages. DOI: 10.1155/2007/62157

- [25] Silnikov M.V., Guk I.V., Nechunaev A.F., Smirnov N.N., *Numerical simulation of hypervelocity impact problem for spacecraft shielding elements*, Acta Astronautica, Vol.150, September 2018, Pages 56-62. DOI: 10.1016/j.actaastro.2017.08.030
- [26] Silnikov, M.V., Guk, I.V., Mikhaylin, A.I., Nechunaev, A.F., Rummyantsev, B.V., *Numerical simulation of hypervelocity impacts of variously shaped projectiles with thin bumpers*, Materials Physics and Mechanics, 42(1), p. 20–29 (2019) http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4212019_3
- [27] *Tovstik P.E., Tovstik T.P., Naumova N.V.* Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam. Vestnik SPbU. Seria.1. 2017. № 2, pp. 43-69. [in Russian]
- [28] F.L.Whipple, *Meteorites and space travel*, The astronomical journal, 52 (1947) 131.
- [29] Yakovlev A B , *The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion* , Proc. Int. Conf. on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading (Saint-Petersburg, Febr. 2-6, 2015). (IEEE) doi:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106785.
- [30] Yakovlev A.B., *Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories*, J. Phys.: Conf. Ser. 1959 012052, 2021.
- [31] Чак Дики, Валентин Уваров, *Новый «Союз-Аполлон» из космического мусора*, Эксперт: журнал – 2021 – № 40 (1223) (27 сентября).
- [32] Наумова Н.В., Яковлев А.Б., Иванов Д.Н., Дорофеев Н.П., *Деформация круглой трехслойной пластины под действием поверхностного заряда*, СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022, 42–53.
- [33] А.Я. Сагомоян, *Проникание*, М., Издательство Московского университета, 2014.

- [34] Тихонов А.А., Яковлев А.Б., *Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики*, Международная научная конференция по механике – Девятые поляховские чтения (Санкт-Петербург, Март 9-12, 2021) (Санкт-Петербург: ВВМ) 172 с.