

Санкт-Петербургский государственный университет

**Кербицкий Дмитрий Алексеевич**

**Выпускная квалификационная работа**

**РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ  
МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ НА  
ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Уровень образования: магистратура

Направление: 03.04.02 «Физика»

Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:  
профессор, кафедра Физики высоких энергий и элементарных частиц, д.ф.-м.н., **Антонов Н. В.**

Рецензент:  
научный сотрудник, ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, к.ф.-м.н., **Лебедев Н. М.**

Санкт-Петербург  
2023

# Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Ренормгрупповой анализ стохастических моделей</b>   | <b>4</b>  |
| 2.1      | Задача стохастической динамики и квантовополевая формулировка . . . . .                          | 4         |
| 2.2      | Производящий функционал и функции Грина . . . . .  | 4         |
| 2.3      | Канонические размерности . . . . .   | 6         |
| 2.4      | Расходимости и перенормировка . . . . .  | 7         |
| 2.5      | Ультрафиолетовая мультипликативная перенормировка . . . . .                                      | 7         |
| 2.6      | Обобщенная однородность . . . . .  | 8         |
| 2.7      | Уравнение ренормгруппы . . . . .   | 9         |
| 2.7.1    | Аномальная размерность и $\beta$ -функция заряда $g$ . . . . .                                   | 10        |
| 2.7.2    | Уравнение РГ с точки зрения теории дифференциальных уравнений<br>в частных производных . . . . . | 10        |
| 2.8      | Неподвижные точки и скейлинг . . . . .   | 13        |
| <b>3</b> | <b>Случайное блуждание по случайной поверхности: анализ простой моде-<br/>ли</b>                 | <b>15</b> |
| 3.1      | Описание модели . . . . .  | 15        |
| 3.2      | Теоретико-полевая формулировка и перенормировка модели . . . . .                                 | 17        |
| 3.3      | Уравнения РГ, функции РГ и неподвижные точки . . . . .   | 20        |
| 3.4      | Критические размерности и скейлинг . . . . .   | 22        |
| 3.5      | Заключение . . . . .   | 23        |
| <b>4</b> | <b>Литература</b>  | <b>25</b> |

# 1 Введение

На протяжении последних десятилетий постоянное внимание привлекают явления случайного роста флуктуирующих поверхностей (границ раздела фаз). Наиболее яркие примеры включают осаждение вещества на поверхность и рост соответствующей границы раздела фаз; распространение пламени, дыма и фронтов затвердевания; рост вицинальных поверхностей и бактериальных колоний; эрозия ландшафтов и профилей морского дна; молекулярно-лучевая эпитаксия и многие другие [1]–[5]

Другой обширной областью исследований является диффузия и случайные блуждания в случайных средах, таких как неупорядоченные, неоднородные, пористые или турбулентные среды [21]–[25].

Важной общей особенностью таких явлений оказывается их интересное автомодельное (скейлинговое, самоподобное) поведение – степенные закономерности, описываемые некоторым (иногда бесконечным) набором "критических размерностей" или "критических индексов". Подобное поведение давно известно для равновесных систем многих частиц вблизи их критических точек. В частности, такое критическое поведение оказывается в значительной степени универсальным: оно зависит не столько от физической природы конкретного "носителя" (жидкость-пар, бинарная смесь, магнетик, квантовый переход в сверхпроводящее или сверхтекучее состояния), сколько от глобальных характеристик системы: размерность пространства, симметрия и т.п. Это позволяет говорить о "классах универсальности" таких систем. Наиболее известным и часто встречающимся является класс, который может быть представлен как класс критического поведения  $O(n)$ -симметричной  $d$ -мерной  $\phi^4$ -модели теории поля.

В случае неравновесных динамических систем такое "критическое поведение" гораздо более многообразно и менее изучено. Более того, опыт показывает, что критическое поведение реальных систем очень чувствительно к наличию внешних возмущений: наличию примесей, влиянию гравитации, движению среды.

Одной из важнейших задач теории является объяснение такого поведения на основе некоторых микроскопических моделей, нахождение возможных классов универсальности, вычисление соответствующих критических размерностей.

Во многих случаях модели случайного роста или диффузии в случайной среде могут быть переформулированы как некоторые модели квантовой теории поля. (Во избежание недоразумений подчеркнем, что речь идет не о квантовых полях, а о близких к ним с математической точки зрения классических случайных полях).

Однако для изучения критического поведения в таких теоретико-полевых моделях невозможно оставаться в рамках обычной теории возмущений, а необходимо выйти за ее пределы с помощью, например, теоретико-полевых методов теории перенормировок, ренормализационной группы (РГ), а в более "тяжелых" случаях – с помощью операторного разложения, точных функциональных уравнений типа Швингера, Дайсона и Уорда, инстантонных методов и непертурбативной (функциональной) ренормгруппы. Так или иначе, мощный и хорошо развитый математический аппарат КТП можно применять к подобным задачам статистической физики.

Именно на этом и сосредоточено исследование в данной работе: используя стохастические дифференциальные уравнения как модели различных физических явлений, исследуется их асимптотическое (критическое) поведение с помощью метода ренормализационной группы (РГ). А именно: рассматривается случайное блуждание частицы в однородном гравитационном поле по шероховатой поверхности. При этом динамика частицы описывается уравнением Фоккера–Планка, а поверхность моделируется обобщенным линейным стохастическим уравнением Эдвардса–Уилкинсона для поля высот [1]. В обобщенной мо-

дели используются два произвольных показателя:  $\varepsilon$  и  $\eta$ , связанные со спектром и законом дисперсии поля высот соответственно. Подробное описание модели и ее связи с различными частными случаями дано в разделе 3.1.

С помощью общей теоремы Мартина-Сиджа-Роуза и де Доминисиса-Янсена, исходная стохастическая задача переформулируется как некоторая теоретико-полевая модель. Это позволяет применять хорошо развитый формализм фейнмановской диаграммной техники, теории перенормировок и РГ. На основе соображений симметрии и размерности, а также некоторых специфических особенностей модели, было показано, что модель мультипликативно перенормируема, так что уравнение РГ было получено стандартным способом. Соответствующие константы перенормировки и РГ-функции (аномальные размерности и  $\beta$ -функции) вычисляются явно в ведущем однопетлевом порядке РГ-теории возмущений. Эти вопросы обсуждаются в разделах 3.2 и 3.3.

Уравнения РГ имеют две гауссовские (свободные) неподвижные точки и две нетривиальные. Эти точки являются инфракрасно-притягивающими в зависимости от значений параметров  $\varepsilon$  и  $\eta$ , что предполагает наличие скейлинговых асимптотических режимов в ИК-диапазоне (большие времена и большие расстояния) для различных функций отклика и корреляционных функций модели (раздел 3.3). Критические размерности для этих режимов находятся в точности как функции  $\varepsilon$  и  $\eta$

В качестве показательного приложения получена временная зависимость среднеквадратичного радиуса облака случайно блуждающих частиц (раздел 3.4). Она описывается степенным законом с показателем степени, который зависит от неподвижной точки и точно известен как функция от  $\varepsilon$  и  $\eta$ , и для нетривиальных точек отличается от обычного случайного блуждания:  $R^2(t) \simeq t$ .

## 2 Ренормгрупповой анализ стохастических моделей

### 2.1 Задача стохастической динамики и квантовополевая формулировка

Задача стохастической динамики заключается в изучении стохастического уравнения

$$\partial_t \phi = U(\phi) + f(x), \quad (1)$$

где  $\phi$  - набор полей,  $x = \{\mathbf{x}, t\}$ ,  $\mathbf{x}$  соответствует пространственной координате, а  $t$  - время. Функционал  $U$  считается локальным и предполагается, что он не зависит от производных полей по времени. Шум  $f(x)$  представляет собой случайную внешнюю силу, которая используется для моделирования случайности процесса. Чтобы описать этот шум, предполагается, что он гауссово распределен с нулевым средним и заданным коррелятором:

$$\langle \hat{f}(x)\hat{f}(x') \rangle = D(x, x'). \quad (2)$$

Под  $\langle \dots \rangle$  подразумевается усреднение по ансамблю случайных полей. Вычисляемыми объектами являются корреляционные функции поля  $\phi$  и функции отклика

Для задачи (1) возможно сформулировать действие с помощью формализма Мартина-Сиггиа-Розе (MSR). При использовании MSR новая задача приобретает характер квантово-полевой, и для ее решения может быть применен развитый формализм квантовой теории поля. Подробное доказательство эквивалентности двух задач можно найти в монографии [36]. Действие примет следующий вид:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \phi' D \phi' + \phi' (-\partial_t \phi + U(\phi)), \quad (3)$$

где  $\Phi = \{\phi, \phi'\}$ ,  $D$  - коррелятор шума (2). Здесь подразумевается интегрирование по всем аргументам и суммирование по всем повторяющимся индексам:

$$\phi' D \phi' = \int dx \int dx' D(x, x') \phi'(x') \phi'(x).$$

После перехода количество полей удваивается. Поле  $\phi'$  называется вспомогательным, по построению ему отвечает нулевой пропагатор:

$$\langle \phi' \phi' \rangle_0 = 0.$$

Эквивалентность задач следует понимать таким образом: корреляторы полей в исходной задаче являются эквивалентными функциям Грина в теории поля. Кроме того, линейная функция отклика трактуется как коррелятор  $\langle \phi \phi' \rangle_0$ .

### 2.2 Производящий функционал и функции Грина

Функции Грина теории поля, эквивалентной стохастической задаче, определяются производящим функционалом

$$Z(A) = c \int \mathcal{D}\Phi \exp[S(\Phi) + A\Phi],$$

где  $A = \{a, a'\}$ ,  $c = G^{-1}(0)$ . Функции  $a(x)$  и  $a'(x)$  называются источниками. Функции Грина полей  $\Phi$  могут быть определены как вариационные производные производящего функционала по источнику, с последующим установлением этого источника в нуль. Например, для двухточечного коррелятора это может быть выражено следующим образом:

$$\left. \frac{\delta^2 Z(A)}{\delta a(x) \delta a'(x')} \right|_{A=0} = \langle \phi(x) \phi'(x') \rangle = c \int \mathcal{D}\phi(x) \phi'(x') \exp[S(\Phi) + A\Phi].$$

Фейнмановская диаграммная техника строится стандартным образом. Начинается с выделения квадратичной части действия, которая соответствует теории без взаимодействия. Для этого функционал  $U(\phi)$  может быть представлен в виде:

$$U(\phi) = L\phi + n(\phi), \quad (4)$$

где  $L$  - функционал, отвечающий линейной части  $U(\phi)$ , а  $n(\phi)$  - нелинейные вклады. Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и выделяя квадратичную часть, получается свободное действие:

$$S_0(\Phi) = \frac{1}{2} \phi' D \phi' + \phi' (-\partial_t \phi + L\phi).$$

Это выражение можно переписать в матричном виде:

$$S_0(\Phi) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & (\partial_t - L)^T \\ \partial_t - L & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \Phi^T K \Phi.$$

Таким образом, в соответствии со стандартной схемой, пропагаторы свободной теории можно представить элементами обратной матрицы  $K$ , то есть  $\Delta = K^{-1}$ .

$$\langle \phi \phi' \rangle_0 = \langle \phi' \phi \rangle_0^T = (\partial_t - L)^{-1}, \quad (5)$$

$$\langle \phi \phi \rangle_0 = \langle \phi \phi' \rangle_0 D \langle \phi' \phi \rangle_0, \quad (6)$$

$$\langle \phi' \phi' \rangle_0 = 0 \quad (7)$$

Полученные пропагаторы эквиваленты линиям в диаграммах Фейнмана. Тогда двухточечный коррелятор можно переписать в виде:

$$\langle \phi(x) \phi'(x') \rangle = c \int \mathcal{D}\phi(x) \phi'(x') \exp[S_0(\Phi) + \phi' n(\phi)].$$

Следуя теории возмущений, необходимо разложить в ряд  $\exp[\phi' n(\phi)]$  по константам связи. В итоге, воспользовавшись правилами Фейнмана, можно получить диаграммную технику.

Удобно ввести связанные функции Грина, производящий функционал которых определяется следующим образом:

$$W(A) = \ln G(A).$$

Связные функции Грина генерируются своим производящим функционалом так же, как и полные функции Грина:

$$\left. \frac{\delta^2 W(A)}{\delta a(x) \delta a'(x')} \right|_{A=0} = \langle \phi(x) \phi'(x') \rangle_{\text{связн.}}$$

В данной работе также будет использоваться понятие 1-неприводимых функций Грина. Производящий функционал для этих функций определяется как преобразование Лежандра функционала  $W(A)$  относительно источника  $A$ :

$$\left. \frac{\delta^2 \Gamma(A)}{\delta a(x) \delta a'(x')} \right|_{A=0} = \langle \phi(x) \phi'(x') \rangle_{1\text{-непр}}.$$

Для использования диаграммного метода в работе с 1-неприводимыми функциями Грина, нам понадобится следующее утверждение:

$$\langle \phi(x) \phi'(x') \rangle_{1\text{-непр}} = -\langle \phi(x) \phi'(x') \rangle_{1\text{-непр}}^{-1} + \Sigma.$$

Величину  $\Sigma$  называют собственной энергией, и она равна сумме всех 1-неприводимых диаграмм. При подсчете диаграмм в  $\Sigma$ , во время записи соответствующих аналитических выражений внешние хвосты диаграмм не учитываются.

Стоит отметить, что в силу трансляционной инвариантности двухточечные функции Грина зависят от разности аргументов:  $(x - x') \sim (t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Как говорилось ранее, в работе с задачами стохастической динамики наибольший интерес представляет описание поведения системы на больших масштабах. Иными словами, необходимо выяснить поведение функций Грина, когда их аргументы  $(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  много больше характерных масштабов рассматриваемой задачи. Такую асимптотику называют поведением в ИК-области (инфракрасной области, название связано с тем, что большие пространственно-временные масштабы связаны с малыми импульсно-энергетическими масштабами). В противоположность этому поведение на маленьких масштабах называют УФ-областью (ультрафиолетовая область).

### 2.3 Канонические размерности

Для описания зависимости физических величин от масштаба в удобной форме используют канонические размерности. В задачах, аналогичных рассматриваемой, имеются два независимых масштаба: пространственный и временной, и требуется, чтобы действие было инвариантным относительно масштабных преобразований пространства или времени. В таком случае действие обладает нулевыми каноническими размерностями. Исходя из этого требования, можно найти канонические размерности любой величины  $M$ , фигурирующей в действии. Они описываются двумя числами: импульсной размерностью  $d_M^k$ , и частотной размерностью  $d_M^\omega$ :

$$[M] \sim [T]^{d_M^\omega} [L]^{d_M^k}.$$

Для определения канонических размерностей также требуется использовать условия нормировки:

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1.$$

Можно определить полную каноническую размерность величины  $M$  как  $d_M = d_M^k + 2d_M^\omega$ . Множитель 2 необходим, поскольку в действии будут появляться слагаемые с  $\partial^2$  и  $\partial_t$ , и они должны иметь одинаковую размерность. Можно сказать, что в смысле канонических размерностей,  $t \sim |x|^2$ .

Канонические размерности некоторых величин зависят от размерности рассматриваемого пространства. Существует размерность пространства, когда все константы взаимодействия безразмерные. Такая размерность называется логарифмической.

## 2.4 Расходимости и перенормировка

При расчете диаграмм некоторых типов возможна проблема ультрафиолетовых расходимостей, которые возникают при интегрировании на больших импульсах. Диаграммы являются интегралами по всему импульсному пространству, поэтому типы расходимостей и количество диаграмм, содержащих эти расходимости, зависят от размерности пространства, по которому происходит интегрирование.

Иногда бывает так, что в диаграмме есть расходящийся подграф. Это означает, что вычисление уже части интегралов, содержащихся в ней, приведет к бесконечному ответу. Если расходящаяся диаграмма не имеет подграфов, то ее называют расходящейся поверхностно. В однопетловом приближении есть только поверхностные расходимости, поэтому дальнейшее изложение будет относиться только к ним.

Каноническая размерность интеграла, соответствующего какой-либо диаграмме, называется формальным индексом расходимости  $\delta$  этой диаграммы. Если индекс расходимости положителен или равен нулю, то диаграмма может содержать расходимости. В иных случаях диаграмма конечна. Можно показать, что для 1-неприводимой функции Грина  $\langle\phi\phi\rangle_{1\text{-непр}}$  каноническая размерность  $d_\Gamma$  находится по формуле:

$$d_\Gamma = d + 2 - \sum_i d_{\phi_i} N_{\phi_i},$$

где символом  $\phi_i$  обозначили поле, входящее в функцию Грина, а  $N_{\phi_i}$  – количество соответствующих полей в функции. Отметим, что раз в логарифмическом масштабе константы связи являются безразмерными, индексы расходимости диаграмм, которые входят в разложение некоторой функции Грина, будут одинаковы. Кроме того, эти индексы будут совпадать с канонической размерностью самой функции Грина.

Справедливо следующее утверждение: УФ-расходящаяся часть любой поверхностно расходящейся диаграммы представляет собой полином по параметрам теории и внешнему импульсу. Канонические размерности мономов этого полинома не превышают формального индекса расходимости.

Теория называется перенормируемой, если в ней возникает бесконечное количество расходящихся диаграмм в конечном числе функций Грина. Теория называется суперперенормируемой, если диаграммы начинают сходиться в конечном порядке разложения функций Грина. Теория называется неренормируемой, если расходящиеся диаграммы возникают в бесконечном числе функций Грина.

Общее утверждение теории перенормировок состоит в том, что расходимости перенормируемой теории можно устранить с помощью операции перенормировки. Также справедливо утверждение, что теория является перенормируемой только в логарифмической размерности пространства.

## 2.5 Ультрафиолетовая мультипликативная перенормировка

Как указывалось ранее, диаграммы, которые используются в разложении функций Грина, имеют расходимость. Основная цель перенормировки заключается в том, чтобы изменить теорию, не искажая ее физический смысл, и обеспечить конечность вкладов диаграмм в разложении функций Грина после снятия регуляризации. Теорема Боголюбова-Парасюка [7] играет важную роль в ренормгруппе. Эта теорема демонстрирует, что вычисляемые функции Грина, полученные с использованием теории возмущений, имеют конечные значения, и устанавливает математическую корректность процедуры вычитания ультрафиолетовых расходимостей. Кроме того, она показывает, что результаты перенормированной теории поля не зависят от выбора способа перенормировки.



При выполнении операции перенормировки мы переходим от исходной модели к перенормированной. Все начальные поля и параметры также называются исходными, а поля и параметры перенормированной модели обозначаются соответствующим образом. Исходные поля отмечаются индексом "0", в то время как перенормированные поля могут быть отмечены индексом "R".

Мультипликативная перенормировка заключается в перерастяжении полей и параметров

$$\phi_0 = Z_\phi \phi, \quad e_0 = Z_e e$$

функциями  $Z(e, \epsilon)$ , называемыми константами перенормировки.

В процессе ренормировки необходимо ввести дополнительный параметр, называемый ренормировочной массой, обладающей каноническими размерностями  $d_\mu^k = 1$ ,  $d_\mu^\omega = 0$ . Он вводится для того, чтобы определить ренормированные функции Грина корректно. Параметр  $\mu$  может принимать любые значения, и его произвольность связана с неоднозначностью ренормировки. Ренормированные параметры теории, такие как  $e$  и функции  $Z$ , будут зависеть от затравочных параметров и масштаба ренормировки:  $e = e(e_0, \mu)$ . При использовании размерной регуляризации масштаб ренормировки необходим для устранения размерности ренормированных констант связи. Если  $g$  является ренормированной константой связи, то:

$$g_0 = Z_g \mu^\epsilon g.$$

В этом случае каждый член ренормированного действия будет иметь постоянный множитель, который является произведением всех коэффициентов перенормировки параметров и полей, входящих в этот член. Эти множители обозначаются следующим образом:

$$Z_i \equiv \prod_j \prod_i Z_{\phi_i} Z_{e_j}.$$

Как было отмечено ранее, ренормировочный процесс проводится с целью исключения расходимостей функций Грина. Необходимо выбрать определенную схему вычитаний, так как требование исключения расходимостей не позволяет однозначно определить ренормировочные константы. Одна из наиболее распространенных схем - это MS (minimal subtractions). Смысл этой схемы состоит в том, что из диаграммы вычитается вся расходящаяся часть. Поэтому для констант перенормировки используется следующий анзац:

$$Z(g, \epsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(g) \epsilon^{-n}, \quad (8)$$

где  $A_n$  - функции констант связи. При этом разложение коэффициентов  $A_n$  по  $g$  начинается с  $g^n$ .

## 2.6 Обобщенная однородность

Для продолжения изложения необходимо ввести определение обобщенной однородности. Рассмотрим функцию  $W(e)$ ,  $e \equiv e_1, \dots, e_n$ . Функция  $W$  называется обобщенно-однородной, также известной как размерная, если существуют числа  $\Delta$ , для которых выполняется условие  $\forall \lambda > 0$

$$W(e_\lambda) = \lambda^{\Delta_w} W(e), \quad e_{i\lambda} = \lambda^{\Delta_i} e_i, \quad (9)$$

где  $\forall i = 1, \dots, n$ . Дифференцируя равенство (9) по  $\lambda$  и полагая  $\lambda = 1$ , получается дифференциальное уравнение на  $W(e)$ , которое эквивалентно (9):

$$\left[ \sum_e \Delta_e D_e - \Delta_W \right] W(e) = 0. \quad (10)$$

Функция  $W(e)$ , удовлетворяющая определению обобщенной однородности, может быть представлена в виде произведения одного своего аргумента, возведенного в некоторую степень, и скейлинговой функции от  $(n - 1)$  безразмерных аргументов.

$$W(e_1, \dots, e_n) = |e_n|^\beta f\left(\frac{e_1}{|e_n|^{\beta_1}}, \dots, \frac{e_{n-1}}{|e_n|^{\beta_{n-1}}}\right), \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\Delta_W}{\Delta_n}, \quad \beta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_n}, \quad \forall i = 1, \dots, n - 1. \quad (12)$$

## 2.7 Уравнение ренормгруппы

Для простоты рассмотрим теорию с одной константой связи  $g_0$ . Все прочие параметры теории обозначим как и ранее  $e_0$ . Существуют величины в теории, которые не изменяются при изменении  $\mu$ . Они называются ренорминвариантными. Если  $M$  ренорминвариантно, то:

$$\tilde{D}_\mu M = 0, \quad \tilde{D}_\mu \equiv \mu \partial_\mu |_{g_0, e_0}.$$

Оператор  $\tilde{D}_\mu$  можно представить через ренормированные переменные:

$$\tilde{D}_\mu = D_\mu + \sum_e (\tilde{D}_\mu e) \partial_e + (\tilde{D}_\mu g) \partial_g, \quad D_\mu \equiv \mu \partial_\mu.$$

По определению  $\beta$ -функция для заряда  $g$  есть

$$\beta_g \equiv \beta \equiv \tilde{D}_\mu g. \quad (13)$$

Аномальной размерностью для любой величины  $a$  является

$$\gamma_a \equiv \tilde{D}_\mu \ln Z_a,$$

Величины  $\beta$  и  $\gamma_a$  называются ренормгрупповыми (РГ) функциями.

Ренормированные функции Грина выражаются как  $G_n(x, g_0, e_0) = \prod_i Z_i^{N_i} G_{nR}((x, g, e, \mu))$ , где  $N_i$  - количество полей  $\phi_i$  в функции Грина.

Левая часть этого уравнения не зависит от  $\mu$ , поэтому применяя к обеим частям равенства оператор  $\tilde{D}_\mu$ , получаем:

$$(D_{RG} + \sum_i N_i \gamma_i) G_{nR}(x, g, e, \mu) = 0.$$

Уравнения такого вида называются РГ уравнениями.

Как говорилось ранее, в схеме MS константы перенормировки могут быть представлены в виде (8), и коэффициенты  $A_n$  не зависят от  $\epsilon$  и их разложения по  $g$  начинаются  $g^n$ . Подставив (8) в (14), получится для всех аномальных размерностей следующее представление:  $\gamma_e = -D_g A_1(g) +$  вклады, содержащие полюса по  $\epsilon$ . Вклады должны взаимно сократиться после ренормировки, поэтому:

$$\gamma_e = -D_g A_{1a}.$$

### 2.7.1 Аномальная размерность и $\beta$ -функция заряда $g$

Если взять логарифм от равенства  $g_0 = g\mu^\epsilon Z_g$ , применить к полученному выражению операцию  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  и учесть определение аномальной размерности  $\gamma$ , получится

$$\frac{1}{g} \cdot \beta_g + \epsilon + \gamma_g = 0.$$

Выразив  $\beta_g$  из предыдущей формулы,

$$\beta_g = g(-\epsilon - \gamma_g).$$

Пусть  $f(g)$  произвольная функция. При применении оператора  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  к  $f(g)$  и использовании определения (13), получается

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu f(g) = \mu \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \right|_{e_0} \cdot \frac{\partial f(g)}{\partial g} = \beta \partial_g f(g),$$

следовательно,

$$\gamma = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z = \beta \partial_g \ln Z = g(-\epsilon + \gamma) \partial_g \ln Z.$$

Это позволяет заключить, что

$$\gamma = \epsilon \cdot \frac{g \partial_g \ln Z}{1 - g \partial_g \ln Z}. \quad (14)$$

### 2.7.2 Уравнение РГ с точки зрения теории дифференциальных уравнений в частных производных

Рассмотрим уравнение РГ. Для простоты можно отбросить аргументы  $u$  функций и взять только одно поле:

$$[\mathcal{D}_{RG} + \gamma]G = 0,$$

где  $G$  - какая-то корреляционная функция. Для ясности примем, что  $G$  - сопряженный коррелятор двух составных операторов. Размерное представление для  $G$  имеет следующую форму:

$$G = \nu^{d_G} \mu^{d_G} R(mx, \mu x, g, \nu),$$

где  $R$  — функция от безразмерных аргументов.

Удобно ввести новую переменную  $s = 1/\mu x$ , где  $\mu$  — ренормировочная масса. Таким образом, оператор  $\mathcal{D}_{RG}$  может быть записан в следующем виде:

$$\mathcal{D}_{RG} = -\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu.$$

Уравнение РГ примет следующий вид:

$$[\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu + \gamma]R = 0.$$

Для дальнейшего решения нужно сделать подстановку  $R = \exp \Psi$ :

$$[\mathcal{D}_s + \beta \partial_g - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu] \Psi = -\gamma. \quad (15)$$

Для решения этого дифференциального уравнения следует сначала найти решение однородного дифференциального уравнения, а после найти любое частное решение. Сумма решений

частного и однородного уравнения и будет решением (15). Сначала рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$[\mathcal{D}_s + \beta\partial_g - \gamma_\nu\mathcal{D}_\nu]\Psi = 0.$$

Можно искать решение этого уравнения в виде  $\bar{g} = \bar{g}(s, g)$ ,  $\bar{\nu} = \bar{\nu}(s, g, \nu)$ . Таким образом, получается следующая формула:

$$[\mathcal{D}_s + \beta\partial_g]\bar{g} = 0, ; \quad (16)$$

$$\bar{g}(1, g) = g. \quad (17)$$

Функция, которая удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, неявно определяет  $\bar{g}$  через  $s$ :

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad (18)$$

Это можно проверить, применяя операции  $\partial_g$  и  $\mathcal{D}_s$ :

$$\partial_g \bar{g} \frac{1}{\beta(\bar{g})} - \frac{1}{\beta(g)} = 0; \quad (19)$$

$$\mathcal{D}_s \bar{g} = \beta(\bar{g}). \quad (20)$$

Изначальное уравнение (17) получается, если подставить (19) уравнение в (20). Рассмотрим неподвижную точку  $g^*$ , которая определяется из требования  $\beta(g^*) = 0$ .

$$\beta(\bar{g}) = \beta'(g^*)(\bar{g} - g^*) + \dots$$

Вблизи окрестности неподвижной точки  $g^*$  уравнение  $\mathcal{D}_s \bar{g} = \beta(\bar{g})$  принимает следующий вид:

$$\mathcal{D}_s(\bar{g}(s, g^*) - g^*) = \beta'(g^*)(\bar{g} - g^*).$$

Получилось уравнение Эйлера. Оно может быть решено путем использования подстановки  $\bar{g}(s, g^*) = s^\omega$ , где  $\omega = \beta'(g^*)$ . Таким образом, асимптотическое поведение инвариантного заряда в окрестности неподвижной точки  $g^*$  может быть описано следующим образом:

$$\bar{g}(s, g^*) \simeq g^* + const \cdot s^\omega. \quad (21)$$

Согласно уравнению (21), можно сделать вывод, что при  $\omega > 0$  значение  $\bar{g}$  стремится к  $g^*$  при  $s \rightarrow 0$ . Такая неподвижная точка является притягивающей в инфракрасной области (ИК-притягивающая точка). При  $\omega < 0$  значение  $\bar{g}$  стремится к  $g^*$  при  $s \rightarrow \infty$ . Это означает, что неподвижная точка притягивает в ультрафиолетовой области (УФ-притягивающая точка).

Уравнение, определяющее инвариантный заряд  $\bar{\nu}$ , представлено в следующей форме:

$$[\mathcal{D}_s + \beta\partial_g - \gamma_\nu\mathcal{D}_\nu]\bar{\nu} = 0, \quad (22)$$

$$\bar{\nu}(1, \nu) = \nu, \quad (23)$$

где  $\gamma_\nu = \gamma_\nu(g, \nu)$ .

Инвариантный заряд  $\bar{\nu}$  можно уже найти в виде явной функции:

$$\bar{\nu} = \nu \cdot \exp \left[ - \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_\nu(x)}{\beta_g(x)} dx \right].$$

Если мы подставим данное решение в уравнение (23), то получится тождество:

$$[\gamma_\nu(g) - \gamma_\nu(g)]\bar{\nu} = 0.$$

Теперь перейдем к решению неоднородного уравнения. Учитывая, что функции  $\beta_g = \beta_g(g)$  и  $\gamma_\nu = \gamma_\nu(g)$  зависят только от переменной  $g$ , мы будем искать частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде  $H = H(g)$ . Далее, можно записать следующее:

$$\beta \partial_g H(g) = -\gamma.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$H(g) = - \int_c^g \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx,$$

где  $c$  — произвольный нижний предел. Таким образом, итоговое решение неоднородного дифференциального уравнения (15) может быть представлено в следующем виде:

$$R(s, g, \nu) = \exp \left[ - \int_c^g \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot X(\bar{g}, \bar{\nu}), \quad (24)$$

где  $X(\bar{g}, \bar{\nu})$  - произвольная функция. Функцию  $X(\bar{g}, \bar{\nu})$  и нижний предел  $c$  можно исключить из решения. Для этого необходимо рассмотреть  $R(1, g, \nu)$  и воспользоваться нормировкой:

$$R(1, g, \nu) = \exp \left[ - \int_c^g \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot X(g, \nu).$$

Согласно данной формуле, можно заключить, что

$$X(g, \nu) = \exp \left[ \int_c^g \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot R(1, g, \nu). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), решение уравнения РГ принимает вид

$$R(s, g, \nu) = \exp \left[ \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right] \cdot R(1, \bar{g}, \bar{\nu}). \quad (26)$$

Формула (26) является окончательным выражением для решения дифференциального уравнения (15).

Проведем анализ данного выражения. Обозначим через  $E$  следующее:

$$E = \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma_F(x)}{\beta(x)} dx = \int_g^{\bar{g}} dx \left[ \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} - \frac{\gamma^*(x)}{\beta(x)} + \frac{\gamma^*(x)}{\beta(x)} \right].$$

Используя (18), можно заключить, что

$$E = \gamma^* \ln s + \int_g^{g^*} \left[ \frac{\gamma(x) - \gamma^*}{\beta(x)} dx \right] + \int_{g^*}^{\bar{g}} \left[ \frac{\gamma(x) - \gamma^*}{\beta(x)} dx \right] = \gamma_F^* \ln s + f(g, \epsilon). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), можно заметить, что первый член в (27) вносит поправку  $s^{\gamma_F^*}$  в асимптотику функции  $R$ . Второй член представляет собой экспоненциальную функцию  $\exp[f(g, \epsilon)]$ , которая является амплитудой и не является предметом интереса. Третий член представляет собой конечную функцию  $\bar{g}$  и, следовательно, является конечной при  $s \rightarrow 0$  функцией  $s$ , что означает поправку к ведущему члену асимптотики в виде  $\ln s$ .

В результате анализа (27) и (26) можно заключить, что при  $s \rightarrow 0$  лидирующим членом асимптотики решения уравнения РГ (15) является:

$$R(s, g, \nu) \simeq s^{\gamma_F^*} R(1, \bar{g}, \bar{\nu}). \quad (28)$$

В случае, когда в модели присутствует несколько зарядов, уравнение  $\mathcal{D}_s \bar{g} = \beta(\bar{g})$  будет преобразовано в систему взаимосвязанных уравнений.

$$\mathcal{D}_s \bar{g}_i = \beta_i(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n).$$

При этом общие заключения и форма асимптотического поведения (28) остаются неизменными.

## 2.8 Неподвижные точки и скейлинг

Точка  $g^*$  считается неподвижной, если значения всех бета-функций в этой точке равны нулю. В случае, когда присутствует несколько констант связи, эта точка будет представлена вектором, и все бета-функции должны зануляться. Таким образом, можно сделать следующее заключение:

$$\beta_k(g^*) = 0, \quad \forall k.$$

Пусть  $\Omega$  - матрица первых производных бета-функций

$$\Omega_{ik}(g) \equiv \partial_i \beta_k(g), \quad i, k \in g.$$

Термин "ИК-притягивающая" используется для обозначения неподвижной точки, в которой вещественная составляющая всех собственных значений матрицы  $\Omega$  является положительной.

$$\text{Re} \lambda_k > 0, \quad \lambda_k \in \text{Spec } \Omega(g^*), \quad \forall k.$$

Основной интерес для нас представляет ИК-асимптотика корреляторов поля, соответствующая большим временам и расстояниям. Можно утверждать, что ИК-поведение ренормируемой теории поля определяется неподвижными точками.

Утверждение можно переформулировать так: система в ИК-асимптотике будет стремиться к одной из неподвижных ИК-притягивающих точек. Это означает, что ИК-асимптотика ренормированных функций Грина будет удовлетворять уравнению РГ с RG-оператором при  $g = g^*$ . Считаем для простоты что теория имеет один параметр  $e$ . Тогда уравнение РГ для функции Грина  $\langle \phi \phi \rangle(k, \omega, g, e, \mu)$  примет вид:

$$[D_\mu - \gamma_e^* D_e + 2\gamma_\phi^*] \langle \phi \phi \rangle,$$

где  $\gamma_a^* = \gamma_a(g^*)$ .

В силу канонической масштабной инвариантности функции Грина, можно записать уравнение в форме, аналогичной (10). Учитывая наличие двух независимых масштабов, у нас будет два соответствующих уравнения:

$$\left[ \sum_i d_i^k D_i - 2d_\phi^k \right] \langle \phi \phi \rangle = 0, \quad (29)$$

$$\left[ \sum_i d_i^\omega D_i - 2d_\phi^\omega \right] \langle \phi \phi \rangle = 0, \quad (30)$$

где индекс  $i$  пробегает по всем аргументам функции Грина  $\mu, e, k, \omega$ . Легко получить следующее уравнение:

$$\left[ -\frac{\gamma_e^* + d_e^*}{d_e^\omega} D_\omega + D_k - 2(d_\phi^k + \gamma_\phi^* + 2\frac{d_h^\omega}{d_e^\omega}(\gamma_e^* + d_e^k)) \langle \phi\phi \rangle \right] = 0. \quad (31)$$

Данное уравнение называется уравнением критического скейлинга и структурно идентично уравнению (10). Поэтому коэффициенты этого уравнения имеют тот же смысл, что и в (10). Следует отметить, что в большинстве моделей значение  $d_e^\omega$  равно 1. В стандартных обозначениях уравнение критического скейлинга записывается в следующем виде:

$$[\Delta_\omega D_\omega + \Delta_k D_k - 2\Delta_\phi] \langle \phi\phi \rangle = 0. \quad (32)$$

Параметры уравнения (32) называются критическими размерностями. Следует осознавать, что они представляют собой отличные от канонических размерности. Формулы для этих размерностей можно получить, сопоставив уравнения (32) и (31).

Критические размерности имеют большое значение, поскольку они характеризуют поведение системы в ИК-области.

## 3 Случайное блуждание по случайной поверхности: анализ простой модели

### 3.1 Описание модели

Рассматривается случайное блуждание точечной частицы по двумерной шероховатой поверхности, вложенной в  $(d + 1)$ -мерное пространство. Частица находится на поверхности на высоте  $h(t, \mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}$  — координатная проекция частицы на  $d$ -мерную подложку,  $i = 1 \dots d$ . Таким образом,  $d$  — произвольная (для общности) размерность подложки  $\mathbf{x}$ -пространства.

Основное стохастическое уравнение движения частицы, находящейся в точке  $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}$  во внешнем поле  $F$ , имеет вид: [15]–[25]:

$$\partial_t x_i = F_i(t, \mathbf{x}) + \zeta_i, \quad \langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle_\zeta = 2\nu_0 \delta(t - t'). \quad (33)$$

Здесь  $\zeta_i = \zeta_i(t)$  — гауссов шум с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией,  $\nu_0 > 0$  будет играть роль коэффициента диффузии, а  $F$  — внешнее поле (сила или скорость переноса, в зависимости от конкретного контекста).<sup>1</sup>

Функция распределения вероятностей  $P(t, \mathbf{x})$  удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка

$$\{\partial_t + \partial_i(F_i - \nu_0 \partial_i)\} P(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (34)$$

Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Из физических соображений  $F$  в гравитационном поле подчиняется симметрии  $O(d)$  и инвариантности относительно сдвига  $h \rightarrow h + \text{const}$ , так что оно должно строиться из градиентов поля  $h$ . Таким образом, в простейшем линейном приближении:

$$F_i = -\lambda_0 \partial_i h, \quad (35)$$

с параметром  $\lambda_0 > 0$ , пропорциональным массе частицы  $m$  и ускорению свободного падения  $g$ . Возможные поправки высших порядков к линейному приближению также должны строиться из градиентов поля  $h$  и подчиняться симметрии  $O(d)$ , например:  $\partial_i(\partial_l h \partial_l h)^n$ . Они имеют более высокие канонические размерности по сравнению с (35) (см. табл. 1 в разделе 3.2), нерелевантны в ИК (в смысле Вильсона) и должны быть опущены в анализе ИК-скейлинга.

Тщательная интерпретация градиента  $\partial_i h$  для шероховатой поверхности и само существование (в строгом математическом смысле) соответствующих непрерывных уравнений является серьезной проблемой. В последнее время был достигнут значительный прогресс в модели Кардара-Паризи-Жанга (KPZ); см. [26]–[30] и ссылки в нем.

С более практической физической точки зрения существует очень малый микроскопический масштаб  $a$ , ниже которого поле  $h$  становится гладким и дифференцируемым. В нашей трактовке и трактовке KPZ этот масштаб молчаливо обнуляется, так что поле становится шероховатым. Имеется кажущаяся аналогия с хорошо известной диссипативной аномалией в турбулентности; см., например, [31]. Практически в данной работе используется формальная теория возмущений, где эта проблема не возникает, а выражение (35) применяется без дополнительных комментариев.

<sup>1</sup>Здесь и далее нижний индекс 0 относится к голым параметрам, которые в дальнейшем будут перенормированы.



Простейшая модель шероховатости поверхности, предложенная в контексте ландшафтной эрозии, принадлежит Эдвардсу и Уилкинсону [1]. В непрерывной случае она описывается стохастическим уравнением типа диффузии для поля высот  $h = h(t, \mathbf{x})$ :

$$\{\partial_t - \kappa_0 \partial^2\} h(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad (36)$$

где  $\kappa_0 > 0$  — (своего рода) коэффициент поверхностного натяжения,  $\partial^2 = \partial_i \partial_i$  — оператор Лапласа, а  $f$  — гауссовский случайный шум с нулевым средним и заданной парной корреляционной функцией. Самый популярный выбор — белый шум:

$$\langle f(t, \mathbf{x}) f(t', \mathbf{x}') \rangle_f = D_0 \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (37)$$

с положительной амплитудой  $D_0 > 0$  и подавленным шумом; упрощенная версия последнего

$$\langle f(t, \mathbf{x}) f(t', \mathbf{x}') \rangle_f = D_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (38)$$

В данной работе рассматривается обобщенное уравнение

$$\{\partial_t + \kappa_0 k^{2-\eta}\} h(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad (39)$$

здесь в символической записи, где  $k$  — волновое число, <sup>2</sup> в то время как корреляционная функция берется в степенной форме:

$$\langle f(t, \mathbf{x}) f(t', \mathbf{x}') \rangle_f = D_0 \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} k^{2-d-y} \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\}. \quad (40)$$

Здесь  $\eta$  и  $y$  — произвольные показатели степени, а  $d$  — размерность пространства. Ясно, что выбор  $\eta = 0$ ,  $2 - d - y = 0$  соответствует модели (36), (37); далее будет видно, что модель (36), (38) также может быть получена из (39), (40).

Для линейного стохастического уравнения с гауссовым аддитивным случайным шумом поле  $h$  также является гауссовым полем, определяемым своей парной корреляционной функцией. Для модели (39), (40) последняя имеет следующий вид в Фурье-представлении ( $\omega$ - $\mathbf{k}$ )

$$D_h(\omega, k) = \frac{D_0 k^{2-d-y}}{\omega^2 + [\kappa_0 k^{2-\eta}]^2} = \frac{g_0 u_0 \nu_0^3 k^{2-d-\eta-\varepsilon}}{\omega^2 + [u_0 \nu_0 k^{2-\eta}]^2}. \quad (41)$$

Во второе соотношение введены новые переменные: показатель степени  $\varepsilon$  и амплитуды  $g_0$ ,  $u_0$ , определяемые соотношениями

$$\varepsilon = y - \eta, \quad \kappa_0 = u_0 \nu_0, \quad D_0 = g_0 u_0 \nu_0^3.$$

Они удобны, в частности, тем, что одновременная корреляционная функция

$$D_h(k) = \int \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega, k) \propto g_0 \nu_0^2 k^{-d-\varepsilon} \quad (42)$$

включает параметры  $g_0$ ,  $\varepsilon$ , а закон дисперсии

$$\omega(k) \propto u_0 \nu_0 k^{2-\eta} \quad (43)$$

выражается только через  $u_0$ ,  $\eta$ .

---

<sup>2</sup>Подробное обсуждение дробных производных можно найти в [22].

Выбор  $\eta \neq 0$  можно обосновать представлениями о самоорганизованной критичности (СОК), согласно которым эволюция поверхности песка не является обычным процессом диффузионного типа, а включает несколько дискретных этапов: период ожидания, достижение порога и лавина; см. [32, 33, 34]. Так, согласно [33], самоорганизующиеся критические динамические системы порождают так называемый шум  $1/f^\alpha$ , поскольку характерный размер лавины связан с ее временем жизни степенным законом  $s \propto t^{1+\gamma}$ , где показатель степени  $\gamma$  — скорость, с которой событие распространяется по системе; см. также, например, раздел 1.3.2 в книге [32] и [34, 35]. В представлении  $\omega$ - $\mathbf{k}$  это соответствует закону дисперсии (43) с показателем степени  $\eta = (1 + 2\gamma)/(1 + \gamma)$ . Также стоит отметить, что шум  $1/f^\alpha$  появляется и в моделях случайных блужданий в случайных средах; см. [15, 16].

Модель (41) включает два частных случая, которые интересны сами по себе. В пределе  $u_0 \rightarrow \infty$  и  $g'_0 = g_0/u_0$  функция  $D(\omega, k)$  становится независимой от частоты  $\omega$ , а поле  $h(t, \mathbf{x})$  со временем становится белым. Действительно, в представлении  $(t$ - $\mathbf{k})$  получается

$$D(t - t', k) = \delta(t - t') g'_0 \nu_0^2 k^{-2-d-\varepsilon+\eta}. \quad (44)$$

Здесь показатель  $0 < (\varepsilon - \eta) < 2$  играет роль показателя Гельдера, измеряющего “шероховатость” поля  $h$  (“предел Бэтчелора”  $(\varepsilon - \eta) \rightarrow 2$  соответствует гладкому полю).

В пределе  $u_0 \rightarrow 0$  и при фиксированном  $g_0$  функция  $D_h(k)$  в (42) остается конечной, так что (41) стремится к

$$D_h(\omega, k) = \pi \delta(\omega) g_0 \nu_0^2 k^{-d-\varepsilon}, \quad (45)$$

что соответствует не зависящему от времени (погашенному или замороженному) полю  $h$ . Удивительно, но для  $\varepsilon = 4 - d$  это воспроизводит модель (36), (38), где  $D_h \propto \delta(\omega)/k^4$ .

Подстановка гравитационной силы (35) с случайным полем высот из (39), (40) в уравнение Фоккера-Планка (34) превращает последнее в стохастическое уравнение само по себе. Оно имеет форму

$$\partial_t \theta = \nu_0 \partial^2 \theta + \lambda_0 \partial_i (\theta \partial_i h) + f, \quad (46)$$

где случайное поле  $\theta(t, \mathbf{x})$  можно интерпретировать как плотность блуждающих частиц, а роль (детерминированной) функции распределения вероятностей  $P(t, \mathbf{x})$  теперь передается функции линейного отклика; см. уравнение (65) в главе 3.4.

На этом постановка задачи завершена.

## 3.2 Теоретико-полевая формулировка и перенормировка модели

Согласно общей теореме (см., например, п. 5.3 монографии [36]), полная стохастическая задача (40), (46) эквивалентна теоретико-полевой модели для удвоенного набора полей  $\Phi = \{\theta', h', \theta, h\}$  с функционалом действия де Доминисиса–Янссена:

$$\mathcal{S}(\Phi) = \theta' [-\partial_t \theta + \nu_0 \partial^2 \theta + \lambda_0 \partial_i (\theta \partial_i h)] + \mathcal{S}_h(h', h), \quad (47)$$

$$\mathcal{S}_h(h', h) = \frac{1}{2} h' D_f h' + h' [-\partial_t + \kappa_0 k^{2-\eta}] h. \quad (48)$$

Здесь  $D_f$  — коррелятор (40),  $\theta$  — поле плотности,  $h$  — поле высот и  $\theta', h'$  — вспомогательные поля; подразумеваются все необходимые интегрирования по их аргументам  $x = \{t, \mathbf{x}\}$  и суммирование по повторяющимся индексам. Теоретико-полевая формулировка означает, что различные функции корреляции и отклика исходной стохастической задачи представлены функциональными средними с весом  $\exp \mathcal{S}(\Phi)$ . Поле  $h'$  может быть легко удалено интегрированием по Гауссу, тогда  $\mathcal{S}_h(h', h)$  будет заменено на  $\mathcal{S}_h(h) = -h D_h^{-1} h / 2$  с  $D_h$  из

(41), но расширенное представление (48) более удобно для целей перенормировки. Константу  $\lambda_0$  можно убрать путем масштабирования полей  $h, h'$  и других параметров. Таким образом, в дальнейшем без ограничения общности мы полагаем  $\lambda_0 = 1$ .

Модель (47), (48) соответствует диаграммной технике Фейнмана с голыми пропагаторами  $\langle \theta' \theta \rangle_0$ ,  $\langle hh \rangle_0$ ,  $\langle h' h \rangle_0$  (последний не входит в соответствующие диаграммы) и единственной вершиной  $\theta' \partial_i (\theta \partial_i h)$ .

Хорошо известно, что анализ расходимостей в ультрафиолетовой (УФ) области основан на изучении канонических размерностей, как описано в литературе [36] (раздел 1.15, 1.16). В динамических моделях, в отличие от обычных статических моделей, есть временной масштаб  $[T]$  и пространственный масштаб  $[L]$ ; подробности можно найти в [36] (раздел 1.17, 5.14). Таким образом, каноническая размерность любой величины  $F$  (будь то поле или параметр) определяется двумя числами: размерностью по частоте  $d_F^\omega$  и размерностью по импульсу  $d_F^k$ :

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}.$$

Чтобы найти их, нужно задать нормировку

$$d_{\mathbf{k}}^k = -d_{\mathbf{x}}^k = 1, \quad d_{\mathbf{k}}^\omega = d_{\mathbf{x}}^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$$

и условие безразмерности всех слагаемых в функционале действия относительно обеих канонических размерностей по отдельности. Можно определить полную каноническую размерность величины  $M$  как  $d_M = d_M^k + 2d_M^\omega$ . Множитель 2 необходим, поскольку в действии будут появляться слагаемые с  $\partial^2$  и  $\partial_t$ , и они должны иметь одинаковую размерность. В процессе перенормировки полная каноническая размерность  $d_F$  играет аналогичную роль обычной (импульсной) размерности в статических моделях; подробности можно найти в разделе 5.14 в [36].

В таблице 1 представлены канонические размерности всех полей и параметров модели. Она также включает в себя перенормированные параметры (без индекса "0") и эталонную массу  $\mu$ , который является дополнительным параметром в перенормированной теории; все они появятся позже.

Заметим, что для полей  $\theta'$ ,  $\theta$  все эти размерности могут быть определены однозначно только для произведения  $\theta' \theta$ . Формально это следует из инвариантности функционала действия (47) относительно растяжения  $\theta' \rightarrow \lambda \theta'$ ,  $\theta \rightarrow \lambda^{-1} \theta$ .

Таблица 1: Канонические размерности функционала действия (47), (48).

| $F$          | $\theta' \theta$ | $h'$    | $h$  | $\nu_0, \nu$ | $g_0$         | $u_0$  | $g, u$ | $\mu, m$ |
|--------------|------------------|---------|------|--------------|---------------|--------|--------|----------|
| $d_F^k$      | $d$              | $d + 2$ | $-2$ | $-2$         | $\varepsilon$ | $\eta$ | $0$    | $1$      |
| $d_F^\omega$ | $0$              | $-1$    | $1$  | $1$          | $0$           | $0$    | $0$    | $0$      |
| $d_F$        | $d$              | $d$     | $0$  | $0$          | $\varepsilon$ | $\eta$ | $0$    | $1$      |

Как видно из таблицы 1, модель становится логарифмической (обе константы связи  $g_0, u_0$  становятся безразмерными) при  $\eta = y = 0$  (или, что то же самое, при  $\varepsilon = y = 0$ ) и произвольный  $d$ .<sup>3</sup> Согласно общей стратегии перенормировки, показатели степени

<sup>3</sup>Хотя  $u_0$  не является параметром разложения в теории возмущений, его ренормированный аналог безразмерен, входит в ренормализационные константы и РГ-функции и должен рассматриваться наравне с  $g_0$ . Напомним также, что  $\lambda_0 = 1$ .

$\eta$ ,  $y$  или  $\varepsilon$ , “измеряющие” отклонение от логарифмичности, следует рассматривать как формальные малые параметры того же порядка. УФ-расхождения проявляются в виде особенностей при  $y \rightarrow 0$  в корреляционных функциях; в однопетлевом приближении они имеют вид простых полюсов.

Полная каноническая размерность некоторых 1-неприводимых функций Грина определяется выражением

$$d_\Gamma = (d + 2) - \sum_{\Phi} d_\Phi N_\Phi,$$

где  $N_\Phi$  — количество полей  $\Phi = \{\theta', h', \theta, h\}$ , входящих в функцию Грина, а  $d_\Phi$  — их суммарные канонические размерности.

Формальный показатель расходимости  $\delta_\Gamma$  — это полная размерность функции Грина в логарифмической теории ( $y = \eta = 0$ ), т. е.  $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{y=\eta=0}$ . Поверхностные УФ-расходимости, устранение которых требует введения контрчленов, могут присутствовать в функции Грина  $\Gamma$ , если  $\delta_\Gamma$  — целое неотрицательное число.

При анализе расходимостей в модели (47), (48) необходимо учитывать следующие дополнительные соображения; см. [36] (раздел 5.15) и [37] (раздел 1.4).

(i) Для любой динамической модели такого типа все 1-неприводимые функции без полей отклика содержат замкнутые цепи запаздывающих пропагаторов  $\langle \theta\theta' \rangle_0$  и обращаются в нуль. Таким образом, достаточно рассмотреть функции с  $N_{\theta'} + N_{h'} \geq 1$ .

(ii) Для всех ненулевых функций  $N_{\theta'} = N_\theta$  (иначе диаграммы построить нельзя). Формально это следствие инвариантности функционала действия (47) относительно растяжения  $\theta' \rightarrow \lambda\theta'$ ,  $\theta \rightarrow \lambda^{-1}\theta$ .

(iii) С помощью интегрирования по частям одну производную в вершине можно перенести на поле  $\theta'$ , т.е.  $\theta'\partial_i(\theta\partial_i h) \simeq -(\partial_i\theta')(\partial_i h)\theta$ . Таким образом, в любой 1-неприводимой диаграмме каждое внешнее поле  $\theta'$  или  $h'$  “высвобождает” внешний импульс, и реальный индекс расходимости уменьшается на соответствующее число единиц, т.е.  $\delta' = \delta - N_{\theta'} - N_h$ . Кроме того, эти поля входят в контрчлены только в виде пространственных градиентов. Это наблюдение исключает контрчлены  $\theta'\partial_t\theta$  и  $(\theta'\theta)^2$ , последний допускается формальным индексом для  $d \leq 2$ .

(iv) Ясно, что поля  $\theta'$ ,  $\theta$  не влияют на статистику поля  $h$ . В терминах теории поля эта “пассивность” означает, что любая 1-неприводимая функция Грина с  $N_{\theta'} = 0$ ,  $N_\theta > 0$  и  $N_h + N_{h'} > 0$  обращается в нуль: соответствующие диаграммы построить невозможно.

С учетом этих соображений получается:

$$\delta = (d + 2) - d(N_\theta + N_{h'}), \quad \delta' = (d + 2) - (d + 1)N_\theta - N_h - dN_{h'}$$

(напомним, что  $N_{\theta'} = N_\theta$ , так что указано только  $N_\theta$ ).

Тогда непосредственный анализ показывает, что поверхностные расходимости в нашей модели присутствуют только в 1-неприводимых функциях  $\langle \theta'\theta \rangle$  и  $\langle \theta'\theta h \rangle$ , а соответствующие контрчлены обязательно сокращаются до форм  $\theta'\partial^2\theta$  ( $\delta = 2$ ,  $\delta' = 1$ ) и  $(\partial_i\theta')(\partial_i h)\theta$  ( $\delta = 2$ ,  $\delta' = 0$ ). Такие члены уже присутствуют в действии (47), а это означает, что наша модель (47), (48) мультипликативно перенормируема только с двумя независимыми константами перенормировки  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Перенормированное действие имеет вид

$$\mathcal{S}_R(\Phi) = \theta' [-\partial_t\theta + Z_1\nu\partial^2\theta + Z_2\partial_i(\theta\partial_i h)] + \mathcal{S}_{hR}(h', h), \quad (49)$$

что естественным образом можно сформулировать как перенормировка поля  $h$  и коэффициента  $\nu_0$ ; перенормировка произведения  $\theta\theta'$  не требуется:

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad Z_\nu = Z_1, \quad Z_h = Z_2, \quad Z_{\theta\theta'} = 1. \quad (50)$$

Функционал (48) не перенормируется,  $\mathcal{S}_{hR}(h', h) = \mathcal{S}_h(h', h)$ , но должен быть переписан в перенормированных переменных с учетом уравнений (40) и (41):

$$g_0 = g\mu^y Z_g, \quad u_0 = u\mu^\eta Z_u, \quad \kappa_0 = \kappa Z_\kappa, \quad (51)$$

где ренормализационная масса  $\mu$  введена так, что ренормированные заряды  $g$  и  $u$  полностью безразмерны. Тогда из отсутствия перенормировки  $\mathcal{S}_h$  следует, что

$$Z_h Z_{h'} = 1, \quad Z_{h'}^2 Z_g Z_u Z_\nu^3 = 1, \quad Z_u Z_\nu = Z_\kappa = 1. \quad (52)$$

Вместе с (50) это окончательно дает следующие соотношения:

$$Z_g = Z_2^2 Z_1^{-1}, \quad Z_u = Z_1^{-1}, \quad Z_\nu = Z_1. \quad (53)$$

Константы перенормировки  $Z_1$  и  $Z_2$  вычислены в ведущем однопетлевом приближении (первый порядок пертурбативного разложения по  $g$ ). Их достаточно найти при  $\eta = 0$ , так как аномальные размерности в схеме перенормировки с минимальным вычитанием (MS) не зависят от таких параметров, как  $\eta$  и  $y$ , а показатель  $y$  сам по себе дает УФ регуляризация. Тогда получается:

$$Z_1 = 1 - \frac{g}{y} \frac{C_d}{2d} \frac{(u-1)}{(u+1)^2}, \quad Z_2 = 1 + \frac{g}{y} \frac{C_d}{2d} \frac{1}{(u+1)^2}, \quad (54)$$

с поправками более высокого порядка в  $g$ . Здесь  $C_d = S_d/(2\pi)^d$ ,  $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  — площадь поверхности единичной сферы в  $d$ -мерном пространстве. Общие множители удобно включить в константу связи  $g$ , что дает

$$Z_1 = 1 - \frac{g}{y} \frac{(u-1)}{(u+1)^2}, \quad Z_2 = 1 + \frac{g}{y} \frac{1}{(u+1)^2}. \quad (55)$$

Для  $\eta \neq 0$  выражения (54), (55) были бы бесконечными суммами; см., например, [39].

### 3.3 Уравнения РГ, функции РГ и неподвижные точки

Поскольку исследуемая модель мультипликативно перенормируема, соответствующие уравнения РГ выводятся стандартным образом. В частности, для некоторой перенормированной (полной или связной) функции Грина  $W^R$  уравнение РГ имеет вид:

$$\left\{ \mathcal{D}_\mu + \beta_g \partial_g + \beta_u \partial_u - \gamma_\nu \mathcal{D}_\nu - \sum_{\Phi} N_{\Phi} \gamma_{\Phi} \right\} W^R(g, u, \nu, \mu; \dots) = 0. \quad (56)$$

Здесь многоточие обозначает другие переменные (время и координаты или частоты и импульсы),  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $\mathcal{D}_x = x\partial_x$  для любой переменной  $x$  и суммирование проводится по всем полям  $\Phi = \{\theta', h', \theta, h\}$ .

Коэффициенты в РГ-дифференциальном операторе (56) — аномальные размерности  $\gamma$  и  $\beta$ -функции — определяются как:

$$\gamma_\alpha = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\alpha \quad \text{для любой } \alpha, \quad \beta_g = \tilde{\mathcal{D}}_\mu g, \quad \beta_u = \tilde{\mathcal{D}}_\mu u, \quad (57)$$

где  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  — дифференциальная операция  $\mathcal{D}_\mu$  при фиксированных голых (неперенормированных) параметрах; см. раздел 1. 24, 1. 25 в [36].

Из (50)–(53) и определений (57) следует, что

$$\gamma_{\theta\theta'} = 0, \quad \gamma_h = -\gamma_{h'} = \gamma_2, \quad \gamma_g = 2\gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_u = -\gamma_v = -\gamma_1, \quad (58)$$

$$\beta_g = g[-\varepsilon - \gamma_g], \quad \beta_u = u[-\eta - \gamma_u]. \quad (59)$$

Из (59) и однопетлевого результата (55) получается:

$$\gamma_1 = g \frac{u-1}{(u+1)^2}, \quad \gamma_2 = -g \frac{1}{(u+1)^2},$$

$$\beta_g = g \left[ -\varepsilon + g \frac{2u}{(u+1)^2} \right], \quad \beta_u = u \left[ -\eta + g \frac{u-1}{(u+1)^2} \right], \quad (60)$$

с поправками более высокого порядка в  $g$ .

Асимптотическое поведение функций Грина в инфракрасной области определяется ИК-притягивающими неподвижными точками соответствующих уравнений РГ. Координаты неподвижных точек  $g^*$ ,  $u^*$  находятся из условия одновременного обращения в нуль всех  $\beta$ -функций:

$$\beta_g(g^*, u^*) = \beta_u(g^*, u^*) = 0.$$

Тип неподвижной точки определяется матрицей производных  $\Omega_{ij} = \partial_i \beta_j(g^*)$  в данной точке  $g_i = \{g, u\}$ : для ИК-притягивающей точки все собственные значения должны иметь положительные вещественные части.

Анализ выражений (60) выявляет четыре фиксированные точки:

(i) Гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g^* = 0, \quad u^* = 0;$$

(ii) нетривиальная неподвижная точка:

$$g^* = \frac{2(\varepsilon - \eta)^2}{\varepsilon - 2\eta}, \quad u^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 2\eta}.$$

Точка (i) ИК-притягивающая для  $\varepsilon < 0, \eta < 0$ , а точка (ii) является ИК-притягивающей для  $\varepsilon > 0, \eta < \varepsilon/2$ .

Еще две точки находятся следующим образом. Чтобы исследовать предельный случай  $u \rightarrow \infty$  с фиксированным  $g/u$ , необходимо перейти к новым переменным:  $g' \equiv g/u$  и  $w \equiv 1/u$ . Для этого случая получаем

$$\beta_{g'} = g' \left[ \eta - \varepsilon + \frac{g'}{w+1} \right], \quad \beta_w = w \left[ \eta + g' \frac{w-1}{(w+1)^2} \right]. \quad (61)$$

Находя нули  $\beta$ -функций, можно найти две дополнительные неподвижные точки:

(iii) Гауссова (свободная) неподвижная точка:

$$g'^* = 0, \quad w^* = 0;$$

(iv) нетривиальная неподвижная точка:

$$g'^* = \varepsilon - \eta, \quad w^* = 0.$$

Точка (iii) является ИК-притягивающей, если  $\varepsilon > 0, \varepsilon/2 < \eta < \varepsilon$ , а точка (iv) является ИК-притягивающей, если  $\varepsilon < 0, \eta > 0$  или  $\varepsilon > 0, \eta > \varepsilon$ .

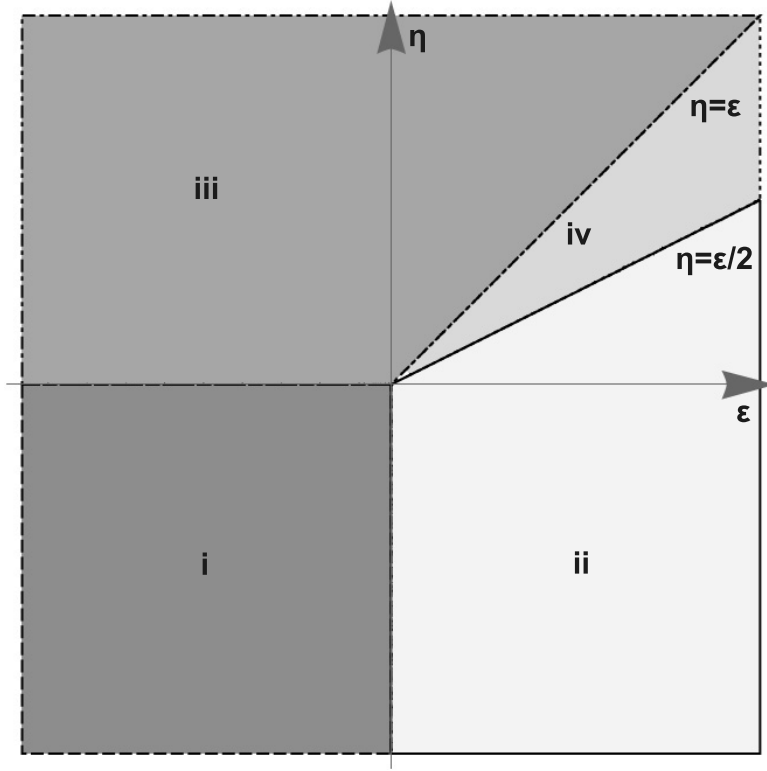


Рис. 1: Области устойчивости неподвижных точек (i)–(iv).

Общая картина устойчивости неподвижных точек в плоскости  $\varepsilon$ – $\eta$  показана на рис. 1.

В рамках однопетлевого приближения области ИК-устойчивости для всех точек задаются секторами, покрывающими всю плоскость без зазоров и перекрытий между ними.

Некоторые замечания. Ясно, что точки Гаусса соответствуют случаям, когда на динамику поля  $\theta$  не влияет статистика поля высот  $h$  (только в ведущем порядке ИК-асимптотики!). В этих случаях мы имеем дело с обычным случайным блужданием.

Точка (iv) соответствует предельному случаю (44), когда поле  $h$  по сравнению с  $\theta$  ведет себя так, как если бы оно было  $\delta$ -коррелировано во времени.

Однако не нашлось нетривиальной точки, которая соответствовала бы замороженному пределу (45). Это следует из того, что функция  $\beta_g$  в (60) становится тривиальной при  $u \rightarrow 0$ :  $\beta_g = -\varepsilon g$ . Подобная тривиальность наблюдалась ранее в моделях диффузии в не зависящих от времени потенциальных векторных полях, где была показана ее точность во всех порядках теории возмущений [19, 20]. Поскольку эти модели имеют близкое формальное сходство с пределом (45) и ее частным случаем (36), (38), можно предположить, что в последних случаях  $\beta_g$  так же тривиален.

### 3.4 Критические размерности и скейлинг

Наличие ИК-притягивающих неподвижных точек уравнений РГ указывает на возможность скейлингового поведения корреляционных функций в ИК-диапазоне.

В динамических моделях критическая размерность любого поля или параметра  $F$  задается выражением (см. раздел 5.16 и 6.7 в [36] и раздел. 2.1 в [37]):

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^*$$

(со стандартным соглашением о нормировке  $\Delta_{\mathbf{k}} = -\Delta_{\mathbf{x}} = 1$ ). Здесь и далее  $\gamma^*$  обозначает значение аномальной размерности  $\gamma$  в неподвижной точке.

Для точек Гаусса (i) и (iii) имеем

$$\Delta_{\theta'\theta} = d, \quad \Delta_\omega = 2. \quad (62)$$

Для неподвижной точки (ii) из соотношений (58) и определений (59) получаются точные результаты:

$$\Delta_{\theta'\theta} = d, \quad \Delta_\omega = 2 - \eta. \quad (63)$$

Как уже упоминалось, точка (iv) соответствует пределу (44), когда пропагатор  $\langle hh \rangle_0$  становится  $\delta$ -коррелированным во времени. В результате замкнутые графы запаздывающих пропагаторов  $\langle \theta\theta' \rangle_0$  появляются почти на всех диаграммах, имеющих значение для процедуры перенормировки, и поэтому исчезают. Единственным исключением является однопетлевая диаграмма, дающая вклад в  $Z_1$ . Таким образом,  $Z_2 = 1$  тождественно, а  $Z_1$  точно задается однопетлевым выражением; см. обсуждение модели быстрого изменения пассивной скалярной адвекции Крейчнана [38]. Тогда легко получить точные выражения для критических размерностей:

$$\Delta_{\theta'\theta} = d, \quad \Delta_\omega = 2 - \varepsilon + \eta. \quad (64)$$

В качестве примера можно рассмотреть среднеквадратичное расстояние случайного блуждания по шероховатой поверхности. Для частицы, начавшей движение в момент  $t = 0$  из начала координат  $\mathbf{x} = 0$ , оно определяется как:

$$R^2(t) = \int d\mathbf{x} x^2 \langle \theta(t, \mathbf{x}) \theta'(0, \mathbf{0}) \rangle,$$

где  $t > 0$  — более позднее время, а  $\mathbf{x}$  — соответствующая текущая позиция. Подстановка скейлингового представления для линейной функции отклика

$$P(t, \mathbf{x}) = \langle \theta(t, \mathbf{x}) \theta'(0, \mathbf{0}) \rangle \simeq r^{-\Delta_{\theta\theta'}} F(tr^{-\Delta_\omega}) \quad (65)$$

дает:

$$R^2(t) \propto t^{(d+2-\Delta_{\theta\theta'})/\Delta_\omega}.$$

Учитывая точное соотношение  $\Delta_{\theta'\theta} = d$ , справедливое для всех неподвижных точек (i)–(iv), приходим к закону распространения

$$R^2(t) \propto t^{2/\Delta_\omega}, \quad (66)$$

с точными выражениями  $\Delta_\omega = 2$  для точек (i), (iii),  $\Delta_\omega = 2 - \eta$  для (ii) и  $\Delta_\omega = 2 - \varepsilon + \eta$  для (iv).

### 3.5 Заключение

Исследовалась модель случайного блуждания частицы по шероховатой флуктуирующей поверхности, описываемого уравнением Фоккера–Планка для частицы в постоянном гравитационном поле, а поверхность моделировалась (обобщенной) моделью Эдвардса–Уилкинсона. Полная стохастическая задача (34), (35), (39), (40) отображается в мультипликативно перенормируемую теоретико-полевую модель (47), (48).

Соответствующие уравнения РГ показывают две гауссовские (свободные) и две нетривиальные фиксированные точки, что означает, что система демонстрирует различные типы поведения ИК-скейлинга (большие времена, большие расстояния). Хотя практический



расчет ограничен ведущим однопетлевым приближением, основные критические размерности находятся точно.

В качестве наглядного примера было рассмотрено среднеквадратичное смещение блуждающей частицы (в другой интерпретации радиус облака частиц). Он показывает, что частица не остается в конечной области, а путешествует по всей системе с законом распространения, подобным обычному случайному блужданию, но, вообще говоря, с другими показателями степени; см. (66) и текст ниже.

Как видно, даже сравнительно простая модель демонстрирует интересные типы ИК-поведения. Таким образом, интересно изучить более сложные ситуации. Можно выделить несколько направлений возможного обобщения.

Линейные стохастические уравнения, такие как (36), (39) (соответствующие гауссовой статистике для поля высот) могут быть заменены нелинейными моделями, такими как KPZ [2] или модель Павлика [5, 9].

Хотя выражения (63), (64) для критических размерностей точны, они получены в рамках теории возмущений, основанной на предположении, что параметры разложения  $\varepsilon$  и  $\eta$  малы. Тогда предполагается, что однопетлевая схема неподвижных точек качественно верна. Однако в некоторых случаях происходит кроссовер в скейлинговом поведении для конечных значений параметров, аналогичных  $\varepsilon$  и  $\eta$  [39, 40]. В теоретико-полевом подходе этот эффект можно связать с появлением составных операторов с отрицательной размерностью [39]. Этот вопрос требует специального исследования.

В некоторых случаях движение частицы не является обычным случайным блужданием (33), а описывается, например, полетами Леви; см., например, [22]. Эта возможность подтверждается представлениями о самоорганизованной критичности, что подстилающая поверхность развивается лавинами [32]–[35], а частица может скользить по поверхности. Если это так, то естественно заменить оператор Лапласа в уравнении Фоккера–Планка (34) дробной производной:  $-\partial^2 \sim k^2 \rightarrow k^{2-\eta'}$  с некоторым новым показателем  $\eta'$ .

Особенно интересно включить анизотропию (как следствие общего наклона поверхности). Это можно сделать, описав поле  $h$  моделью Пастора–Саторраса–Ротмана для размываемого ландшафта [10, 11] или моделью Хуа–Кардара песочной кучи [41, 42].

## 4 Литература

### Список литературы

- [1] Edwards, S.F.; Wilkinson D.R. The Surface Statistics of a Granular Aggregate. *Proc. Roy. Soc. (Lond.)* **1982**, *381*, 17.
- [2] Kardar, M.; Parisi, G.; Zhang, Y.-C. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.* **1986**, *56*, 889.
- [3] Yan, H.; Kessler, D.A.; Sander, L.M. Roughening phase transition in surface growth. *Phys. Rev. Lett.* **1990**, *64*, 926.
- [4] Yan, H.; Kessler, D.A.; Sander, L.M. Kinetic Roughening in Surface Growth. *MRS Online Proceedings Library* **1992**, *278*, 237–247.
- [5] Pavlik, S.I. Scaling for a growing phase boundary with nonlinear diffusion. *JETP* **1994**, *79*, 303 [Translated from the Russian: *ZhETF* **1994**, *106*, 553.]
- [6] Halpin-Healy, T.; Zhang, Y.-C. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.* **1995**, *254*, 215-414.
- [7] Аникин, С.А., Завьялов, О.И. and Поливанов, М.К., 1973. Одно простое доказательство теоремы Боголюбова–Парасюка. *Теоретическая и математическая физика*, *17*(2), pp.189-198.
- [8] Barabási A.-L.; Stanley H.E. *Fractal Concepts in Surface Growth*; Cambridge University Press: Cambridge, 1995.
- [9] Antonov, N.V.; Vasil'ev, A.N. The quantum-field renormalization group in the problem of a growing phase boundary. *JETP* **1995**, *81*, 485 [Translated from the Russian: *ZhETF* *108*, 885.]
- [10] Pastor-Satorras, R.; Rothman, D.H. Stochastic equation for the erosion of inclined topography. *Phys. Rev. Lett.* **1998**, *80*, 4349.
- [11] Pastor-Satorras, R.; Rothman, D.H. Scaling of a slope: The erosion of tilted landscapes. *J. Stat. Phys.* **1998**, *93*, 477.
- [12] Antonov, N.V.; Kakin, P.I. Scaling in erosion of landscapes: Renormalization group analysis of a model with infinitely many couplings. *Theor. Math. Phys.* **2017**, *190*(2), 193-203.
- [13] Duclut, C.; Delamotte, B. Nonuniversality in the erosion of tilted landscapes. *Phys. Rev. E* **2017**, *96*, 012149.
- [14] Song, T.; Xia, H. Kinetic roughening and nontrivial scaling in the Kardar–Parisi–Zhang growth with long-range temporal correlations. *J. Stat. Mech.* **2021**, *2021*, 073203.
- [15] Marinari, E.; Parisi, G.; Ruelle D.; Windey, P. Random Walk in a Random Environment and  $1/f$  Noise *Phys. Rev. Lett.* **1983**, *50*, 1223.

- [16] Marinari, E.; Parisi, G.; Ruelle D.; Windey, P. On the interpretation of  $1/f$  noise. *Commun. Math. Phys.* **1983**, *89*, 1-12.
- [17] Fisher, D.S. Random walks in random environments. *Phys. Rev. A* **1984**, *30*, 960.
- [18] Fisher, D.S.; Friedan, D.; Qiu, Z.; Shenker, S.J.; Shenker, S.H. Random walks in two-dimensional random environments with constrained drift forces. *Phys. Rev. A* **1985**, *31*, 3841.
- [19] Kravtsov, V.E.; Lerner, I.V.; Yudson, V.I. The Einstein relation and exact Gell-Mann-Low function for random walks in media with random drifts. *Phys. Lett.* **1986**, *119A*, 203-206.
- [20] Honkonen, J.; Pis'mak, Yu.M.; Vasil'ev, A.N. Zero beta function for a model of diffusion in potential random field. *J. Phys. A: Math. Gen.* **1988**, *21*, L835-L841.
- [21] Bouchaud, J.-P.; Georges, A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications. *Phys. Rep.* **1990**, *195*, 127-293.
- [22] Metzler, R.; Klafter, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.* **2000**, *339(1)*, 1-78.
- [23] Zeitouni O. *Random walks in random environment. In: Computational Complexity; Meyers, R. (Eds.); Springer: NY, 2012.*
- [24] Révész, P. *Random walk in random and non-random environments. 3rd edition; World Scientific Book, 2013.*
- [25] Haldar, A.; Basu, A. Marching on a rugged landscape: Universality in disordered asymmetric exclusion processes. *Phys. Rev. Research*, **2020**, *2*, 043073.
- [26] Hairer, M. Solving the KPZ equation. *Annals of Mathematics* **2013**, *178(2)*, 559.
- [27] Hairer, M.; Shen H. A central limit theorem for the KPZ equation. *arXiv:1507.01237* **2016**.
- [28] Hairer, M. *Exactly solving the KPZ equation. In: Random Growth Models. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. 75; Damron, M.; Rassoul-Agha, F.; Seppäläinen, T. (Eds.), 2018.*
- [29] Corwin, I.; Shen, H. Some recent progress in singular stochastic partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **2020**, *57*, 409.
- [30] Barraquand, G.; Corwin, I. Stationary measures for the log-gamma polymer and KPZ equation in half-space. *arXiv:2203.11037* **2022**.
- [31] Falkovich, G.; Gawędzki, K.; Vergassola, M. Particles and fields in fluid turbulence. *Rev. Mod. Phys.* **2001**, *73*, 913.
- [32] Pruessner, G. *Self-Organized Criticality: Theory, Models and Characterisation; Cambridge University Press, 2012.*
- [33] Bak, P.; Tang, C.; Wiesenfeld, K. Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.* **1987**, *59*, 381.

- [34] Bak, P.; Tang, C.; Wiesenfeld, K. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A* **1988**, *38*, 364.
- [35] Maslov, S.; Tang, C.; Zhang, Y.-C.  $1/f$  Noise in Bak-Tang-Wiesenfeld Models on Narrow Stripes. *Phys. Rev. Lett.* **1999**, *83*, 2449.
- [36] Vasiliev, A.N. *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical behaviour Theory and Stochastic Dynamics*; Chapman & Hall/CRC: Boca Raton, 2004 [Translated from the Russian: St Petersburg Institute of Nuclear Physics: Gatchina, Russia, 1999 (ISBN 5-86763-122-2).]
- [37] Adzhemyan, L.Ts.; Antonov, N.V.; Vasil'ev, A.N. *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*; Gordon & Breach: London, 1999.
- [38] Adzhemyan, L.Ts.; Antonov, N.V.; Vasil'ev, A.N. Renormalization group, operator product expansion, and anomalous scaling in a model of advected passive scalar. *Phys. Rev. E* **1998**, *58*, 1823.
- [39] Antonov, N.V. Anomalous scaling regimes of a passive scalar advected by the synthetic velocity field. *Phys. Rev. E* **1999**, *60*, 6691.
- [40] Avellaneda, M., Majda, A.; Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport II: Non-Gaussian statistics, fractal interfaces, and the sweeping effect. *Commun. Math. Phys.*, **1992**, *146*, 139.
- [41] Hwa, T.; Kardar, M. Dissipative transport in open systems: An investigation of self-organized criticality. *Phys. Rev. Lett.* **1989**, *62(16)*, 1813.
- [42] Hwa, T.; Kardar, M. Avalanches, hydrodynamics and great events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, **1992**, *45*, 7002.