Отзыв научного руководителя о магистерской диссертации Мишуловича Арсения Александровича "Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю лакуны: операторные оценки при учете корректора”

Магистерская диссертация А. А. Мишуловича относится к теории усреднения (гомогенизации), которая изучает дифференциальные операторы с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Работа опирается на теоретико-операторный подход к теории усреднения.

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор

$$A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, равномерно положительно определенной и периодической с решеткой периодов $\mathbb{Z}^d$. Вещественный потенциал $p(\mathbf{x})$ также считается периодическим. Пусть

$$A = A_1 = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} + p(\mathbf{x}).$$

Предполагается, что нижний край спектра оператора A есть точка $\lambda_0 = 0$; в этом случае оператор A допускает удобную факторизацию.

Хорошо известно, что спектр оператора A является объединением замкнутых отрезков $[\nu_s, \mu_s]$ (спектральных зон):

$$\sigma(A) = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} [\nu_s, \mu_s].$$

Зоны могут перекрываться. Между зонами могут открываться лакуны. (Согласно гипотезе Бете–Зоммерфельда, в многомерном случае число лакун конечно.) Рассмотрим зону $[\nu_{s+1}, \mu_{s+1}]$, такую что лакуна (μ_s, ν_{s+1}) непуста. Обозначим $\lambda_- = \mu_s$, $\lambda_+ = \nu_{s+1}$. Тогда точка λ_+ является правым краем лакуны (λ_-, λ_+). Для оператора A_ε этот край перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\lambda_+$.

Пусть $E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$ — спектральный проектор оператора A_ε для полуоси $[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$. В работе Арсения Мишуловича изучается асимптотическое поведение при малом ε полугруппы оператора A_ε, срезанной спектральным проектором $E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$, то есть поведение оператора $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$, $t > 0$. Результат формулируется в терминах спектральных характеристик оператора A вблизи точки λ_+.

Нужно рассмотреть семейство операторов $A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} + p(\mathbf{x})$ на ячейке $(0,1)^d$ с $\boldsymbol{\xi}$-квазипериодическими граничными условиями.

Через $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, обозначим последовательные собственные значения оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ (зонные функции).

Предполагается, что край лакуны λ_+ устроен регулярно. Это означает, что точка λ_+ является минимумом только одной зонной функции $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$; минимум достигается лишь в конечном числе точек $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_m$; каждая точка $\boldsymbol{\xi}_j$ есть точка невырожденного минимума функции $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) =: E(\boldsymbol{\xi})$. Тогда

$$E(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+ + b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^3), \quad |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j| \to 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь b_j — положительно определенные формы. Нормированную собственную функцию оператора $A(\boldsymbol{\xi})$, отвечающую собственному значению $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$, обозначим через $\psi_{s+1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) =: \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Положим

$$\psi_j(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j), \quad j = 1, \dots, m.$$

Первый основной результат: показано, что при фиксированном $t > 0$ и $\varepsilon \to 0$ оператор $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$ приближается по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ суммой операторов $e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2}[\psi_j^\varepsilon] e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]$, $j = 1, \dots, m$. Здесь $[\psi_j^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $\psi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi_j(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Установлена оценка погрешности

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty) - e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{m} [\psi_j^\varepsilon] e^{-tb_j(\mathbf{D})} [\overline{\psi_j^\varepsilon}] \right\| \le C e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{t + \varepsilon^2}}.$$

Порядок погрешности $O(\varepsilon)$ (по модулю множителя $e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2}$) — точный. *Второй результат*: найдена аппроксимация оператора $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty)$ при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ (по модулю множителя $e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2}$).

Результаты применяются к исследованию поведения решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial_t u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) &= -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, t) + e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2} F_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) &= f_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty) f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ F_\varepsilon(\cdot, t) &= E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, \infty) F(\cdot, t), \quad F \in L_p((0, T); L_2(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Метод основан на применении разложения Флоке для оператора A и использовании спектральных свойств эллиптического оператора с периодическими коэффициентами.

По результатам работы опубликована статья
А. А. Мишулович, *Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны*, Записки научных семинаров ПОМИ **516** (2022), 135–175.

В магистерской диссертации А. А. Мишуловича получены новые содержательные результаты, представляющие интерес для теории усреднения. Арсений работает много и увлеченно, с интересом и инициативой. Освоил разнообразные методы спектральной теории операторов и теории усреднения.

Арсений Мишулович занимался и другой задачей на близкую тему. Результаты опубликованы в статье
А. А. Мишулович, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина, *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме*, Записки научных семинаров ПОМИ **519** (2022), 114–151.

В этой статье получено приближение для резольвенты одномерного оператора A_ε вблизи края внутренней лакуны в “энергетической” норме.

Арсений Мишулович является исполнителем по проекту “Актуальные проблемы теории периодических и квазипериодических операторов”, поддержанному РНФ (руководитель Т. А. Суслина, 2022–2024). Он успешно выступил с докладом на “Шестой молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике” в декабре 2022 года. Успехи Арсения Мишуловича отмечены стипендией имени О.А. Ладыженской Санкт-Петербургского математического общества за 2022/2023 учебный год.

Считаю, что Арсений Мишулович сформировался как способный молодой исследователь с хорошей перспективой.

Научный руководитель,
профессор Т. А. Суслина

23.05.2023