Санкт-Петербургский государственный университет

МИШУЛОВИЧ Арсений Александрович

Выпускная квалификационная работа

Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю лакуны: операторные оценки при учете корректора

Уровень образования: магистратура
Направление: 03.04.02 «Физика»
Основная образовательная программа: ВМ.5511.2021 «Физика»

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н., **Суслина Татьяна Александровна**

Рецензент:
профессор РАН, д.ф.-м.н., **Борисов Денис Иванович**

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1. Введение **2**
1.1. Усреднение в пределе малого периода 2
1.2. Операторные оценки погрешности 3
1.3. Усреднение на краю внутренней спектральной лакуны 4
1.4. Постановка задачи 5
1.5. Обозначения 6

2. Спектральное разложение периодического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Формулировка основных результатов **6**
2.1. Определение оператора. Факторизация 6
2.2. Спектральные характеристики оператора A 7
2.3. Оператор A_ε. Основные результаты 12

3. Доказательство основных результатов **14**
3.1. Предварительные замечания 14
3.2. Вспомогательные утверждения 15
3.3. Доказательство основных результатов 21

4. Усреднение решений задачи Коши **25**
4.1. Приближение решения в старшем порядке 25
4.2. Приближение решения с корректором 27

5. Заключение **30**

6. Список использованной литературы **30**

1. Введение

1.1. Усреднение в пределе малого периода

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации). В теории усреднения, в частности, рассматривается поведение в пределе малого периода решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Такие задачи представляют значительный интерес как в теоретическом плане, так и для приложений, поэтому им посвящена обширная литература (см., например, [1], [2], [3]).

Рассмотрим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решетки Γ. Для любой Γ–периодической функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ в $\mathbb{R}^d$ введем обозначение $\varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{x})$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla, \tag{1.1}$$

где $g(\boldsymbol{x})$ — симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\boldsymbol{x})$ положительно определена, ограничена и Γ–периодична. Строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму. Оператор (1.1) моделирует простейшие случаи микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$–периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ — обобщенное решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) + \varkappa^2 u_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\varkappa > 0$. При $\varepsilon \longrightarrow 0$ решение u_ε сходится в некотором смысле к решению u_0 "усредненного" уравнения:

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\boldsymbol{x}) + \varkappa^2 u_0(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \tag{1.3}$$

Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной.* Оператор $\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0\nabla$ называется *эффективным оператором* для $\mathcal{A}_\varepsilon$. Эффективная матрица g^0 определяется по хорошо известной процедуре (см., например, [1, глава 2, §3], [4, глава 3, §1]), согласно которой требуется решить вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Помимо нахождения эффективных коэффициентов, в теории усреднения применительно к уравнению (1.2) интерес представляют также вопросы о характере сходимости u_ε к u_0, оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$, построение дальнейших членов асимптотического разложения решения u_ε по степеням ε и т.д. Поскольку $u_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ при малом ε.

Далее обсудим задачу Коши для параболического уравнения

$$\begin{aligned} &\partial_t v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0; \\ &v_\varepsilon(\boldsymbol{x},0) = \phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Здесь также при $\varepsilon \longrightarrow 0$ решение v_ε сходится в некотором смысле к решению v_0 "усредненной" задачи:

$$\begin{aligned} &\partial_t v_0(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{div} g^0\nabla v_0(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ t > 0; \\ &v_0(\boldsymbol{x},0) = \phi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Поскольку $v_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\phi$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}$ при $t > 0$ и малом ε.

1.2. Операторные оценки погрешности

Задачи об усреднении существенно различаются как своими постановками, так и используемыми методами и характером полученных результатов. Мы используем спектральный подход, который был предложен в работах [4], [5], [6], [7], где усреднение рассматривалось как пороговый эффект на краю спектра. В [4] и [5] исследовалось усреднение резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2\,\mathrm{I})^{-1}$ при малом $\varepsilon > 0$. В рамках этого подхода была получена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.6}$$

где u_ε — решение уравнения (1.2), а u_0 — решение "усредненного" уравнения (1.3). Оценка (1.6) точна по порядку; постоянная C явно контролируется в терминах данных задачи. В операторных терминах это означает, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ сходится по операторной норме в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ к резольвенте эффективного оператора $(\mathcal{A}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}$, причем

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В [6] была получена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ с учетом следующего члена асимтотического разложения:

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2. \tag{1.7}$$

Самосопряженный оператор $K(\varepsilon)$, называемый *корректором*, имеет вид

$$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^*, \quad K_1(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{d}[\Phi_j^\varepsilon]\partial_j(\mathcal{A}^0 + \varkappa^2 I)^{-1},$$

где Φ_j — Γ–периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\boldsymbol{x})(\nabla\Phi_j(\boldsymbol{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int\limits_{\Omega}\Phi_j(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. В работе [7] было получено приближение резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ по так называемой "энергетической" норме, то есть по норме операторов, действующих из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\left\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.8}$$

Обратим внимание, что корректоры в оценках (1.7) и (1.8) различны, то есть вид корректора зависит от типа нормы.

Другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [8], [9]; см. также обзор [10].

В работах [11], [12], [13], [14] спектральный подход был применен для изучения усреднения периодической параболической задачи Коши на нижнем краю спектра. В [11], [12] была получена оценка:

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t) - v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где v_ε — решение задачи Коши (1.4), а v_0 — решение соответствующей "усредненной" задачи (1.5). В операторных терминах данная оценка означает, что при фиксированном $t > 0$ и $\varepsilon \longrightarrow 0$ полугруппа $e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon}$ сходится по операторной норме в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ к полугруппе от эффективного оператора $e^{-t\mathcal{A}^0}$, причем

$$\left\| e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-t\mathcal{A}^0} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}. \tag{1.9}$$

Усреднение параболической задачи Коши на нижнем краю спектра при учете корректора изучалось в [13], где была получена оценка

$$\left\| e^{-t\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-t\mathcal{A}^0} - \varepsilon \widehat{K}(\varepsilon, t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon^2}{t}.$$

Здесь корректор $\widehat{K}(\varepsilon, t)$ имеет вид

$$\widehat{K}(\varepsilon, t) = \widehat{K}_1(\varepsilon, t) + \widehat{K}_1(\varepsilon, t)^*, \quad \widehat{K}_1(\varepsilon, t) = \sum_{j=1}^{d} [\Phi_j^\varepsilon] \partial_j e^{-t\mathcal{A}^0}.$$

В работе [14] исследовалось усреднение периодической параболической задачи Коши на нижнем краю спектра в пространстве $H^1(\mathbb{R}^d)$. Также для изучения усреднения периодической параболической задачи Коши применялся и метод сдвига [15].

Отметим, что в [4, 6, 7, 11, 12, 13, 14] изучались операторы более общего вида

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(\boldsymbol{x}),$$

где $g(\boldsymbol{x})$ — положительно определенная и ограниченная матрица-функция с вещественными элементами, а $p(\boldsymbol{x})$ — вещественная функция. Предполагалось, что $g(\boldsymbol{x})$ и $p(\boldsymbol{x})$ Γ–периодичны и $p(\boldsymbol{x})$ принадлежит классу $L_q(\Omega)$ с подходящим q. В цитируемых работах аппроксимации также были найдены для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка.

1.3. Усреднение на краю внутренней спектральной лакуны

Понимание порогового характера эффекта усреднения влечет вопрос: спектр периодического оператора $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Этот вопрос впервые обсуждался в работе [16], где исследовалось усреднение резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ в точке, близкой к краю внутренней спектральной лакуны. При этом в работе [16] рассматривалась одномерная задача.

Рассмотрим постановку задачи в одномерном случае. Для примера рассмотрим случай, когда ν — (невырожденный) левый край зоны с нечетным номером ($\geqslant 3$) в спектре оператора $\mathcal{A}$. Точка ν для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\nu$, т.е. в область высоких энергий. Вместо уравнения (1.2) рассматривается уравнение

$$-\frac{d}{dx} g^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} u_\varepsilon(x) - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2) u_\varepsilon(x) = f(x),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$. Вопрос о поведение решения данного уравнения при $\varepsilon \longrightarrow 0$ сводится к изучению оператора $(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$. После масштабного преобразования вопрос будет состоять в изучении оператора $(\mathcal{A} - (\nu - \varepsilon^{-2}\varkappa^2)I)^{-1}$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора $\mathcal{A}$ на краю лакуны. Оказывается, что с каждым краем лакуны связан свой эффективный оператор $\mathcal{A}_\nu^0 = -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}, b_\nu > 0$. Справедлива оценка

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon](\mathcal{A}_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon.$$

Здесь b_ν — коэффициент в асимптотике зонной функции $\lambda(\xi)$ (отвечающей той зоне, для которой точка ν является левым краем): $\lambda(\xi) - \nu \sim b_\nu \xi^2$ при $|\xi| \to 0$, а $\varphi_0(x)$ — вещественное периодическое решение уравнения $\mathcal{A}\varphi_0 = \nu\varphi_0$, нормированное в $L_2(0,1)$.

Многомерный случай усреднения резольвенты на краю внутренней лакуны периодического оператора с быстро осциллирующими коэффициентами исследовался в работе [17]. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ вблизи внутреннего края лакуны с учетом корректора была получена в работах [18] (одномерный случай) и [19] (многомерный случай).

Усреднение параболического уравнения на краю внутренней спектральной лакуны в одномерном случае рассматривалось в работе [20]. В данной магистерской диссертации изучается многомерная задача усреднения параболического уравнения на краю спектральной лакуны. Результаты диссертации опубликованы в статье [21].

1.4. Постановка задачи

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический периодический дифференциальный оператор A_ε второго порядка, заданный выражением

$$A_\varepsilon = \mathbf{D}^* \widetilde{g}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big), \quad \mathbf{D} = -i\nabla, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.10}$$

Здесь $\widetilde{g}(\boldsymbol{x})$ — ограниченная и положительно определенная матрица-функция, периодическая относительно решетки $\mathbb{Z}^d$, $p(\boldsymbol{x})$ — вещественный $\mathbb{Z}^d$–периодический потенциал; $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Обозначим $A := A_1 = \mathbf{D}^* \widetilde{g}\,(\boldsymbol{x})\,\mathbf{D} + p\,(\boldsymbol{x})$. Введем масштабное преобразование — семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(\mathbb{R}^d)$: $T_\varepsilon u(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \boldsymbol{x}), \quad \varepsilon > 0$. Легко видеть, что справедливо соотношение

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^* (\varepsilon^{-2} A) T_\varepsilon. \tag{1.11}$$

Спектр оператора A имеет зонную структуру: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} [\nu_s, \mu_s]$. В силу (1.11) спектр оператора A_ε имеет вид: $\sigma(A_\varepsilon) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_s, \varepsilon^{-2}\mu_s]$. Предположим, что спектр оператора A имеет внутреннюю лакуну (λ_-, λ_+); тогда спектр оператора A_ε имеет лакуну $(\varepsilon^{-2}\lambda_-, \varepsilon^{-2}\lambda_+)$. Основной объект изучения — полугруппа, порожденная оператором A_ε, срезанная спектральным проектором оператора A_ε на интервал вида $[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$. Основная задача — получить асимптотику срезанной полугруппы $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon} [\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$ при малых значениях ε. Это соответствует изучению решения задачи Коши для параболического уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t u_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) &= -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \ t > 0, \\ u_\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) &= E_{A_\varepsilon} \left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

при малых $\varepsilon > 0$. Мы находим старший член аппроксимации срезанной полугруппы $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon} [\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$ (теорема 2.5), а также более точную аппроксимацию при учете корректора (теоремы 2.7 и 2.8). Результаты формулируются в терминах спектральных характеристик оператора A вблизи точки λ_+.

Отметим, что в случае $p(\boldsymbol{x}) = 0$ старший член аппроксимации срезанной полугруппы был получен автором в 2021 году в рамках бакалаврской дипломной работы.

1.5. Обозначения

Условимся о некоторых обозначениях. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$. Через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим стандартные L_p-классы в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$; через $\| \cdot \|_p$ — норму в L_p-классе. Для линейного ограниченного оператора $T : L_2 \longrightarrow L_2$ через $\|T\|$ обозначим стандартную операторную норму. Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(\boldsymbol{x})]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями; через $H^1(\mathbb{R}^d)$ — стандартный класс Соболева; $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ — класс функций $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $\Omega := (0,1)^d$ — ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$; $\widetilde{H}^1(\Omega)$ — подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, то пространство $\widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega)$ определяется как класс функций вида $e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u(\boldsymbol{x})$, где $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Далее, если через $\mathcal{A}$ обозначить самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то $\sigma(\mathcal{A})$ обозначает спектр оператора $\mathcal{A}$. Если δ — борелевское множество на оси, то $E_{\mathcal{A}}(\delta)$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий множеству δ.

Для функций $f(\boldsymbol{x})$ в $\mathbb{R}^d$ положим $f^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Пусть Φ — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$:

$$(\Phi u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d).$$

Символ $\mathbf{1}$ означает единичную $(d \times d)$-матрицу.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Т. А. Суслиной за постановку задачи и внимание к работе и В. А. Слоущу за полезные обсуждения.

2. Спектральное разложение периодического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Формулировка основных результатов

2.1. Определение оператора. Факторизация

Рассмотрим самосопряженный равномерно эллиптический оператор A (аналогичный тому, что был определен во введении), порожденный дифференциальным выражением

$$A = \mathbf{D}^* \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D} + p(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

где $\widetilde{g}$ — симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, а p — вещественная функция, причем выполнены условия

$$\begin{gathered} c_0 \mathbf{1} \leqslant \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant c_1 \mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \\ \widetilde{g}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = \widetilde{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} p \in L_q(\Omega), \quad 2q > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad q = 1 \text{ при } d = 1, \\ p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Точное определение оператора A дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla u, \nabla u \rangle + p(\boldsymbol{x}) |u|^2 \right) d\boldsymbol{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

За счет добавления к $p(\boldsymbol{x})$ подходящей константы можно считать, что нижним краем спектра оператора A является точка $\lambda_0 = 0$:

$$\inf \sigma(A) = 0. \tag{2.5}$$

При условиях (2.2), (2.3) и (2.5) существует положительное $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение $\omega(\boldsymbol{x})$ уравнения (см. [4, гл. 6, §1])

$$\mathbf{D}^* \widetilde{g}\,(\boldsymbol{x})\,\mathbf{D}\omega\,(\boldsymbol{x}) + p\,(\boldsymbol{x})\,\omega\,(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Решение ω определено с точностью до постоянного множителя, который можно фиксировать так, что

$$\int\limits_{\Omega} \omega^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1. \tag{2.6}$$

При этом $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и обладает свойством

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega(\boldsymbol{x}) \leqslant \omega_1 < \infty. \tag{2.7}$$

Кроме того, $\omega \in C^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$ и ω является мультипликатором в $H^1(\mathbb{R}^d)$, а также в $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Подстановка $u = \omega v$ преобразует форму (2.4) к виду

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\boldsymbol{x}) \left\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla v(\boldsymbol{x}), \nabla v(\boldsymbol{x}) \right\rangle d\boldsymbol{x}, \quad v = \omega^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.8}$$

Тогда выражение (2.1) запишется в факторизованном виде

$$A = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g := \widetilde{g} \omega^2. \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. *Выражение* (2.9) *можно принять за определение оператора A, тогда можно считать, что ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям* (2.6) *и* (2.7). *Именно это определение и будет принято за исходное. Ниже считаем, что A есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный квадратичной формой* (2.8), *где $\widetilde{g}$ — симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям* (2.2), *а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям* (2.6) *и* (2.7). *Вернуться к записи вида* (2.1) *можно, полагая $p(\boldsymbol{x}) = -\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D}^* g\,(\boldsymbol{x})\,\mathbf{D}\omega(\boldsymbol{x})$. Получающийся при этом потенциал p может оказаться сингулярной обобщенной функцией.*

2.2. Спектральные характеристики оператора A

Опишем спектральное разложение оператора A. Мы следуем работам [22], [23], а также [24]. В $L_2(\Omega)$ введем семейство квадратичных форм

$$a_{\boldsymbol{\xi}}[u,u] = \int\limits_{\Omega} \langle g(\boldsymbol{x}) \nabla v, \nabla v \rangle\, d\boldsymbol{x}, \quad v = \omega^{-1} u \in \widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Параметр $\boldsymbol{\xi}$ будем называть *квазиимпульсом.* Область определения $\mathcal{D}[a_{\boldsymbol{\xi}}]$ формы (2.10) состоит из функций $u(\boldsymbol{x})$, таких что $\omega^{-1}u \in \widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega)$. Порожденный формой (2.10) самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$ обозначим через $A(\boldsymbol{\xi})$. Все операторы $A(\boldsymbol{\xi})$ имеют дискретный спектр. Пусть $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные собственные значения оператора $A(\boldsymbol{\xi})$, занумерованные с учетом кратностей. Таким образом,

$$E_1(\boldsymbol{\xi}) \leqslant E_2(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots \leqslant E_s(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma(A(\boldsymbol{\xi})) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{E_l(\boldsymbol{\xi})\}.$$

Функции $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, называют “зонными функциями”. Зонные функции непрерывны и периодичны с решеткой $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Далее, через $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ обозначим ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Ячейку $\widetilde{\Omega}$ можно отождествить с d-мерным тором $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Пусть $\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — ортонормированные собственные функции оператора $A(\boldsymbol{\xi})$. Они $(2\pi\mathbb{Z})^d$–периодические по $\boldsymbol{\xi}$, а также имеют представление

$$\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp(i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle)\varphi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \tag{2.11}$$

где $(\omega^{-1}\varphi_l)(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, — функции из $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Функции $\omega^{-1}\psi_l$, $\omega^{-1}\varphi_l$ гельдеровски непрерывны по $\boldsymbol{x}$ (см. замечание 2.3 ниже). Определим интегральные операторы $\Psi_l : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ равенствами

$$(\Psi_l u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Операторы Ψ_l — частично-изометрические отображения пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\widetilde{\Omega})$. Операторы $\Psi_l^*\Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$, суть ортопроекторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Они попарно ортогональны и $\sum\limits_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* \Psi_l = I$.

Операторы, определенные в (2.12), частично диагонализуют оператор A. Именно, справедливо разложение Флоке–Блоха:

$$A = \sum_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* [E_l] \Psi_l. \tag{2.13}$$

В силу (2.13) спектр оператора A имеет зонную структуру, т. е. справедливо равенство

$$\sigma(A) = \bigcup_{s=1}^{\infty} [\nu_s, \mu_s], \quad [\nu_s, \mu_s] = \operatorname{Ran} E_s, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отрезки $[\nu_s, \mu_s]$ будем называть спектральными зонами. Разделяющие зоны интервалы будем называть спектральными лакунами. В многомерном случае зоны могут перекрываться (см. [24]). Снова отметим, что $\inf \sigma(A) = \min_{\boldsymbol{\xi}} E_1(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Таким образом, спектр оператора A имеет полубесконечную лакуну $(-\infty, 0)$:

$$\sigma(A) \cap (-\infty, 0) = \varnothing.$$

Помимо полубесконечной лакуны в спектре оператора A также могут открываться внутренние лакуны. Пусть для некоторого $s \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lambda_- = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_s(\boldsymbol{\xi}) < \min_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+. \tag{2.14}$$

В этом случае справедливы соотношения:

$$\sigma(A) \cap (\lambda_-, \lambda_+) = \varnothing, \quad \lambda_\pm \in \sigma(A).$$

Примем обычное (ср. [22], [23]) условие регулярности правого края лакуны (λ_-, λ_+).

Условие 2.2. *Будем говорить, что правый край лакуны* (λ_-, λ_+) *регулярен, если выполнено следующее*:

1) *Минимум функции* $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ *достигается лишь в конечном числе точек* $\boldsymbol{\xi}_j \in \widetilde{\Omega}$, $j = 1, \ldots, m$, *каждая из которых есть точка невырожденного минимума функции* E_{s+1}.

2) $\min_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}) > \lambda_+$.

В силу условия регулярности число $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ является простым собственным значением оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ в некоторых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда следует, что в некоторых малых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \ldots, m$, функция $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ вещественно аналитична; далее предполагаем, что окрестности точек $\boldsymbol{\xi}_j$ являются шарами радиуса δ:

$$\mathcal{E}_j(\delta) := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d : \, |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j| < \delta \right\}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.15}$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда в силу условия 2.2 справедливо разложение

$$E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+ + b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + d_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^4), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.16}$$

Здесь b_j — положительно определенные квадратичные формы в $\mathbb{R}^d$:

$$b_j(\boldsymbol{\eta}) = \langle g_j^0 \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum_{k,s=1}^{d} b_{j,ks} \eta^k \eta^s, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.17}$$

где $g_j^0 = \{b_{j,ks}\}$ — симметричные положительно определенные матрицы с вещественными элементами; а кубические формы d_j заданы выражениями

$$d_j(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{p,q,r=1}^{d} \alpha_{j,pqr} \eta^p \eta^q \eta^r, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.18}$$

где $\alpha_{j,pqr}$ — вещественные коэффициенты. Во всем дальнейшем лакуна (λ_-, λ_+) фиксирована, индекс $s+1$ часто опускается в обозначениях. Именно, $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ обозначим через $E(\boldsymbol{\xi})$, $\psi_{s+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ обозначим через $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\varphi_{s+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — через $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ и Ψ_{s+1} — через Ψ. Кроме того, положим

$$\psi_j(\boldsymbol{x}) := \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j), \quad \varphi_j(\boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j), \quad \psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp(i \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \right\rangle) \varphi_j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.19}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}^1(\Omega) := \{f : \, \omega^{-1} f \in H^1(\Omega)\}, \quad \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) := \{f : \, \omega^{-1} f \in \widetilde{H}^1(\Omega)\}.$$

Отметим следующие факты (см. [19]). Функцию $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ можно выбрать измеримой по паре аргументов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$, а также вещественно аналитической по $\boldsymbol{\xi}$ в окрестностях (2.15) со значениями в $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Тогда функция $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ оказывается вещественно аналитической по

$\boldsymbol{\xi}$ в окрестностях (2.15) со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$.

Введем обозначения

$$\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial \xi^k} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_j}, \quad \psi_{jk}(\boldsymbol{x}) := \varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) \exp(i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle), \tag{2.20}$$

где $k = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, m$. Нам также понадобится формула Тейлора для φ:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \varphi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{d} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) (\xi^k - \xi_j^k) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^2), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{2.21}$$

Можно показать, что (см. [19]) функцию $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ можно выбрать так, чтобы функция $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяла нормировке $\|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$, являлась слабым $\mathbb{Z}^d$–периодическим решением уравнения

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_j(\boldsymbol{x}) = \lambda_+ \varphi_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.22}$$

и удовлетворяла тождеству

$$\sum_{l=1}^{d} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(g_{kl}(\boldsymbol{x}) (\mathrm{D}_l + \xi_j^l) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_j(\boldsymbol{x})\right) \left(\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\right) d\boldsymbol{x} = 0, \tag{2.23}$$

где $g(\boldsymbol{x}) = \{g_{kl}(\boldsymbol{x})\}_{k,l=1}^d$.

Функция φ_{jk}, $k = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, m$, является слабым $\mathbb{Z}^d$–периодическим решением уравнения

$$\begin{aligned} &\left(\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_+\right) \varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \\ &= -\sum_{l=1}^{d} \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) g_{kl}(\boldsymbol{x}) \left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{l=1}^{d} \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right) g_{kl}(\boldsymbol{x}) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi_j(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Тождество (2.23) играет роль условия разрешимости для уравнения (2.24). Общее решение уравнения (2.24) определяется с точностью до слагаемого вида $c\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $c \in \mathbb{C}$. Выделим единственное $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение $\widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющее условию ортогональности

$$\int_{\Omega} \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) \overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})} \, d\boldsymbol{x} = 0. \tag{2.25}$$

Тогда общее решение уравнения (2.24) можно записать в виде $\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + c\varphi_j(\boldsymbol{x})$. Используя условия нормировки $\|\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\| = 1$, $\|\varphi_j\| = 1$, и представление (2.21), можем заключить, что справедливо равенство

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) \overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})} \, d\boldsymbol{x} = 0,$$

откуда вытекает, что $\operatorname{Re} c = 0$. Из сказанного следует, что существует константа $c_{jk} \in \mathbb{R}$, такая что

$$\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + i c_{jk} \varphi_j(\boldsymbol{x}). \tag{2.26}$$

Положим

$$\widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) := \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) \exp\left(i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle\right). \tag{2.27}$$

Из (2.19), (2.20), (2.26) и (2.27) следует, что

$$\psi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + ic_{jk}\psi_j(\boldsymbol{x}), \quad c_{jk} \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Замечание 2.3. 1°. *Следуя* [23, §4, пункт 9], *заметим, что функция* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ *является слабым* $\mathbb{Z}^d$*–периодическим решением уравнения*

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right)^* g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}). \tag{2.29}$$

Как отмечалось выше, в силу условия 2.2 *при достаточно малом* $\delta > 0$ *функция* $E(\boldsymbol{\xi})$ *вещественно аналитична в шаре* $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \ldots, m$, *а функцию* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ *можно выбрать вещественно аналитической по* $\boldsymbol{\xi}$ *в окрестностях* $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \ldots, m$, *со значениями в* $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$; *при этом функция* $\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ *нормирована в* $L_2(\Omega)$. *Тогда функцию* $E(\boldsymbol{\xi})$ *и решение* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ *можно аналитически продолжить в некоторый комплексный шар* $\mathcal{B}_j$ *с центром в точке* $\boldsymbol{\xi}_j$ *так, что уравнение* (2.29) *сохранит свою силу* (*условие нормировки, вообще говоря, нарушится*). *Разделяя в* (2.29) *вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений с одинаковыми диагональными главными частями. В* [25, теорема 2.1 из гл. VII] *для решений таких систем получены оценки максимума модуля при условиях Дирихле. Однако вывод этих оценок без существенных изменений переносится на случай периодических граничных условий. В нашем случае правая часть равна нулю, что подпадает под условия теоремы, упомянутой выше, откуда следует оценка*

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\omega(\boldsymbol{x})^{-1} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant \check{C}_j \|\omega^{-1} \varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j, \tag{2.30}$$

где константа $\check{C}_j$ *зависит от* c_0, c_1, ω_1 *и* $\max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j} |E(\boldsymbol{\xi})|$. *Более того, из результатов* [25, гл. VII] *следует, что функция* $\omega(\boldsymbol{x})^{-1} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ *гельдеровски непрерывна по* $\boldsymbol{x}$ *с некоторым показателем* $\alpha > 0$.

2°. *В силу ограниченности* ω, ω^{-1}, *а также аналитичности* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ *по* $\boldsymbol{\xi}$ *правая часть в* (2.30) *ограничена, а потому*

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j. \tag{2.31}$$

Из соотношения (2.31) *следует, что* $\varphi_j \in L_\infty(\Omega)$. *Кроме того, из сказанного выше следует, что функция* $\omega^{-1}\varphi_j$ *гельдеровски непрерывна.*

3°. *Норма* $\|\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{L_\infty(\Omega)}$ *равномерно ограничена по* $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j$ (*неравенство* (2.31)). *В силу интегрального представления для производной функции* φ *по* ξ^k (*формулы Коши*), *справедливо также включение* $\varphi_{jk} \in L_\infty(\Omega)$.

Стандартными методами теории возмущений можно получить следующее утверждение.

Замечание 2.4. *Коэффициенты* $b_{j,ks}$ *из* (2.17) *могут быть выражены в терминах решений вспомогательных задач*:

$$b_{j,ks} = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ \left\langle g^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \left(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega} \right) + g_k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_j}{\omega} \right), g_s^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_j}{\omega} \right) \right\rangle + \left\langle g^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \left(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega} \right) + g_s^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_j}{\omega} \right), g_k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\psi_j}{\omega} \right) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle g_s^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega} \right) + g_k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega} \right), g^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \left(\frac{\psi_j}{\omega} \right) \right\rangle \right\} d\boldsymbol{x}.$$

Коэффициенты $\alpha_{j,ksp}$ *из* (2.18) *могут быть вычислены следующим образом*:

$$\alpha_{j,ksp} = \frac{1}{3}\int\limits_{\Omega} \left\{ \left\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\left(\frac{\psi_{jks}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\right), g_p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_j}{\omega}\right)\right\rangle + \right.$$

$$+ \left\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\left(\frac{\psi_{jps}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{jp}}{\omega}\right), g_k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_j}{\omega}\right)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\left(\frac{\psi_{jkp}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{jp}}{\omega}\right) + \frac{1}{2}g_p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\right), g_s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_j}{\omega}\right)\right\rangle +$$

$$\left. + \left\langle g_s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_{jkp}}{\omega}\right) + g_k^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_{jsp}}{\omega}\right) + g_p^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\psi_{jsk}}{\omega}\right), g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\left(\frac{\psi_j}{\omega}\right)\right\rangle \right\} d\boldsymbol{x}.$$

Здесь $g_k^{1/2}$ — k*-ый столбец матрицы* $g^{1/2}$; *функции* $\widehat{\psi}_{jk}$ *определены в* (2.27); *функции* $\psi_{jps}(\boldsymbol{x}) := \exp\left(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j\rangle\right)\varphi_{jps}(\boldsymbol{x})$, *где* φ_{jps} *являются единственными слабыми* $\mathbb{Z}^d$*–периодическими решениями задач*

$$\left(\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_+\right)\varphi_{jps}(\boldsymbol{x}) = b_{j,ps}\varphi_j(\boldsymbol{x}) -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{ \sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{pl}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{js}(\boldsymbol{x}) + \sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)g_{pl}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{js}(\boldsymbol{x}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{sl}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{jp}(\boldsymbol{x}) + \sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)g_{sl}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{jp}(\boldsymbol{x}) \right\} -$$

$$-\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{sp}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x}),$$

$$\int_{\Omega}\varphi_{jps}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

2.3. Оператор A_ε. Основные результаты

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим самосопряженный оператор A_ε, $\varepsilon > 0$, порожденный квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^2 \left\langle \widetilde{g}^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla(\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1}u(\boldsymbol{x}), \nabla(\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1}u(\boldsymbol{x})\right\rangle d\boldsymbol{x}, \quad (\omega^\varepsilon)^{-1}u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.32}$$

Как и прежде, мы предполагаем, что $\widetilde{g}$ — симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω — $\mathbb{Z}^d$–периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Формально можно записать

$$A_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \omega^2\widetilde{g}. \tag{2.33}$$

В исходных терминах оператор (2.33) можно записать в виде (1.10).

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 2.5. *Пусть* (λ_-, λ_+) — *внутренняя лакуна в спектре оператора* A, *удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon]e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\right\| \leqslant Ce^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}, \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.34}$$

где b_j — *квадратичные формы, определенные в разложениях* (2.16), *т. е.* $b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g_j^0 \mathbf{D}$, *а функции* ψ_j *определены в* (2.19).

Далее нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор $\Pi_\varepsilon := \Phi^*[\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}(\xi)]\Phi$; здесь $\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}(\xi)$ — характеристическая функция множества $(-\pi\varepsilon^{-1}, \pi\varepsilon^{-1})^d$, $\varepsilon > 0$.

Введем операторы

$$\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t) := \sum_{k=1}^{d} [\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}]\Pi_\varepsilon \, \mathrm{D}_k \, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.35}$$

$$\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t) := -t[\psi_j^\varepsilon]\Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.36}$$

$$\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t) := \sum_{j=1}^{m} \Big(\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t) + (\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t))^* + \widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t)\Big), \quad \varepsilon, t > 0. \tag{2.37}$$

Здесь

$$d_j(\mathbf{D}) = \sum_{p,q,r=1}^{d} \alpha_{j,pqr} \, \mathrm{D}_p \, \mathrm{D}_q \, \mathrm{D}_r,$$

а $\alpha_{j,pqr}$ — коэффициенты из (2.18). А также определим операторы

$$\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t) := \sum_{k=1}^{d} [\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}] \, \mathrm{D}_k \, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.38}$$

$$\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t) := -t[\psi_j^\varepsilon]d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.39}$$

$$\Gamma(\varepsilon, t) := \sum_{j=1}^{m} \Big(\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t) + (\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t))^* + \Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t)\Big), \quad \varepsilon, t > 0. \tag{2.40}$$

Замечание 2.6. *Отметим, что для введенных операторов справедливы оценки* $\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t)\big\| \leqslant C\varepsilon/\sqrt{t+\varepsilon^2}$, $\big\|\varepsilon\Gamma(\varepsilon, t)\big\| \leqslant C\varepsilon/\sqrt{t}$, ε, $t > 0$.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t)$ *— оператор, определенный в* (2.35)–(2.37). *Тогда при* $\varepsilon, t > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\Big(\sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon]e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t)\Big)\Big\| \leqslant Ce^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}. \tag{2.41}$$

Отказавшись от равномерной оценки при всех $\varepsilon > 0$ и $t > 0$, можно избавиться от сглаживающего оператора в корректоре.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Пусть* $\Gamma(\varepsilon, t)$ *— оператор, определенный в* (2.38)–(2.40). *Тогда при* $\varepsilon, t > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\Big(\sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon]e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \varepsilon\Gamma(\varepsilon, t)\Big)\Big\| \leqslant Ce^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon\sqrt{t}}. \tag{2.42}$$

Замечание 2.9. 1°. *Сопоставим результат теоремы* 2.5 *с результатом об аппроксимации резольвенты* $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1}$*, полученным в* [17]:

$$\Big\|(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1} - \sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\Big\| \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Здесь операторы $b_j(\mathbf{D})$ и осциллирующие множители ψ_j^ε — те же, что в (2.34). И в эллиптическом, и в параболическом случае каждая точка $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \dots, m$, в которой достигается минимум зонной функции $E(\boldsymbol{\xi})$, дает вклад в асимптотику.

2°. *"Параболический" корректор $\Gamma(\varepsilon, t)$ имеет структуру, похожую на структуру "эллиптического" корректора $K(\varepsilon)$, полученного в работе [19] при усреднении резольвенты оператора A_ε вблизи края внутренней спектральной лакуны. В [19] установлена оценка*

$$\left\|(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1} - \sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] - \varepsilon K(\varepsilon)\right\| \leqslant C\varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

где

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) &:= \sum_{j=1}^{m}\left(K_j^{(1)}(\varepsilon) + (K_j^{(1)}(\varepsilon))^* + K_j^{(3)}(\varepsilon)\right), \\ K_j^{(1)}(\varepsilon) &:= \sum_{k=1}^{d}[\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\, \mathrm{D}_k(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \\ K_j^{(3)}(\varepsilon) &:= -[\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1} d_j(\mathbf{D})(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]. \end{aligned}$$

3°. *Сопоставим теперь полученные результаты с результатами работ [11, 12, 13] по "обычному" усреднению операторной экспоненты e^{-tA_ε} (на нижнем краю спектра). Отметим, что на нижнем краю спектра, т. е. при $\lambda_+ = 0$, условие 2.2 выполнено автоматически: первая зонная функция $E_1(\boldsymbol{\xi})$ достигает минимума в единственной точке $\boldsymbol{\xi}_1 = 0$; этот минимум невырожден. Имеем $b_1(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} = A^0$, $\psi_1 = \omega$. В этом случае оценка (2.34) превратится в известную оценку*

$$\left\|e^{-tA_\varepsilon} - [\omega^\varepsilon]e^{-tA^0}[\omega^\varepsilon]\right\| \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t + \varepsilon^2}}, \quad \varepsilon, t > 0,$$

а в случае оператора (1.1) (когда $\omega = 1$) — в оценку (1.9). Наши результаты с корректорами также согласуются с результатами работы [13]. Однако, подчеркнем разницу уже в старшем члене приближения: даже для оператора (1.1) (то есть при $p \equiv 0$ и $\omega = 1$) аппроксимации на краю внутренней лакуны обязательно содержат осциллирующие множители ψ_j^ε.

4°. *Наши результаты также согласуются с результатами работы [20] при $d = 1$. Существенное отличие от случая $d = 1$ заключается в появлении члена $\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t)$ в корректоре. В одномерном случае этот член равен нулю, так как функция $E(\boldsymbol{\xi})$ является четной при $d = 1$.*

3. Доказательство основных результатов

3.1. Предварительные замечания

Через $\chi_j(\boldsymbol{\xi})$ обозначим характеристические функции множеств $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \dots, m$; положим $\chi(\boldsymbol{\xi}) = \sum\limits_{j=1}^{m}\chi_j(\boldsymbol{\xi})$. Определим операторы $X = [\chi(\boldsymbol{\xi})]\Psi$, $X_j = [\chi_j(\boldsymbol{\xi})]\Psi$, $j = 1, \dots, m$. Ниже мы считаем $\delta > 0$ настолько малым, что множества $\mathcal{E}_j(\delta)$ попарно не пересекаются.

В силу регулярности правого края лакуны (λ_-, λ_+), функция $E(\boldsymbol{\xi})$ допускает представление (2.16). При этом при достаточно малом $\delta > 0$ выполнены оценки

$$c_j|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^2 \leqslant b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) \leqslant C_j|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < c_j \leqslant C_j < \infty, \tag{3.1}$$

$$\big|E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)\big| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)}{2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta), \tag{3.2}$$

$$\big|d_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)\big| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)}{4}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta), \tag{3.3}$$

$$|E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) - d_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)}{4}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.4}$$

3.2. Вспомогательные утверждения

Доказательству теорем предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *При достаточно малом $\delta > 0$ для подходящего $\nu(\delta) > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon} \left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} T_\varepsilon^* X^* \left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right] X T_\varepsilon \right\| \leqslant 2 e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)}, \quad \varepsilon, t > 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из соотношения (1.11) следует равенство

$$e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon} \left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) = T_\varepsilon^* e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, +\infty\right) T_\varepsilon. \tag{3.6}$$

Фиксируем число $\mu \in (\lambda_+, \min_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}))$. Оператор $e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, +\infty\right)$ раскладывается в сумму

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, +\infty\right) = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, \mu\right] + e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left(\mu, +\infty\right). \tag{3.7}$$

Второе слагаемое в (3.7) допускает очевидную оценку

$$\left\| e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left(\mu, +\infty\right) \right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\mu} = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(\mu-\lambda_+)}. \tag{3.8}$$

В силу разложения Флоке–Блоха (2.13) первое слагаемое в формуле (3.7) представимо в виде

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, \mu\right] = \Psi^* \left[\chi_\mu(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}E(\boldsymbol{\xi})}\right] \Psi,$$

где $\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})$ — характеристическая функция множества $\left\{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega} :\ E(\boldsymbol{\xi}) \in [\lambda_+, \mu]\right\}$. При достаточно малом $\delta > 0$ выполнено $\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})\chi(\boldsymbol{\xi}) = \chi(\boldsymbol{\xi})$, а потому

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A} E_A \left[\lambda_+, \mu\right] = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} X^* \left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right] X + e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \Psi^* \left[\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})(1-\chi(\boldsymbol{\xi})) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right] \Psi. \tag{3.9}$$

В силу очевидного неравенства

$$\left\| (1-\chi(\boldsymbol{\xi})) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} \right\|_\infty \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)},$$

где $\nu(\delta) = \min_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}\setminus \bigcup_{j=1}^m \mathcal{E}_j(\delta)} (E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+)$, второе слагаемое в сумме (3.9) оценивается через

$$\left\| e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \Psi^* \left[(1-\chi(\boldsymbol{\xi})) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right] \Psi \right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)}. \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.6)–(3.10) вытекает оценка (3.5). □

Лемма 3.2. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| X_j^* \left[e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} \right] X_j - X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right] X_j \right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \tau > 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Введем обозначение $\Theta_j(\boldsymbol{\xi}) := E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)$. В силу очевидного неравенства

$$|e^{-\alpha} - 1| \leqslant |\alpha| e^{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

справедливы соотношения

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| = e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \left| e^{-\tau\Theta_j(\boldsymbol{\xi})} - 1 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \tau \left| \Theta_j(\boldsymbol{\xi}) \right| e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} e^{\tau|\Theta_j(\boldsymbol{\xi})|}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.12}$$

Из оценки $|\Theta_j(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C \left| \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j \right|^3$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta)$, а также неравенств (3.1), (3.2) и (3.12) вытекает оценка

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| \leqslant C\tau |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^3 e^{-\frac{1}{2}\tau c_j |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.13}$$

Из (3.13) и очевидного неравенства $\left| \alpha^3 e^{-\frac{1}{2}\tau\beta\alpha^2} \right| \leqslant (\beta e/3)^{-3/2} \tau^{-3/2}$, $\beta > 0$, следует, что

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.14}$$

Кроме того, левая часть неравенства (3.14) не превосходит 2, а потому верно соотношение

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),\ \tau > 0,$$

откуда вытекает (3.11). $\square$

Введем операторы $X_j^0 = [\chi_j(\boldsymbol{\xi})] \Phi[\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}] : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$, действующие по правилу

$$(X_j^0 u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) \overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d).$$

Лемма 3.3. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right] X_j^0 \right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \tau > 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. При достаточно малом $\delta > 0$ функция φ вещественно аналитична в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$ и справедливо представление

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k) \gamma_{jk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

$$\gamma_{jk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int\limits_0^1 \partial_k \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j + t(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j))\, dt, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

где $\partial_k \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})$. При этом $\gamma_{jk}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ — $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$-значные функции, вещественно аналитические по $\boldsymbol{\xi}$ в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$. Следовательно (см. [6]), при достаточно малом $\delta > 0$ функции γ_{jk} допускают оценку в классе Соболева любого порядка (см. замечание 2.3, пункт 3°):

$$\sup_{\boldsymbol{x}} \|\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\cdot)\|_{H^r(\mathcal{E}_j(\delta))} < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим $U_{jk} : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ — интегральные операторы с ядрами

$$U_{jk}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}] := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) \overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}, \quad j = 1,\dots,m, \quad k = 1,\dots,d. \tag{3.17}$$

Ядра U_{jk} отличаются от ядра оператора Фурье лишь умножением на функции $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$. Из (3.16) вытекает (см. [17]), что функции $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$ являются мультипликаторами на множестве ядер ограниченных интегральных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. Следовательно, операторы U_{jk} ограничены, $\|U_{jk}\| \leqslant C_{jk}$. Далее, $X_j - X_j^0$ — интегральные операторы с ядрами

$$\left(X_j - X_j^0\right)[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}] := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) \sum_{k=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k) \overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}. \tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) вытекают равенства

$$X_j - X_j^0 = \sum_{k=1}^{d} \left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)\right] U_{jk}. \tag{3.19}$$

Таким образом, операторы

$$\begin{aligned} D_j(\tau) &:= X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 \\ &= (X_j - X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j + (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] (X_j - X_j^0) \end{aligned}$$

допускают представление

$$D_j(\tau) = \sum_{k=1}^{d} \Big(U_{jk}^* \left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j + (X_j^0)^* \left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] U_{jk} \Big).$$

Из последнего равенства следует оценка

$$\|D_j(\tau)\| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \|U_{jk}\| \left(1 + \|\varphi_j\|_\infty\right) \left\|(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right\|_\infty. \tag{3.20}$$

Из (3.1) и (3.20) с учетом оценок $\|U_{jk}\| \leqslant C_{jk}$ вытекает неравенство

$$\|D_j(\tau)\| \leqslant C \sum_{k=1}^{d} \left\|(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\tau c_j |\xi^k - \xi_j^k|^2}\right\|_\infty. \tag{3.21}$$

Элементарная оценка $\left|\alpha e^{-\frac{1}{2}\tau\beta\alpha^2}\right| \leqslant (\beta e)^{-1/2} \tau^{-1/2}$, $\beta > 0$, и (3.21) приводят к неравенству

$$\left\| X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 \right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau}}. \tag{3.22}$$

Остается учесть, что левая часть неравенства (3.22) ограничена величиной $1 + \|\varphi_j\|_\infty^2$, а потому справедливо (3.15). □

Лемма 3.4. *При любом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|(X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - [\varphi_j]\Phi^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}]\right\| \leqslant e^{-\tau c_j \delta^2} \|\varphi_j\|_\infty^2, \quad \tau > 0. \tag{3.23}$$

Доказательство. Оценка (3.23) следует из равенства

$$(X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - [\varphi_j]\Phi^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}] = [\varphi_j]\Phi^* \left[(\chi_j(\boldsymbol{\xi}) - 1)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}],$$

и оценки $\left\|(\chi_j(\boldsymbol{\xi}) - 1)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right\|_\infty \leqslant e^{-\tau c_j \delta^2}$, вытекающей из (3.1). □

Введем операторы $X_j^1 := \sum\limits_{k=1}^{d} \left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)\right] \Phi[\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})}] : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$, действующие по правилу

$$\left(X_j^1 u\right)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{k=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d). \tag{3.24}$$

Лемма 3.5. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\|X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - (X_j^1)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - \\ - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1\Big\| \leqslant \frac{C}{\tau+1}, \quad \tau > 0. \tag{3.25}$$

Доказательство. Обозначим оператор под знаком нормы в (3.25) через $\Xi_j(\tau)$. Представим $\Xi_j(\tau)$ в виде

$$\Xi_j(\tau) = \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j + \left(X_j^0 + X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right) + \\ + \left(X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1. \tag{3.26}$$

Оператор $X_j - X_j^0 - X_j^1$ — это интегральный оператор с ядром

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \overline{\left(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{d} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})(\xi^k - \xi_j^k)\right)}. \tag{3.27}$$

При достаточно малом $\delta > 0$ справедливо элементарное представление

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{d} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})(\xi^k - \xi_j^k) = \sum_{k,l=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

$$\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t \partial_l\partial_k \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j + s(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j))\, ds, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

где $\partial_l\partial_k\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^l\partial\eta^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})$. Функции $\gamma_{jkl}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ являются $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$-значными вещественно аналитическими по $\boldsymbol{\xi}$ в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$. Следовательно (см. [19]), при достаточно малом $\delta > 0$ функции γ_{jkl} допускают оценку в классе Соболева любого порядка (см. замечание 2.3, пункт 3°):

$$\sup_{\boldsymbol{x}} \|\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\cdot)\|_{H^r(\mathcal{E}_j(\delta))} < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Из (3.28) следует, что каждая функция $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$ является мультипликатором на множестве ядер ограниченных интегральных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. Рассмотрим интегральные операторы $U_{jkl} : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ с ядрами

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}. \tag{3.29}$$

Ядро (3.29) отличается от ядра оператора Фурье множителем $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$, который, как отмечалось выше, является мультипликатором. Следовательно, U_{jkl} являются ограниченными интегральными операторами из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. В силу (3.27) и (3.29) первое слагаемое в правой части равенства (3.26) записывается в виде

$$\left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j = \sum_{k,l=1}^{d} U_{jkl}^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\right] X_j, \tag{3.30}$$

а второе слагаемое переписывается как

$$\begin{multline}\left(X_j^0 + X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right) = \\ = \sum_{k,l=1}^{d} \left(X_j^0 + X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\right] U_{jkl}. \tag{3.31}\end{multline}$$

Из (3.1), (3.30), (3.31) и очевидного неравенства $\alpha^2 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant (\beta e)^{-1}\tau^{-1}$, $\beta > 0$, следуют оценки

$$\left\|\left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j\right\| \leqslant \frac{C}{\tau}, \tag{3.32}$$

$$\left\|\left(X_j^0 + X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right)\right\| \leqslant \frac{\widetilde{C}}{\tau}. \tag{3.33}$$

Чтобы получить оценку для третьего слагаемого в правой части равенства (3.26), рассмотрим операторы V_{jk} — интегральные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядрами

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})}. \tag{3.34}$$

Очевидно, что операторы V_{jk} ограничены, а из (3.24) и (3.34) следует, что

$$\left(X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1 = \sum_{k,l=1}^{d} V_{jl}^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\right] V_{jk}.$$

Отсюда при учете неравенства $\alpha^2 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant (\beta e)^{-1}\tau^{-1}$, $\beta > 0$, вытекает оценка

$$\left\|\left(X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1\right\| \leqslant \frac{C}{\tau}. \tag{3.35}$$

Из равенства (3.26) и неравенств (3.32), (3.33), (3.35) получаем, что

$$\|\Xi_j(\tau)\| \leqslant \frac{C}{\tau}. \tag{3.36}$$

С другой стороны, оператор $\Xi_j(\tau)$ равномерно ограничен:

$$\|\Xi_j(\tau)\| \leqslant 1 + \|\varphi_j\|_\infty^2 + 2\delta \|\varphi_j\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{d} \|\varphi_{jk}\|_\infty\right).$$

Вместе с (3.36) это приводит к оценке (3.25). $\square$

Лемма 3.6. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\| X_j^* \left[e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right] X_j - X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j + \\ + X_j^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j \Big\| \leqslant \frac{C}{\tau+1}, \quad \tau > 0. \quad (3.37)$$

Доказательство. С учетом соотношений (2.16), (3.1), (3.3), (3.4), а также очевидной оценки $|e^\alpha - 1| \leqslant |\alpha| e^{|\alpha|}$ можем написать следующую цепочку соотношений

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \right| = \\ = e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - 1 \right| \leqslant \\ \leqslant \tau \left| E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) - d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \right| e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} e^{\tau|E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|} \leqslant \\ \leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} e^{\frac{\tau}{4} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\frac{\tau}{2} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \\ \leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\frac{\tau}{2} c_j |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}.$$

В силу оценки $\alpha^4 e^{-\frac{\beta\tau}{2}\alpha^2} \leqslant 16(\beta e)^{-2}\tau^{-2}$, $\beta > 0$, отсюда следует, что

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \right| \leqslant \frac{16\widehat{C}}{(c_j e)^2} \frac{1}{\tau}. \quad (3.38)$$

Беря в расчет оценку $|e^{-\alpha} - 1 + \alpha| \leqslant \frac{\alpha^2}{2} e^{|\alpha|}$, получаем

$$e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} = e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} (e^{-\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - 1) = \\ = e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}, \quad (3.39)$$

где $r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) = e^{-\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - 1 + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)$, причем

$$\left| r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \right| \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{\tau|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|}. \quad (3.40)$$

Из (3.1), (3.3), (3.39), (3.40) следуют соотношения

$$\left| e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| = \\ = \left| r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \right| e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{-\frac{3\tau}{4} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \widetilde{C}^2 \tau^2 |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^6 e^{-\frac{3\tau c_j}{4}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}.$$

Учитывая неравенство $\alpha^6 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant 27(\beta e)^{-3}\tau^{-3}$, $\beta > 0$, получаем оценку

$$\left| e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| \leqslant \frac{64\widetilde{C}^2}{(c_j e)^3} \frac{1}{\tau}. \quad (3.41)$$

Таким образом, в силу неравенств (3.38), (3.41), а также того факта, что операторы X_j ограничены, получаем, что выражение под знаком нормы в (3.37) не превосходит C/τ. С другой стороны, это выражение равномерно ограничено, благодаря тому, что $e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} \leqslant 1$, $e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant 1$, а также благодаря тому, что при $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta)$ справедливы неравенства

$$\left| \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right| \leqslant C\tau \left| \boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j \right|^3 e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant C\tau\delta \left| \boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j \right|^2 e^{-\tau c_j \left|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j\right|^2} \leqslant \frac{C\delta}{c_j e}. \quad (3.42)$$

В последнем переходе использовано соотношение $\max_{\alpha \geqslant 0} \alpha e^{-\tau c_j \alpha} \leqslant (\tau c_j e)^{-1}$. В итоге приходим к оценке (3.37). $\square$

Лемма 3.7. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|(X_j)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j-(X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0\right\| \leqslant \frac{C}{\tau+1},\ \tau > 0. \quad (3.43)$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично лемме 3.3. Напомним, что операторы $U_{jk} : L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ — это ограниченные интегральные операторы с ядрами (3.17). Справедливо равенство (3.19), из которого следует, что операторы

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_j(\tau) := (X_j)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 = \\ = (X_j - X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j + (X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] (X_j - X_j^0)\end{aligned}$$

допускают представление

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_j(\tau) = \sum_{k=1}^{d} \Big(U_{jk}^*[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}]X_j + \\ + (X_j^0)^*[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}]U_{jk}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.1) следует оценка

$$\|\widetilde{D}_j(\tau)\| \leqslant C\tau|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}.$$

С учетом элементарной оценки $\alpha^4 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant 4(\beta e)^{-2}\tau^{-2}$, $\beta > 0$, это приводит к неравенству

$$\|\widetilde{D}_j(\tau)\| \leqslant \frac{C}{\tau}. \quad (3.44)$$

С другой стороны, оператор $\widetilde{D}_j(\tau)$ равномерно ограничен в силу ограниченности операторов X_j, X_j^0 и неравенства (3.42). Вместе с (3.44) это влечет оценку (3.43). □

3.3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.5. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$, при котором выполнены оценки (3.5), (3.11) и (3.15). Из оценок (3.5), (3.11), (3.15) и (3.23) вытекает неравенство

$$\left\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}T_\varepsilon^*\Big(\sum_{j=1}^{m}[\varphi_j]\Phi^*\left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]\Big)T_\varepsilon\right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}} \quad (3.45)$$

при $\varepsilon > 0$, $t > 0$. С учетом соотношений

$$T_\varepsilon^*[\varphi_j]T_\varepsilon = [\varphi_j^\varepsilon], \quad T_\varepsilon^*\Phi^*\big[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\big]\Phi T_\varepsilon = \big[e^{\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\big]e^{-tb_j(\mathbf{D})}\big[e^{-\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\big], \quad (3.46)$$

из (3.45) следует (2.34). □

Доказательство теоремы 2.7. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$, при котором выполнены оценки (3.5), (3.23), (3.25), (3.37) и (3.43); из данных неравенств вытекает соотношение

$$\begin{aligned}\Big\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} T_\varepsilon^* \Big(\sum_{j=1}^m [\varphi_j]\Phi^*\left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]\Big) T_\varepsilon - \\ - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} T_\varepsilon^* \Bigg(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \Big([\varphi_{jk}]\Phi^*\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}] + \\ + [\varphi_j]\Phi^*\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_{jk}}]\Big) - \\ - \sum_{j=1}^m [\varphi_j]\Phi^*\left[\frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]\Bigg) T_\varepsilon \Big\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \frac{C\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}. \quad (3.47)\end{aligned}$$

С учетом очевидных соотношений

$$T_\varepsilon^*[f(\boldsymbol{x})]T_\varepsilon = [f^\varepsilon(\boldsymbol{x})], \quad T_\varepsilon[f(\boldsymbol{x})]T_\varepsilon^* = [f(\varepsilon\boldsymbol{x})], \quad T_\varepsilon \Phi f = \Phi T_\varepsilon^* f, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

можем записать равенства

$$\begin{aligned}T_\varepsilon^*[\varphi_{jk}]\Phi^*\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]T_\varepsilon = \\ = [\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*\left[\chi_j(\boldsymbol{\varepsilon\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}], \quad (3.48)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_\varepsilon^*[\varphi_j]\Phi^*\left[\frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j}]T_\varepsilon = \\ = [\varphi_j^\varepsilon]\Phi^*\left[\frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]. \quad (3.49)\end{aligned}$$

Далее, введем обозначения

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_j^\varepsilon(\delta) = \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j| < \varepsilon^{-1}\delta\right\}, \quad \varepsilon > 0, \\ &Q_j^\varepsilon = \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d : |\xi^k - \varepsilon^{-1}\xi_j^k| < \varepsilon^{-1}\pi,\, k = 1, \ldots, d\right\}, \quad \varepsilon > 0, \\ &\widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon = Q_j^\varepsilon \setminus \mathcal{E}_j^\varepsilon(\delta), \quad \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Кроме того, нам понадобятся оценки

$$\begin{aligned}\Big\|[\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*\left[\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] - \\ - [\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*\left[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]\Big\| \leqslant \\ \leqslant \|\varphi_{jk}\|_\infty \|\varphi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\in\widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon} \left|\xi^k - \varepsilon^{-1}\xi_j^k\right| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} \leqslant \pi\|\varphi_{jk}\|_\infty \|\varphi_j\|_\infty e^{-\frac{tc_j\delta^2}{\varepsilon^2}}, \quad (3.50)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\| [\varphi_j^\varepsilon]\Phi^* \left[\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}) \frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2} b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)} \right] \Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] - \\
&\qquad - [\varphi_j^\varepsilon]\Phi^* \left[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) \frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2} b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)} \right] \Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] \Big\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|\varphi_j\|_\infty^2 t\varepsilon \widetilde{C} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon} \big| \boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j \big|^3 e^{-tc_j |\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} = \\
&= \|\varphi_j\|_\infty^2 t\varepsilon \widetilde{C} \max_{\boldsymbol{\xi} \in \widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon} \left(\big| \boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j \big| e^{-t\frac{c_j}{2} |\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} \right) \left(\big| \boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j \big|^2 e^{-t\frac{c_j}{2} |\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} \right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{2\widetilde{C}}{c_j e} \pi \sqrt{d} \|\varphi_j\|_\infty^2 e^{-\frac{tc_j\delta^2}{2\varepsilon^2}}. \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

В последнем переходе (3.51) использовалось неравенство $\alpha^2 e^{-t\beta\alpha^2} \leqslant (t\beta e)^{-1}$, $\beta > 0$. Учтем очевидные тождества

$$
\Phi^*[\chi_{Q_j^\varepsilon}]\Phi = \left[e^{\frac{i}{\varepsilon}\langle \cdot, \boldsymbol{\xi}_j \rangle} \right] \Pi_\varepsilon \left[e^{-\frac{i}{\varepsilon}\langle \cdot, \boldsymbol{\xi}_j \rangle} \right], \qquad (3.52)
$$

$$
[\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2} b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)}]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] = \varepsilon[\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \qquad (3.53)
$$

$$
[\varphi_j^\varepsilon]\Phi^* \Big[\frac{t}{\varepsilon^2} d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) \chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2} b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)} \Big] \Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] = \varepsilon t [\psi_j^\varepsilon]\Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]. \qquad (3.54)
$$

Напомним, что $\Pi_\varepsilon = \Phi^*[\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}]\Phi$, где $\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega} = (-\varepsilon^{-1}\pi, \varepsilon^{-1}\pi)^d$. Нам также понадобится следующее тождество, вытекающее из (2.28):

$$
\begin{aligned}
&[\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \left([\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] \right)^* = \\
&\qquad = [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \Big([\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] \Big)^* \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Из оценки (3.47) и соотношений (3.46), (3.48)–(3.55) вытекает искомый результат (2.41). □

Доказательство теоремы 2.8. Теорема 2.8 вытекает из теоремы 2.7 и следующих соотношений

$$
\begin{aligned}
\big\| \varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t) - \varepsilon\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t) \big\| &\leqslant \sum_{k=1}^d \varepsilon \big\| [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon] \,\mathrm{D}_k\, e^{-tb_j(\mathbf{D})}(I - \Pi_\varepsilon)[\overline{\psi_j^\varepsilon}] \big\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^d \big\| \widehat{\psi}_{jk} \big\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big| \xi^k \big| e^{-tb_j(\boldsymbol{\xi})} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^d \big\| \widehat{\psi}_{jk} \big\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big| \xi^k \big| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}_j}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}}, \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\big\| \varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t) - \varepsilon\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t) \big\| &= t\varepsilon \big\| [\psi_j^\varepsilon] d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})}(I - \Pi_\varepsilon)[\overline{\psi_j^\varepsilon}] \big\| \leqslant \\
&\leqslant \|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big| d_j(\boldsymbol{\xi}) \big| e^{-tb_j(\boldsymbol{\xi})} \leqslant \\
&\leqslant \widetilde{C} \|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widetilde{C}_j}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}}. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Для доказательства оценки (3.56) мы оценили величину

$$\varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \left|\xi^k\right| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} = \max_{\boldsymbol{\eta} \notin \widetilde{\Omega}} \left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2}, \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon^2},$$

следующим образом. При $0 < \tau \leqslant 1$ использовали элементарную оценку $\left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant C\tau^{-1/2}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$. При $\tau > 1$ применили соотношения

$$\max_{\boldsymbol{\eta} \notin \widetilde{\Omega}} \left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant e^{-\frac{c_j}{2}\pi^2\tau} \max_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d} \left|\eta^k\right| e^{-\frac{c_j}{2}|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant \frac{C}{\tau}, \quad \tau > 1.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \left|\xi^k\right| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}}.$$

Аналогичным образом проверяется оценка

$$\varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi} \notin \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}},$$

которую мы использовали для доказательства неравенства (3.57). $\square$

Доказательство замечания 2.6. Получим искомую оценку для $\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j(\varepsilon, t)\right\|$. С одной стороны, выполнены неравенства

$$\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \varepsilon \left\|[\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}]\, \mathrm{D}_k\, \Pi_\varepsilon e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{d} \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \in \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2c_j te}} \sum_{k=1}^{d} \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty,$$

$$\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t)\right\| = \varepsilon t \left\|[\psi_j^{\varepsilon}] d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})} \Pi_\varepsilon [\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\right\| \leqslant \widetilde{C} \|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi} \in \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{3^{\frac{3}{2}} \widetilde{C} \varepsilon \|\psi_j\|_\infty^2}{(2c_j e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}}.$$

С другой стороны, нормы равномерны ограничены:

$$\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \varepsilon \left\|[\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}]\, \mathrm{D}_k\, \Pi_\varepsilon e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{d} \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi} \in \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\xi^k| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \pi \sum_{k=1}^{d} \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty,$$

$$\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t)\right\| = \varepsilon t \left\|[\psi_j^{\varepsilon}] d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})} \Pi_\varepsilon [\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C} \|\psi_j\|_\infty^2 t \max_{\boldsymbol{\xi} \in \varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} (\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|) \left(|\boldsymbol{\xi}|^2 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2}\right) \leqslant \frac{\pi\sqrt{d}\widetilde{C} \|\psi_j\|_\infty^2}{c_j e}.$$

Отсюда вытекает утверждение замечания 2.6 для $\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon,t)\|$. Для $\|\varepsilon\Gamma(\varepsilon,t)\|$ нужная оценка из замечания 2.6, в свою очередь, следует из соотношений

$$\begin{aligned}\|\varepsilon\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon,t)\|\leqslant \sum_{k=1}^{d}\varepsilon\|[\widehat{\psi}^{\varepsilon}_{jk}]\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi^{\varepsilon}_j}]\|\leqslant\\ \leqslant \sum_{k=1}^{d}\|\widehat{\psi}_{jk}\|_{\infty}\|\psi_j\|_{\infty}\varepsilon\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{2c_jte}}\sum_{k=1}^{d}\|\widehat{\psi}_{jk}\|_{\infty}\|\psi_j\|_{\infty},\end{aligned}$$

$$\|\varepsilon\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon,t)\|=\varepsilon t\|[\psi^{\varepsilon}_j]d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi^{\varepsilon}_j}]\|\leqslant\widetilde{C}\|\psi_j\|^2_{\infty}\varepsilon t\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^3e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2}\leqslant\frac{3^{\frac{3}{2}}\widetilde{C}\varepsilon\|\psi_j\|^2_{\infty}}{(2c_je)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}.$$

$\square$

4. Усреднение решений задачи Коши

Применим полученные результаты к вопросу о поведении решения $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ задачи Коши

$$\begin{aligned}&\partial_t v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=-(A_\varepsilon v_\varepsilon)(\boldsymbol{x},t)+e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}F_\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\ \ t\in(0,T),\\ &v_\varepsilon(\boldsymbol{x},0)=f_\varepsilon(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $0<T\leqslant\infty$ и

$$\begin{aligned}&f_\varepsilon=E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty)f,\quad f\in L_2(\mathbb{R}^d),\\ &F_\varepsilon(\cdot,t)=E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty)F(\cdot,t),\quad F\in L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))\ \text{при}\ t\in(0,T),\end{aligned}\tag{4.2}$$

при некотором $p\in[1,\infty]$. Здесь λ_+ — фиксированный правый край лакуны в спектре оператора A. Решение представляется в виде

$$v_\varepsilon(\cdot,t)=e^{-A_\varepsilon t}f_\varepsilon+\int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-s)}e^{-\frac{s}{\varepsilon^2}\lambda_+}F_\varepsilon(\cdot,s)\,ds.\tag{4.3}$$

Удобно приближать не само решение $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$, а произведение $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$.

4.1. Приближение решения в старшем порядке

Используя теорему 2.5, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть* (λ_-,λ_+) *— внутренняя лакуна в спектре оператора* A, *удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ *— решение задачи Коши* (4.1), *где* $0<T\leqslant\infty$, $f_\varepsilon,F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2), *причем* $1<p\leqslant\infty$. *Пусть* $w^{(0)}_{j\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ *— решение задачи Коши*

$$\begin{aligned}&\partial_t w^{(0)}_{j\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)=-b_j(\mathbf{D})w^{(0)}_{j\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)+\overline{\psi^{\varepsilon}_j(\boldsymbol{x})}F(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\ \ t\in(0,T),\\ &w^{(0)}_{j\varepsilon}(\boldsymbol{x},0)=\overline{\psi^{\varepsilon}_j(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь b_j — *квадратичная форма из разложения* (2.16), *т. е.* $b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g_j^0 \mathbf{D}$; $\psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j\rangle)\varphi_j(\boldsymbol{x})$, *где* φ_j — *нормированное* $\mathbb{Z}^d$*–периодическое решение уравнения* (2.22). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - \sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot,t)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon\rho(p;t,\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.5)$$

Здесь

$$\rho(p;t,\varepsilon) := \begin{cases} c_p \varepsilon^{1-2/p}, & 1 < p < 2, \\ \left(\ln\left(1+\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)^{1/2}, & p = 2, \\ c_p t^{1/2-1/p}, & 2 < p \leqslant \infty, \end{cases}$$

а c_p — *постоянная, зависящая только от* p.

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.34), получаем неравенство

$$\Big\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - \sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot,t)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{t-s+\varepsilon^2}}\,ds\right).$$

Из оценки второго слагаемого в скобках, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.1] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.5). $\square$

Заметим, что при фиксированном $t > 0$ коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.5) имеет порядок $O(\varepsilon)$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$ при $2 < p \leqslant \infty$, $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})$ при $p = 2$, а при $1 < p < 2$ его порядок $O(\varepsilon^{2-2/p})$ зависит от p.

Теорема 2.5 также позволяет получить приближение по норме в пространстве $L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$, где $0 < T < \infty$, для функции $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon$.

Теорема 4.2. *Пусть* (λ_-, λ_+) — *внутренняя лакуна в спектре оператора* A, *удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ — *решение задачи Коши* (4.1), *где* $0 < T < \infty$, $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2), *причем* $F \in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$ *при* $1 \leqslant p < \infty$. *Пусть* $\psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j\rangle)\varphi_j(\boldsymbol{x})$, *где* φ_j — *нормированное* $\mathbb{Z}^d$*–периодическое решение уравнения* (2.22), *а* $w_{j\varepsilon}^{(0)}$ — *решение задачи Коши* (4.4). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\| [e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}] v_\varepsilon - \sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\Upsilon(p;T,\varepsilon)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + CT^{1/2}\varepsilon\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\Upsilon(p;T,\varepsilon) := \begin{cases} c_p T^{1/p-1/2}, & 1 \leqslant p < 2, \\ (\ln(1+T/\varepsilon^2))^{1/2}, & p = 2, \\ c_p \varepsilon^{2/p-1}, & 2 < p < \infty, \end{cases}$$

а c_p — *постоянная, зависящая только от* p.

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.34), получаем неравенство

$$\Big\| [e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}] v_\varepsilon - \sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon(\mathcal{I}_p(T))^{1/p}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon(\mathcal{L}_p(T;F))^{1/p}, \quad (4.7)$$

где

$$\mathcal{I}_p(T) := \int\limits_0^T \frac{dt}{(t+\varepsilon^2)^{p/2}}, \quad \mathcal{L}_p(T;F) := \int\limits_0^T dt \left(\int\limits_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{t-s+\varepsilon^2}}\, ds \right)^p.$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.2] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$(\mathcal{I}_p(T))^{1/p} \leqslant \Upsilon(p;T,\varepsilon), \quad (\mathcal{L}_p(T;F))^{1/p} \leqslant 2T^{1/2}\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.7), (4.8) следует искомая оценка (4.6). □

Заметим, что коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ в правой части (4.6) имеет порядок $O(\varepsilon)$; коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ есть $O(\varepsilon)$ при $1 \leqslant p < 2$, $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})$ при $p = 2$, а при $2 < p < \infty$ его порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ зависит от p.

4.2. Приближение решения с корректором

Получим более точное приближение к решению задачи (4.1). Определим $w^{(1)}_{jk\varepsilon}(\boldsymbol{x},t)$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\partial_t w^{(1)}_{jk\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) = -b_j(\mathbf{D}) w^{(1)}_{jk\varepsilon}(\boldsymbol{x},t) + \overline{\widehat{\psi}^{\varepsilon}_{jk}(\boldsymbol{x})} F(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0,T), \\ &w^{(1)}_{jk\varepsilon}(\boldsymbol{x},0) = \overline{\widehat{\psi}^{\varepsilon}_{jk}(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь b_j — квадратичная форма из разложения (2.16), т. е. $b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g^0_j \mathbf{D}$; $\widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) = \exp(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle)\widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x})$, где $\widehat{\varphi}_{jk}$ — $\mathbb{Z}^d$–периодическое решение уравнения (2.24), удовлетворяющее условию ортогональности (2.25).

Используя теорему 2.8, приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *причем* $2 < p \leqslant \infty$. *Положим*

$$V_\varepsilon(\cdot,t) = \sum_{j=1}^m \Bigg(\psi^\varepsilon_j w^{(0)}_{j\varepsilon}(\cdot,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^d \widehat{\psi}^\varepsilon_{jk}\, \mathrm{D}_k\, w^{(0)}_{j\varepsilon}(\cdot,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^d \psi^\varepsilon_j\, \mathrm{D}_k\, w^{(1)}_{jk\varepsilon}(\cdot,t) - \varepsilon t \psi^\varepsilon_j d_j(\mathbf{D}) w^{(0)}_{j\varepsilon}(\cdot,t) \Bigg), \tag{4.10}$$

где $w^{(0)}_{j\varepsilon}$ *и* $w^{(1)}_{jk\varepsilon}$ *— решения задач Коши* (4.4) *и* (4.9), *соответственно, а* d_j *— кубическая форма из разложения* (2.16). *Тогда при* $t \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - V_\varepsilon(\cdot,t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon\sqrt{t}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2 \kappa(p;t,\varepsilon) \|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{4.11}$$

Здесь

$$\kappa(p;t,\varepsilon) = \begin{cases} c_p \varepsilon^{-2/p}, & 2 < p < \infty, \\ \ln\big(1 + \frac{\sqrt{t}}{\varepsilon}\big), & p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.42), получаем неравенство

$$\left\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - V_\varepsilon(\cdot,t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2 \left(\frac{1}{t+\varepsilon\sqrt{t}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int\limits_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon\sqrt{t-s}}\, ds \right).$$

Из оценки второго слагаемого, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.3] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.11). $\square$

Замечание 4.4. 1°. *При $f \neq 0$ оценка (4.11) содержательна, если $\frac{\varepsilon^2}{t}$ мало, тогда коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$ имеет порядок $O(\frac{\varepsilon^2}{t})$.*
2°. *Коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ в оценке (4.11) зависит от p: при $2 < p < \infty$ этот коэффициент есть $O(\varepsilon^{2-2/p})$, а в случае $p = \infty$ этот коэффициент имеет порядок $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при фиксированном t.*

Применение теоремы 2.7 позволяет снять ограничение $p > 2$ (за счет включения сглаживающего оператора Π_ε в корректор).

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1, причем $1 < p \leqslant \infty$. Положим*

$$\widetilde{V}_\varepsilon(\cdot,t) = \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{d} \widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon \Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{d} \psi_j^\varepsilon \Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\cdot,t) - \\ - \varepsilon t \psi_j^\varepsilon \Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D}) w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot,t) \Bigg), \quad (4.12)$$

где $w_{j\varepsilon}^{(0)}$ и $w_{jk\varepsilon}^{(1)}$ — решения задач Коши (4.4) и (4.9), соответственно, а d_j — кубическая форма из разложения (2.16). Тогда при $t \in (0,T)$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{V}_\varepsilon(\cdot,t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2 \widetilde{\kappa}(p;t,\varepsilon) \|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.13)$$

Здесь

$$\widetilde{\kappa}(p;t,\varepsilon) = \begin{cases} c_p \varepsilon^{-2/p}, & 1 < p < \infty, \\ \ln\big(1 + \frac{t}{\varepsilon^2}\big), & p = \infty, \end{cases}$$

а c_p — постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.41), получаем неравенство

$$\left\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{V}_\varepsilon(\cdot,t) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2 \left(\frac{1}{t+\varepsilon^2} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon^2}\, ds \right).$$

Из оценки второго слагаемого, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.4] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.13). $\square$

Заметим, что при фиксированном $t > 0$ коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.13) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^{2-2/p})$ при $1 < p < \infty$ и $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $p = \infty$.

Получим теперь аппроксимацию с корректором функции $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon$ в классе $L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$, где $0 < T < \infty$. Сначала воспользуемся теоремой 2.8.

Теорема 4.6. *Пусть (λ_-,λ_+) — внутренняя лакуна в спектре оператора A, удовлетворяющая условию (2.14). Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие 2.2. Пусть $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ — решение задачи Коши (4.1), где $0 < T < \infty$, $f_\varepsilon, F_\varepsilon$*

удовлетворяют условиям (4.2), *причем* $F \in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$ *при* $1 \leqslant p < 2$. *Пусть функция* $V_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ *определена в* (4.10). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - V_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2\vartheta(p;T,\varepsilon)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + C\varepsilon^2\ln(1+\sqrt{T}/\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.14)$$

Здесь

$$\vartheta(p;T,\varepsilon) = \begin{cases} c_p\varepsilon^{2/p-2}, & 1<p<2, \\ \ln\big(1+\frac{\sqrt{T}}{\varepsilon}\big), & p=1. \end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.42), получаем неравенство

$$\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - V_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2(\mathcal{J}_p(T))^{1/p}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2(\mathcal{M}_p(T;F))^{1/p}, \quad (4.15)$$

где

$$\mathcal{J}_p(T) := \int_0^T \frac{dt}{(t+\varepsilon\sqrt{t})^p}, \quad \mathcal{M}_p(T;F) := \int_0^T dt\, \left(\int_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon\sqrt{t-s}}\, ds \right)^p.$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.5] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$(\mathcal{J}_p(T))^{1/p} \leqslant \vartheta(p;T,\varepsilon), \quad (\mathcal{M}_p(T;F))^{1/p} \leqslant 2\ln(1+\sqrt{T}/\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.16)$$

Из соотношений (4.15), (4.16) следует искомая оценка (4.14). $\square$

Заметим, что коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.14) имеет порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ при $1<p<2$ и $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $p=1$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$.

Применение теоремы 2.7 позволяет снять ограничение $p<2$ (за счет включения сглаживающего оператора Π_ε в корректор).

Теорема 4.7. *Пусть* (λ_-,λ_+) — *внутренняя лакуна в спектре оператора* A, *удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ — *решение задачи Коши* (4.1), *где* $0<T<\infty$, $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2), *причем* $F \in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$ *при* $1 \leqslant p < \infty$. *Пусть функция* $\widetilde{V}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ *определена в* (4.12). *Тогда при* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - \widetilde{V}_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2\widetilde{\vartheta}(p;T,\varepsilon)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + C\varepsilon^2\ln(1+T/\varepsilon^2)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.17)$$

Здесь

$$\widetilde{\vartheta}(p;T,\varepsilon) = \begin{cases} c_p\varepsilon^{2/p-2}, & 1<p<\infty, \\ \ln\big(1+\frac{T}{\varepsilon^2}\big), & p=1. \end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.41), получаем неравенство

$$\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - \widetilde{V}_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2(\widetilde{\mathcal{J}}_p(T))^{1/p}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2(\widetilde{\mathcal{M}}_p(T;F))^{1/p}, \quad (4.18)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}}_p(T) := \int_0^T \frac{dt}{(t+\varepsilon^2)^p}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_p(T;F) := \int_0^T dt \left(\int_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon^2}\, ds \right)^p .$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.6] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$(\widetilde{\mathcal{J}}_p(T))^{1/p} \leqslant \widetilde{\vartheta}(p;T,\varepsilon), \quad (\widetilde{\mathcal{M}}_p(T;F))^{1/p} \leqslant \ln(1+T/\varepsilon^2)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{4.19}$$

Из соотношений (4.18), (4.19) следует искомая оценка (4.17). $\square$

Заметим, что коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.17) имеет порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ при $1 < p < \infty$ и $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $p = 1$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$.

5. Заключение

- Теоремы 2.5, 2.7 и 2.8 показывают, что с краями внутренних лакун периодического оператора можно связывать задачи об усреднении параболических уравнений с периодическими коэффициентами.

- На левом краю спектра основные результаты согласуются с результатами работ [11, 12, 13]. При $d = 1$ результаты работы согласуются с результатами статьи [20].

- Далее планируются работы на другую тему: получить приближение для резольвенты периодического эллиптического дифференциального оператора вблизи края внутренней лакуны в энергетической норме, то есть по операторной норме из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. В одномерном случае задача уже решена и результаты опубликованы в работе [26].

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[5] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, In: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[8] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.

[9] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), №4, 515–524.

[10] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи матем. наук. **71** (2016), № 3, 27–122.

[11] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[12] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. **220** (2007), №2, 201–233.

[13] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.

[14] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), №4, 390–447.

[15] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), №2, 224–237.

[16] Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 4, 61–71.

[17] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Записки научных семинаров ПОМИ **318** (2004), 60–74.

[18] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.

[19] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.

[20] Akhmatova A. R., Aksenova E. S., Sloushch V. A., Suslina T. A., *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*, Complex Variables and Elliptic Equations **67** (2022), №3, 523–555.

[21] Мишулович А. А., *Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю лакуны: операторные оценки при учете корректора*, Записки научных семинаров ПОМИ **516** (2022), 135–176.

[22] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, In: Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8. Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.

[23] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шрёдингера. II. Нерегулярные возмущения*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 6, 62–89.

[24] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3—122.

[25] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[26] Мишулович А. А., Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме*, Записки научных семинаров ПОМИ **519** (2022), 114–151.