

Санкт-Петербургский государственный университет

**ДАВЛЕТБАЕВА Диана Азаматовна**

**Выпускная квалификационная работа**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ВЯЗКОСТИ ВБЛИЗИ  
ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В СВЕРХТЕКУЧЕЕ  
СОСТОЯНИЕ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор кафедры статистической физики СПбГУ,  
**Налимов М.Ю.**

Рецензент:  
д.ф.-м.н, в. н. с. Санкт-Петербургского отделения математического института  
им. В.А.Стеклова РАН,  
**Деркачев С.Э.**

Санкт-Петербург

2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теоретический обзор</b>	<b>3</b>
2.1	Стохастические уравнения . . . . .	3
2.2	Размерный анализ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Поведение вязкости вблизи критической точки</b>	<b>8</b>
4.1	Диаграммная техника . . . . .	8
4.2	Составные операторы канонической размерности 2 . . . . .	9
4.3	Составные операторы канонической размерности 4 . . . . .	10
4.3.1	Статические операторы . . . . .	11
4.3.2	Динамический оператор . . . . .	13
4.4	Составные операторы канонической размерности 6 . . . . .	13
4.4.1	Статические операторы . . . . .	14
4.4.2	Динамические операторы . . . . .	15
4.5	Составные операторы канонической размерности 8 . . . . .	17
4.6	Вычисление критической размерности вязкости . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>19</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>33</b>

# 1 Введение

Непрерывный фазовый переход, также известный как фазовый переход второго рода, являются одним из самых интересных и сложных для изучения физических феноменов. В этот тип фазовых переходов входят явления сверхтекучести, сверхпроводимости, перехода между ферромагнитным и парамагнитным состояниями. Из эксперимента известно, что при приближении к точке фазового перехода физические характеристики вещества – магнитная восприимчивость у магнетиков, корреляционная длина, теплоёмкость и вязкость и другие – могут быть описаны степенным законом:  $A \sim (T - T_c)^a$ , здесь  $A$  – одна из упомянутых физических характеристик системы,  $T$  – температура,  $T_c$  – критическая температура (температура фазового перехода),  $a$  – критический индекс величины  $A$  [1].

Данная работа посвящена одному из первых примеров сверхтекучести, обнаруженной в начале прошлого века, а именно – фазовому переходу жидкого гелия в сверхтекучее состояние, также известному как  $\lambda$ -переход.

Исследование критического поведения жидкого гелия в окрестности фазового перехода в сверхтекучее состояние началось в первой половине 20 века [2, 3] и ведётся до сих пор. Экспериментальное измерение критического индекса теплоёмкости было проведено на орбите Земли [4]. Попытки теоретического описания критических явлений имеют очень долгую историю. Изначально Ландау была построена универсальная модель для описания непрерывных фазовых переходов, однако критические индексы, предсказываемые этой моделью, вошли в противоречие с экспериментом, а затем и с точным решением Онзагера двумерной модели Изинга [5]. В дальнейшем было доказано, что описание жидкого гелия на решетке эквивалентно описанию магнетика [6], поэтому гелий было предложено описывать моделью F стохастической динамики и, так как любая стохастическая задача может быть сведена к квантово-полевой, вычислять критические индексы методами ренормализационной группы и квантовой теории поля [7, 1]. Кроме использования модели гелия на решётке, модель F строится из феноменологических соображений, основанных на законах сохранения [1], микроскопическое обоснование модели приведено в [8].

Переход вещества в сверхтекучее состояние характеризуется обращением вязкости в 0. Прежде не было работ, описывающих закон, по которому это происходит. В данной работе будет проведено вычисление критической размерности вязкости – параметра, описывающего поведение вязкости при приближении к критической точке. При известной критической размерности вязкости можно узнать закон зависимости вязкости от управляющего параметра фазового перехода [1]. В используемой в данной работе модели управляющим параметром является химический потенциал. Тогда закон примет вид:

$$\gamma \sim \mu^{\frac{\Delta_\gamma}{\Delta_\mu}}, \quad (1)$$

здесь  $\gamma$  – вязкость,  $\mu$  – химический потенциал,  $\Delta_\gamma$  – критическая размерность вязкости,  $\Delta_\mu$  – критическая размерность химического потенциала.

Традиционно переход в сверхтекучее состояние принято описывать моделью F [1, 7]. Модель F – одна из классических моделей стохастической динамики. Она традиционно задается уравнениями вида уравнений Ланжевена [1]:

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} + \eta_a, \quad (2)$$

где  $S_{st}$  – статическое действие модели, коэффициенты Онзагера  $\alpha_{ab}$  и межмодовой связи  $\beta_{ab}$  удовлетворяют условиям

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T, \quad \beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad \frac{\delta \beta_{ab}(\vec{x}; \varphi)}{\delta \varphi_a(\vec{x})} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $T$  – символ транспонирования, подразумевается  $\partial_i^T = -\partial_i$ .

Уравнения модели F имеют вид:

$$\begin{aligned}\partial_t \psi &= \lambda(1 + ib) \left[ \partial^2 \psi - \frac{g_1 \psi^+ \psi^2}{3} + g_2 m \psi \right] + i \lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m] + f_{\psi^+}, \\ \partial_t \psi^+ &= \lambda(1 - ib) \left[ \partial^2 \psi^+ - \frac{g_1 (\psi^+)^2 \psi}{3} + g_2 m \psi^+ \right] - i \lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m] + f_{\psi^+}, \\ \partial_t m &= -\lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m] + i \lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] + f_m,\end{aligned}\quad (4)$$

с выбранным статическим действием (интегрирование по координатам подразумевается):

$$S_{st} = \partial \psi^+ \partial \psi + \frac{g_1 (\psi^+ \psi)^2}{6} - g_2 m \psi^+ \psi + \frac{m^2}{2}.\quad (5)$$

Здесь  $\psi, \psi^+$  – комплексные поля параметра порядка, поле  $m$  – линейная комбинация внутренней энергии и плотности, ответственная за флуктуации плотности и температуры,  $g_i, b, u$  – константы связи,  $\lambda$  – кинетический коэффициент Онзагера,  $f_i$  – случайные силы, для которых предполагается распределение Гаусса типа "белого шума" :

$$\langle f_a(x, t) f_b(x', t') \rangle = 2\alpha_{ab} \delta_{ab} \delta(x - x') \delta(t - t').\quad (6)$$

Вычисления в модели F очень громоздки, и несмотря на существенные упрощения в модели E и неоднократные попытки ренормгруппового исследования [10, 11, 12, 13], её динамические характеристики до сих пор неизвестны. Также при использовании модели F возникает следующая проблема: в модели F (или в чуть более простой модели E) есть несколько фиксированных точек – 3 для модели F и 2 для модели E. Непонятно, какая из фиксированных точек соответствует фазовому переходу гелия в сверхтекучее состояние.

Для выяснения, какая из фиксированных точек соответствует изучаемому фазовому переходу, и более аккуратного описания было проведено исследование системы с использованием квантовой микроскопической модели в формализме временных функций Грина при конечной температуре [9]. В ходе исследования было показано, что в ИК-притягивающей фиксированной точке действие, описывающее модель, отличается от действия модели A поворотом и растяжением полей. Поэтому в ИК-приближении исследуемый фазовый переход может быть описан двухкомпонентной моделью A, что противоречит классическому описанию моделью F.

В данной работе будет вычислена критическая размерность вязкости. В разделе 2 представлено описание результатов, полученных к началу данной работы. В разделе 3 представлена постановка задачи. Раздел 4 посвящен вычислениям: в разделе 4.1 обсуждается используемая диаграммная техника, в разделах 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 проводится ренормировка составных операторов и в разделе 4.6 представлен итоговый расчёт характеристик вязкости.

## 2 Теоретический обзор

### 2.1 Стохастические уравнения

Полученные в [9] результаты противоречат результатам классиков [1, 7]. Для объяснения противоречия было предложено взглянуть на проблему со стороны стохастических уравнений критической динамики [9]. Для описания поля скорости к классической модели F добавляются уравнения Навье-Стокса, в статическом действии появляется соответствующий вклад.

Статическое действие модели может быть выбрано в виде статического действия модели F (5), в которое будет добавлен вклад  $\frac{\rho v^2}{2}$ , отвечающий полю скорости (подразумевается интегрирование по пространству) [1]:

$$S_{st} = \partial\psi^+\partial\psi + \frac{g_1(\psi^+\psi)^2}{6} - g_2m\psi^+\psi + \frac{m^2}{2} + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (7)$$

здесь поля  $\psi$ ,  $\psi^+$  — комплексный параметр порядка, соответствующий средним бозонных операторов поля  $\widehat{\psi}$ ,  $\widehat{\psi}^+$ , поле  $m$  — линейная комбинация внутренней энергии и плотности, эффективно описывающая флуктуации температуры,  $\rho$  — поле плотности среды,  $v$  — векторное поле скорости,  $g_1$ ,  $g_2$  — некоторые константы связи. Слагаемое  $\frac{\rho v^2}{2}$ , добавленное к стационарному действию модели F, позволяет учесть поле скорости в исследуемой модели.

Исторически, следуя классической монографии Ланлау и Лифшица [14], жидкость считалась несжимаемой. Из размерного анализа следует, что динамическое слагаемое  $\frac{\rho v^2}{2}$  в действии является ИК-несущественным, и в работе [15] была предпринята попытка учесть ИК-несущественные динамические вклады в стохастические уравнения, при этом жидкость традиционно полагалась несжимаемой.

Микроскопический анализ [9] не выявил предпосылок несжимаемости жидкости, поэтому в статье было выдвинуто предположение, что обсуждаемое противоречие связано с устойчивостью используемых моделей F, E к учёту сжимаемости жидкости.

Для проверки этого утверждения к уравнениям модели F были добавлены уравнения Навье-Стокса и система была приведена к форме уравнений Ланжевена.

Итоговая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} (\partial_t + v_i\partial_i)\psi^+ &= \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1\psi^+\psi^{2+}}{3} + g_2m\psi^+\right] + i\lambda g_3\psi^+\left[g_2\psi^+\psi - m - \frac{v^2}{2}\right] + f_{\psi^+}, \\ (\partial_t + v_i\partial_i)\psi^+ &= \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+)^2\psi}{3} + g_2m\psi^+\right] - i\lambda g_3\psi^+\left[g_2\psi^+\psi - m - \frac{v^2}{2}\right] + f_{\psi^+}, \\ \partial_t m + \partial_i(\rho v_i) &= -\lambda u\partial^2\left[g_2\psi^+\psi - m - \frac{v^2}{2}\right] + i\lambda g_3\left[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+\right] - c^2\partial_i v_i + f_m, \\ \rho(\partial_t v_i + v_j\partial_j v_i) &= \gamma\partial^2 v_i + \frac{(3\zeta + \gamma)}{3}\partial_j\partial_i v_i - (\partial_i\psi^+)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1\psi^+\psi^2}{3} + g_2m\psi\right] + \rho\partial_i\left[\frac{v^2}{2}\right] \\ &\quad - (\partial_i\psi)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+)^2\psi}{3} + g_2m\psi^+\right] + (c^2 + \rho)\partial_i\left[g_2\psi^+\psi - m - \frac{v^2}{2}\right] + f_v, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $\gamma$  и  $\zeta$  — сдвиговая и объёмная вязкость,  $\lambda$  — кинетический коэффициент,  $b$  и  $g_3$  — коэффициенты межмодовой связи,  $u$  — непертурбативный заряд F-модели (4),  $c$  — скорость звука,  $\rho_0$  — средняя плотность. При выводе соответствующих коэффициентов было положено  $\rho = \rho_0 + m$ ,  $\rho_0$  было заменено на  $\rho$  и отброшены вклады, соответствующие старшим нелинейностям.

Далее по полученной системе уравнений согласно MSR-формализму [1] было построено динамическое действие (подразумевается интегрирование по времени и пространству):

$$\begin{aligned} -S_{dyn} &= b_1\psi^{+\prime}\psi' - b_2m'\partial^2m' + b_3\partial_i v'_j\partial_i v'_j + b_4\partial_j v'_j\partial_i v'_i + \psi^{+\prime}\left[-\partial_t\psi - v_i\partial_i\psi + a_1\partial^2\psi + \right. \\ &\quad \left. a_8\psi^+\psi\psi + a_9m\psi + a_{10}\psi v^2\right] + \psi'\left[-\partial_t\psi^+ - v_i\partial_i\psi^+ + a_2\partial^2\psi^+ + a_{11}(\psi^+)^2\psi + \right. \\ &\quad \left. a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+v^2\right] + m'\left[-\partial_t m - \partial_i(mv_i) + a_4\partial^2 m + a_3\partial_i v_i + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) + \right. \\ &\quad \left. a_{15}\partial^2 v^2 + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+\right] + v'_i\left[-\partial_t v - v_j\partial_j v_i + a_5\partial^2 v_i + a_6\partial_i\partial_j v_j + \right. \\ &\quad \left. a_7\partial_i m + a_{18}(\partial_i\psi^+)\partial^2\psi + a_{19}\psi^+\psi^2\partial_i\psi^+ + a_{20}m\psi\partial_i\psi^+ + a_{21}(\partial_i\psi)\partial^2\psi^+ + a_{22}(\psi^+)^2\psi\partial_i\psi + \right. \\ &\quad \left. a_{23}m\partial_i(\psi^+\psi) + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_i v^2\right] \end{aligned} \quad (9)$$

В действии физические параметры были заменены параметрами  $a_1 - a_{25}$ ,  $b_1 - b_4$ , в таблице представлены параметры:

Таблица 1: Параметры динамического действия

$b_1$	$2\lambda$	$a_5$	$\gamma/\rho_0$	$a_{13}$	$i\lambda g_3/2$	$a_{21}$	$-1/(\rho_0)$
$b_2$	$\lambda u$	$a_6$	$(3\zeta + \gamma)/(3\rho_0)$	$a_{14}$	$-\lambda u g_2$	$a_{22}$	$g_1/(3\rho_0)$
$b_3$	$\gamma/\rho_0$	$a_7$	$-c^2/\rho_0 - 1$	$a_{15}$	$\lambda u/2$	$a_{23}$	$g_2/(\rho_0)$
$b_4$	$(\gamma + 3\zeta)/(3\rho_0)$	$a_8$	$i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 + ib)g_1/3$	$a_{16}$	$i\lambda g_3$	$a_{24}$	$g_2(c^2/\rho_0 + 1)$
$a_1$	$\lambda(1 + ib)$	$a_9$	$\lambda(1 + ib)g_2 - i\lambda g_3 g_2$	$a_{17}$	$-i\lambda g_3$	$a_{25}$	$-c^2/(2\rho_0)$
$a_2$	$\lambda(1 - ib)$	$a_{10}$	$-i\lambda g_3/2$	$a_{18}$	$-1/\rho_0$		
$a_3$	$-\rho_0 - c^2$	$a_{11}$	$-i\lambda g_3 g_2 - \lambda(1 - ib)g_1/3$	$a_{19}$	$g_1/(3\rho_0)$		
$a_4$	$-\lambda u$	$a_{12}$	$\lambda(1 - ib)g_2 + i\lambda g_3 g_2$	$a_{20}$	$-g_2/(\rho_0)$		

## 2.2 Размерный анализ

Для выбора ИК-существенных членов и пренебрежения ИК-несущественными членами для дальнейшего исследования необходимо провести размерный анализ.

Согласно [1], MSR-динамическое действие (9) обладает одновременно пространственной и масштабной инвариантностью, поэтому для всех полей и параметров можно ввести независимые пространственную  $d^p$  и временную  $d^\omega$  канонические размерности. Традиционно полагается  $d_x^p = d_t^\omega = -1$ ,  $d_t^p = d_x^\omega = 0$ .

Квадратичная по полям часть действия (9) диктует следующее дисперсионное соотношение  $i\omega \sim k^2$ . Поэтому полная каноническая размерность определяется формулой [1]:

$$d_F = 2d_F^\omega + d_F^p. \quad (10)$$

Именно этими размерностями определяется ИК-существенность или несущественность членов взаимодействия в (9). Канонические размерности исследуемых полей и параметров приведены в следующей таблице [9]:

Таблица 2: Канонические размерности полей и параметров модели

$F$	$\psi, \psi^+$	$\psi', \psi^{+'}$	$m, m'$	$v$	$v'$	$b_1, b_2$	$b_3, b_4$
$d_F^p$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$-1$	$d + 1$	$-2$	$-8$
$d_F^\omega$	$0$	$0$	$0$	$1$	$-1$	$1$	$3$
$d_F$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	$d/2$	$1$	$d - 1$	$0$	$-2$

$F$	$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6$	$a_8, a_{11}$	$a_9, a_{12}, a_{14}, a_{16}, a_{17}$	$a_{10}, a_{13}$	$a_3$	$a_{15}$
$d_F^p$	$-2$	$2 - d$	$-d/2$	$2$	$d/2$	$-d/2$
$d_F^\omega$	$1$	$1$	$1$	$-1$	$0$	$1$
$d_F$	$0$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$	$d/2$	$-2 - d/2$

$F$	$a_{18}, a_{21}$	$a_{19}, a_{22}$	$a_{20}, a_{23}$	$a_{24}$	$a_7$	$a_{25}$
$d_F^p$	$-2 - d$	$2 - 2d$	$-3d/2$	$-d$	$-d/2 - 2$	$0$
$d_F^\omega$	$2$	$2$	$2$	$2$	$2$	$0$
$d_F$	$2 - d$	$6 - 2d$	$4 - 3d/2$	$4 - d$	$2 - d/2$	$0$

Оказалось, что наиболее ИК существенный член стоит в квадратичной части действия, что затрудняет обычный размерный анализ, поэтому, согласно технике, изложенной в [16], в работе [9] был проведен анализ пропагаторов: ИК-несущественные были отброшены, оставшиеся имеют вид:

$$\begin{aligned}
 G_{\psi\psi^+} &= \frac{b_1}{(a_1k^2 + i\omega)(a_2k^2 - i\omega)}, & G_{\psi^+\psi'} &= \frac{1}{a_2k^2 - i\omega}, & G_{\psi'^+\psi} &= \frac{1}{a_1k^2 + i\omega}, \\
 G_{v'_\perp v_\perp} &= \frac{P_\perp}{a_5k^2 - i\omega}, & G_{v'_\parallel m} &= -\frac{ia_3\vec{k}}{R_+}, \\
 a_{56} &\equiv a_5 + a_6, & R_\pm &= a_3a_7k^2 + (a_4k^2 \pm i\omega)(a_{56}k^2 \pm i\omega), \\
 P_\perp \partial^2 &= \partial_i \partial_j, & P_\parallel &= 1 - P_\perp, \\
 v_\perp &= P_\perp v, & v_\parallel &= P_\parallel v.
 \end{aligned} \tag{11}$$

По ИК-эффективным пропагаторам было восстановлено действие:

$$\begin{aligned}
 -S'_{dyn} &= b_1\psi^{+'}\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ + a_5v'_\perp\partial^2v_\perp + a_7v'_i\partial_i m \\
 &\quad -\psi^{+'}\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ - v'_\perp\partial_tv_\perp + \psi^{+'}[-v_i\partial_i(\psi) + a_8\psi^+\psi\psi + a_9m\psi + a_{10}\psi v^2] \\
 &\quad + \psi'[-v_i\partial_i\psi^+ + a_{11}\psi^+\psi\psi^+ + a_{12}m\psi^+ + a_{13}\psi^+v^2] + m'[-m\partial_iv_i + a_{14}\partial^2(\psi^+\psi) \\
 &\quad + a_{16}\psi^+\partial^2\psi + a_{17}\psi\partial^2\psi^+] + v'_i[-\partial_j(v_iv_j) + a_{24}\partial_i(\psi^+\psi) + a_{25}\partial_iv^2].
 \end{aligned} \tag{12}$$

В [9] было замечено, что в (12) может быть проведено интегрирование по  $v'$ ,  $v$ ,  $m$ . Получающееся эффективное действие имеет вид:

$$\begin{aligned}
 -S_{dyn,eff} &= b_1\psi^{+'}\psi' + a_1\psi^{+'}\partial^2\psi + a_2\psi'\partial^2\psi^+ - \psi^{+'}\partial_t\psi - \psi'\partial_t\psi^+ + \psi^{+'}[a_8\psi^+\psi^2 \\
 &\quad - a_9a_{24}(\psi^+\psi^2)/a_7] + \psi'[a_{11}(\psi^+)^2\psi - a_{12}a_{24}(\psi^+)^2\psi/a_7].
 \end{aligned} \tag{13}$$

При растяжении и повороте полей и параметров действие (13) совпадает с действием двухкомпонентной модели А [1]:

$$S_A = -\alpha\phi'^2 + \phi'(\partial_t\phi - \alpha\Delta\phi + \alpha\tau\phi + \frac{\alpha g}{6}\phi^3).$$

### 3 Постановка задачи

В работе [9] было получено ИК-эффективное действие (12), впоследствии, после интегрирования, совпадающего с действием двухкомпонентной модели А (13).

При размерном анализе члены, содержащие вязкость, в действии (9) оказались ИК-несущественными, поэтому предлагается вычислять критическую размерность вязкости с помощью техники составных операторов [1]. Для этого в ИК-эффективное действие (12) добавляются слагаемые из действия (9), содержащие вязкость. Вязкость присутствует при следующих составных операторах:

$$f_1 = \partial_i v'_j \partial_i v'_j, \quad f_2 = \partial_j v'_j \partial_i v'_i, \quad f_3 = v'_i \partial^2 v_i, \quad f_4 = v'_i \partial_i \partial_j v_j. \quad (14)$$

Канонические размерности операторов:  $d_{f_1} = 8$ ,  $d_{f_2} = 8$ ,  $d_{f_3} = 6$ ,  $d_{f_4} = 6$ . На первый взгляд кажется, что для вычисления критической размерности вязкости достаточно учесть составные операторы размерности 6. Но среди всех возможных диаграмм диаграммы, в которых к операторам размерности 6 примешиваются операторы размерности 6, оказываются несущественными. Существенными оказываются диаграммы, в которых операторы примешиваются к операторам размерности 8 и больше. Для анализа выбираются самые ИК-эффективные операторы, то есть, операторы канонической размерности 8. Операторы более высоких размерностей не учитываются. В науке, описываемой действием (13), это соответствует составным операторам канонической размерности 8, состоящим из полей  $\psi$ ,  $\psi^+$ ,  $\psi'$ ,  $\psi'^+$ .

Таким образом, критическая размерность вязкости определяется наиболее существенной критической размерностью составных операторов канонической размерности 8. При ренормировке составные операторы большей канонической размерности смешиваются с операторами меньшей канонической размерности, недостающая размерность компенсируется размерностью управляющего параметра - в данном случае его роль играет химический потенциал  $\mu$ . Поэтому для вычисления критической размерности вязкости необходимо рассмотреть полный набор составных операторов канонической размерности 2, 4, 6, 8.

Работа будет проводиться в двухкомпонентной модели А с действием [1]:

$$S_A = -\alpha\varphi'^2 + \varphi'(\partial_t\varphi - \alpha\Delta\varphi + \alpha\tau\varphi + \frac{\alpha g}{6}\varphi^3) \quad (15)$$

при  $\tau = 0$ . Здесь  $\varphi$ ,  $\varphi'$  - двухкомпонентные поля параметра порядка,  $\alpha$ ,  $\tau$  - параметры модели,  $g$  - пертурбативный заряд.

Для вычисления критической размерности вязкости в действие будут добавлены составные операторы канонической размерности 8, состоящие из полей  $\varphi$ ,  $\varphi'$ .

При рассмотрении двухкомпонентной модели поля  $\varphi$ ,  $\varphi'$  - двухкомпонентные линейные векторы, для них введено скалярное произведение [1]:

$$(ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

здесь  $a$ ,  $b$  - поля из набора  $\{\varphi, \varphi'\}$ .



При ренормировке смешиваются составные операторы одной канонической размерности, поэтому необходимо рассматривать полный набор составных операторов одной канонической размерности, формула ренормировки имеет вид [1]:

$$F_i(Z_\Phi \Phi) = Z_{ik} F_k^R(\Phi). \quad (17)$$

Здесь  $\Phi$  – весь набор полей,  $Z_\Phi$  – константа ренормировки полей,  $F_i$  – неренормированные составные операторы,  $F_k^R$  – ренормированные составные операторы,  $Z_{ik}$  – матрица констант ренормировки составных операторов. Исследуем диаграммы с одним вкладом составного оператора.

Все расчеты будут проводиться с использованием размерной регуляризации,  $d = 4 - \epsilon$ , в схеме минимальных вычитаний. Интересующие нас константы ренормировки  $Z$  будут строиться в виде рядов по  $\epsilon$ . При вычислении констант ренормировки достаточно ограничиться вычетами в простых полюсах, так как старшие полюса не дают в критические размерности [1]:

$$Z = 1 - \frac{[Z]}{\epsilon} \quad (18)$$

Критическая размерность  $\Delta_F$  составного оператора определяется как сумма канонической  $d_F$  (10) и аномальной  $\gamma_F$  [1]:

$$\gamma_F = -\epsilon g \partial_g [Z_F], \quad (19)$$

где  $[Z_F]$  – вычет в простом полюсе по  $\epsilon$  константы ренормировки данного оператора.

$$\Delta_F = d_F + \gamma_F \quad (20)$$

При определении критических размерностей семейства смешивающихся операторов  $[Z_F]$  – матрица полюсных вкладов в  $Z_{ij}$ ,  $d_F$  – матрица, на диагонали которой стоят канонические размерности операторов. Для вычисления критических размерностей следует найти собственные значения матрицы  $\Delta_F$ .

Размерности источников при составных операторах будем определять как теневые [1]:

$$\Delta_{a_i} + \Delta_{F_i} = d + z, \quad (21)$$

здесь  $z$  – динамический критический индекс [1]. Подводя итог, для вычисления критической размерности вязкости необходимо выбрать полный набор и добавить в действие модели А (15) составные операторы канонических размерностей 2, 4, 6, 8. Далее необходимо вычислить матрицы констант ренормировки  $Z_{ij}$  до первого полюса  $[Z_{ij}]$  по  $\epsilon$  для выбранных составных операторов, по собственным значениям матриц определить критические размерности операторов и найти критическую размерность вязкости как теневую для самого ИК – существенного составного оператора.

## 4 Поведение вязкости вблизи критической точки

### 4.1 Диаграммная техника

В двухкомпонентной модели А (15) есть два типа пропагаторов:

$$\langle \varphi\varphi \rangle = \frac{2\alpha}{|-i\omega + \alpha(k^2 + \tau)|^2}, \quad \langle \varphi\varphi' \rangle = \frac{1}{-i\omega + \alpha(k^2 + \tau)}. \quad (22)$$

Пропагатор  $\langle \varphi\varphi \rangle$  обозначен линией, пропагатор  $\langle \varphi\varphi' \rangle$  – линией со стрелкой.



Рис. 1: Пропагаторы модели А

Вершина модели А есть  $\varphi'\varphi^3$ , поля могут быть свернуты двумя разными способами. При рисовании диаграмм не будем различать эти случаи. Составные операторы на диаграммах будем обозначать жирной точкой. Производные полей по времени  $\partial_t$  обозначаем точкой, по координате  $i$   $\partial_i$  – штрихом:

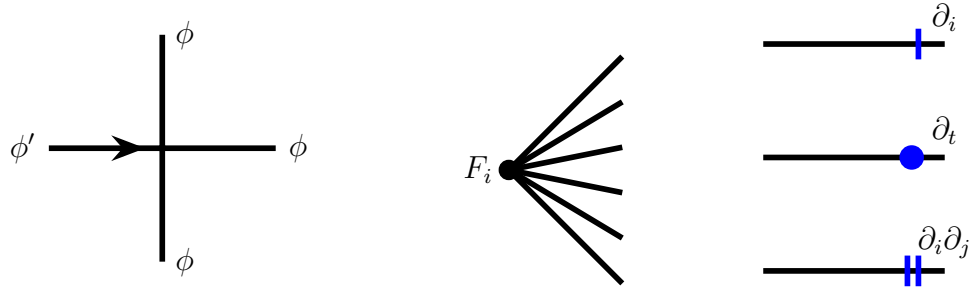


Рис. 2: Используемые обозначения

Суммирование по повторяющимся значкам подразумевается, в тексте работы используется обозначение  $\partial^2 \equiv \partial_i \partial_i$ .

В первом порядке теории возмущений по  $g$  могут быть рассмотрены диаграммы 2 типов: "рыба" и "арбуз".



Рис. 3: Типы диаграмм в первом порядке теории возмущений

Вычисление диаграмм типа "арбуз" не влияет на результат вычисления критических размерностей в первом порядке по  $g$ , поэтому будут вычислены только диаграммы типа "рыба". Далее будет приведен анализ влияния диаграмм на критические размерности.

## 4.2 Составные операторы канонической размерности 2

В рассматриваемой модели есть только один оператор канонической размерности 2 –  $\varphi^2 \equiv (\varphi\varphi)$ . Размерность данного составного оператора известна благодаря соответствию критического поведения динамических моделей с известным статическим пределом поведению в статической модели (согласно аналогу флуктуационно-диссипационной теоремы) [1]. Таким образом, критическая размерность  $\varphi^2$  может быть вычислена в статике. Далее будут приведены вычисления из [1]. Рассматривается производящий функционал ренормированных функций Грина в статической теории  $\varphi^4$ :

$$G(A) = \int D\varphi e^{-S_{st}},$$

$$S_{st} = \frac{1}{2} Z_\varphi^2 (\partial\varphi\partial\varphi) + \frac{\tau}{2} Z_\varphi^2 Z_\tau \varphi^2 + \frac{1}{4!} Z_\varphi^4 g \mu_g^\epsilon Z_g \varphi^4 - \varphi A. \quad (23)$$

Здесь  $\varphi^4 \equiv (\varphi\varphi)^2$ ,  $A$  – источник поля,  $Z_\varphi$ ,  $\mu_g$  – ренормировочная масса,  $Z_\tau$ ,  $Z_g$  – константы ренормировки  $\varphi$ ,  $\tau$ ,  $g$  [1]:

$$\varphi_0 = Z_\varphi\varphi, \quad \tau_0 = Z_\tau\tau, \quad g_0 = Z_g\mu_g^\epsilon g. \quad (24)$$

Данный функционал производит только УФ конечные диаграммы. Для получения производящего функционала ренормированных диаграмм с одной вставкой составного оператора  $\varphi^2$  необходимо применить к (23) операцию  $\partial_\tau$ :

$$\int D\varphi \frac{1}{2} Z_\varphi^2 Z_\tau \varphi^2 e^{-S_{st}} = \text{finite}.$$

Подставляя сюда из (17)  $Z_\varphi^2 \varphi^2 = Z_{\varphi^2} [\varphi^2]^R$ , получим

$$\int D\varphi \frac{1}{2} Z_\tau Z_{\varphi^2} [\varphi^2]^R e^{-S_{st}} = \text{finite}. \quad (25)$$

Таким образом, учитывая (18), в MS схеме из (25) напрямую следует  $Z_\tau Z_{\varphi^2} = 1$  – конечность функционала может быть только если полные вклады  $Z_\tau Z_{\varphi^2}$  отсутствуют. Отсюда следует:

$$[Z_{\varphi^2}] = -[Z_\tau], \quad \gamma_{\varphi^2} = -\gamma_\tau, \\ \Delta_{\varphi^2} + \Delta_\tau = d_{\varphi^2} + d_\tau = d,$$

подставляя  $\Delta_\tau = 1/\nu = 2 - \frac{(N+2)\epsilon}{N+8} = 2 - 0.4\epsilon$  при  $N = 2$  в двухкомпонентной теории [1], можно получить:

$$\Delta_{\varphi^2} = d - \Delta_\tau = d - 1/\nu. \quad (26)$$

Каноническая размерность химического потенциала может быть найдена из действия, построенного в [9],  $d_\mu = 2$ . Критическая размерность химического потенциала  $\Delta_\mu = 1/\nu$  [1]. Для вычисления критической размерности вязкости необходимо рассматривать составные операторы канонической размерности 8, поэтому в данном случае соответствующий оператор –  $\mu^3 \varphi^2$ . Критическая размерность этого оператора  $\Delta_{\mu^3 \varphi^2} = \frac{3}{\nu} + \Delta_{\varphi^2} = d + \frac{2}{\nu}$ , критическая размерность источника данного оператора определяется как  $\Delta_1 = d + z - \Delta_{\mu^3 \varphi^2} = z - 2/\nu$ . Подставляя  $z = 2$  в первом порядке по  $\epsilon$  [1], можно получить  $\Delta_1 = -2 + 0.8\epsilon$ .

### 4.3 Составные операторы канонической размерности 4

Рассматриваются операторы канонической размерности 4. Возможные операторы:  $(\partial\varphi\partial\varphi)$ ,  $(\varphi\Delta\varphi)$ ,  $(\varphi\partial_t\varphi)$ ,  $(\varphi\varphi)^2$  и  $(\varphi'\varphi)$ . Для произвольной комбинации полей  $\varphi$ ,  $\varphi'$  верно следующее утверждение:

$$\partial_t \int dx dt g(\varphi, \varphi') = 0, \quad \partial_i \int dx dt g(\varphi\varphi') = 0, \quad (27)$$

здесь  $g(\varphi, \varphi')$  – комбинация рассматриваемых полей,  $\partial_t$  – производная по времени,  $\partial_i$  – производная по координате.

Из-за этого на составные операторы накладываются соотношения:

$$(\partial\varphi\partial\varphi) + (\varphi\partial^2\varphi) = 0, \quad (\varphi\partial_t\varphi) = 0 \quad (28)$$

Учитывая их, для рассмотрения полного набора операторов можно ограничиться набором  $(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $(\varphi\varphi)^2$  и  $(\varphi'\varphi)$ .

По структуре динамических диаграмм можно заметить, что первые два оператора не примешиваются к третьему. Возможно нарисовать диаграмму типа "арбуз" (Рис. 3), в которой к оператору  $(\varphi\varphi)^2$  примешивается оператор  $(\varphi'\varphi)$ . Но невозможно нарисовать диаграммы, в которых к оператору  $(\varphi'\varphi)$  примешивается  $(\varphi\varphi)^2$ , то есть  $Z_{(\varphi\varphi)^2,(\varphi'\varphi)} = 0$ . Это можно также понять из аналога флуктуационно-диссипационной теоремы – критические размерности статических операторов могут быть найдены из статической науки с действием (23). Поэтому критические размерности  $(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $\varphi^4$  и  $(\varphi'\varphi)$  могут быть найдены независимо.

### 4.3.1 Статические операторы

Сначала будут приведены вычисления критических размерностей статических операторов. Согласно аналогу флуктуационно-диссипационной теоремы, критические размерности операторов  $(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $(\varphi\varphi)^2$  можно установить из статической теории [1]. Для этого рассмотрим уравнение Швингера для (23) при  $\tau = 0$

$$\int D\varphi\varphi\frac{\delta}{\delta\varphi}e^{-S_{st}(\tau=0)} = \int D\varphi(Z_\varphi^2(\partial\varphi\partial\varphi) + \frac{1}{3!}Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g\varphi^4 - \varphi A)e^{-S_{st}} = finite \quad (29)$$

здесь  $\mu_g$  – ренормировочная масса. Производящий функционал ренормированных функций со вставками составных операторов:

$$\int D\varphi\partial_g e^{-S_{st}(\tau=0)} = \int D\varphi(\frac{1}{2}\partial_g Z_\varphi^2(\partial\varphi\partial\varphi) + \frac{1}{4!}\partial_g(Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g)\varphi^4)e^{-S_{st}} = finite. \quad (30)$$

Подставляя в (29,30) соотношения  $(Z_\varphi\varphi)^4 = Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + Z_{\varphi^4,\varphi^4}[\varphi^4]^R$ ,  $(Z_\varphi^2\partial\varphi\partial\varphi) = Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4}[\varphi^4]^R$  из (17), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4}[\varphi^4]^R + \\ & + \frac{1}{3!}g\mu_g^\epsilon Z_g Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + \frac{1}{3!}g\mu_g^\epsilon Z_g Z_{\varphi^4,\varphi^4}[\varphi^4]^R = finite; \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial_g Z_\varphi^2}{Z_\varphi^2}Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + \frac{1}{2}\frac{\partial_g Z_\varphi^2}{Z_\varphi^2}Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4}[\varphi^4]^R + \\ & + \frac{1}{4!}\frac{\partial_g(Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g)}{Z_\varphi^4}Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)}[(\partial\varphi\partial\varphi)]^R + \frac{1}{4!}\frac{\partial_g(Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g)}{Z_\varphi^4}Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g Z_{\varphi^4,\varphi^4}[\varphi^4]^R = finite \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при независимых ренормированных составных операторах, в MS схеме получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)} + \frac{1}{3!}g\mu_g^\epsilon Z_g Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)} = finite \\ & Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4} + \frac{1}{3!}g\mu_g^\epsilon Z_g Z_{\varphi^4,\varphi^4} = finite \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial_g Z_\varphi^2}{Z_\varphi^2}Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)} + \frac{1}{4!}\frac{\partial_g(Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g)}{Z_\varphi^4}Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)} = finite \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial_g Z_\varphi^2}{Z_\varphi^2}Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4} + \frac{1}{4!}\frac{\partial_g(Z_\varphi^4g\mu_g^\epsilon Z_g)}{Z_\varphi^4}Z_{\varphi^4,\varphi^4} = finite \end{aligned}$$

В MS схеме константы ренормировки не зависят от  $\mu_g$ , поэтому можно положить  $\mu_g = 1$ . Подставляя в уравнения, можно получить:

$$Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)} = 1 + [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),(\partial\varphi\partial\varphi)}]/\epsilon, \quad Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)} = [Z_{\varphi^4,(\partial\varphi\partial\varphi)}]/\epsilon, \quad Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4} = [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi),\varphi^4}],$$

$$Z_{\varphi^4, \varphi^4} = 1 + [Z_{\varphi^4, \varphi^4}]/\epsilon, \quad Z_g = 1 + [Z_g]/\epsilon, \quad Z_\varphi = 1 + [Z_\varphi]/\epsilon$$

и отбирая простые полюса по  $\epsilon$ , можно найти:

$$\begin{aligned} [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), (\partial\varphi\partial\varphi)}] + \frac{1}{3!}g[Z_{\varphi^4, (\partial\varphi\partial\varphi)}] &= 0 \\ [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), \varphi^4}] + \frac{1}{3!}g[Z_{\varphi^4, \varphi^4}] + \frac{1}{3!}g[Z_g] &= 0 \\ \partial_g[Z_\varphi] + \frac{1}{4!}[Z_{\varphi^4, (\partial\varphi\partial\varphi)}] &= 0 \\ [Z_{\varphi^4, \varphi^4}] + 4g\partial_g[Z_\varphi] + g\partial_g[Z_g] + [Z_g] &= 0 \end{aligned}$$

Данная система уравнений разрешима в общем виде:

$$[Z_{\varphi^4, (\partial\varphi\partial\varphi)}] = -4!\partial_g[Z_\varphi], \quad [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), (\partial\varphi\partial\varphi)}] = 4g\partial_g[Z_\varphi],$$

$$[Z_{\varphi^4, \varphi^4}] = -[Z_g] - g\partial_g[Z_g] - 4g\partial_g[Z_\varphi], \quad [Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), \varphi^4}] = g^2\partial_g[Z_g]/6 + 2g^2\partial_g[Z_\varphi]/3. \quad (31)$$

Матрица критических размерностей данных операторов (20), канонические размерности операторов стоят на диагонали:

$$\begin{pmatrix} d - g\partial_g[Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), (\partial\varphi\partial\varphi)}]|_{g=g_*} & -g\partial_g[Z_{(\partial\varphi\partial\varphi), \varphi^4}]|_{g=g_*} \\ -g\partial_g[Z_{\varphi^4, (\partial\varphi\partial\varphi)}]|_{g=g_*} & 2d - 4 - g\partial_g[Z_{\varphi^4, \varphi^4}]|_{g=g_*} \end{pmatrix}$$

В настоящий момент константы ренормировки доступны в семипетлевом [17], частично восьмипетлевом [18] приближении. В первом нетривиальном порядке теории возмущений матрица критических размерностей есть

$$\begin{pmatrix} d - 16b_2g_*^2 & -g_*\epsilon/3 \\ 48b_2g_* & 2d - 4 + 2\epsilon \end{pmatrix}$$

Параметры  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $Z_\varphi$ ,  $Z_g$ ,  $g_*$  были вычислены при ренормировке  $n$ -компонентной теории  $\varphi^4$  в [1]:

$$d = 4 - \epsilon, \quad Z_g = 1 + a_2g/\epsilon, \quad g_* = \epsilon/a_2, \quad (32)$$

$$Z_\varphi = 1 + b_2g^2/\epsilon, \quad a_2 = \frac{n+8}{48\pi^2}, \quad b_2 = -\frac{n+2}{16^2 \cdot 8 \cdot 9\pi^4} \quad (33)$$

Критические размерности семейства операторов определяются собственными значениями данной матрицы, они есть:  $4 - \epsilon$ ,  $4 - 16b_2g_*^2$ .

Им соответствуют следующие операторы канонической размерности 8:  $\mu^2(\partial\varphi\partial\varphi)$  и  $\mu^2\varphi^4$ . Их критические размерности  $4 - \epsilon + 2/\nu$ ,  $4 - 16b_2g_*^2 + 2/\nu$ .

Соответствующие критические размерности источников:

$$\Delta_2 = z - \frac{2}{\nu} = -2 + 0.8\epsilon, \quad \Delta_3 = z + \epsilon - \frac{2}{\nu} + 16b_2g_*^2 = -2 + 1.8\epsilon. \quad (34)$$

### 4.3.2 Динамический оператор

Размерность оператора  $(\varphi'\varphi)$  может быть вычислена аналогично размерности  $(\varphi\varphi)$ .

Для этого необходимо рассмотреть производящий функционал ренормированных функций Грина в динамической ренормированной массивной ( $\tau \neq 0$ ) модели A (15):

$$G(A) = \int D\varphi \int D\varphi' e^{-S_A^R} \quad (35)$$

$S_A^R$  – ренормированное действие стохастической модели A:

$$S_A^R = -Z_\varphi^2 Z_\alpha \alpha \varphi'^2 + Z_{\varphi'} \varphi' (Z_\varphi \partial_t \varphi - Z_\alpha Z_\varphi \alpha \Delta \varphi + Z_\alpha Z_\varphi Z_\tau \alpha \tau \varphi + Z_\alpha Z_\varphi^3 Z_g \frac{\alpha g \mu^\epsilon}{6} \varphi^3) \quad (36)$$

Здесь, аналогично (24),  $Z$  – константы ренормировки:

$$\alpha_0 = Z_\alpha \alpha, \quad \varphi'_0 = Z_{\varphi'} \varphi' \quad (37)$$

Применим к нему операцию  $\partial_\tau$ , что даст производящий функционал ренормированных диаграмм с одной вставкой составного оператора  $(\varphi\varphi')$ . Итак,

$$\int D\varphi D\varphi' Z_{\varphi'} Z_\alpha Z_\varphi Z_\tau (\varphi\varphi') e^{-S_A^R} = finite$$

Подставляя сюда  $Z_\varphi Z_{\varphi'} (\varphi\varphi') = Z_{(\varphi\varphi')} [(\varphi\varphi')]^R$  из (17), можно получить:

$$\int D\varphi D\varphi' Z_\alpha Z_\tau Z_{(\varphi\varphi')} [(\varphi\varphi')]^R e^{-S_A^R} = finite,$$

что в MS схеме означает  $Z_\tau Z_\alpha Z_{(\varphi\varphi')} = 1$ , полюсные вклады отсутствуют. Отсюда следует

$$[Z_\tau] + [Z_\alpha] + [Z_{(\varphi\varphi')}] = 0, \quad \gamma_\tau + \gamma_\alpha + \gamma_{(\varphi\varphi')} = 0, \\ \Delta_\tau + \Delta_\alpha + \Delta_{(\varphi\varphi')} = d_\tau + d_\alpha + d_{(\varphi\varphi')} = d + z.$$

Последнее равенство написано с использованием соображения, что действие безразмерно, поэтому моном  $\alpha\tau(\varphi'\varphi)$ , заинтегрированный по координатам и времени, должен быть безразмерным. Отсюда следует, что критическая размерность оператора  $(\varphi\varphi')$ :

$$\Delta_{(\varphi\varphi')} = d + z - \Delta_\tau - \Delta_\alpha = d - 2 + 2z - 1/\nu,$$

учтено  $z = 2 - \Delta_\alpha$  [1]. Критическая размерность составного оператора  $\mu^2(\varphi\varphi')$ :

$$\Delta_{\mu^2(\varphi\varphi')} = d - 2 + 2z + 1/\nu$$

Критическая размерность смешивающегося с ним источника:

$$\Delta_4 = d + z - 2\Delta_\mu - \Delta_{(\varphi\varphi')} = 2 - z - 1/\nu = -2 + 0.4\epsilon \quad (38)$$

## 4.4 Составные операторы канонической размерности 6

Возможные составные операторы канонической размерности 6:

$$(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi), \quad (\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi), \quad (\varphi\varphi)(\varphi\Delta\varphi), \quad (\partial\varphi\partial\varphi'), \quad (\varphi\Delta\varphi'), \quad (\varphi\partial_t\varphi'), \quad (\partial^2\varphi\partial^2\varphi), \\ (\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\partial_j\varphi), \quad (\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi), \quad (\partial\varphi\Delta\varphi), \quad (\partial\varphi\partial_t\partial\varphi), \quad (\partial_t\varphi\partial_t\varphi), \quad (\varphi'\varphi'), \quad (\varphi'\partial_t\varphi), \\ (\varphi'\Delta\varphi), \quad (\varphi'\varphi)(\varphi\varphi), \quad (\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi), \quad (\varphi\partial_t^2\varphi), \quad (\varphi\partial_t\partial^2\varphi), \quad (\varphi\varphi)^3, \quad (\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi), \quad (\varphi\partial^4\varphi).$$

Также, как и в случае с операторами канонической размерности 4, вычисление критических размерностей статических и динамических операторов может быть выполнено независимо.

#### 4.4.1 Статические операторы

Статические операторы канонической размерности 6:  $(\varphi\varphi)^3$ ,  $(\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$ ,  $(\varphi\partial^4\varphi)$ ,  $(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi)$ ,  $(\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\partial_j\varphi)$ ,  $(\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi)$ ,  $(\partial^2\varphi\partial^2\varphi)$ .

Для статических операторов канонической размерности 6 выражения, вытекающие из (27):

$$\begin{aligned} 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) + (\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) &= 0 \\ (\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\partial_j\varphi) + (\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi) &= 0 \\ (\partial^2\varphi\partial^2\varphi) + (\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi) &= 0 \\ (\varphi\partial^4\varphi) + (\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Для изучения будет выбран набор операторов  $(\varphi\varphi)^3$ ,  $(\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$ ,  $(\varphi\partial^4\varphi)$ . Нумерация сделана в этом порядке.

Вычисленная матрица  $[Z_{ij}]$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{g(N+14)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(N+5)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(N-2)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} & \frac{g \cdot 2(N+2)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица критических размерностей:

$$\begin{pmatrix} 3d - 6 - \frac{g(N+14)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Big|_{g=g^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d - 2 - \frac{g(N+5)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Big|_{g=g^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(N-2)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} & 2d - 2 - \frac{g \cdot 2(N+2)}{3(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Big|_{g=g^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d + 2 \end{pmatrix}$$

Ограничиваясь первым порядком по  $\epsilon$ , можно подставить  $g^* = \frac{\epsilon}{a_2}$  (32):

$$\begin{pmatrix} 6 - 3\epsilon - \frac{\epsilon(N+14)}{a_2(4\pi)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 2\epsilon - \frac{\epsilon(N+5)}{3a_2(4\pi)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon(N-2)}{3a_2(4\pi)^2} & 6 - 2\epsilon - \frac{\epsilon \cdot 2(N+2)}{3a_2(4\pi)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 - \epsilon \end{pmatrix}$$

Подставляя  $a_2 = \frac{N+8}{48\pi^2}$  (32), можно получить:

$$\begin{pmatrix} 6 - 3\epsilon - \frac{3(N+14)\epsilon}{(N+8)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 2\epsilon - \frac{(N+5)\epsilon}{(N+8)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(N-2)\epsilon}{(N+8)} & 6 - 2\epsilon - \frac{2(N+2)\epsilon}{(N+8)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 - \epsilon \end{pmatrix}$$

Для двухкомпонентной теории  $N = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 6 - 7.8\epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 2.7\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 - 2.8\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 - \epsilon \end{pmatrix}$$

Собственные значения данной матрицы, стоят на диагонали. Критические размерности операторов есть:  $6 - 7.8\epsilon$ ,  $6 - 2.7\epsilon$ ,  $6 - 2.8\epsilon$ ,  $6 - \epsilon$ .

Соответствующие составные операторы канонической размерности 8:  $\mu(\varphi\varphi)^3$ ,  $\mu(\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)$ ,  $\mu(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$ ,  $\mu(\varphi\partial^4\varphi)$ . Их критические размерности:  $6 - 7.8\epsilon + 1/\nu$ ,  $6 - 2.7\epsilon + 1/\nu$ ,  $6 - 2.8\epsilon + 1/\nu$ ,  $6 - \epsilon + 1/\nu$ .

Критические размерности источников:  $\Delta_5 = z - 2 + 6.8\epsilon - 1/\nu = -2 + 7.2\epsilon$ ,  $\Delta_6 = z - 2 + 1.7\epsilon - 1/\nu = -2 + 2.1\epsilon$ ,  $\Delta_7 = z - 2 + 1.8\epsilon - 1/\nu = -2 + 2.2\epsilon$ ,  $\Delta_8 = z - 2 - 1/\nu = -2 + 0.4\epsilon$ .

#### 4.4.2 Динамические операторы

Возможные динамические операторы канонической размерности 6:  $(\varphi'\varphi')$ ,  $(\partial\varphi\partial\varphi')$ ,  $(\varphi'\partial^2\varphi)$ ,  $(\varphi\partial^2\varphi')$ ,  $(\varphi'\partial_t\varphi)$ ,  $(\varphi\partial_t\varphi')$ ,  $(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi)$ ,  $(\varphi\partial_t^2\varphi)$ ,  $(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)$ ,  $(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)$ ,  $(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)$ .

Из (27) можно написать следующие соотношения на динамические операторы размерности 6:

$$\begin{aligned}
(\partial\varphi\partial\varphi') + (\varphi'\partial^2\varphi) &= 0 \\
(\partial\varphi\partial\varphi') + (\varphi\partial^2\varphi') &= 0 \\
(\varphi'\partial_t\varphi) + (\varphi\partial_t\varphi') &= 0 \\
(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi) &= 0 \\
(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi) + (\varphi\partial_t\partial^2\varphi) &= 0 \\
(\partial_t\varphi\partial^2\varphi) + (\varphi\partial_t\partial^2\varphi) &= 0 \\
(\partial_t\varphi\partial_t\varphi) + (\varphi\partial_t^2\varphi) &= 0
\end{aligned} \tag{40}$$

Вычисление критических размерностей динамических операторов будет проводиться аналогично вычислению критических размерностей составных операторов канонической размерности 4. Система уравнений Швингера:

$$\begin{aligned}
\int D\varphi \int D\varphi' \varphi' \frac{\delta}{\delta\varphi'} e^{-S_A^R} &= 0 : \\
\int D\varphi \int D\varphi' \varphi' (-2Z_{\phi'}^2 Z_{\alpha} \alpha \phi' + Z_{\phi'}(Z_{\phi}\partial_t\phi - Z_{\alpha}Z_{\phi}\alpha\Delta\phi + Z_{\alpha}Z_{\phi}^3 Z_g \frac{\alpha g \mu^{\epsilon}}{6} \varphi^3 - A')) e^{-S_A^R} &= 0, \\
\int D\varphi \int D\varphi \varphi \frac{\delta}{\delta\varphi} e^{-S_A^R} &= 0 : \\
\int D\varphi \int D\varphi' \varphi' (Z_{\phi'}(Z_{\phi}\partial_t\varphi - Z_{\alpha}Z_{\phi}\alpha\Delta\varphi + Z_{\alpha}Z_{\phi}^3 Z_g \frac{\alpha g \mu^{\epsilon}}{2} \varphi^3 - A)) e^{-S_A^R} &= 0.
\end{aligned}$$

Дополняя данные равенства производящими функционалами ренормированных функций, можно получить:

$$\partial_{\alpha} G(A, A')^R:$$

$$\int D\varphi \int D\varphi' (-Z_{\phi'}^2 Z_{\alpha} \varphi'^2 + Z_{\phi'} \varphi' (-Z_{\alpha} Z_{\phi} \partial^2 \varphi + Z_{\alpha} Z_{\phi}^3 Z_g \frac{g \mu^{\epsilon}}{6} \varphi \varphi^2)) e^{-S_A^R} = \text{finite}$$

$$\text{и } \partial_g G(A, A')^R:$$

$$\int D\varphi \int D\varphi' \varphi' (-\partial_g(Z_{\phi'}^2 Z_{\alpha} \alpha) \varphi' + \partial_g(Z_{\phi'}(Z_{\phi}) \partial_t \varphi - \partial_g(Z_{\alpha} Z_{\phi}) \alpha \partial^2 \varphi + \partial_g(Z_{\alpha} Z_{\phi}^3 Z_g \frac{\alpha g \mu^{\epsilon}}{6}) \varphi \varphi^2)) e^{-S_A^R} = \text{finite}$$



Из этих уравнений следует уравнение на константы ренормировки составных операторов  $GZ = finite$ , где матрица  $G = G_0 + [G]/\epsilon$ ,

$$G_0 = \begin{pmatrix} -2\alpha & 1 & -\alpha & \frac{\alpha g}{6} \\ 0 & 1 & -\alpha & \frac{\alpha g}{2} \\ -1 & 0 & -1 & \frac{g}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{6} \end{pmatrix},$$

$$[G] = \begin{pmatrix} -2\alpha[Z_\alpha] & 0 & -\alpha[Z_\alpha] & +([Z_g] + [Z_\alpha])\frac{\alpha g}{6} \\ 0 & 0 & -\alpha[Z_\alpha] & ([Z_g] + [Z_\alpha])\frac{\alpha g}{2} \\ +[Z_\alpha] & 0 & -[Z_\alpha] & ([Z_g] + [Z_\alpha])\frac{g}{6} \\ -\partial_g(T_1)\alpha & \partial_g(T_2) & -\partial_g(T_3)\alpha & \partial_g(T_4) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$T_1 = 2[Z_{\phi'}] + [Z_\alpha], \quad T_2 = [Z_{\phi'}] + [Z_\phi], \quad T_3 = [Z_\alpha] + [Z_\phi] + [Z_{\phi'}], \quad T_4 = [Z_\alpha] + [Z_{\phi'}] + 3[Z_\phi] + [Z_g]\frac{\alpha g}{6}.$$

В работе рассматриваются только простые полюса по  $\epsilon$ , при этом

$$G_0[Z] = -[G] \implies [Z] = -G_0^{-1}[G]$$

Решение аналогичной системы уравнений для статических операторов размерности 4 (см. выше) не привело к "точному" вычислению критических размерностей. Поэтому для данной системы уравнений (которую несложно разрешить аналитически) можно применить приближение первого нетривиального порядка теории возмущений. Тогда получается:

$$[Z] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 & 0 \\ -\frac{g}{\alpha} & -g & \frac{2g}{\alpha} & \frac{6}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_g(T_1)\alpha & \partial_g(T_2) & -\partial_g(T_3)\alpha & \partial_g(T_4) \end{pmatrix}$$

Применим к данному выражению операцию  $\partial/\partial\mu|_{g_0, \alpha_0}$ . Существенно при этом, что  $\mu\partial g/\partial\mu|_{g_0, \alpha_0} = \beta_g$ , что обращается в 0 в фиксированной точке  $g = g_*$ , а  $\mu\partial\alpha/\partial\mu|_{g_0, \alpha_0} = -\gamma_\alpha \sim g^2$ . В интересующем нас порядке  $G_0^{-1}$  можно не дифференцировать, единственная нетривиальная аномальная размерность есть  $\epsilon$  (для оператора  $\varphi'\varphi^3$ ).

Матрица критических размерностей данного семейства составных операторов в первом порядке по  $\epsilon$  есть

$$\begin{pmatrix} d+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d+z & 0 & 0 \\ 0 & & d+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d-2+\epsilon \end{pmatrix}$$

Соответствующие критические размерности источников есть  $\Delta_9 = z - 2 - 1/\nu = -2 + 0.4\epsilon$ ,  $\Delta_{10} = -1/\nu = -2 + 0.4\epsilon$ ,  $\Delta_{11} = z - 2 - 1/\nu + 2\epsilon = -2 + 2.4\epsilon$ .

Для вычисления критической размерности оператора  $(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)$  можно выписать уравнение Швингера:

$$\int D\varphi \int D\varphi\partial_t\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi'} e^{-S_A^R} = 0 :$$

$$\int D\varphi \int D\varphi'\partial_t\varphi (Z_{\phi'}(Z_\phi\partial_t\varphi - A')) e^{-S_A^R} = 0.$$

Из этого равенства следует, что  $Z_{(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)} = 1$ , поэтому  $\Delta_{(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)} = d - 2 + 2z + 1$ , соответствующий оператор канонической размерности  $8 - \mu(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)$ :  $\Delta_{\mu(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)} = d - 2 + 2z + 1/\nu$ , соответствующая теневая размерность есть  $\Delta_{12} = 2 - z - 1/\nu = -2 + 0.4\epsilon$ .

## 4.5 Составные операторы канонической размерности 8

Для начала необходимо написать все операторы, которые необходимо исследовать (интегрирование по времени и координатам и суммирование по повторяющимся значкам подразумевается):

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{4}(\varphi'\varphi')(\varphi\varphi) & F_2 &= \frac{1}{4}(\varphi'\varphi)(\varphi'\varphi) \\
 F_3 &= \frac{1}{6}(\varphi\partial^2\varphi')(\varphi\varphi) & F_4 &= \frac{1}{6}(\varphi\partial_i\varphi')(\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_5 &= \frac{1}{6}(\partial_i\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\varphi) & F_6 &= \frac{1}{6}(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \\
 F_7 &= \frac{1}{6}(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) & F_8 &= \frac{1}{6}(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_9 &= \frac{1}{6}(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) & F_{10} &= \frac{1}{6}(\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \\
 F_{11} &= \frac{1}{6}(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) & F_{12} &= \frac{1}{6}(\varphi\partial_t\varphi')(\varphi\varphi) \\
 F_{13} &= \frac{1}{6!}(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi)^2 & F_{14} &= \frac{1}{8!}(\varphi\varphi)^4 \\
 F_{15} &= \frac{1}{6!}(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)^2 & F_{16} &= \frac{1}{6!}(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\varphi)^2 \\
 F_{17} &= \frac{1}{6!}(\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\varphi) & F_{18} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial^4\varphi)(\varphi\varphi) \\
 F_{19} &= \frac{1}{4!}(\partial^2\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) & F_{20} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \\
 F_{21} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial^2\partial_i\varphi)(\varphi\varphi) & F_{22} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial^2\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_{23} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) & F_{24} &= \frac{1}{4!}(\partial^2\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_{25} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi\partial_j\varphi) & F_{26} &= \frac{1}{6!}(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi)^2 \\
 F_{27} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_t^2\varphi)(\varphi\varphi) & F_{28} &= \frac{1}{4!}(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \\
 F_{29} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) & F_{30} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \\
 F_{31} &= \frac{1}{4!}(\partial_t\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) & F_{32} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \\
 F_{33} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_t\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) & F_{34} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_{35} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_t\partial_i\varphi)(\varphi\varphi) & F_{36} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_t\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \\
 F_{37} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\partial_j\varphi)(\varphi\varphi) & F_{38} &= \frac{1}{4!}(\varphi\partial_i\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) \\
 F_{39} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) & F_{40} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_j\varphi) \\
 F_{41} &= \frac{1}{4!}(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)
 \end{aligned}$$

В первом порядке теории возмущений по  $g$  возможно учесть смешивание операторов с одинаковым числом полей. Дело в том, что в первом порядке доступны диаграммы типа "рыба" и типа "арбуз" (Рис. 3).

Диаграмма "рыба" даёт вклад в такие  $Z_{ij}$ , где количество полей у операторов  $F_i$  и  $F_j$  совпадает. Диаграмма типа "арбуз" даёт вклад в  $Z_{ij}$ , где количество полей у оператора  $F_i$  на 2 больше, чем у  $F_j$ .

Если при составлении матрицы  $[Z_{ij}]$  расположить операторы в последовательности  $F_1$ - $F_{25}$ ,  $F_{37}$  -  $F_{41}$ ,  $F_{26}$  -  $F_{36}$ , то при заполнении матрицы результатами вычисления диаграмм типа "рыба", матрица примет блочно-диагональный вид. Ненулевые элементы вне блоков будут находиться с одной стороны от главной диагонали и не будут влиять на вычисление собственных значений. Будут выделены следующие блоки:

1.  $F_1 - F_{12}$ ;
2.  $F_{13}$ ;
3.  $F_{14}$ ;
4.  $F_{15} - F_{17}$ ;

5.  $F_{18} - F_{25}, F_{37} - F_{41};$

6.  $F_{26};$

7.  $F_{27} - F_{36}.$

Вычисление "арбузов" добавит ненулевые вклады в ячейки матрицы вне этих блоков с одной стороны от главной диагонали матрицы, с другой стороны от диагонали незаполненные ячейки останутся незаполненными. Матрица критических размерностей имеет ту же структуру, как матрица  $[Z_{ij}]$ . Так как в конечном итоге мы интересуемся только собственными значениями матрицы критических размерностей, ненулевые элементы с одной из сторон от главной диагонали матрицы не дадут вклад в ответ. Поэтому вычисление "арбузов" не влияет на результаты. В ходе ренормировки будут вычислены только диаграммы типа "рыба".

Согласно (27) на операторы канонической размерности 8 можно написать следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
 F_4 + F_8 + F_9 = 0 & F_5 + F_6 + 2F_9 = 0 \\
 F_3 + 2F_4 + F_5 = 0 & F_{10} + 2F_{11} + F_{12} = 0 \\
 F_{15} + F_{16} + 4F_{17} = 0 & F_{21} + F_{37} + 2F_{40} = 0 \\
 F_{23} + F_{25} + 2F_{40} = 0 & F_{19} + F_{21} + 2F_{24} = 0 \\
 F_{18} + F_{21} + 2F_{22} = 0 & F_{20} + F_{22} + F_{23} + F_{24} = 0 \\
 F_{24} + F_{39} + F_{40} + F_{41} = 0 & F_{22} + F_{38} + F_{39} + F_{40} = 0 \\
 F_{26} = 0 & F_{27} + F_{28} + 2F_{29} = 0 \\
 F_{33} + F_{35} = 0 & F_{30} + F_{31} + 2F_{32} = 0 \\
 F_{34} + F_{36} = 0 & F_{31} + 2F_{34} + F_{35} = 0 \\
 F_{30} + F_{35} + 2F_{36} = 0 &
 \end{array}$$

Для вычисления критической размерности (20) необходимо рассмотреть полный набор составных операторов одной канонической размерности. Из-за приведенных соотношений составных операторов полный набор включает в себя 22 оператора. В ходе работы были вычислены константы  $Z_{ij}$  для всех приведенных составных операторов для последующей проверки результатов. Для вычисления критической размерности семейства составных операторов было принято решение отказаться от рассмотрения операторов  $F_4, F_5, F_9, F_{12}, F_{16}, F_{22}, F_{23}, F_{24}, F_{26}, F_{28}, F_{30}, F_{31}, F_{32}, F_{34}, F_{35}, F_{37}, F_{38}, F_{39}, F_{40}$ , они были выражены через остальные операторы. Результаты приведены в приложении 5.

В ходе вычислений было вычислено 47 интегралов и 167 симметричных коэффициентов, полученные критические размерности составных операторов:  $8 - 0.6\epsilon, 8 - 3\epsilon, 8 - 2.526\epsilon, 8 - 3.674\epsilon, 8 - 2.582\epsilon, 8 - 3.386\epsilon, 8 - 2.957\epsilon, 8 - 7.8\epsilon, 8 - 12.8\epsilon, 8 - 6.2\epsilon, 8 - 5.8\epsilon, 8 - 3\epsilon, 8 - 2.4\epsilon, 8 - 2.2\epsilon, 8 - 3.2\epsilon, 8 - \frac{28}{15}\epsilon, 8 - 2.4\epsilon, 8 - 3\epsilon, 8 - 3.4\epsilon, 8 - 2.9\epsilon$ .

Так как критическая размерность вязкости опеределяется наиболее ИК - существенным составным оператором, можно выписать значения только для него. Итак, самый ИК - существенный составной оператор  $-(\varphi\varphi)^4$ , его критическая размерность  $-\Delta_{(\varphi\varphi)^4} = 8 - 12.8\epsilon$ . Размерность источника  $\Delta_{13} = d + z - 8 + 12.8\epsilon = -2 + 11.8\epsilon$ .

## 4.6 Вычисление критической размерности вязкости

Критическая размерность вязкости определяется размерностью источника при наиболее ИК - существенном составном операторе. То есть, согласно (21), наиболее ИК - несущественным источником.

Наиболее ИК - существенным оператором оказался  $(\varphi\varphi)^4$ , вычисленная критическая размерность вязкости есть  $\Delta_\gamma = -2 + 11.8\epsilon = 9.8$  в физической размерности пространства  $d = 3$  при  $\epsilon = 1$ .

По полученной критической размерности можно написать закон вида (1):  $\gamma \sim \mu^{-1+5.7\epsilon} \sim \mu^{4.7}$  при  $\epsilon = 1$ .

## 5 Заключение

В ходе проделанной работы была впервые вычислена критическая размерность вязкости сверхтекучего жидкого гелия в двухкомпонентной модели А стохастической динамики. Полученная критическая размерность в первом порядке теории возмущений по  $g - \Delta_\gamma = -2 + 11.8\epsilon = 9.8$  в физической размерности пространства  $d = 3$ .

Для вычисления критической размерности была впервые проведена ренормировка составных операторов канонической размерности 8 стохастической модели А в первом порядке теории возмущений. Для этого были посчитано более 100 фейнмановских диаграмм, среди них 47 различных интегральных выражений и 167 симметричных коэффициентов.

В будущем возможно продолжение работы: проведение многопетлевых расчётов и последующего пересуммирования для уточнения полученных результатов. Учёт первого порядка теории возмущений изменил знак критической размерности вязкости, поэтому интересно проследить влияние следующих порядков. Результаты однопетлевого счёта позволяют понять, какие из составных операторов дают основной вклад в критические размерности и при дальнейших вычислениях сократить количество рассматриваемых составных операторов.

# Приложение 1. Результаты вычисления диаграмм

Вычисление диаграмм проводилось в импульсно-частотном представлении. Используется следующий вид преобразования Фурье:

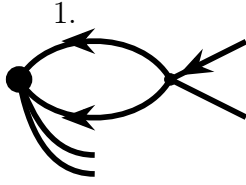
$$\int d(x-x')e^{-ik(x-x')}, \int dt e^{i\omega(t-t')}, \frac{1}{(2\pi)^d} \int dk e^{ik(x-x')}, \frac{1}{(2\pi)} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')},$$

отсюда следует  $\partial_t = -i\omega$ ,  $\partial_i = ik_i$ .

Суммарный импульс, втекающий в диаграмму, равен  $p$ , суммарная частота равна  $\Omega$ . При вычислении найдены вклады, пропорциональные  $\frac{1}{\epsilon}$ , подчеркиванием обозначены поля, на которые действуют производные по времени и координатам.

В приведенных результатах  $I$  – вычисленный интеграл, выражения типа  $F_i \rightarrow C_{ij}F_j$  определяют вклад  $C_{ij}$  диаграммы в матрицу констант ренормировки  $Z_{ij}$ .

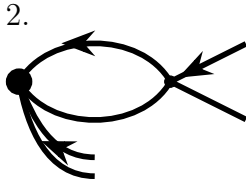
При вычислении использована замена  $g' = \frac{\alpha g}{(4\pi)^{d/2}}$ .



$$I = -\frac{g'}{\epsilon} \left( \frac{p^2}{4\alpha} + \frac{i\Omega}{2\alpha^2} \right)$$

$$F_1 \rightarrow \frac{(N+2)}{3} I(\underline{\psi'\psi})(\underline{\psi\psi})$$

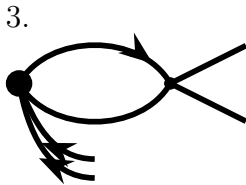
$$F_2 \rightarrow \frac{2}{3} I \left( \frac{1}{2}(\underline{\psi'\psi})(\underline{\psi\psi}) + (\underline{\psi'\psi})(\underline{\psi\psi}) \right)$$



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi\varphi}) \rightarrow \frac{4}{3} I (2(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}) + (\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}'))$$

$$(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}) \rightarrow \frac{g'}{\alpha\epsilon} \frac{2}{3} ((4+N)(\underline{\varphi\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}') + (\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}'))$$

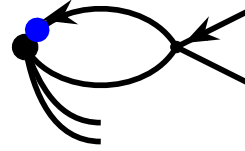


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\underline{\varphi'\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}) \rightarrow \frac{(N+2)}{3} I(\underline{\varphi'\varphi}')(\underline{\varphi\varphi})$$

$$(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}) \rightarrow \frac{1}{3} (2(\underline{\varphi\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}') + (\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi'\varphi}'))$$

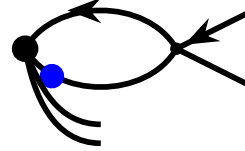
4.



$$I = \frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left( \frac{\alpha p^2}{2} - i\Omega \right)$$

$$(\underline{\varphi\partial_t\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}) \rightarrow \frac{1}{3} I ((N+4)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}') + 4(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}'))$$

5.

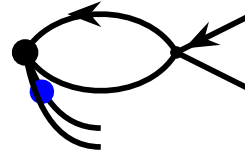


$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left( \frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega \right)$$

$$(\underline{\varphi'\partial_t\varphi})(\underline{\varphi\varphi}) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\underline{\varphi\varphi}')(\underline{\varphi\varphi})$$

$$(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi\partial_t\varphi}) \rightarrow \frac{1}{3} I ((\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}') + 2(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}'))$$

6.

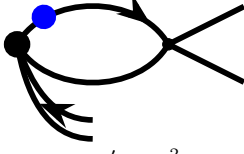


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\underline{\varphi'\partial_t\varphi})(\underline{\varphi\varphi}) \rightarrow \frac{2}{3} \frac{g'}{\alpha\epsilon} (2(\underline{\varphi'\varphi})(\underline{\varphi\partial_t\varphi}) + (\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi'\partial_t\varphi}))$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}\frac{g'}{\alpha\epsilon}((4+N)(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi'\partial_t\varphi))$$

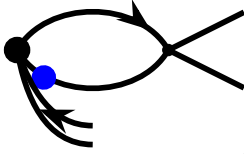
7.



$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon}\left(\frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega\right)$$

$$(\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

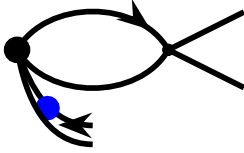


$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon}\left(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

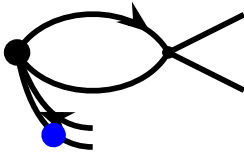
8.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial_t\varphi')(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+8}{3}I(\varphi\partial_t\varphi')(\varphi\varphi)$$

9.

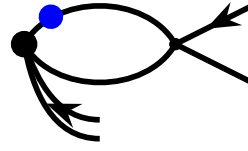


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi)$$

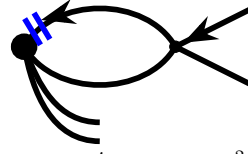
$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I(2(\varphi'\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + (\varphi'\partial_t\varphi)(\varphi\varphi))$$

10.



$$I = 0$$

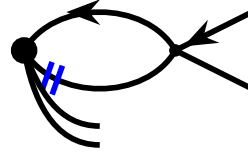
11.



$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}\left(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\phi\partial^2\phi')(\phi\phi) \rightarrow \frac{1}{3}I((N+4)(\varphi\varphi)(\varphi\varphi') + 4(\varphi\varphi')(\varphi\varphi))$$

12.

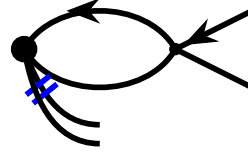


$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}\left(i\Omega + \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi\varphi')(\varphi\varphi)$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\varphi') + 2(\varphi\varphi)(\varphi\varphi'))$$

13.

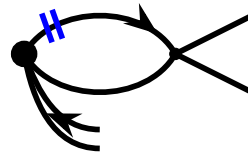


$$I = I_2 = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{2}{3}\frac{g'}{\alpha\epsilon}(2(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi'\partial^2\varphi))$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}\frac{g'}{\alpha\epsilon}((4+N)(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi'\partial^2\varphi))$$

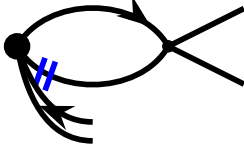
14.



$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}\left(i\Omega + \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$\frac{(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)}{2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi)} \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) +$$

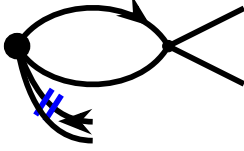


$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2})$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$\frac{(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)}{2(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi)} \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi) +$$

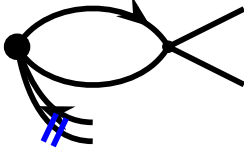
15.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\phi\partial^2\phi')(\phi\phi) \rightarrow \frac{N+8}{3}I(\varphi\partial^2\varphi')(\varphi\varphi)$$

16.

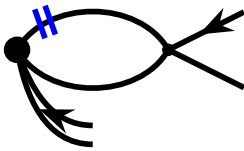


$$I = I_3 = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)$$

$$\frac{(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi)}{(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)} \rightarrow \frac{1}{3}I(2(\varphi\varphi')(\varphi\partial^2\varphi) +$$

17.

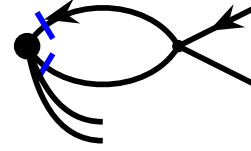


$$I = -\frac{2g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{4}{9}(2(\varphi'\varphi)^2 + (\varphi'\varphi')(\varphi\varphi))$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{2}{9}((4+N)(\varphi'\varphi)^2 + (\varphi'\varphi')(\varphi\varphi))$$

18.

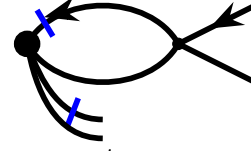


$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega + \alpha p^2)$$

$$(\varphi\partial\varphi')(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi'\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi'\varphi))$$

$$(\partial\varphi'\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi\varphi)(\varphi'\varphi)$$

19.

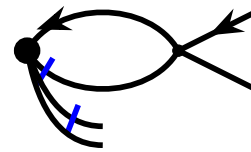


$$I = \frac{ipg'}{\alpha\epsilon}(1 - \frac{1}{d}) = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial\varphi')(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((N+3)(\varphi'\varphi)(\varphi\partial\varphi) +$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\partial\varphi) + (\varphi'\partial\varphi)(\varphi\varphi))$$

20.

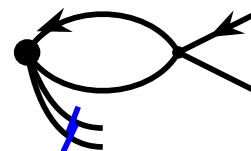


$$I_{20} = \frac{ipg'}{\alpha d} = \frac{ipg'}{4\alpha}$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{2}{3}I((\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi') +$$

$$(\varphi\varphi)(\varphi'\partial\varphi) + (\varphi\partial\varphi)(\varphi'\varphi))$$

21.

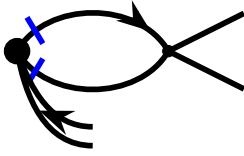


$$I_{21} = I_2 = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi'\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$$

$$(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi'\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) +$$

22.

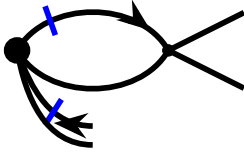


$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \alpha p^2)$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi'\varphi)(\underline{\varphi\varphi})$$

$$(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I(2(\varphi'\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + (\varphi'\varphi)(\underline{\varphi\varphi}))$$

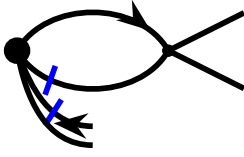
23.



$$I = \frac{ipg'}{\alpha\epsilon}(1 - \frac{1}{d}) = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial\varphi')(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\partial\varphi')(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}))$$

$$(\partial\varphi'\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\partial\varphi')(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}))$$

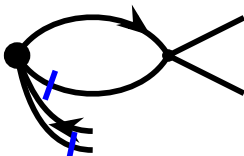


$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial\varphi')(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\partial\varphi')(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}))$$

$$(\partial\varphi'\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\partial\varphi')(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi}')(\underline{\varphi\varphi}))$$

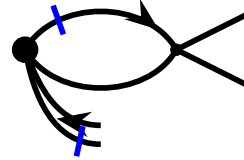
24.



$$I = \frac{ipg'}{\alpha\epsilon}(1 - \frac{1}{d}) = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi'\partial\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\varphi'\varphi))$$

$$(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi'\partial\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\varphi'\varphi))$$

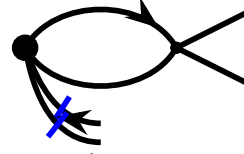


$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi'\partial\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\varphi'\varphi))$$

$$(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi'\partial\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\varphi'\varphi))$$

25.

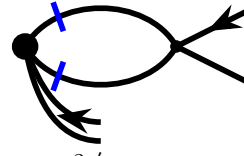


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial\varphi')(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I(2(\varphi\partial\varphi')(\underline{\varphi\partial\varphi}) + (\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi'))$$

$$(\partial\varphi'\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi')$$

26.

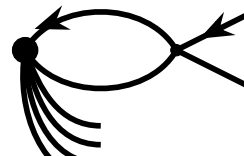


$$I = \frac{2g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{2}{9}I(N+2)(\varphi'\varphi)(\underline{\varphi'\varphi})$$

$$(\varphi'\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{2}{9}I((\varphi'\varphi)(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\varphi'\varphi)(\underline{\varphi'\varphi}))$$

27.

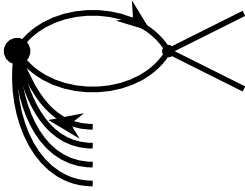


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{N+14}{3}I(\varphi\varphi)^2(\varphi'\varphi)$$

28.

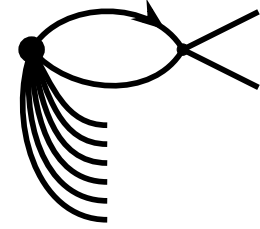




$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi'\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{2(N+14)}{3}I(\varphi\varphi)^2(\varphi\varphi')$$

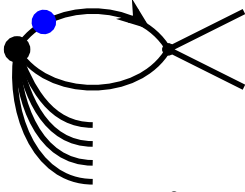
32.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

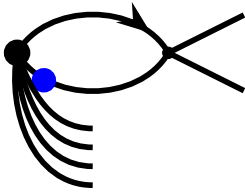
$$(\varphi\varphi)^4 \rightarrow \frac{4(N+20)}{3}I(\varphi\varphi)^4$$

36.



$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon}\left(\frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega\right)$$

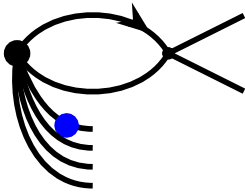
$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{6}I((N+6)(\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi}) + 8(\varphi\varphi)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}))$$



$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon}\left(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{6}I((N+6)(\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi}) + 8(\varphi\varphi)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}))$$

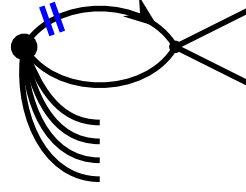
37.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

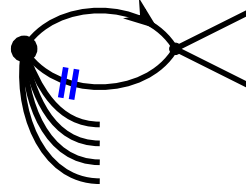
$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{2}{3}I(N+14)(\varphi\varphi)^2(\varphi\partial_t\varphi)$$

43.



$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}\left(-i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

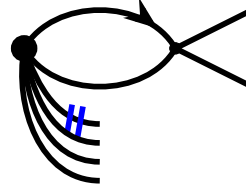
$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{6}I((N+6)(\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi}) + 8(\varphi\varphi)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}))$$



$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}\left(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2}\right)$$

$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{6}I((N+6)(\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi}) + 8(\varphi\varphi)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}))$$

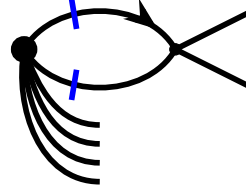
44.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{2}{3}I(N+14)(\varphi\varphi)^2(\varphi\partial^2\varphi)$$

50.

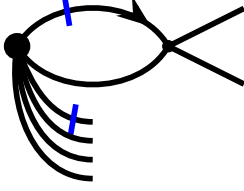


$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \alpha p^2)$$

$$(\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi})$$

$$(\varphi\partial\varphi)^2(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)^2(\underline{\varphi\varphi}) + 2(\varphi\varphi)(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\varphi}))$$

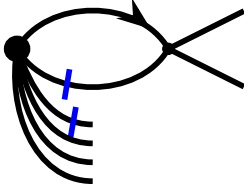
51.



$$I = \frac{ipg'}{\alpha\epsilon} \left(1 - \frac{1}{d}\right) = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{4}{3}(2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$(\varphi\partial\varphi)^2(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((5+N)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + 4(\varphi\varphi)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

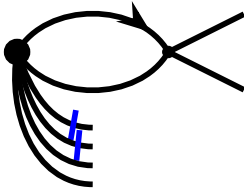


$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{4}{3}(2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi))$$

$$(\varphi\partial\varphi)^2(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((5+N)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi) + 4(\varphi\varphi)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

52.

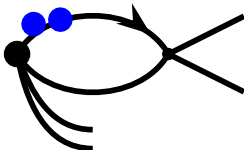


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\varphi)^2 \rightarrow \frac{2}{3}I(N+8)(\varphi\varphi)(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$$

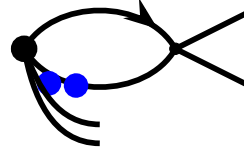
$$(\varphi\partial\varphi)^2(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}((N+16)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi))$$

62.



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left(-\frac{\Omega^2}{4\alpha} + \frac{3}{8}i\Omega p^2\right)$$

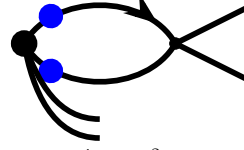
$$(\varphi\partial_t^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+4)(\varphi\varphi)(\varphi\varphi) + 4(\varphi\varphi)(\varphi\varphi))$$



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left(-\frac{\Omega^2}{4\alpha} - \frac{i\Omega p^2}{8}\right)$$

$$(\varphi\partial_t^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+4)(\varphi\varphi)(\varphi\varphi) + 4(\varphi\varphi)(\varphi\varphi))$$

63.

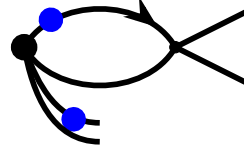


$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left(-\frac{\Omega^2}{4\alpha} - \frac{1}{8}i\Omega p^2\right)$$

$$(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\varphi\varphi)(\varphi\varphi)$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\varphi))$$

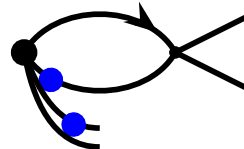
64.



$$I_{64} = I_7 = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left(\frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega\right)$$

$$(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{2}{3}I(2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

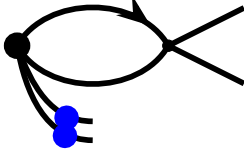


$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left(-\frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega\right)$$

$$(\partial_t\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{2}{3}I(2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + (\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

65.

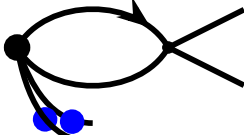


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\partial_t \varphi \partial_t \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\underline{\varphi \varphi})(\partial_t \varphi \partial_t \varphi)$$

$$\begin{aligned} (\varphi \partial_t \varphi)(\varphi \partial_t \varphi) &\rightarrow \frac{1}{3} I((\underline{\varphi \varphi})(\partial_t \varphi \partial_t \varphi) + \\ 2(\underline{\varphi \partial_t \varphi})(\underline{\varphi \partial_t \varphi})) \end{aligned}$$

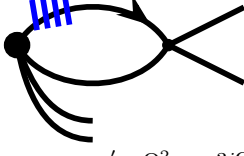
66.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

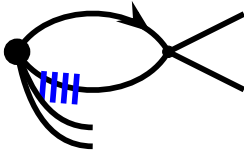
$$(\varphi \partial_t^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I(N+8)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_t^2 \varphi)$$

76.



$$I = -\frac{g'}{\epsilon\alpha^2} \left( \frac{\Omega^2}{4\alpha} - \frac{3i\Omega p^2}{8} \right)$$

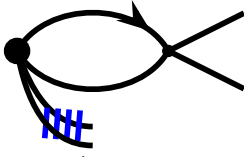
$$\begin{aligned} (\varphi \partial^4 \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{6} I((N+4)(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi) + \\ 4(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \varphi})) \end{aligned}$$



$$I = -\frac{g'}{\epsilon\alpha^2} \left( \frac{\Omega^2}{4\alpha} + \frac{i\Omega p^2}{8} \right)$$

$$\begin{aligned} (\varphi \partial^4 \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{6} I((N+4)(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi) + \\ 4(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \varphi})) \end{aligned}$$

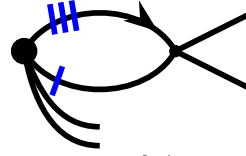
77.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi \partial^4 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I(N+8)(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \partial^4 \varphi)$$

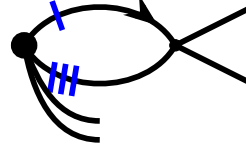
78.



$$I = \frac{g'}{\alpha^3 \epsilon} \left( \frac{\alpha^2 p^4}{8} + \frac{i\Omega \alpha p^2}{8} + \frac{\Omega^2}{4} \right)$$

$$(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi) + 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \varphi}))$$

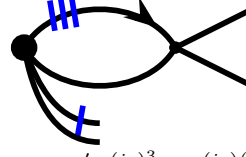


$$I = \frac{g'}{\alpha^3 \epsilon} \left( -\frac{\alpha^2 p^4}{8} + \frac{3i\Omega \alpha p^2}{8} + \frac{\Omega^2}{4} \right)$$

$$(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\underline{\varphi \varphi})(\varphi \varphi) + 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \varphi}))$$

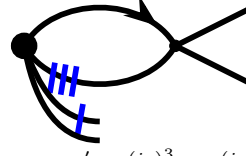
79.



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left( \frac{(ip)^3}{8\alpha} + \frac{(ip)(-i\Omega)}{2\alpha^2} \right)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{3} I((\underline{\varphi \varphi})(\varphi \partial \varphi) + \\ 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \partial \varphi})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) &\rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \partial \varphi) + \\ 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \partial \varphi})) \end{aligned}$$

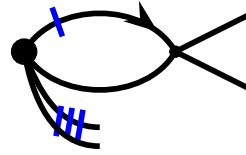


$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left( \frac{(-ip)^3}{8\alpha} + \frac{(ip)(-i\Omega)}{4\alpha^2} \right)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{3} I((\underline{\varphi \varphi})(\varphi \partial \varphi) + \\ 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \partial \varphi})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) &\rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\underline{\varphi \varphi})(\varphi \partial \varphi) + \\ 2(\underline{\varphi \varphi})(\underline{\varphi \partial \varphi})) \end{aligned}$$

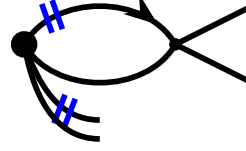
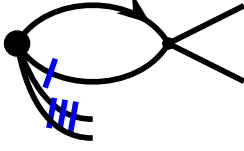
80.



$$I = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$\begin{aligned} (\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)) \\ (\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \varphi) &\rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi)) \end{aligned}$$

$$(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi))$$



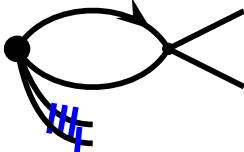
$$(p-k)^2$$

$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi))$$

$$(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi))$$

81.

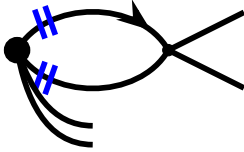


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\varphi \varphi)(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi)$$

$$(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\partial_i \varphi \partial^2 \partial_i \varphi) + 2(\varphi \partial^2 \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

82.



$$(p-k)^2 k^2$$

$$I = \frac{g'}{\epsilon \alpha^3} \left( -\frac{\alpha p^2 i \Omega}{8} - \frac{\Omega^2}{4} \right)$$

$$(\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

$$((pk) - k^2)^2$$

$$I = \frac{g'}{\epsilon \alpha^3} \left( -\frac{\alpha p^2 i \Omega}{2} - \frac{\Omega^2}{4} + \frac{\alpha^2 p^4}{4} \right)$$

$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

83.

$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon} \left( i\Omega + \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{2}{3} I(2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + (\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

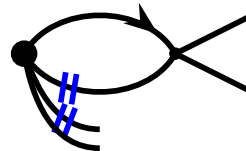
$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$(p-k)_i (p-k)_j$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2\epsilon} \left( \frac{-7\alpha p_i p_j + \alpha p^2 \delta_{ij}}{12} + \frac{(-i\Omega)\delta_{ij}}{8} \right)$$

$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{2}{3} I(2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) + (\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi))$$

$$(\varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi))$$



$$k^2$$

$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon} \left( i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

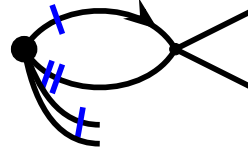
$$(\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{2}{3} I(2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + (\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$k_i k_j$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2\epsilon} \left( \frac{-\alpha p_i p_j + \alpha p^2 \delta_{ij}}{12} + \frac{(-i\Omega)\delta_{ij}}{8} \right)$$

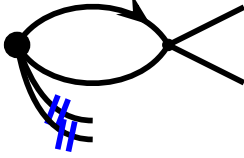
$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{2}{3} I(2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) + (\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi))$$



$$(\varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi))$$

$$k^2(p-k)$$

84.



$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} (\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\varphi \varphi)(\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi)$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( -\frac{\alpha(ip)^3}{8} + \frac{(-i\Omega)(ip)}{4} \right)$$

$$(\partial_i \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\partial^2 \varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$(\partial^2 \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

$$(pk - k^2)k$$

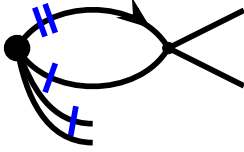
$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3} I(\varphi \varphi)(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi)$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( \frac{\alpha(ip)^3}{8} - \frac{(-i\Omega)(ip)}{8} \right)$$

$$(\varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \partial_j \varphi) + 2(\varphi \partial_i \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi))$$

$$(\partial_i \varphi \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

85.



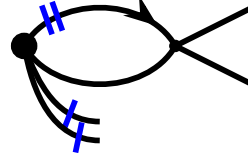
$$(p-k)^2 k$$

$$I = \frac{g'(ip)^3}{8\alpha\epsilon}$$

$$(\partial_i \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi)) + (p-k)^2$$

$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

86.



$$(\partial^2 \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_i \varphi))$$

$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2 \epsilon} \left( i\Omega + \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(pk - k^2)(p-k)$$

$$(\partial_i \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\partial \varphi \partial \varphi)$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( \frac{3\alpha(ip)^3}{8} - \frac{3(-i\Omega)(ip)}{8} \right)$$

$$(\partial^2 \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I(\varphi \varphi)(\partial_i \varphi \partial_i \varphi) + 2(\varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_i \varphi)$$

$$(p-k)_i (p-k)_j$$

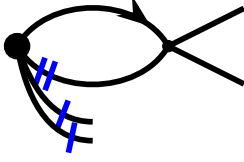
$$(\partial_i \varphi \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial \varphi))$$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( \frac{i\Omega \delta_{ij}}{8} + \frac{\alpha(7p_i p_j - p^2 \delta_{ij})}{12} \right)$$

$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial \varphi))$$

$$(\partial_i \varphi \partial_j \varphi)(\varphi \partial_i \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\partial_i \varphi \partial_j \varphi)$$

$$(\partial_i \partial_j \varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_j \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I(\varphi \varphi)(\partial_i \varphi \partial_j \varphi) + 2(\varphi \partial_i \varphi)(\varphi \partial_j \varphi)$$



$k^2$

$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2})$$

$$(\partial\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi)$$

$$\begin{aligned} (\partial^2\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) &\rightarrow \frac{1}{6}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi) + \\ 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial\varphi}) & \end{aligned}$$

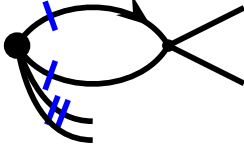
$k_i k_j$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2\epsilon}\left(\frac{i\Omega\delta_{ij}}{8} + \frac{\alpha(p_i p_j - p^2\delta_{ij})}{12}\right)$$

$$(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_j\varphi) &\rightarrow \frac{1}{6}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial\varphi) + \\ 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial\varphi}) & \end{aligned}$$

87.



$(pk - k^2)$

$$I_{87} = I_{22} = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \alpha p^2)$$

$$(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\varphi\partial^2\varphi)$$

$$\begin{aligned} (\partial^2\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) &\rightarrow \frac{1}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\varphi\partial^2\varphi) + \\ 2(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi}) & \end{aligned}$$

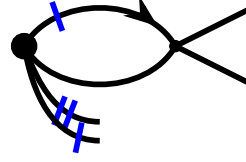
$(p - k)_i k_j$

$$I = \frac{g'}{\alpha^2\epsilon}\left(-\frac{i\Omega\delta_{ij}}{8} + \frac{\alpha(p^2\delta_{ij})}{12} + \frac{\alpha p_i p_j}{6}\right)$$

$$(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\varphi\partial^2\varphi)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_j\varphi) &\rightarrow \frac{1}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\varphi\partial^2\varphi) + \\ 2(\underline{\varphi\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi}) & \end{aligned}$$

88.



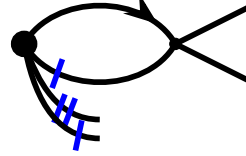
$$I = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial^2\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi})$$

$$(\partial^2\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial^2\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi}))$$

$$(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\underline{\varphi\varphi})(\partial_i\varphi\partial_i\partial_j\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial_i\varphi})(\underline{\varphi\partial_i\partial_j\varphi}))$$

$$(\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\underline{\varphi\varphi})(\partial_i\varphi\partial_i\partial_j\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial_i\varphi})(\underline{\varphi\partial_i\partial_j\varphi}))$$



$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

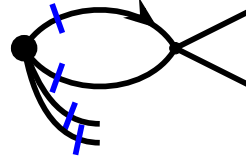
$$(\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial^2\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial^2\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi})$$

$$(\partial^2\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_i\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\underline{\varphi\varphi})(\partial\varphi\partial^2\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial\varphi})(\underline{\varphi\partial^2\varphi}))$$

$$(\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\varphi\partial_i\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\underline{\varphi\varphi})(\partial_i\varphi\partial_i\partial_j\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial_i\varphi})(\underline{\varphi\partial_i\partial_j\varphi}))$$

$$(\partial_i\partial_j\varphi\partial_i\varphi)(\varphi\partial_j\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\underline{\varphi\varphi})(\partial_i\varphi\partial_i\partial_j\varphi) + 2(\underline{\varphi\partial_i\varphi})(\underline{\varphi\partial_i\partial_j\varphi}))$$

89.

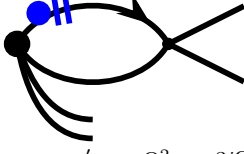


$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \alpha p^2)$$

$$\begin{aligned} (\partial_i\varphi\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi\partial_j\varphi), (\partial_i\varphi\partial_j\varphi)(\partial_i\varphi\partial_j\varphi) &\rightarrow \\ \frac{2}{3}I((N+4)(\underline{\varphi\varphi})(\partial_i\varphi\partial_i\varphi) + 4(\underline{\varphi\partial_i\varphi})(\underline{\varphi\partial_i\varphi})) & \end{aligned}$$

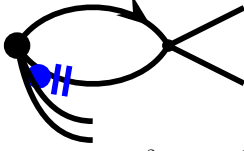
$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( -\frac{i\Omega \delta_{ij}}{8} + \frac{\alpha(p^2 \delta_{ij})}{12} + \frac{\alpha p_i p_j}{6} \right)$$

90.



$$I = \frac{g'}{\epsilon \alpha^2} \left( -\frac{\Omega^2}{4} + \frac{3i\Omega \alpha p^2}{8} \right)$$

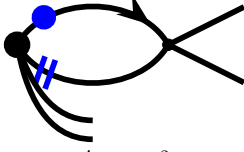
$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 4(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left( -\frac{ip^2 \Omega}{8\alpha} - \frac{\Omega^2}{4\alpha^2} \right)$$

$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 4(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

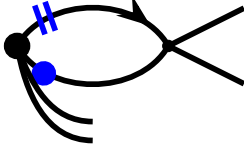
91.



$$I = \frac{g'}{\epsilon \alpha^2} \left( -\frac{\Omega^2}{4} - \frac{i\Omega \alpha p^2}{8} \right)$$

$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

$$F_{32} \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

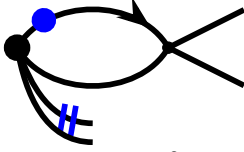


$$I = \frac{g'}{\epsilon \alpha^2} \left( -\frac{\Omega^2}{4} - \frac{i\Omega \alpha p^2}{8} \right)$$

$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial_t \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

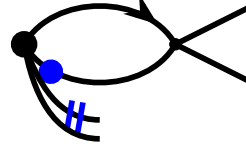
92.



$$I = -\frac{g'}{2\alpha \epsilon} \left( \frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega \right)$$

$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$F_{32} \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

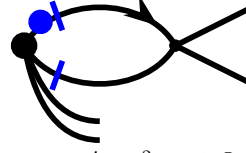


$$I = -\frac{g'}{2\alpha \epsilon} \left( i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(\varphi \partial_t \partial^2 \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

$$(\varphi \partial^2 \varphi)(\varphi \partial_t \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial^2 \varphi))$$

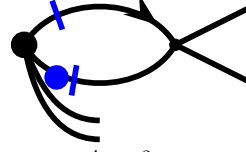
93.



$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( \frac{\Omega^2}{4} + \frac{i\alpha \Omega p^2}{8} + \frac{\alpha^2 p^4}{8} \right)$$

$$(\partial \varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \partial \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

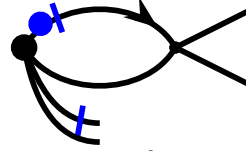


$$I = \frac{g'}{\alpha^2 \epsilon} \left( \frac{\Omega^2}{4} + \frac{3i\alpha \Omega p^2}{8} - \frac{\alpha^2 p^4}{8} \right)$$

$$(\partial \varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6} I(\varphi \varphi)(\varphi \varphi)$$

$$(\varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \partial \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((\varphi \varphi)(\varphi \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \varphi))$$

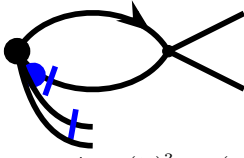
94.



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left( \frac{(ip)^3}{8} + \frac{(-i\Omega)(ip)}{2\alpha} \right)$$

$$(\partial \varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \varphi) \rightarrow \frac{1}{3} I((\varphi \varphi)(\varphi \partial_t \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_t \varphi))$$

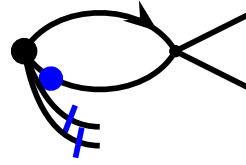
$$(\varphi \partial_t \partial \varphi)(\varphi \partial \varphi) \rightarrow \frac{1}{6} I((N+3)(\varphi \varphi)(\varphi \partial_t \varphi) + 2(\varphi \varphi)(\varphi \partial_t \varphi))$$



$$I = \frac{g'}{\epsilon} \left( -\frac{(ip)^3}{8} + \frac{(-i\Omega)(ip)}{4\alpha} \right)$$

$$(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

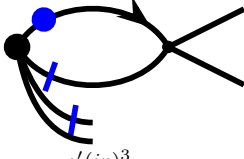


$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left( i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6}I(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$$

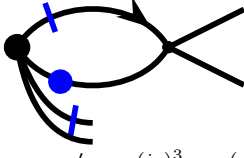
95.



$$I = \frac{g'(ip)^3}{8\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

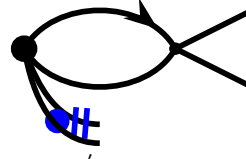


$$I = \frac{g'}{\epsilon^2} \left( -\frac{\alpha(ip)^3}{8} + \frac{(-i\Omega)(ip)}{4} \right)$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

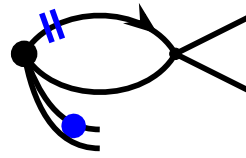
97.



$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((N+4)(\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\partial_t\varphi) + 4(\varphi\varphi)(\varphi\partial^2\partial_t\varphi))$$

98.

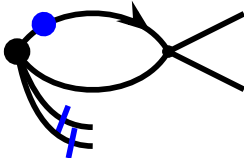


$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon} \left( i\Omega + \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

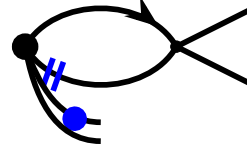
96.



$$I = -\frac{g'}{2\alpha\epsilon} \left( \frac{\alpha p^2}{2} + i\Omega \right)$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{N+2}{6}I(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi)$$



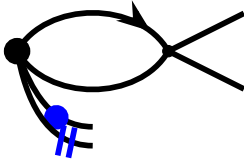
$$I = -\frac{g'}{2\alpha^2\epsilon} \left( i\Omega - \frac{\alpha p^2}{2} \right)$$

$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{1}{6}I((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{1}{3}I((\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

99.



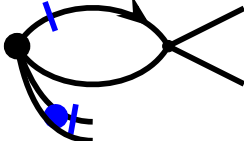


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\partial^2\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\partial^2\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial^2\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I(N+2)}{3}(\varphi\varphi)(\partial^2\varphi\partial_t\varphi)$$

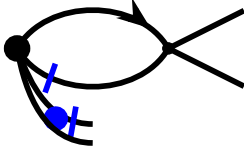
100.



$$I = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi))$$

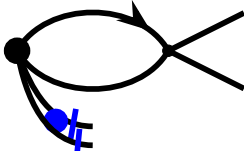


$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi))$$

$$(\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial\partial_t\varphi))$$

101.

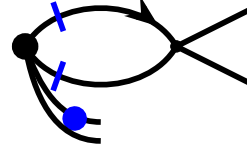


$$I = \frac{g'}{\alpha\epsilon}$$

$$(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\varphi) \rightarrow \frac{I(N+2)}{3}(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi)$$

$$(\varphi\partial_t\partial\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\partial\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial_t\partial\varphi))$$

102.

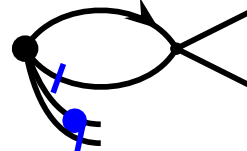


$$I = \frac{g'}{2\alpha^2\epsilon}(i\Omega - \alpha p^2)$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I(N+2)}{3}(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi)$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

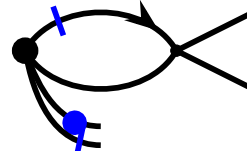
103.



$$I = \frac{ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$



$$I = \frac{3ipg'}{4\alpha\epsilon}$$

$$(\varphi\partial_t\varphi)(\partial\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{3}((\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

$$(\partial\varphi\partial_t\varphi)(\varphi\partial\varphi) \rightarrow \frac{I}{6}((N+3)(\varphi\varphi)(\partial\varphi\partial_t\varphi) + 2(\varphi\partial\varphi)(\varphi\partial_t\varphi))$$

## Список литературы

- [1] Vasil'ev, A. N.: The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2004).
- [2] Kapitzka, P.: Viscosity of Liquid Helium below the  $\lambda$ -Point. *Nature* 141, 74 (1938).
- [3] Allen, J.F., Misener, A.D.: Flow of Liquid Helium II. *Nature* 142, 643(1938).
- [4] Lipa, J. A., Nissen, J. A., Stricker, D. A., Swanson, D. R., Chui, T. C. P.: Specific heat of liquid helium in zero gravity very near the lambda point. *Phys. Rev. B* **68**, 174518 (2003).
- [5] Onsager, L: Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review, Series II*, 65 (3–4): 117–149 (1944).
- [6] Matsubara T., Hirotsugu M.: A Lattice Model of Liquid Helium, I. *Progress of Theoretical Physics*, v.16, issue 6, p. 569–582 (1956).
- [7] Hohenberg P. C., Halperin B. I.: Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435–479 (1977), Folk, R., Moser, G.: Critical dynamics: a field-theoretical approach.. *J. Phys. A* **39**, R207-R313 (2006).
- [8] Hnatich, M., Komarova, M. V., Nalimov, M. Yu.: Microscopic justification of the stochastic F-model of critical dynamics. *Theor. Math. Phys.* **175**, 779-787 (2013).
- [9] Zhavoronkov, Y.A., Komarova, M.V., Molotkov, Y.G., Nalimov, M.Yu., Honkonen, J.: Critical Dynamics of the Phase Transition to the Superfluid State. *Theoretical and Mathematical Physics* 200, 1237–1251 (2019).
- [10] De Dominicis, C., Peliti, L.: Deviations from Dynamic Scaling in Helium and Antiferromagnets.. *Phys. Rev. Lett.* **38**, 505-508 (1977).
- [11] De Dominicis, C., Peliti, L.: Field-theory renormalization and critical dynamics above  $T_c$ : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems. *Phys. Rev. B* **18**, 353-376 (1978).
- [12] Dohm, V.: Density correlation function and dynamic transient exponents for liquid helium at and above  $T_\lambda^*$ . *Z. Physik B* **33**, 79–95 (1979).
- [13] Adzhemyan, L. Ts., Dančo, M., Hnatič, M., Ivanova, E. V., Kompaniets, M. V.: Multi-Loop Calculations of Anomalous Exponents in the Models of Critical Dynamics. *EPJ Web of Conferences* 108, 02004 (2016).
- [14] L.D Landau and E.M. Lifshitz: *Course of Theoretical Physics, Volume 6, Fluid Mechanics*, 2nd Edition, Pergamon ,1987, 554.
- [15] Dančo, M., Hnatič, M., Komarova, M. V., Lučivjanský, T., Nalimov, M. Yu.: Superfluid phase transition with activated velocity fluctuations: Renormalization group approach. *Phys. Rev. E* 93, 012109 (2016).
- [16] Nalimov M.Yu., Nikitin I.S.: Infrared perturbation theory as a method of elimination of sound modes from stochastic dynamical equations. *Vestnik SPbSU, ser. 4, v.4, (N 25)*, p. 105 - 109 (1999).
- [17] Schnetz O.: Numbers and functions in quantum field theory. *Phys. Rev. D* 97, 085018 (2018).
- [18] Schnetz O.:  $\phi^4$  theory at seven loops. *Phys. Rev. D* 107, 036002 (2023).